

ДВИГАТЕЛИ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

УДК 532.526: 536.244

© В.М. КРАЕВ, Д.С. ЯНЫШЕВ, 2009

О РАСЧЁТЕ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА В СЛУЧАЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ ЭУ ЛА

Вячеслав Михайлович КРАЕВ родился в 1970 г. в городе Красноярске. Доцент МАИ. Доктор технических наук. Основные научные интересы — в области нестационарных турбулентных течений. Автор более 50 научных работ. Email: kraevvm@mail.ru

Vyacheslav M. KRAYEV, D.Sci., was born in 1970 in Krasnoyarsk. He is an Associate Professor at the MAI. His research interests are in unsteady turbulent flows. He has published more than 50 technical papers. Email: kraevvm@mail.ru

Дмитрий Сергеевич ЯНЫШЕВ родился в 1987 г. в городе Москве. Студент МАИ. Основные научные интересы — в области нестационарных турбулентных течений. Email: dyanishev@list.ru

Dmitry S. YANYSHEV, was born in 1987 in Moscow. He is a Student at the MAI. His research interests are in continuum mechanics, heat and mass transfer theory, turbulence, mathematical modeling. He has published 5 technical papers. Email: dyanishev@list.ru

Приведены основные подходы к моделированию гидродинамически нестационарных течений в каналах и анализ некоторых полученных на сегодняшний день результатов. Найдена оптимальная с точки гидродинамического сопротивления форма кривой ускорения потока. Дано аналитическое решение уравнения Прандтля для коэффициента трения. Представлены результаты проведённых расчётов турбулентного течения в круглой трубе с использованием современных подходов к моделированию турбулентности.

A survey is presented for current status of hydrodynamically unsteady turbulent flow modeling in channels as well as some results obtained to date. The hydrodynamically optimal shape of flow acceleration curve is derived. An analytical solution is obtained for the Prandtl friction ratio equation. Numerical simulation results are provided for turbulent flow in a circular pipe using modern turbulence simulation techniques.

Ключевые слова: турбулентность, нестационарные течения, математическое моделирование.

Key words: turbulence; unsteady flow; mathematical modeling.

1. Введение

Расчеты нестационарных тепловых и гидродинамических процессов становятся в ряд определяющих при разработке новых образцов техники в различных областях — в двигателестроении, авиа-

ции и космонавтике, энергетике, судостроении, криогенной технике, химической технологии и т. д.

Экспериментальные и теоретические исследования показывают существенное отличие коэффициентов теплоотдачи и гидродинамического сопротив-

ления в нестационарных условиях от данных квазистационарного расчёта. Оно может достигать трех-четырёхкратного значения. Под квазистационарным расчётом здесь и далее будем понимать расчёт с использованием эмпирических зависимостей, полученных для стационарных условий.

2. Экспериментальные данные

В настоящее время накоплены значительные экспериментальные данные по нестационарным турбулентным течениям в каналах. Данные Э.К. Калинина и др. [1], С.Б. Маркова [2], Г.А. Дрейцера и В.М. Краева [3] показали, что при ускорении течения профиль скорости становится более заполненным у стенки и менее заполненным у оси. При замедлении течения наблюдается обратная картина. Качественно это показано на рис. 1.

Профиль турбулентной вязкости при ускорении и замедлении изменяется так, как показано на рис. 2.

Экспериментально авторами [3] было установлено, что замедление потока приводит к увеличению по сравнению с квазистационарными значениями коэффициента трения (гидродинамического сопротивления) ξ и числа Nu. Замедление течения приводит к противоположному результату.

Экспериментальный участок в [3] представлял собой круглую трубу длиной 3 м и диаметром 42,8 мм. Ускорение и замедление потока производилось путём уменьшения и увеличения расхода воздуха, подаваемого в трубу.

В качестве основного критерия, характеризующего нестационарность течения в [3], был принят

$$K_g^* = \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial \tau} \sqrt{\frac{d}{g}}, \quad (1)$$

где G — расход; τ — время; d — диаметр трубы; g — ускорение свободного падения.

