УДК:62-50

СИНТЕЗ РОБАСТНОГО РЕГУЛЯТОРА НИЗКОГО ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-МАТРИЧНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Владимир Николаевич ПИЛИШКИН родился в 1951 г. в городе Днепропетровске. Доцент МГТУ им.Н.Э.Баумана. Кандидат технических наук, доцент. Основные научные интересы — в области математических основ теории управления. Автор более 300 научных работ. E-mail: pilishkin@hotmail.com

Vladimir N. PILISHKIN, Ph.D., was born in 1951, in Dnepropetrovsk. He is an Associate Professor at the Baumann Moscow State Technical University. His research interests are in the mathematical control theory, robust and intelligent systems. He has published over 300 technical papers. E-mail: pilishkin@hotmail.com

Рассматривается задача построения регулятора для многомерного динамического объекта при ограничениях на переменные параметры и действии неконтролируемых возмущений. Осуществляется декомпозиция исходной системы на подсистемы низких порядков. Внутренние связи между подсистемами заменяются ограниченными возмущениями, не связанными между собой. Для каждой из подсистем синтезируется свой робастный регулятор низкого порядка. Синтез основан на геометрических соотношениях, обеспечивающих фазовые ограничения. Полученные соотношения преобразуются к параметрическому линейному матричному уравнению относительно синтезируемой матрицы регулятора.

A regulator synthesis problem for multidimensional dynamic object is studied taking into account limitations on variables and uncontrollable disturbances. A decomposition of the system into low-order subsystems is accomplished. Internal relationships between these subsystems are replaced by limited disturbances, which are not connected with each other. For each of these subsystems their own robust regulator is synthesized. Synthesis itself is based on geometrical relations, which provide the phase limitations. These relations are transformed into a parametric linear equation regarding to the synthesized regulator matrix.

Ключевые слова: робастный регулятор низкого порядка; фазовые ограничения; параметрическое линейно-матричное уравнение; декомпозиция на подсистемы низкого порядка.

Key words: low-order robust regulator, phase constraints, parametric linear-matrix equation, decomposition to low-order subsystems.

Введение

Одной из основных проблем, с которыми приходится сталкиваться при управлении различными сложными системами, является высокая размерность динамических объектов. Это существенно усложняет применение многих известных методов [1—4]. Причем на систему могут накладываться ограничения (структурные, параметрические, на переменные системы), могут действовать возмущения с неполной информацией об их свойствах, а сама математическая модель становится более сложной.

Перечисленные факторы существенно затрудняют построение требуемых законов управления, поскольку при решении задачи синтеза робастных регуляторов имеющиеся ограничения обычно учитываются косвенно [5—7]. Таким образом, на проблему высокой размерности накладывается проблема учета ограничений и недостаточной информации о возмущениях.

Поскольку разрабатываемые методы наиболее эффективны для систем с невысокой размерностью, то для решения задач с объектами большого порядка целесообразно осуществлять декомпозицию исходной системы на подсистемы низкого порядка. При этом размерности этих подсистем желательно задавать заранее и выбирать произвольными с учетом возможностей используемого метода. В настоящее время известны различные подходы к декомпозиции систем высокого порядка [8—10]. Однако ни один из них не позволяет обеспечить указанное требование. Прежде всего это связано с трудностью поиска необходимого эквивалентного преобразования исходной системы координат в некоторую новую, в которой происходит разбиение на подсистемы (т.е. осуществляется точная декомпозиция, при которой полученные подсистемы не связаны между собой).

В данной работе рассматривается подход к требуемой декомпозиции исходной системы. Предлагается достаточно простое разбиение системы на совокупность эквивалентных возмущенных подсистем произвольной заранее заданной размерности. При этом связи между подсистемами представляются в виде ограниченных возмущений. Затем для каждой из возмущенных подсистем осуществляется синтез робастного регулятора низкого порядка. Для решения задачи синтеза предложен метод, основанный на линейно-матричных соотношениях и позволяющий эффективно учитывать различные неопределенности.

