

ДИНАМИКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КОНСОЛЬНО ПРИКРЕПЛЕННЫМИ К НЕЙ ПЛАСТИНАМИ

Борис Андреевич АНТУФЬЕВ родился в 1947 г. в городе Москве. Профессор МАИ. Доктор технических наук, профессор. Основные научные интересы — в области статики и динамики составных тонкостенных конструкций. Автор более 50 научных работ. E-mail: tdv@mai.ru и ckp335@mai.ru.

Boris A. ANTUFYEV, D.Sci., was born in 1947, in Moscow. He is a Professor at the MAI. His major research interests are in statics and dynamics for composite thin-slab structures. He has published over 50 technical papers. E-mail: tdv@mai.ru and ckp335@mai.ru

Андрей Богданович СМЯН родился в 1985 г. в городе Ивантеевке Московской области. Аспирант МАИ. Основные научные интересы — в области статики и динамики составных тонкостенных конструкций. Автор двух научных работ. E-mail: ExtinctHeroes@gmail.com,

Andrey B. SMYAN, was born in 1985, the Moscow Region. He is a Graduate Student at the MAI. His research interests are in statics and dynamics for composite thin-slab structures. He has published 2 technical papers. E-mail: ExtinctHeroes@gmail.com

Рассматривается приближенное определение собственных частот нижней части спектра колебаний тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки конечной длины с двумя консольно прикрепленными к ней по отрезку образующей упругими пластинами. Задача решается в контактной постановке с удовлетворением условий совместности оболочки и пластин по методу Бубнова. Рассмотрены примеры.

An approximate evaluation of natural frequencies is described for a lower oscillation spectrum range of a thin elastic finite-length cylindrical shell with two attached cantilever elastic plates. The plates are attached to the shell along a section of generatrix. The described problem is solved in the contact statement with satisfaction of compatibility conditions for the shell and the plates according to the Bubnov method. Some examples are considered.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, прикрепленные пластины, метод Бубнова, уравнение Лагранжа, собственные частоты колебаний.

Key words: cylindrical shell, attached plates, Bubnov method, Lagrange equation, natural oscillation frequency.

Рассматривается приближенное определение собственных частот нижней части спектра колебаний тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки конечной длины с двумя консольно прикрепленными к ней по отрезку образующей упругими пластинами. Конструкция совершает колебания по форме, симметричной относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось вращения оболочки и делящей систему на две равные части.

Для решения задачи в силу ее симметрии мысленно разрезаем оболочку на две одинаковые части и в дальнейшем рассматриваем только одну из них (например, правую). На панели вводится ортогональная система координат: α_1 — продольная координата, α_2 — дуговая. Для перемещений используются обозначения: u_1 — продольные переме-

щения вдоль α_1 ; u_2 — тангенциальные перемещения вдоль α_2 ; u_3 — перемещения по внешней нормали. Здесь и далее для сокращения записи используется цифровая индексация в обозначениях осей координат, перемещений, усилий и т. д. На меридиональных краях панели имеем граничные условия симметрии (обозначения традиционные)

$$N_{21} = Q_2 = u_2 = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} = 0. \quad (1)$$

На краях панели при $\alpha_1 = \pm l$ ставим граничные условия свободного опирания. Мысленно отделяем пластинку от оболочки, заменяя ее воздействие распределенными в срединной поверхности панели вдоль линии контакта тел динамическими реакциями — погонными силами q_2 в направлении оси

α_2 и погонными изгибающими моментами q_4 в плоскости, перпендикулярной линии контакта (рис. 1). Динамические перемещения оболочки u_i ($i = 1, 2, 3$), совершающей гармонические колебания с частотой ω в направлении координатных линий α_i ($i = 1, 2$) и x_3 соответственно, а также ее угол поворота $u_4 = \partial G_{33} / \partial \alpha_2$ в плоскости, перпендикулярной линии контакта, запишем в виде

$$u_i = \sin \omega t \sum_{j=2,4} \int_L G_{ij}(\alpha_1, \alpha_2; \xi_1, 0; \omega^2) q_j(\xi_1) d\xi_1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где L — длина линии контакта тел; G_{ij} — динамические функции влияния для перемещений оболочки, построенные на основании уравнений классической теории оболочек в двойных тригонометрических рядах [1, 2].