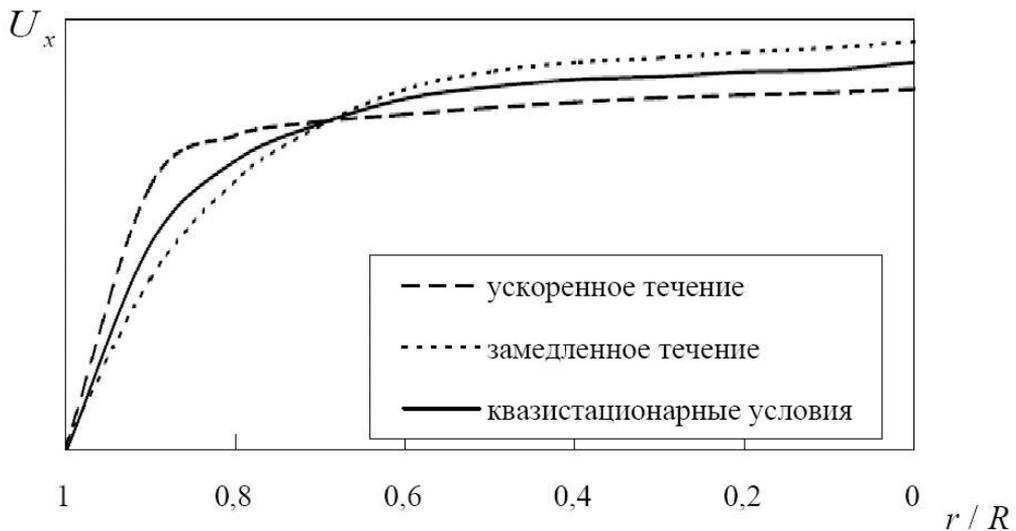


Рис. 1. Качественное изменение профиля скорости при ускорении и замедлении потока в трубе по данным [1]

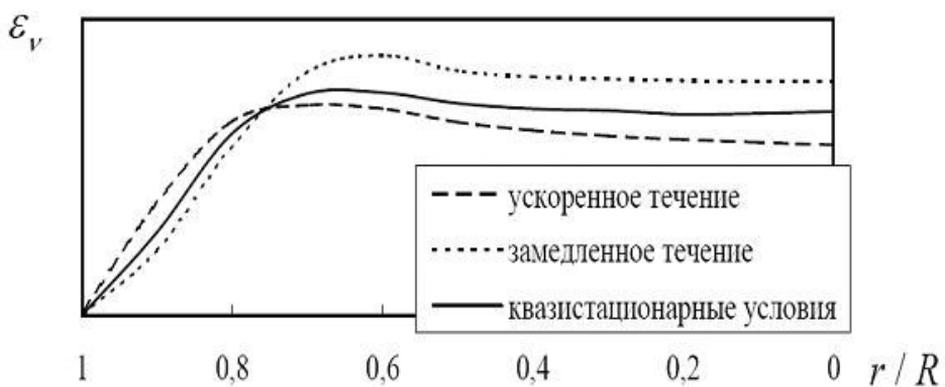


Рис. 2. Качественное изменение профиля турбулентной вязкости при ускорении и замедлении потока в трубе по данным [1]

В качестве временного параметра был выбран приведённый критерий гомохронности Ho :

$$\overline{Ho} = \frac{Ho}{Ho_0}, \quad (2)$$

где $Ho = \overline{U}\tau/d$ соответствует текущему времени процесса; Ho_0 соответствует общему времени процесса.

Экспериментальные данные по изменению коэффициента трения ξ и числа Nu для различных значений K_g^* представлены на рис. 3—6.

Также авторами [3] было установлено, что повышение числа Рейнольдса снижает влияние ускорения или замедления потока на интегральные ха-

рактеристики течения. Поэтому при достаточно больших числах Рейнольдса влиянием нестационарности на течение можно пренебречь.

К недостатку критерия (2) можно отнести тот факт, что он никак не отражает формы кривой изменения расхода, что может вызвать неудобство при графическом сопоставлении различных данных. Более удобным, на наш взгляд, является нормирование временного параметра на время, в которое критерий (1) достигает своего максимального значения:

$$\Xi = \frac{\tau}{\tau_{Kg_max}}. \quad (3)$$

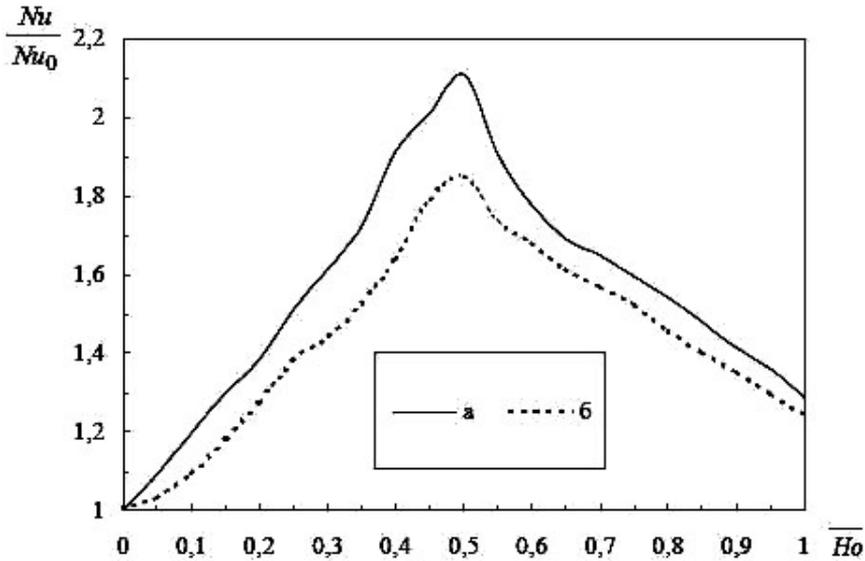


Рис. 3. Влияние ускорения течения на теплообмен ($Re = 3100 \div 9300$, $T_w/T_f = 1,18$):