Постановка общей задачи синтеза

Пусть рассматриваемая система описывается уравнением состояния следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu + Dv; \\ &y = Cx,\ x(t_0) = x_0,\ t \ge t_0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где x, u, y, v — векторы состояния, управления, выхода, возмущения размерностей $n\times 1,\ m\times 1,\ l\times 1,\ r\times 1$ сооответсвенно; A, B, D, C — матрицы согласованных размерностей $n\times n,\ n\times m,\ n\times r,\ n\times l.$

Считаем, что вектор управления формируется в виде

$$u = Ky, \tag{2}$$

где K — матрица регулятора размерности $m\times l$.

На систему в общем случае накладываются ограничения:

$$u\in U;\ \ v\in V, \tag{3}$$

где $U,\ V$ — некоторые заданные в R^m, R^n множества.

Для системы (1) требуется выбрать такую матрицу регулятора K, чтобы с учетом ограничений (3) траектории системы $x(t)$ не выходили из заданного множества $Q = Q(t)$, т.е. выполнялось следующее условие:

$$\left.\begin{aligned} &x(t)\in Q(t),\ t > t_0; \\ &x(t_0) = x_0 \in Q(t_0). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Декомпозиция системы на возмущенные подсистемы и эквивалентная постановка задачи

Как уже отмечалось ранее, для большого $n\ (n >> 0)$ из-за трудности применения методов синтеза систему (1) целесообразно разбить на подсистемы низкого порядка. Поэтому поступим следующим образом. Считаем, что система (1) разбивается на p подсистем, порядок каждой из которых $n_\nu,\ \nu\in\overline{1,p}$, т.е. $\sum_{\nu=1}^{p} n_\nu = n.$ Причем n_ν выбираем произвольно.

Представим матрицы системы (1) в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix};\quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_p \end{bmatrix}; \tag{5}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{bmatrix},$$

где $A_{ij} - n_i\times n_j;\ B_i - n_i\times m;\ D_i - n\times r;\ C_j - l\times n_j$ — матрицы, $i,\ j\in\overline{1,p}.$

Вектор x разобьем на подвекторы:

$$x = \left[(x^1)^T\ (x^2)^T\ \ldots\ (x^p)^T\right];$$
$$x^i - n_i\times 1\,\text{вектор},\ i\in\overline{1,p}.$$

С учетом данного представления система (1) разбивается на p подсистем вида

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}^i = A_{ii}x^i + B_i u + D_i v + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne i}}^{p} A_{i\nu}x^\nu,\ i\in\overline{1,p}; \\ &u = K\cdot\sum_{\nu=1}^{p} C_\nu x^\nu. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Полученные соотношения преобразуются к уравнениям вида

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}^i = A_{ii}x^i + B_i u^i + v^i,\ \ i\in\overline{1,p}; \\ &u^i = Ky^i,\ y^i = C_i x^i\ \ (u^i = K_i x^i,\ \ K_i = KC_i); \\ &v^i = D_i v + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne i}}^{p}(A_{i\nu} + KC_\nu)x^\nu. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Если, например, $y = x$, т.е. $C = E$ — единичная матрица, то матрица K разбивается на p независимых подматриц: $K = [K_1\ K_2\ \ldots\ K_p],\ K_i = KC_i - m\times n_i$ матрицы, каждая из которых формируется для своей подсистемы (7):

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}^i = \tilde{A}_i x^i + v^i,\ i\in\overline{1,p}; \\ &\tilde{A}_i = A_{ii} + B_i K_i. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что при выполнении соотношений (3), (4) каждый вектор v^i, $i \in \overline{1,p}$, рассматриваемый в качестве вектора для i-й подсистемы, будет удовлетворять ограничению

$$v^i \in V_i, \ i \in \overline{1,p}. \tag{9}$$

Очевидно, что подмножества V_i, $i \in \overline{1,p}$, так же, как и множества V, Q, являются замкнутыми и ограниченными, а их возможный вид задается с учетом выражений v^i в соответствии с (7).