Динамические реакции контакта между оболочкой и пластиной q_j , а также нормальные перемещения последней u_2^0 представим в виде разложения по задаваемым системам координатных функций

$$q_j = \sin \omega t \sum_{n=1}^{N_j} q_{jn} \Phi_{jn}(\alpha_1) \quad (j = 2, 4); \quad (3)$$

$$u_2^0 = \sin \omega t \sum_{n=1}^K u_n f_n(x_1, x_3), \quad (4)$$

где q_{jn} и u_n — неизвестные коэффициенты; $\Phi_{jn}(\alpha_1)$ и $f_n(x_1, x_3)$ — линейно независимые координатные функции, задаваемые на линии контакта тел и поверхности пластины соответственно; причем последние представляют ее возможные перемещения. Угол поворота пластины u_4^0 в плоскости $x_2 0 x_3$ (рис. 1) определим традиционно как $u_4^0 = \partial u_2^0 / \partial x_3$.

Условия совместности перемещений и углов поворота пластины и оболочки в плоскости, перпендикулярной линии контакта, снесенные в срединную поверхность панели, удовлетворим приближенно по методу Бубнова на линии соединения контактируемых тел

$$\int_L (u_i - u_i^0) \Phi_{im}(\alpha_1) d\alpha_1 = 0 \quad (i = 2, 4; m = 1, 2, \dots, N_j). \quad (5)$$

Уравнения движения пластины получим методом Ритца с использованием уравнений Лагранжа второго рода [4, 5]. С учетом разложения перемещений пластины в виде (4) последние после ряда преобразований принимают вид

$$-\omega^2 \frac{\partial T}{\partial u_n} + \frac{\partial \Pi}{\partial u_n} = Q_n \quad (n = 1, 2, \dots, K), \quad (6)$$

где T, Π — кинетическая и потенциальная энергии пластины соответственно; Q_n — обобщенная сила,

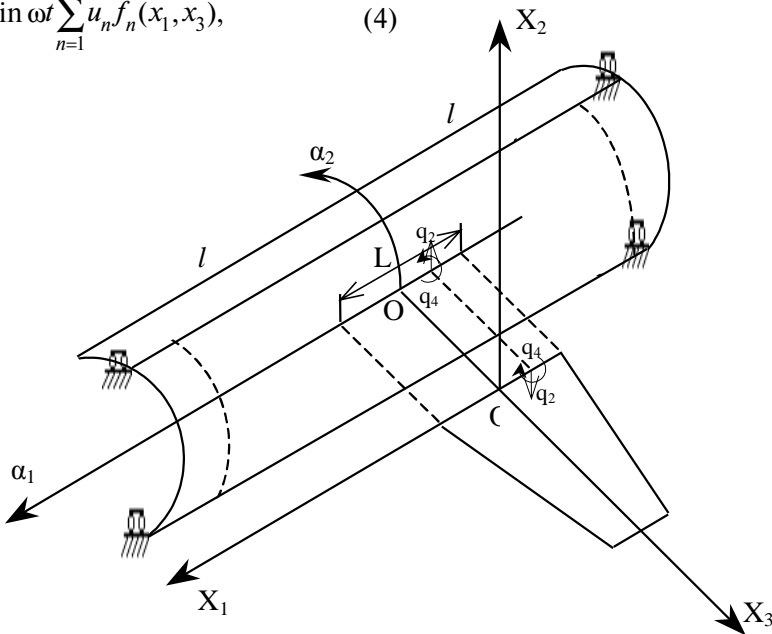


Рис. 1. Оболочка с мысленно отделенной пластиной

соответствующая в (4) обобщенной координате u_n .

При задании прогибов пластины в виде разложения (4) ее кинетическую и потенциальную энергии можно представить в виде квадратичных форм обобщенных координат [4, 5]

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^K \sum_{n=1}^K m_{nc} u_n u_c; \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^K \sum_{n=1}^K k_{nc} u_n u_c, \quad (7)$$

где коэффициенты масс m_{nc} и жесткостей k_{nc} вычисляем по формулам

$$m_{nc} = \iint_S m f_n f_m dS;$$

$$k_{nc} = \iint_S D \left[\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f_c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_3^2} \cdot \frac{\partial^2 f_c}{\partial x_3^2} + \right. \quad (8)$$

$$\left. + \nu \left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f_c}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_3^2} \cdot \frac{\partial^2 f_c}{\partial x_1^2} \right) + \right. \\ \left. + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_3} \cdot \frac{\partial^2 f_c}{\partial x_1 \partial x_3} \right] dS,$$

