

## МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

Научная статья  
УДК 539.3  
DOI: 10.34759/vst-2022-3-200-208

### ПРОЧНОСТЬ КОМПАКТНОГО ОБРАЗЦА ИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СТРУКТУРИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА

Николай Степанович Астапов<sup>1</sup> ✉, Владимир Дмитриевич Кургузов<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (ИГиЛ СО РАН),  
Новосибирск, Россия

<sup>1,2</sup>Новосибирский государственный университет (НГУ),  
Новосибирск, Россия

<sup>1</sup>nika@hydro.nsc.ru ✉

<sup>2</sup>kurguzov@hydro.nsc.ru

**Аннотация.** Разрушение компактного образца изучается с помощью подхода Нейбера–Новожилова и уточненной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла с ненулевой шириной зоны предразрушения. Используется сдвоенный дискретно интегральный критерий прочности, так как в поле напряжений в окрестности вершины трещины есть особенность. В вершине реальной трещины записан критерий разрушения для предельной деформации, а в вершине модельной трещины дан критерий для нормальных напряжений. Проанализированы определяющие уравнения аналитической модели. Найдены компактные формулы для разрушающей нагрузки. В условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния построены графики квазихрупкого разрушения образца.

**Ключевые слова:** хрупкое и квазихрупкое разрушение, сдвоенный критерий разрушения, упругопластический материал, средний диаметр зерна структурированного материала, предельная деформация

**Для цитирования:** Астапов Н.С., Кургузов В.Д. Прочность компактного образца из упругопластического структурированного материала // Вестник Московского авиационного института. 2022. Т. 29. № 3. С. 200–208. DOI: 10.34759/vst-2022-3-200-208

# MACHINE-BUILDING ENGINEERING AND MACHINE SCIENCE

Original article

## STRENGTH OF COMPACT SAMPLE MADE OF ELASTOPLASTIC STRUCTURED MATERIAL

Nikolai S. Astapov<sup>1</sup> ✉, Vladimir D. Kurguzov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Lavrentiev Institute of Hydrodynamics SB RAS,  
Novosibirsk, Russia

<sup>1,2</sup>Novosibirsk State University,  
Novosibirsk, Russia

<sup>1</sup>nika@hydro.nsc.ru ✉

<sup>2</sup>kurguzov@hydro.nsc.ru

### Abstract

The strength of compact sample at normal separation (fracture mode I) was studied within the framework of the Neuber–Novozhilov approach. A model of ideal elastoplastic material with ultimate relative elongation was selected as a model of a deformable solid. This class of materials includes, for example, low-alloyed steels applied in the structures operating at temperatures below the cold brittleness threshold.

The crack propagation criterion is formulated with the modified Leonov–Panasyuk–Dugdale model, which employs an additional parameter, namely the plasticity zone diameter (the pre-fracture zone width). The two-parameter (twinned) criterion for the crack quasi-brittle fracture in the elastoplastic material was formulated under conditions of small-scale yielding with the presence of the stresses field singularity in the vicinity of the crack tip. This twinned fracture criterion includes the deformation criterion, formulated in the crack tip, as well as force criterion, formulated in the model crack tip. The lengths of the original and model cracks differ by the pre-fracture zone length.

Diagrams of quasi-brittle fracture of a sample under conditions of plane strain and plane stress are plotted. These diagrams consist of two curves, which divide the “crack length–stress” plane into three regions. The first region corresponds to the absence of fracture. In the second region, damages are being accumulated in the pre-fracture zone under the repeated loading. In the third region, the sample is being divided into parts under monotonic loading.

The constitutive equations of the analytical model are analyzed in detail depending on the characteristic linear size of the material structure. The authors obtained simple formulas suitable for verification calculations of the critical fracture loading and the length of the pre-fracture zone. The analysis of the parameters included in the proposed model of quasi-brittle fracture was performed. The authors propose model parameters selecting by approximation of the uniaxial tension diagram and stress intensity coefficient.