Кроме того, если для x справедливо (4), то для каждого подвектора x^i, $i \in \overline{1,p}$, должно выполняться соотношение

$$\left.\begin{array}{l} x^i(t) \in Q_i(t), \ t \geq t_0; \\ x^i(t_0) = x_0^{\ i} \in Q_i(t_0), \ i \in \overline{1,p}, \end{array}\right\} \tag{10}$$

где при заданном Q подмножества Q_i также считаются заданными.

В результате приходим к следующей эквивалентной постановке задачи.

Для каждой из подсистем (7) требуется синтезировать такой закон управления $u^i = K_i x^i$, $i \in \overline{1,p}$, который на множестве возмущений v^i вида (9) обеспечивает фазовые ограничения (10).

Синтез робастного регулятора для возмущенной подсистемы

Считаем, что множество $Q \subset R^n$ — прямоугольный параллелепипед, симметричный относительно $0 \in R^n$. Тогда каждое подмножество $Q_i \subset R^{n_i}$ также является симметричным прямоугольным параллелепипедом в R^{n_i}.

Воспользуемся основными соотношениями метода вариации фазовых ограничений [11]. Тогда в пристутствии внешних возмущений можно показать [12, 13], что для каждой из подсистем (7) для обеспечения ограничений (10) достаточно выполнения условий

$$\tilde{A}_\nu^{\ T} \cdot \alpha_\nu^{\ j} \in K_j^{\ \nu}, \ j \in \overline{1,n_\nu}, \ \nu \in \overline{1,p}, \tag{11}$$

где K_j^ν — конус с вершиной в начале координат и с $N_\nu = 2^{n_\nu - 1}$ гранями, симметричный относительно положительной полуоси $0x_j$; $\alpha_\nu^{\ j} = [\underbrace{0 \cdots 0}_{j-1} \ -1 \ \underbrace{0 \cdots 0}_{n_\nu - j}]^T$.

Конус K_j^ν задаем с помощью выражения

$$K_j^{\ \nu} = \left\{ x \in R^{n_\nu} : x_j \geq \frac{1}{m_j} \sum_{\substack{\xi=1 \\ \xi \neq j}}^{n_\nu} (\pm m_\xi) x_\xi \right\}, \tag{12}$$

где $m_j < 0$, $\forall j \in \overline{1,n}$ — координаты вершины исходного параллелепипеда Q.

Отсюда с учетом определения $\tilde{A}_\nu$ получим соотношение

$$-(a_j^{\ \nu} + K_\nu^{\ T} \cdot b_j^{\ \nu}) K_j^{\ \nu}, \ j \in \overline{1,n_\nu}, \ \nu \in \overline{1,p}, \tag{13}$$

являющееся достаточным условием обеспечения фазовых ограничений (10). Здесь $\bar{a}_j^{\ \nu}, \bar{b}_j^{\ \nu}$ — соответственно j-е вектор-строки матриц $A_{\nu\nu}, B_\nu$.

Представим (13) в виде

$$\sum_{n=1}^{m} b_{j\eta}^{\ \nu} k_\eta^{\ \nu} \in a_j^{\ \nu} + K_j^{\ \nu}, \ j \in \overline{1,n_\nu}, \tag{14}$$

где $k_\eta^{\ \nu}, \eta \in \overline{1,m}$ — вектор-столбцы матрицы K_ν; $b_{j\eta}^{\ \nu}$ — элементы вектора $b_j^{\ \nu}$, $j \in \overline{1,n_\nu}$.

Кроме того, для произвольного элемента $\varphi_j^{\ \nu} \in K_j^{\ \nu}$ справедливо представление

$$\varphi_j^{\ \nu} = P_j^{\ \nu} \cdot s_j^{\ \nu},$$

где $P_j^{\ \nu}$ — $n_\nu \times N_\nu$ матрица (оператор конуса); $s_j^{\ \nu}$ — $N_\nu \times 1$ вектор, координаты которого могут принимать произвольные неотрицательные значения (т.е. $s_j^{\ \nu} \geq 0$).