где m , S , D — погонная масса, площадь и цилиндрическая жесткость пластины соответственно; ν — коэффициент Пуассона ее материала. Обобщенная динамическая сила Q_n в (5) связана только с действием реакций контакта q_2, q_4 на линии соединения оболочки и пластины и равна

$$Q_n = \sum_{j=2,4} q_{jn} \int_L f_n(\alpha_1, 0) \varphi_{jm}(\alpha_1) d\alpha_1. \quad (9)$$

С учетом всего вышесказанного условия совместности перемещений контактируемых элементов (5) и уравнения движения пластины (6) после сокращения на $\sin \omega t$ принимают вид

$$\sum_{j=2,4} \sum_{n=1}^{N_j} q_{jn} a_{mn}^{ij} - \sum_{n=1}^K u_n b_{mn}^i = 0$$

$$(i = 2, 4; m = 1, 2, \dots, N_j); \quad (10)$$

$$- \sum_{j=2,4} \sum_{m=1}^K q_{jc} b_{cm}^{ij} + \sum_{n=1}^K u_n c_{nc} = 0 \quad (c = 1, 2, \dots, K),$$

где

$$a_{mn}^{ij} = \iint_{L L} G_{ij}(\alpha_1, 0; \xi_1, 0; \omega^2) \varphi_{jn}(\xi_1) \varphi_{im}(\alpha_1) d\xi_1 d\alpha_1;$$

$$b_{mn}^i = b_{cn}^j = \int_L f_n'(\alpha_1, 0) \varphi_{im}(\alpha_1) d\alpha_1; \quad (11)$$

$$c_{nc} = k_{nc} - \omega^2 m_{nc}.$$

Входящие в c_{nc} коэффициенты жесткости k_{nc} и масс m_{nc} вычисляются по (8). Уравнения (10) образуют замкнутую симметричную систему $N_2 + N_4 + K$ линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений (3) и (4)

q_{jn} и u_n . Эта система является однородной, и ее решение существует лишь при определенных значениях частот колебаний ω , называемых собственными. Их значения находят из условия равенства нулю определителя (11), которое при записи в блочной матричной форме имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} A(\omega^2) & B \\ B^T & C(\omega^2) \end{bmatrix} = 0. \quad (12)$$

Элементы блоков A , B , C , входящих в (12), определяются по формулам (11) соответственно. Определитель (12) невозможно развернуть в строку и представить его, как обычно, в виде нелинейного алгебраического уравнения относительно ω^2 и, следовательно, получить решение в замкнутой форме. Квадраты собственных частот колебаний всей системы ω^2 лежат в промежутках между значениями квадратов собственных частот непосредственно оболочки и пластины. При их численном нахождении из (12) в заранее определенных интервалах изменения частот колебаний ω^2 (квадраты собственных частот колебаний обоих динамических подсистем) с определенным шагом по частоте вычисляют значения этого определителя, отыскивая те значения ω^2 , между которыми он меняет знак. Далее, уменьшив величину шага, повторяем процедуру до получения искомой величины с заданной степенью точности. Необходимо отметить, что в силу приближенности аппроксимации усилий контакта и прогибов пластины достаточно точно можно определить лишь частоты колебаний из нижней части их спектра.

В качестве примера определим ряд основных частот колебаний оболочки длиной $2l$, к которой дискретно по линии прикреплены две прямоугольные в плане пластины толщиной δ . Обе пластины и оболочка выполнены из одного материала с плотностью ρ и модулем упругости E . Безразмерные параметры системы $R/h = 40$, $l/R = 6$, $L/l = 1,5$, $\beta/R = 2$, $\delta/h = 1$, $\nu = 0,3$. Здесь R , h , ν —