**Keywords:** brittle and quasi-brittle fracture, double fracture criterion, elastoplastic material, mean diameter of a structured material grain, ultimate strain

**For citation:** Astapov N.S., Kurguzov V.D. Strength of Compact Sample Made of Elastoplastic Structured Material. *Aerospace MAI Journal*, 2022, vol. 29, no. 3, pp. 200–208. DOI: 10.34759/vst-2022-3-200-208

---

---

### Введение

Надежность и безопасность эксплуатации летательных аппаратов существенно зависит от прочности узлов и деталей. Поэтому актуальным

является исследование процесса зарождения и развития трещин, приводящих к разрушению. В [1] в результате трудоёмкой математической об-

работки данных натурных испытаний получены рекомендации для прогнозирования срока, когда безопасна эксплуатация лопастей винтов вертолёта. В частности выявлено, что процесс быстрого роста трещины занимает лишь последние 5–10% всего времени её подрастания до окончательного разрушения изделия. Актуальным является и построение простых, удобных для поверочных расчетов математических моделей разрушения материалов и конструкций [2–7]. В работах [3–5] обсуждаются недостатки и преимущества локальных однопараметрических критериев разрушения хрупких и квазихрупких материалов. Сдвоенные критерии разрушения позволяют объединить преимущества однопараметрических критериев разрушения, отвечающих различным предельным состояниям материала [6–9]. В модели, предлагаемой в работе [10], нет параметров, описывающих структуру и поперечник зоны предразрушения. Однако присутствие периодической структуры в материале оказывает значительное влияние на раскрытие трещин, потому что трещины часто проходят между зерен. В [11] показано, что критерии разрушения, учитывающие средний диаметр зерна структурированного материала, эффективнее традиционных критериев.

Данная работа уточняет результаты [12–14] по изучению подрастания трещины. Для структурированных материалов разработана уточнённая модель Леонова—Панасюка—Дагдейла (ЛПД) [15–18] с прямоугольной зоной предразрушения. Получены компактные формулы для поверочных расчетов критической нагрузки, а

также описан алгоритм построения графиков разрушения структурированных материалов. Предлагаемая аналитическая модель использует неклассическую схему разрушения материала, в которой, кроме двух состояний (сплошного и разрушенного), рассматривается третье промежуточное состояние материала с накопленными повреждениями. Построенная модель позволяет оценить критическое состояние изделия с трещинами при более сложных условиях нагружения, чем однопараметрические критерии механики разрушения.

### Постановка задачи

Рассмотрим компактный образец шириной  $w$ , высотой  $H$  с исходной трещиной длины  $l_0$ , растягиваемый силами  $P$  (рис. 1). Геометрия образца определяется рекомендациями из [19, 20]. Поверхность трещины свободна от нагрузок, реализуется I мода разрушения. Пусть периодически зернистый материал образца со средним диаметром зерна  $d$  [12] имеет квазихрупкий тип разрушения.

Используем простейшее приближение реальной  $(\sigma - \epsilon)$ -диаграммы исследуемого материала кусочно-линейной ломаной, соответствующей идеально упругопластическому материалу, имеющему предельную деформацию при которой материал разрушается. На рис. 2,а схематично показаны исходная  $(\sigma - \epsilon)$ -диаграмма (кривая 1) и ее приближение ломаной (кривая 2). Параметры приближенной диаграммы находятся из условия совпадения площадей под кривой 1 и лома-