В результате условия (14) принимают вид

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{n=1}^{m} b_{j\eta}^{\ \nu} k_\eta^{\ \nu} \in a_j^{\ \nu} + P_j^{\ \nu} s_j^{\ \nu}, \ j \in \overline{1,n_\nu}, \\ s_j^{\ \nu} \geq 0. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Систему уравнений (15) можно представить в виде линейно-матричного уравнения:

$$\tilde{B}_\nu k^\nu = a^\nu + p^\nu(s^\nu), \tag{16}$$

где $\tilde{B}_\nu = \begin{bmatrix} B_\nu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_\nu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_\nu \end{bmatrix}$ — $n_\nu^{\ 2} \times (n_\nu \cdot m)$ матрица;

k^ν, a^ν — $(n_\nu \cdot m) \times 1$, $n_\nu^{\ 2} \times 1$ векторы, образованные из матриц K_ν, $A_{\nu\nu}$ путем последовательного выстраивания вектор-строк данных матриц в один вектор; $p^\nu(s^\nu)$ — $n_\nu^2 \times 1$ вектор-функция, линейно зависящая от $s^\nu = \left[(s_1^{\ \nu})^T \ldots (s_{n_\nu}^{\ \nu})^T\right]^T$ и образованная из векторов $P_j^{\ \nu}(s_j^{\ \nu})$ путем последовательного выстраивания в один вектор.

На основе соотношения (16) синтезируется требуемая матрица K_ν без учета внешних возмущений на систему. Рассмотрим использование данного подхода для системы (7), когда возмущение $v^\nu \neq 0$.

Согласно методу вариации фазовых ограничений [14], для системы (7) получим соотношение

$$\left.\begin{aligned} &\left(\nabla_x \psi_\gamma, A_{\nu\nu} x^\nu + B_\nu u^\nu + v^\nu\right) + \frac{\partial \psi_\gamma}{\partial t} \le 0; \\ &\forall x \in \tilde{A}Q_\nu \cap \tilde{A}Q_\nu^{\ \gamma},\ \gamma \in 1,\ n_\nu,\ t \ge t_0, \end{aligned}\right\}$$

где функция ограничения $\psi_\gamma(x,t) = \left|x_\gamma\right| - q_\gamma(t) \le 0$ $(q_\gamma(t) \ge 0)$ задает соответствующие противоположные грани параллелепипеда $\tilde{A}Q_\nu^{\ \gamma}$; $\tilde{A}Q_\nu$ — общая поверхность Q_ν.

Отсюда в результате непосредственных выкладок получим неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &(\tilde{A}_\nu^{\ T} \alpha_\nu^{\ j},\ M_{j,\omega}^\nu) \le \dot{q}_j + v_j^{\ \nu},\ \ t \ge t_0; \\ &j \in \overline{1, n_\nu},\ \ \omega \in \overline{1, N_\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $M_{j,\omega}^\nu$ — вершины j-й грани параллелепипеда Q с координатами $[\pm m_1 \ldots \pm m_{j-1} \pm m_j \pm m_{j+1} \ldots \pm m_{n_\nu}]^T$; $v_j^{\ \nu}$ — j-я координата вектора v^ν.

Из анализа выполнения (17) на вершинах $M_{j,\omega}^\nu, \forall \omega \in \overline{1, N_\nu}$ приходим к соотношению

$$\tilde{A}_\nu^{\ T} \alpha_\nu^{\ j} \in \frac{w_j^{\ \nu}}{m_j} e_j + K_j^{\ \nu},\ \ j \in \overline{1, n_\nu}, \tag{18}$$

где $w_j^{\ \nu} = v_j^{\ \nu} + \dot{q}_j$; $e_j = [\underbrace{0 \cdots 0}_{j-1}\ 1\ \underbrace{0 \cdots 0}_{n_\nu - j}]^T$, которое преобразуется к виду

$$-K_\nu^{\ T} b_j^{\ \nu} \in a_j^{\ \nu} + \frac{w_j^{\ \nu}}{m_j} e_j + K_j^{\ \nu},\ \ j \in \overline{1, n_\nu}. \tag{19}$$

Введем обозначения:

$s^\nu = [(s_1^{\ \nu})^T\ (s_2^{\ \nu})^T\ \ldots (s_{n_\nu}^{\ \nu})^T]^T$ — $(N_\nu \cdot n_\nu) \times 1$ вектор;

$$\Delta^\nu = \left[\left(\frac{w_1^{\ \nu}}{m_1}\right)^T \left(\frac{w_2^{\ \nu}}{m_2}\right)^T \cdots \left(\frac{w_{n_\nu}^{\ \nu}}{m_{n_\nu}}\right)^T\right]^T$$ — $n_\nu \times 1$ вектор;

$$P^\nu = \begin{bmatrix} p_1^{\ \nu,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1^{\ \nu,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_1^{\ \nu,n_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n_\nu}^{\ \nu,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_{n_\nu}^{\ \nu,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{n_\nu}^{\ \nu,n_\nu} \end{bmatrix}$$ — $n_\nu^{\ 2} \times N_\nu$ матрица ($\tilde{N} = N_\nu \cdot n_\nu$); 0 — $1 \times N_\nu$ нулевой вектор.

Тогда, аналогично (16), условие (19) преобразуется к уравнению

$$\tilde{B}_\nu k^\nu = \Delta^\nu + a^\nu + P^\nu(s^\nu). \tag{20}$$

Для разрешимости (20) необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор $s^\nu \ge 0$, при котором

$$\tilde{B}_\nu k^\nu = \Delta^\nu + a^\nu + P^\nu(s^\nu) \in L(\tilde{B}_\nu). \tag{21}$$

Воспользуемся условием (21) для проверки разрешимости задачи синтеза и для ее решения. Пусть

$$P^\nu = P_0^{\ \nu} + \bar{P}^\nu,\ \ \Delta^\nu = \Delta_0^{\ \nu} + \bar{\Delta}^\nu,\ \ a^\nu = a_0^{\ \nu} + \bar{a}^\nu, \tag{22}$$

где $a_0^{\ \nu}, \Delta_0^{\ \nu} \in L(\tilde{B}_\nu)$; $\bar{a}^\nu, \bar{\Delta}^\nu \perp L(\tilde{B}_\nu)$; $P_0^{\ \nu}, \bar{P}^\nu$ — матрицы, столбцы которых соответственно принадлежат $L(\tilde{B}_\nu)$ и ортогональны $L(\tilde{B}_\nu)$. Здесь $L(\tilde{B}_\nu)$ — подпространство в $R^{n_\nu^{\ 2}}$, образованное вектор-столбцами матрицы $\tilde{B}_\nu$.

Согласно [14] справедливы выражения

$$P_0^{\ \nu} = F_\nu P^\nu,\ \ \Delta_0^{\ \nu} = F_\nu \Delta^\nu,\ \ a_0^{\ \nu} = F_\nu a^\nu, \tag{23}$$

где F_ν — матрица ортогонального проектирования пространства $R^{n_\nu^{\ 2}}$ на подпространство $L(\tilde{B}_\nu)$ имеет вид

$$F_\nu = \hat{B}_\nu (\hat{B}_\nu^{\ T} \hat{B}_\nu)^{-1} \hat{B}_\nu^{\ T},$$

$\hat{B}_\nu$ — матрица, образованная из максимального числа линейно-независимых вектор-столбцов матрицы $\tilde{B}_\nu$.

С учетом (23) уравнение (20) примет вид

$$\tilde{B}_{\nu} k^{\nu} = (\Delta_0^{\nu} + a_0^{\nu} + P_0^{\nu} s^{\nu}) + (\bar{\Delta}^{\nu} + \bar{a}^{\nu} + \bar{P}^{\nu} s^{\nu}). \qquad (24)$$

Для разрешимости (24) необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{B}_{\nu} k^{\nu} = \bar{\Delta}^{\nu} + \bar{a}^{\nu} + \bar{P}^{\nu} s^{\nu} = 0, \quad s^{\nu} \geq 0. \qquad (25)$$

Кроме того, для существования фиксированного вектора k^{ν} (а значит, и матрицы K_{ν}) должно выполняться условие

$$\Delta_0^{\nu} + P_0^{\nu} s^{\nu} = \sigma_0^{\nu} \equiv \text{const}, \quad s^{\nu} \geq 0. \qquad (26)$$

Особенностью соотношений (25), (26) является неопределенность вектора Δ^{ν}, который с учетом его формирования может принимать различные значения на некотором множестве Ω_{ν}.