$$a - K_{g_max}^* = 0,111; \quad b - K_{g_max}^* = 0,088$$

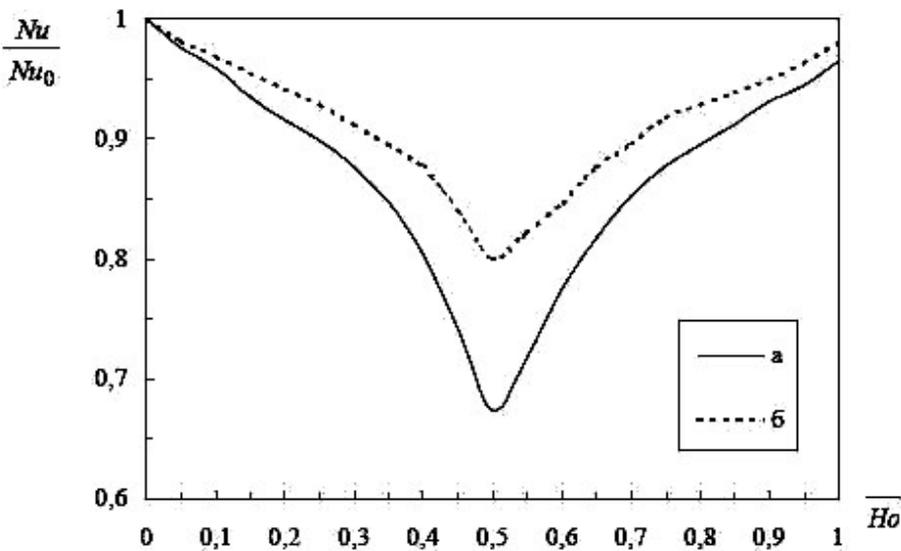


Рис. 4. Влияние замедления течения на теплообмен ($Re = 3100 \div 9300$, $T_w/T_f = 1,18$):

$$a - K_{g_min}^* = -0,111; \quad b - K_{g_min}^* = -0,044$$

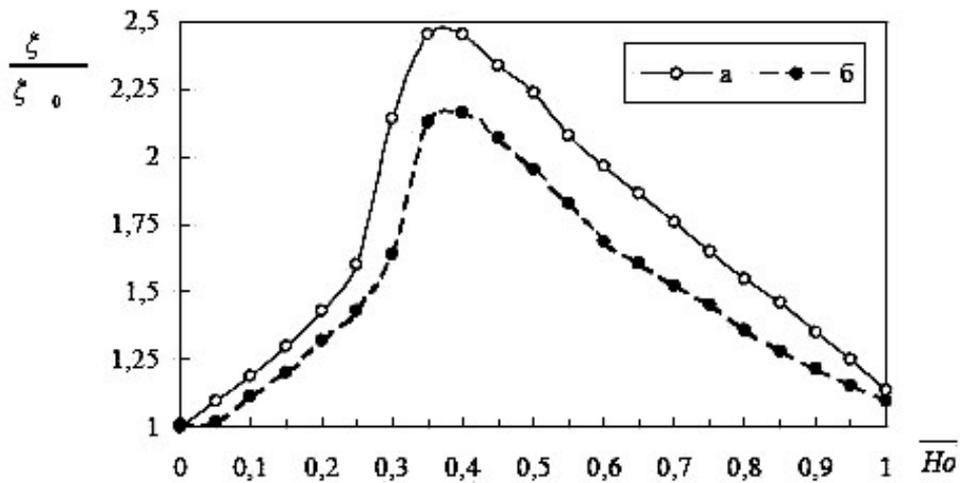


Рис. 5. Влияние ускорения течения на коэффициент трения ($Re = 3100 \div 9300, T_w/T_f = 1$):
 а — $K_{g \max}^* = 0,111$; б — $K_{g \max}^* = 0,088$

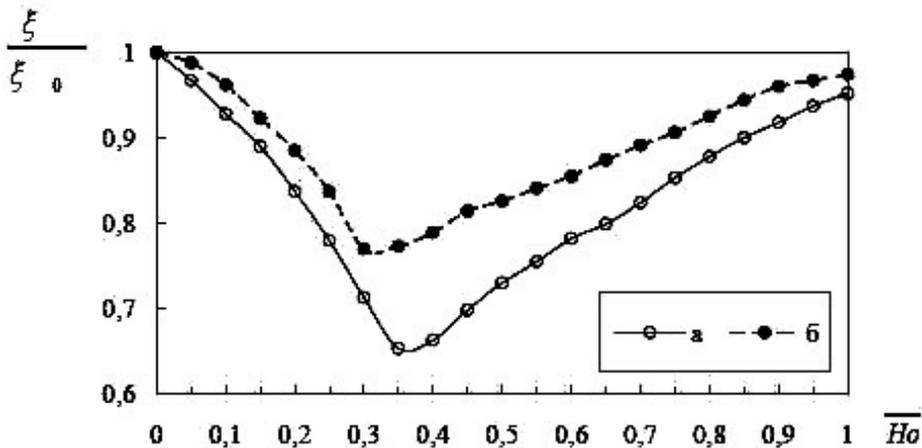


Рис. 6. Влияние замедления течения на коэффициент трения ($Re = 3100 \div 9300, T_w/T_f = 1$):
 а — $K_{g \min}^* = -0,111$; б — $K_{g \min}^* = -0,044$

Именно этим параметром мы будем пользоваться при сравнении экспериментальных данных с расчётными.