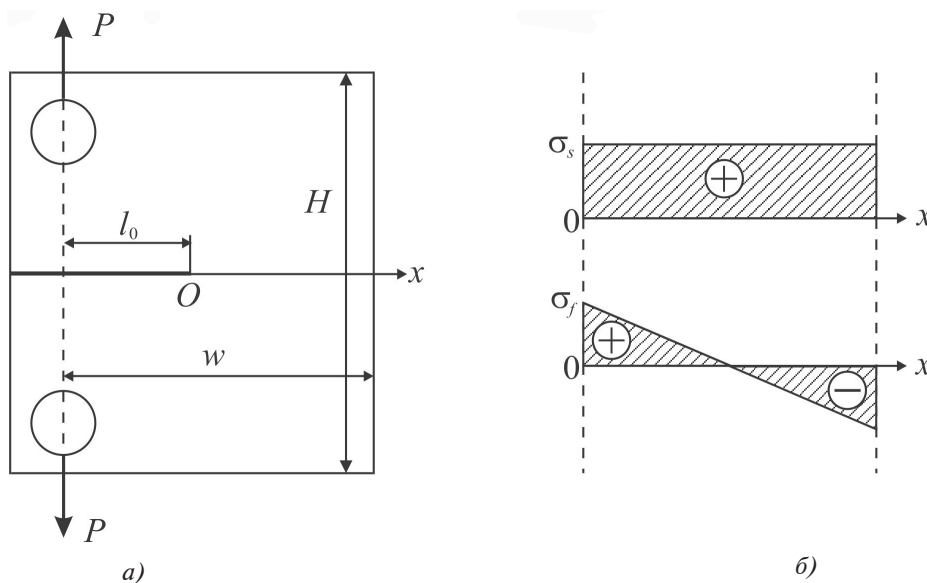


Рис. 1. Схема нагружения компактного образца (а); эпюры номинальных напряжений при растяжении  $\sigma_s$  и изгибе  $\sigma_f$  (б)

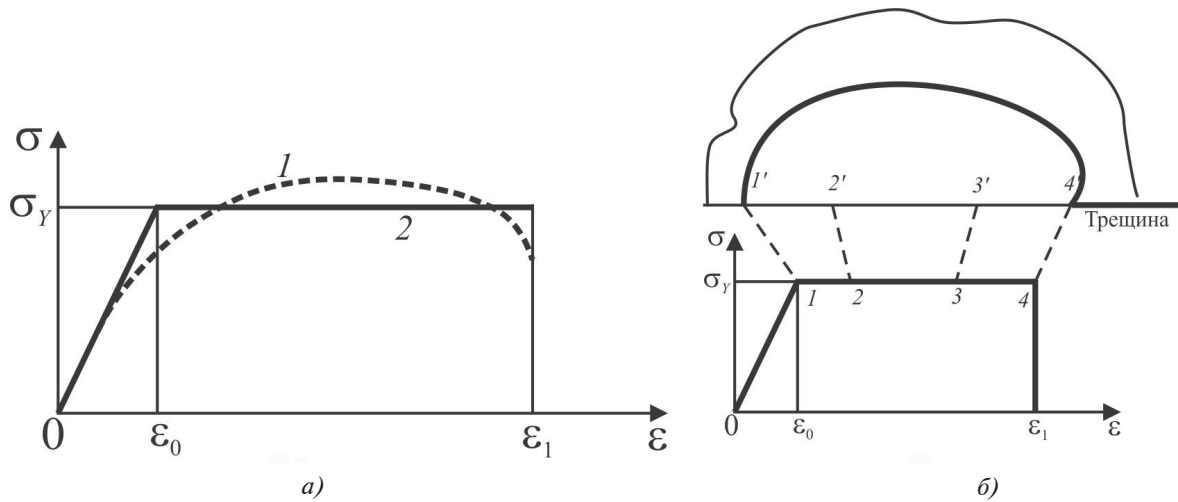


Рис. 2. Исходная ( $\sigma - \epsilon$ )-диаграмма материала (кривая 1) и ее (ломаная 2) приближение (а); соответствие точек 1-4 ломаной 2 точкам 1'-4' зоны предразрушения (б)

ной 2. Ломаная 2 строится по трём константам материала:  $E$  – модуль Юнга,  $\sigma_Y$  – предел текучести при одноосном растяжении,  $\epsilon_1$  – предельная деформация. Максимальная упругая деформация  $\epsilon_0$  находится из закона Гука  $\sigma_Y = E\epsilon_0$ .

**Уточненная модель ЛПД**

В аналитической модели заменим реальную трещину длины  $l_0$  модельной прямолинейной трещиной длиной  $l = l_0 + b$  (рис. 3). Критическая длина зоны предразрушения  $b_c$  при однократном нагружении определяется однозначно ( $l_c = l_0 + b_c$  – критическая длина макротрещины). На рис. 3 изображены нормальные напряжения  $\sigma_y = \sigma_Y$  в зоне предразрушения и приближение пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения [12, 13]. Напомним, что в классической модели ЛПД [15–18] поперечник пластической зоны  $a = 0$ .