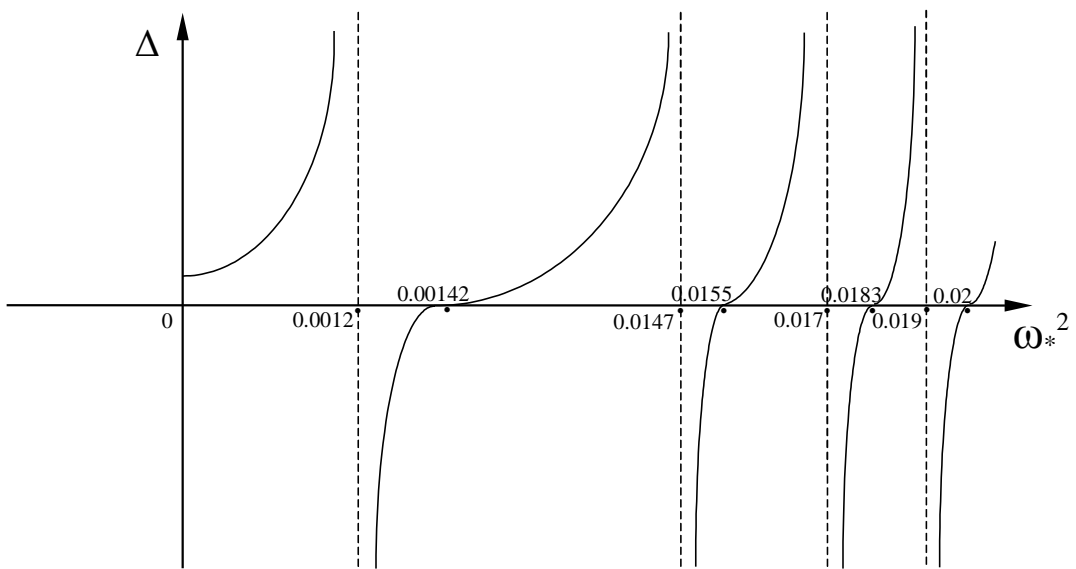


Рис. 2. Зависимость определителя разрешающей системы уравнений от безразмерного квадрата частоты

радиус, толщина и коэффициент Пуассона материала оболочки соответственно; L и β — ширина и длина пластины. Так как жесткость оболочки в тангенциальных направлениях значительно больше, чем в радиальном, то для упрощения расчетов условия совместности перемещений (5) выполняем лишь по углам поворота. На линии контакта тел $0 \leq \alpha_1 \leq L$ усилия взаимодействия задаем в виде

$$q_2 = 0, \quad q_4 = \sum_{n=1}^N q_{4n} \delta(\alpha_1 - \alpha_{1n}). \quad (13)$$

Здесь в качестве координатных функций используем заданные через одинаковые промежутки дельта-функции Дирака. Вследствие чего метод Бубнова переходит, по существу, в метод коллокаций. Нормальные перемещения пластины u_2^0 и ее угол поворота u_4^0 представим в виде степенных рядов

$$u_2^0 = \sum_{n=1}^K u_{2n} \left(\frac{x_3}{\beta} \right)^{n-1}, \quad u_4^0 = \frac{du_2^0}{dx_3}. \quad (14)$$

При такой аппроксимации пластина изгибается лишь в плоскости $x_2 0 x_3$, а первый член ряда соответствует ее повороту как твердого тела.

Для получения решения достаточной точности в функциях влияния для перемещений оболочки сохранялось 30×30 слагаемых. В рядах (13) и (14) удерживалось соответственно три и два члена ряда. Низшие безразмерные квадраты частот колебаний $\omega_*^2 = \omega^2 R^2 / E$ пластины и оболочки составляют $\omega_{*1}^2 = 7,14 \cdot 10^{-5}$ и $\omega_{*1}^2 = 1,2 \cdot 10^{-3}$; $\omega_{*2}^2 = 1,47 \cdot 10^{-2}$; $\omega_{*3}^2 = 1,7 \cdot 10^{-2}$; $\omega_{*4}^2 = 1,9 \cdot 10^{-2}$ соответственно, что

полностью совпадает с результатами из [3]. На рис. 2 показана зависимость значения определителя Δ (12) от текущего безразмерного квадрата частоты колебаний. Вертикальные пунктирные асимптоты соответствуют значениям безразмерных квадратов частот отдельных элементов системы. Точки перехода кривых через нуль отвечают безразмерным значениям $\omega_*^2 = \omega^2 R^2 / E$ квадратов собственных частот колебаний всей конструкции в целом $\omega_{*1}^2 = 1,42 \cdot 10^{-3}$; $\omega_{*2}^2 = 1,55 \cdot 10^{-2}$; $\omega_{*3}^2 = 1,83 \cdot 10^{-2}$; $\omega_{*4}^2 = 2 \cdot 10^{-2}$.

Выводы

Предложен оригинальный приближенный метод определения собственных частот колебаний составной тонкостенной динамической системы. Исследована сходимость решения и показана в частных случаях совпадения с результатами других авторов.

Библиографический список

1. Антуфьев Б.А. К расчету колебаний пологой оболочки с жестким включением // Прикладная механика. 1983. Т. XIX. №9. С. 45-49.
2. Власов В.З. Общая теория оболочек. — М.: ГИТТЛ, 1949.
3. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек. — Киев: Наукова Думка, 1964.
4. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. — М.: Наука, 1980.
5. Шклярчук Ф.Н. Колебания и аэроупругость летательных аппаратов. — М.: МАИ, 1981.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 2.03.2009