3. Оптимизация кривой изменения расхода во времени

Из анализа экспериментальных данных видно, что гидравлическое сопротивление при ускорении потока тем больше, чем больше критерий гидродинамической нестационарности. Отсюда вытекает задача о нахождении оптимальной кривой изменения расхода с G_1 до G_2 за время τ_0 . Решить такую задачу можно, минимизировав среднее квадратичное значение критерия гидродинамической нестационарности K_g^* :

$$\frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} (K_g^*)^2 d\tau. \quad (4)$$

Эта задача представляет собой классическую задачу минимизации функционала. После её решения и подстановки соответствующих граничных условий можно получить следующее выражение для кривой расхода:

$$G_{\text{опт}}(\tau) = G_1 \cdot \left(\frac{G_2}{G_1} \right)^{\frac{\tau}{\tau_0}}. \quad (5)$$

С учетом условий Лежандра [4] найденная функция расхода отвечает минимуму среднее квадратичного значения критерия нестационарности. Таким образом, ускорение течения по данной кривой расхода является оптимальным с точки зрения гидравлических потерь.

Характерная особенность этой кривой заключается в том, что критерий гидродинамической не-

стационарности во время ускорения/замедления течения остаётся постоянным:

$$K_{g_opt}^* = \frac{\ln\left(\frac{G_1}{G_2}\right)}{\tau_0}. \quad (6)$$

На рис. 7 и 8 приведено сравнение полученной оптимизированной кривой расхода с синусоидальным законом увеличения расхода.

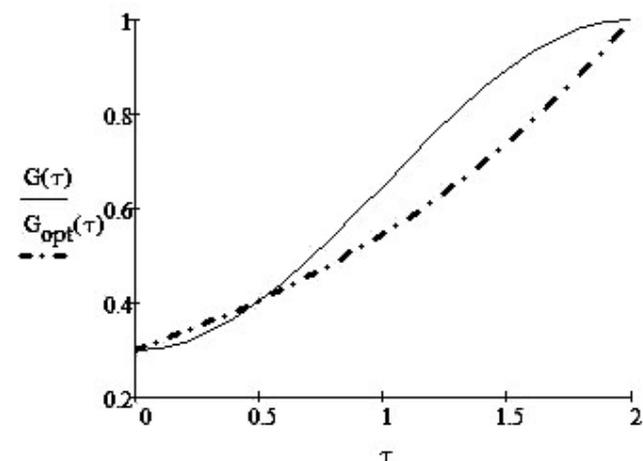


Рис. 7. Кривая расхода $G_{opt}(\tau)$ в сравнении с синусоидальным законом увеличения расхода $G(\tau)$

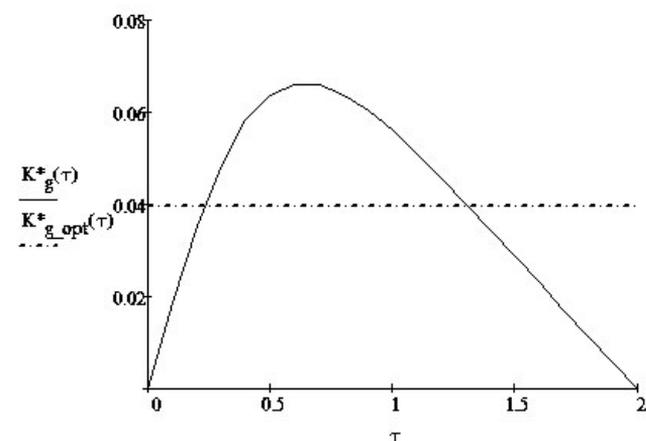


Рис. 8. Критерий гидродинамической нестационарности в случаях кривой расхода $G_{opt}(\tau)$ в сравнении с критерием нестационарности в случае синусоидального закона увеличения расхода $G(\tau)$

4. Одномерные расчёты

Здесь мы рассмотрим вопросы моделирования нестационарных процессов при турбулентном течении в каналах в случае изменения во времени массового расхода.

При одномерном способе описании течения используют понятие среднерасходной скорости:

$$w = \frac{G}{\rho F}, \quad (7)$$

где ρ — плотность; F — площадь поперечного сечения канала.

При этом система уравнений течения жидкости в каналах с теплообменом запишется как

$$F \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{G}{w} \frac{\partial w}{\partial \tau} + G \frac{\partial w}{\partial x} = F \left(\rho R_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \xi \frac{\rho w^2}{d} \right); \quad (9)$$

$$\frac{G c_p}{w} \frac{\partial T_f}{\partial \tau} + G c_p \frac{\partial T_f}{\partial x} = \pi \text{Nu} \lambda (T_w - T_f). \quad (10)$$

Здесь R_x — проекция массовой силы на ось канала; c_p — теплоёмкость при постоянном давлении; λ — теплопроводность; T — температура; индекс « f » обозначает поток; индекс « w » — стенку канала.