При квазихрупком разрушении считается, что область нелинейных эффектов незначительна по

отношению к длине трещины. Предполагается, что интенсивность пластических деформаций в этой области полностью описывается пределом текучести  $\sigma_Y$  и коэффициентом  $K_I$ , а поле напряжений вокруг этой области определяется асимптотическими формулами [21]. Тип разрушения материала в [12, 13] классифицируется так:  $b = 0$  – хрупкое,  $b/l_0 \ll 1$  – квазихрупкое,  $b/l_0 \approx 1$  – квазивязкое,  $b/l_0 \geq 1$  – вязкое.

**Сдвоенный критерий разрушения**

Сдвоенный критерий квазихрупкого разрушения компактного образца использует интегральный критерий Нейбера–Новожилова [13]

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = \sigma_Y, \quad x \geq 0; \tag{1}$$

$$v(-b_c) = \delta_c, \quad x < 0. \tag{2}$$

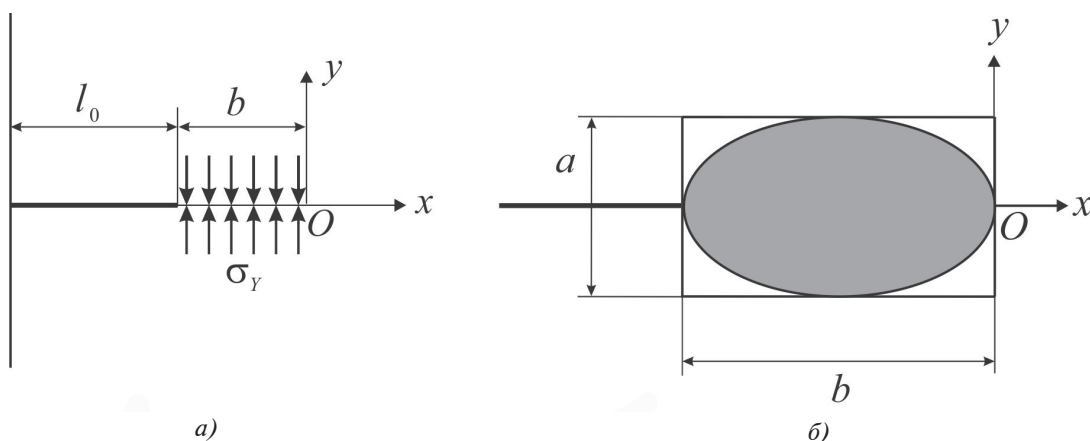


Рис. 3. Уточненная модель ЛПД: нормальные напряжения на продолжении модельной трещины (а); приближение пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения при плоском напряженном состоянии (б)

В уравнении (1):  $\sigma_y(x, 0)$  – нормальные напряжения на продолжении модельной трещины;  $Oxy$  – прямоугольная система координат, ось абсцисс направлена вдоль трещины (рис. 3,а); в уравнении (2):  $v(x) = 2v(x, 0)$  – раскрытие модельной трещины ( $x < 0$ );  $\delta_c$  – критическое раскрытие модельной трещины;  $b_c$  – критическая длина зоны предразрушения. Равенство (1) выполняется тогда (необходимый критерий), когда осредненные напряжения на продолжении модельной трещины достигают предела текучести, а равенство (2) выполняется, когда раскрытие модельной трещины становится критическим. В дальнейшем критические величины по достаточному критерию, когда выполняются оба равенства (1) и (2), что влечет разрушение образца, и необходимому критерию разрушения различаются индексами  $c$  и  $0$  соответственно.