Пусть $\bar{K}^{\nu}$ — конус в пространстве $R^{n_{\nu}^2}$, образованный вектор-столбцами матрицы $\bar{P}^{\nu}$ (т.е. $\bar{P}^{\nu}$ — оператор конуса $\bar{K}^{\nu}$).

Тогда равенство (25) выполняется только при условии

$$-(\bar{\Delta}^{\nu} + \bar{a}^{\nu}) \in \bar{K}^{\nu} \ \forall \Delta^{\nu} \in \Omega_{\nu}. \qquad (27)$$

Аналогично получим, что равенство (26) справедливо при выполнении условия

$$\sigma_0^{\nu} - \Delta_0^{\nu} \in K_0^{\nu} \ \forall \Delta^{\nu} \in \Omega_{\nu}, \qquad (28)$$

где K_0^{ν} — конус, образованный столбцами матрицы P_0^{ν}.

Отсюда следует, что для разрешимости уравнения (20) относительно вектора k^{ν} (т.е. матрицы робастного регулятора K_{ν}) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sigma_0^{\nu} - \bar{a} -^{\nu} \Delta^{\nu} \in K^{\nu} \ \forall \Delta^{\nu} \in \Omega_{\nu}, \qquad (29)$$

где K^{ν} — конус в $R^{n_{\nu}^2}$, ортогональными проекциями которого являются конусы $\bar{K}^{\nu}$ и K_0^{ν} (т.е. K^{ν} образован вектор-столбцами матрицы P^{ν}); $\sigma_0^{\nu} \in L(\tilde{B}_{\nu})$.

Выводы

Предложенный подход позволяет достаточно эффективно синтезировать регулятор желаемой структуры. При этом достаточно просты как сам метод, так и анализ разрешимости задачи синтеза.

Алгоритм синтеза непосредственно учитывает ограничения на вектор состояния системы с учетом действия возмущений с неполной информацией об их свойствах. Причем уровень робастности каждой подсистемы определяется величиной смещения вершины соответствующего конуса от начала координат. Рассмотренный пример доказывает эффективность метода.

Библиографический список

1. B*ellman R.* Adaptive Control Processes: a Guided Tour. — Princeton University Press, 1961.
2. *Дикусар В.В., Милютин А.А.* Качественные численные методы в принципе максимума. — М.: Наука, 1989.
3. *Черноусько Ф.А., Ананьевский Л.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. — М: Физматлит, 2006.
4. *Кунцевич В.М, Лычак М.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. — М.: Наука, 1977.
5. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
6. Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory, — Edited by Vincent D. Blondel, Alex. Megretski. — Princeton University Press, 2004.
7. *Bhattacharyya S.P., Chapellat H., Keel L.H.* Robust control: the Parametric Approach, — Upper Saddle River, NY: Prentice Hall, 1995.
8. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Декомпозиция и инвариантность по возмущениям. — М.: Фазис, 2003.
9. *Митропольский Ю.А., Лопатин А.К.* Декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: ИМ, 1986.
10. *Павловский Ю.Н.* Декомпозиция и оптимизация в сложных системах. — М.: Фазис, 1988.
11. *Pilishkin V.N., Pupkov K.A.* Robust Control System Design Using Phase-Constraits Variation Approach,-Proc.of the European Control Conference, Karlsruhe, Germany, 1999.
12. *Pilishkin V.N.* Motion Control on Symmetrical Phase Polyhedrons // Proc. Of the ESDA, Israel, 2008.
13. *Пилишкин В.Н.* Линейно-матричный метод синтеза регулятора при симметризации фазовых ограничений // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2008. 7(88).
14. *Pilishkin V.N.* Geometric Method for a Problem of Synthesis of the Robust Autopilot // Proc. 2nd European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS), Belgium, 2007.

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Статья поступила в редакцию 20.04.2009