При этом ξ и Nu вычисляются по эмпирическим зависимостям (приведённым, например, в [3]).

Этот подход хорош своей простотой, однако полученные на сегодняшний день экспериментальные данные оказываются недостаточными для расчёта многих режимов течения. В частности, для течений в условиях гидродинамической нестационарности пока что существует очень мало данных о степени влияния на течение температурного фактора (T_w/T_p).

Для предварительных расчётов при известной зависимости расхода от времени можно воспользоваться следующей упрощённой формулой:

$$\xi = \xi_0 + 2\rho d_{eq} F \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{G(\tau)} \right). \quad (11)$$

Здесь ξ_0 — коэффициент трения, рассчитанный по квазистационарной зависимости; d_{eq} — эквивалентный гидравлический диаметр.

Эта формула может быть легко получена из (9) в предположении стабилизации течения, отсутствия массовых сил и квазистационарном распределении давления по каналу. Вопросы, связанные с влиянием изменения расхода на турбулентную структуру, в данном случае не рассматриваются.

Зная зависимость для коэффициента трения, можно получить зависимость для числа Нуссельта, исходя из предположения, что турбулентное число Прандтля Pr_T равно 1. Для круглых труб эта зависимость выглядит следующим образом [5]:

$$Nu = \frac{Re \cdot Pr}{\frac{8}{\xi} + 5 \left[(Pr-1) + \ln \left(1 + \frac{5}{6} (Pr-1) \right) \right] \cdot \sqrt{\frac{8}{\xi}}} \quad (12)$$

Хотя предложенная методика является достаточно грубой, она согласуется с опытом на качественном уровне (хотя и несколько завышает по сравнению с опытом величины коэффициента трения и числа Нуссельта). При этом из формулы (11) отчётливо видно, что при больших числах Рейнольдса влияние нестационарности на гидравлическое сопротивление канала (а следовательно, и на теплообмен) снижается (что было найдено авторами [3] опытным путём).

5. Аналитическое выражение для коэффициента трения

Известно, что в случае стационарного турбулентного течения в трубе, исходя из универсального профиля скорости, можно получить следующее выражение для коэффициента трения [6, 7]:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 0,88 \ln(\sqrt{\xi} \cdot Re) + 0,8. \quad (13)$$

Впервые это уравнение было получено Л. Прандтлем в 1932 г.

Видно, что в обычных функциях явно выразить ξ нельзя, поэтому приходится использовать зависимости Блазиуса, Никурадзе и т.д., которые применимы только к своим достаточно узким диапазонам чисел Рейнольдса. При переходе из одного диапазона в другой ξ может терпеть разрыв первого рода. Таким образом, при решении системы (8)–(10) или расчёта по (11) в случае перехода из одного диапазона чисел Рейнольдса в другой функции скорости и температуры могут испытывать нефизичный скачок.

Избежать этого можно, если получить точное решение уравнения (13). Это можно сделать, используя предложенную в [8] функцию Ламберта $W(x)$.

Данная функция определяется как обратная функция к $f(w) = we^w$ для комплексных w . Для любого комплексного z она определяется функциональным уравнением [8, 9]:

$$z = W(z) \cdot e^{W(z)}. \quad (14)$$

W -функция Ламберта нашла широкое применение в математической физике (см., например, [9]).

Исходя из вышеизложенного, точное аналитическое выражение для (13) можно записать в виде