**Построение графиков квазихрупкого разрушения**

Поле нормальных напряжений  $\sigma_y(x)$  запишем в виде суммы [22]

$$\sigma_y(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} + \sigma_{nom}, \quad (3)$$

где  $\sigma_{nom} = \sigma_s + \sigma_f$  – номинальные напряжения;  $\sigma_s, \sigma_f$  – номинальные напряжения при растяжении и изгибе соответственно (рис. 1,б);  $K_I = K_{Ip} + K_{Ib} > 0$  – суммарный коэффициент интенсивности напряжений (КИН);  $K_{Ip} > 0$  – КИН, обусловленный приложенными к компактному образцу силами  $P$ ;  $K_{Ib} < 0$  – КИН, обусловленный напряжениями  $\sigma_Y$ , действующими в зоне предразрушения. Выражение для коэффициента  $K_{Ip}$  с заданными условиями испытаний компактных образцов запишем так [19, с. 35; 23, с. 363]:

$$K_{Ip} = \frac{P}{tw} \sqrt{\pi l} Y_s(\xi); \quad (4)$$

$$Y_s(\xi) = 16,7 - 104,375\xi + 369,544\xi^2 - 573,781\xi^3,$$

где  $\xi = l/w$ .

КИН  $K_{Ib}$  вычисляется следующим образом [20, с. 117; 23, с. 114]

$$K_{Ib} = -\sigma_Y \sqrt{\pi l} (2/\pi) \arccos(1 - b/l). \quad (5)$$

Так как при квазихрупком разрушении справедливо неравенство

$$b/l \ll 1, \quad (6)$$

то имеем приближение  $\arccos(1 - b/l) \approx \sqrt{2b/l}$  с погрешностью 5% при  $0 \leq b/l \leq 0.55$ . В результате выражение (5) для коэффициента  $K_{Ib}$  упрощается

$$K_{Ib} = -2\sigma_Y \sqrt{2b/l}. \quad (7)$$

В условиях маломасштабной текучести (6) раскрытие трещины  $2v(x)$  в уравнении (2) запишем в виде [22]

$$v(x) = \frac{\kappa + 1}{2G} K_I \sqrt{\frac{-2x}{\pi}}, \quad x \leq 0, \quad (8)$$

где  $G = E / (2(1 + \nu))$  – модуль сдвига;  $\kappa = 3 - 4\nu$  для плоской деформации,  $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$  для плоского напряженного состояния. Критическое раскрытие модельной трещины  $\delta_c$  в соотношении (2) вычислим по формуле

$$\delta_c = (\epsilon_1 - \epsilon_0)a. \quad (9)$$

Для поперечника  $a$  зоны предразрушения в (9) возьмём при плоской деформации выражение [24, с. 290]

$$a = \frac{9(1 - \nu)}{2\sqrt{2}(2 + \pi)} (K_{Ip} / \sigma_Y)^2 = \chi(\nu) (K_{Ip} / \sigma_Y)^2. \quad (10)$$

При плоском напряженном состоянии  $\chi = \pi/4$  [24, с. 282].

Используя выражения (3), (4), (7)–(10), применим достаточный (сдвоенный) критерий (1), (2). Интегрируя в (1) с учетом (3), находим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = \\ & = K_I \sqrt{2/(\pi d)} + \sigma_s + \sigma_f (1 - d/(w - l)). \end{aligned} \quad (11)$$

Используем обозначения, с помощью которых представим в приближении сопротивления материалов номинальные напряжения  $\sigma_s, \sigma_f$ :

$$\begin{aligned} \sigma &= P/(tw), \quad \alpha = 1 - l/w, \\ \sigma_s &= \sigma/\alpha, \quad \sigma_f = 3\sigma(2 - \alpha)/\alpha^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь критерий (1) с учетом (11), (12) можно записать так:

$$K_I \sqrt{2/(\pi d)} + \sigma_c Y_r = \sigma_Y, \quad (13)$$

где  $Y_r = [1 + 3(2/\beta - 1)(1 - d/(w\beta))]/\beta$ ;  $\beta = 1 - l_c/w$ ;  $l_c$  – критическая длина трещины;  $\sigma_c = P_c / (tw)$  – критическое напряжение;  $P_c$  – критическая нагрузка.