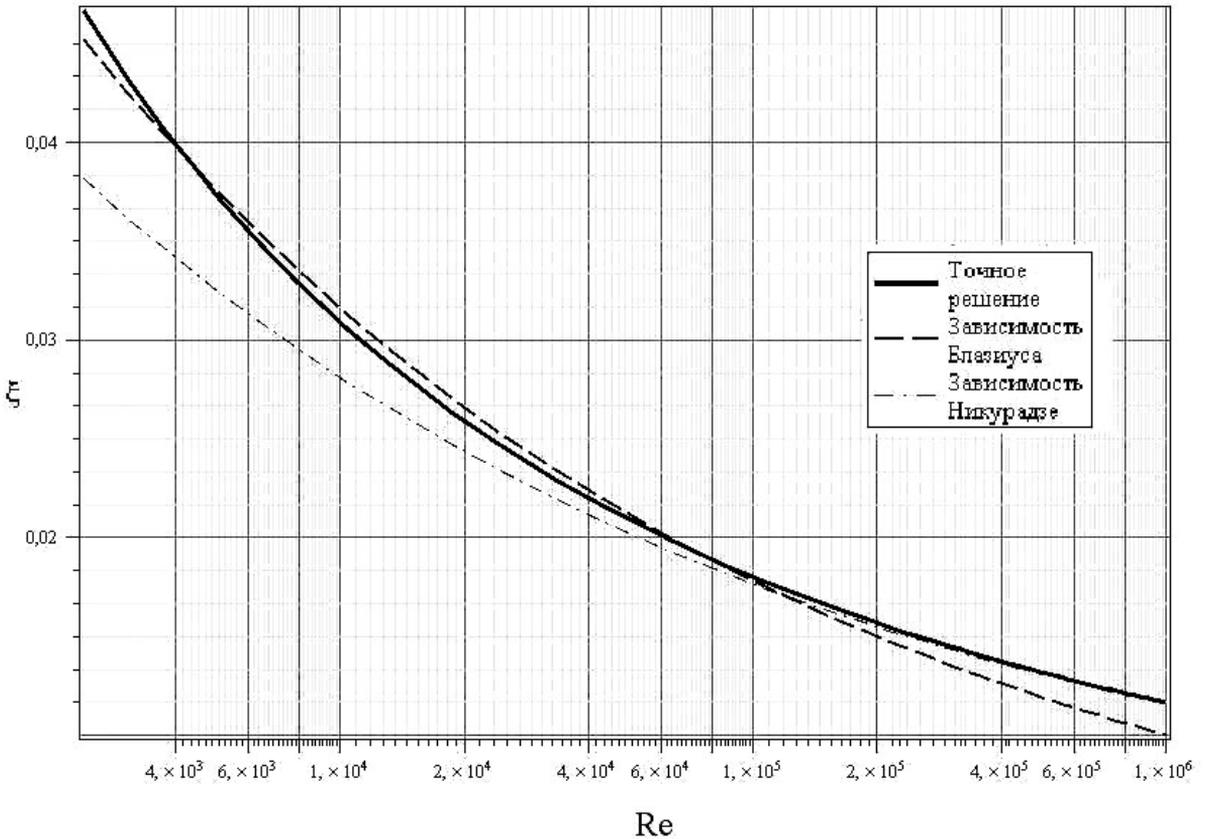


Рис. 9. Точное решение для (13) в сравнении с эмпирическими зависимостями

$$\xi = \left(\frac{1,15}{W(0,46 \cdot Re)} \right)^2. \quad (15)$$

На рис. 9 точное решение сравнивается с эмпирическими зависимостями.

Следует также отметить, что W -функция Ламберта присутствует во всех основных пакетах компьютерной алгебры (Matlab, Maple, Mathcad) и может быть достаточно легко запрограммирована с помощью рекуррентного соотношения [8, 9].

6. Многомерный расчёт

По причинам, упомянутым в разд. 4, часто возникает необходимость в расчёте с использованием многомерного подхода. При этом решается система уравнений Навье—Стокса.

Как известно, если поток турбулентный, решить эти уравнения напрямую (так называемое прямое численное моделирование, или DNS) достаточно сложно, и это требует больших вычислительных мощностей (хотя этот подход последнее время применяется всё чаще). Самым распространённым методом решения является применение осреднения по Рейнольдсу (в случае несжимаемого течения) или по Фавру (сжимаемое течение) [10, 11]. При этом для замыкания системы требуются дополнительные уравнения, так называемая модель турбулентности.

Авторами [12] применялась для расчётов модифицированная двухпараметрическая модель $k-\epsilon$. В работе [13] автор использовал для анализа турбулентного течения в трубе как двухпараметрическую модель, так и уравнения для вторых моментов флуктуаций скорости.

Результаты, приведенные в [12, 13], прямо противоположны результатам экспериментальных исследований. Согласно им увеличение во времени расхода газа ведёт к снижению по сравнению с квазистационарными коэффициента трения и теплоотдачи и наоборот. Скорее всего причиной этого является рассмотрение в данных работах лишь стабилизированного участка течения со стандартным профилем скорости по Карману в качестве граничного условия на входе. Автор [13] предположил возможность локальной деформации профиля скорости вблизи стенки вследствие конструктивных особенностей впускного устройства, обеспечивающего изменение расхода во времени. В свете этой гипотезы он продемонстрировал, что теории, представленные в [12, 13], могут приводить к результатам, сходным с результатами опытов.

Подход, использованный в [12, 13], когда течение полагается полностью стабилизированным, а в качестве граничного условия используется квази-

стационарный турбулентный профиль скорости, представляется не совсем корректным, как было показано в [1], профиль скорости при ускорении и замедлении потока существенно отличается от квазистационарного. При этом указанное в [13] возмущение профиля, названное там «искусственным», на самом деле оказывается вполне естественным. Профиль скорости деформируется ещё на начальном участке течения.

Расчёты, выполненные в авторами, проводились с учётом начального участка. При расчётах использовалась система уравнений Рейнольдса (здесь и далее мы пользуемся тензорной нотацией):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial (\bar{u}_i)}{\partial \tau} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} \right] = \\ = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_j u'_i} \right] + \rho X_i; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \rho c_p \overline{u'_j T'} \right] + q_v. \end{aligned} \quad (18)$$

Геометрия канала в расчётах соответствовала геометрии реальной, применявшейся в экспериментах [3] с трубой (диаметр 42,8 мм, длина — 3 м). На входе в канал в качестве граничного условия был установлен расход как функция от времени, на выходе — атмосферное давление. В качестве моделей турбулентности использовались стандартная $k-\epsilon$ -модель и двухслойная модель Ментера [14]. Задача решалась в двумерной постановке. Дискретизация уравнений (16)—(18) производилась на основе метода конечных объёмов. Использовалась сетка с ячейками прямоугольной формы 200×3000 , сетка сгущалась по направлению к стенке таким образом, что безразмерное расстояние от стенки y^+ пристеночного узла было меньше 1.

Применение модели $k-\epsilon$ не привело к удовлетворительным результатам — была получена квазистационарная картина. Возможно, дело в том, что стандартная $k-\epsilon$ -модель является моделью высокорейнольдсовского типа. Применение же модели Ментера позволило получить результаты, сходные с результатами экспериментов (рис. 10 и 11). Так-

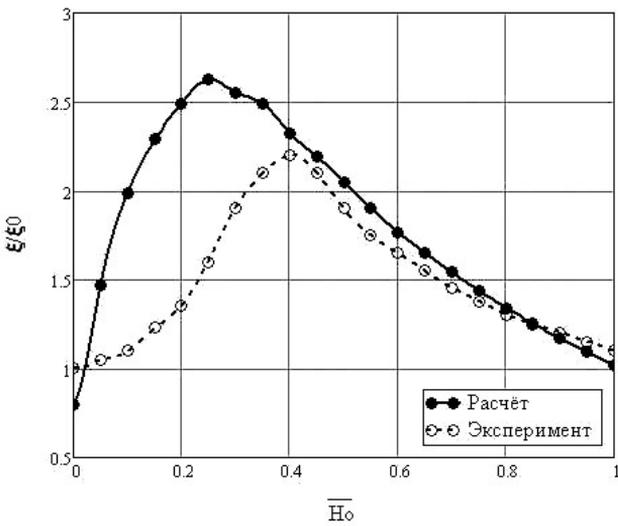


Рис. 10. Сравнение результатов расчёта с использованием модели Менгера влияния ускорения потока на коэффициент трения с экспериментальными данными [3]

в координатах $\xi/\xi_0 - \bar{N}_0$:

$$Re = 3100 \div 9300, T_w/T_f = 1, K_{g \max}^* = 0,088$$

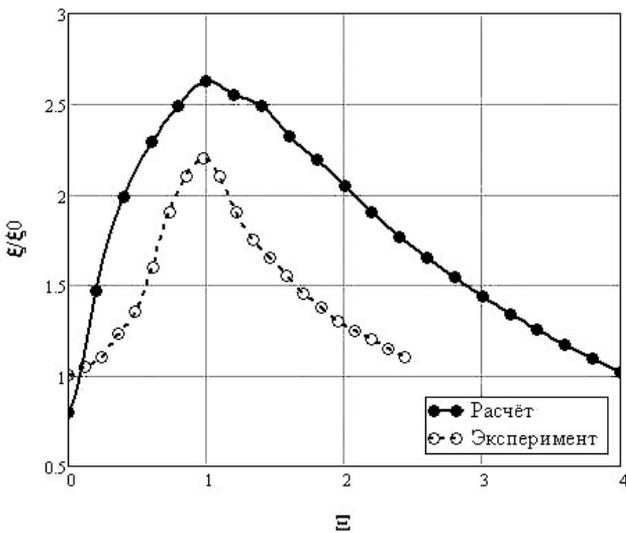


Рис. 11. Сравнение результатов расчёта с использованием модели Менгера влияния ускорения потока на коэффициент трения с экспериментальными данными [3]

в координатах $\xi/\xi_0 - \Xi$ (см. разд.1):

$$Re = 3100 \div 9300, T_w/T_f = 1, K_{g \max}^* = 0,088$$

же в ходе расчетов было замечено некоторое увеличение длины начального участка течения. При расчётах неизотермического течения тепловой стабилизации потока в рассчитываемом канале не происходило вовсе (рис. 12).

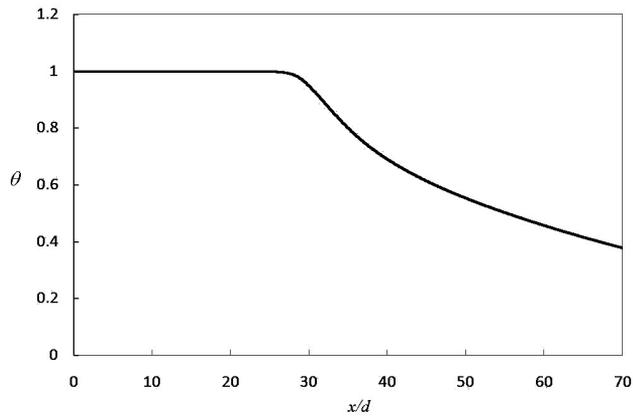


Рис. 12. Рассчитанное распределение приведенной температуры $\theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_{in}}$ (w относится к стенке, in –

ко входу в канал) по оси канала при $\bar{N}_0 = 1$:

$$Re = 3100 \div 9300, K_{g \max}^* = 0,088$$

Отдельно следует прокомментировать различия экспериментальных и расчётных данных. На рис. 10 максимумы кривых смещены во времени относительно друг друга. Анализ показал, что это происходит из-за того, что экспериментальная кривая ускорения деформирована и поэтому отличается от полуволны синусоиды, которая была использована в качестве модельной кривой в расчётах. Данная деформация кривой привела к тому, что максимум критерия нестационарности (1) сместился во времени к середине процесса.

Именно поэтому было применено упоминавшееся в разд. 1 нормирование вида (3).

При расчёте неизотермического течения данные по теплоотдаче не сходились с экспериментами [3] — в результате расчётов зависимость по теплоотдаче получалась сходная с квазистационарной (коэффициент теплоотдачи рассчитывался по градиенту температуры на стенке). Этому было найдено следующее объяснение: в экспериментах [3] авторы производили измерения только в одном сечении трубы (на расстоянии 2,5 метра от входа), в котором, как они считали, течение стабилизировано. Число Нуссельта рассчитывалось ими с помощью интеграла Лайона (который предполагает стабилизацию течения):

$$\frac{1}{Nu} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^{\bar{R}} \frac{u_x}{\bar{u}} \bar{R} d\bar{R} \right)^2}{\left(1 + \frac{Pr}{Pr_T} \frac{\mu_T}{\mu} \right) \bar{R}} d\bar{R}. \quad (19)$$

Данные расчётов показывают, что тепловой стабилизации в указанном сечении не происходит. Однако, если подставить рассчитанный профиль скорости в формулу (20), то число Нуссельта с точностью до 20% совпадает с данными [3]. Таким образом, повышение рассчитанного коэффициента теплоотдачи могло быть вызвано аксиальным тепловым потоком.

Выводы

Механизм воздействия ускорения и замедления потока на турбулентность пока не объяснён до конца.

Авторы считают, что какие-то плодотворные результаты в данном случае можно получить, рассмотрев степень влияния звуковых волн на турбулентную структуру в канале. Сделать такое предположение позволяет тот факт, что стабилизация течения в трубах (а в экспериментах рассматривается влияние изменения расхода на стабилизированный участок течения) происходит на значительном расстоянии от входа в канал. В частности, в работе [3] экспериментальный участок удалён от входа в канал на 2,5 м. Таким образом, волна давления доходит до мерного участка за время, сопоставимое со временем жизни крупных вихрей. Однако подробно данная гипотеза нами пока не рассматривалась.

Другой путь к пониманию сути процессов может заключаться в построении каскадной модели турбулентности для данного течения [15]. Каскадные модели являются достаточно грубым приближением, однако они моделируют все основные свойства уравнений Навье-Стокса и поэтому могут оказаться хорошим инструментом в понимании проблемы.

Работа выполнена при содействии

Гранта президента РФ по поддержке молодых докторов наук (МД-2246) и Гранта Российского фонда фундаментальных исследований (08-08-00226-а).

Библиографический список

1. Калинин Э.К. Методы расчёта сопряженных задач теплообмена / Э.К. Калинин, Г.А. Дрейцер, В.В. Костюк, И.И. Берлин. — М: Машиностроение, 1983.

2. Марков С.Б. Экспериментальное исследование скоростной структуры и гидравлических сопротивлений в неустановившихся напорных турбулентных потоках // Механика жидкости и газа. 1973. №2. С. 65-75

3. Дрейцер Г.А., Краев В.М. Турбулентные течения газа при гидродинамической нестационарности. — Красноярск: САА, 2001.

4. Мышкис А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. — М: Физматлит, 2007.

5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — Изд. 5-е, перераб. — М.: Наука, 1978.

6. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. — Изд. 5-е перераб. и доп. — М: Атомиздат, 1979.

7. Дрейцер Г.А. Основы конвективного теплообмена в каналах: Учебное пособие. — М.: Изд-во МАИ, 1989.

8. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function. // Advances Computational Maths. 1996. Vol. 5, p. 329-359.

9. Дубинов А.Е., Дубинов И.Д., Сайков С.К. W-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики: Учеб. пособие для вузов. — Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006.

10. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчётах турбулентных течений. — М.: Физматлит, 2008.

11. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений: Учебное пособие. — СПб., 2001.

12. Валуева Е.П., Чэнь Лэй. Численное моделирование процессов теплообмена и гидродинамики при нестационарном турбулентном течении в трубе жидкости с переменными свойствами // Вестник МЭИ. 2000. № 6. С. 38

13. Деревич И.В. О моделировании нестационарной гидродинамики при турбулентном течении в трубах // ТВТ. 2005. Т. 43. №2. С. 231-248.

14. Menter F.R. 1993. Zonal two equation k- ϵ turbulence models for aerodynamic flows, AIAA Paper, N93-2906, 21p.

15. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы: Курс лекций. — Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 1999. Ч. II.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 25.06.2009