Используя в (13) для коэффициента  $K_I = K_{I_p} + K_{I_b}$  выражения (4), (7), получим уравнение

$$\sqrt{2\bar{l}_c} (Y_s \bar{\sigma}_c - 2\sqrt{2\bar{b}_c}/\pi) = 1 - Y_r \bar{\sigma}_c. \quad (14)$$

Здесь  $\bar{l}_c = l_c / d$  – безразмерная критическая длина трещины;  $\bar{b}_c = b_c / l_c$  – безразмерная критическая длина зоны предразрушения;  $\bar{\sigma}_c = \sigma_c / \sigma_Y$  – безразмерное критическое напряжение.

Подставляя выражения (8)–(10) в уравнение (2), приходим к равенству

$$(\kappa + 1) K_{I_c} \sqrt{2\bar{b}_c / \pi} / (2G) = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \chi (K_{I_p} / \sigma_Y)^2. \quad (15)$$

Учитывая, что  $G = E / [2(1 + \nu)]$ ,  $E = \sigma_Y / \epsilon_0$ , из соотношения (15) получим уравнение

$$(Y_s \bar{\sigma}_c - 2\sqrt{2\bar{b}_c}/\pi) \sqrt{2\bar{b}_c} = \frac{\pi \chi \bar{\epsilon}_1}{(\kappa + 1)(1 + \nu)} (Y_s \bar{\sigma}_c)^2, \quad (16)$$

где  $\bar{\epsilon}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) / \epsilon_0$  – отношение предельной неупругой деформации к максимальной упругой (показатель пластичности). После раскрытия скобок в левой части уравнения (16) появляется множитель  $2\bar{b}_c$ , который можно отбросить как величину более высокого порядка малости по сравнению с  $\sqrt{2\bar{b}_c}$  в силу ограничения (6). В итоге приходим к системе двух уравнений: уравнения (14) и упрощенного уравнения (16) с двумя неизвестными  $\sqrt{2\bar{b}_c}$  и  $\bar{\sigma}_c$ . Решив найденную систему уравнений, получим компактные соотношения для безразмерных критических величин  $\bar{b}_c$  и  $\bar{\sigma}_c$ :

$$\bar{b}_c = \frac{\pi^2}{8} (p \bar{\epsilon}_1 Y_s \bar{\sigma}_c)^2; \quad (17)$$

$$\bar{\sigma}_c = (Y_r + Y_s (1 - p \bar{\epsilon}_1) \sqrt{2\bar{l}_c})^{-1}, \quad (18)$$

где  $p = 2\chi / [(\kappa + 1)(1 + \nu)]$ . При плоском напряженном состоянии  $p = \pi / 8$ , при плоской деформации  $p = 9 / [4\sqrt{2}(2 + \pi)(1 + \nu)]$ . Так как предельная нагрузка ограничена  $\bar{\sigma}_c \leq 1$ , то с использованием равенства (18) находим ограничение на показатель пластичности, при котором существует квазихрупкое разрушение и критическая нагрузка дается формулой (18)

$$\bar{\epsilon}_1 \leq \left( 1 - (1 - Y_r) / (Y_s \sqrt{2\bar{l}_c}) \right) / p. \quad (19)$$

Расчеты показывают, что ограничение (19) на значения  $\bar{\epsilon}_1$  существенно зависит от характерного линейного размера  $d$  структуры материала. Так, при  $d = 0.7$  для плоского напряженного состояния  $\bar{\epsilon}_1 \leq 2.546$ , а при  $d \leq 0.1$  имеем  $\bar{\epsilon}_1 \leq 1.28$ . Для плоской деформации ограничение на  $\bar{\epsilon}_1$  слабее, чем для плоского напряженного состояния – например, при  $d = 0.7$ ,  $\nu = 0.33$  имеем  $\bar{\epsilon}_1 \leq 4.298$ .

При  $\bar{\epsilon}_1 \rightarrow 0$  из равенства (18) находим безразмерную критическую нагрузку для хрупкого разрушения в зависимости от безразмерной длины исходной трещины  $\bar{l}_0 = l_0 / d$ :

$$\bar{\sigma}_0 = (Y_r + Y_s \sqrt{2\bar{l}_0})^{-1}. \quad (20)$$

Безразмерные коэффициенты  $Y_s$  и  $Y_r$ , определенные в (4) и (13), характеризуют геометрию образца и полностью определяются шириной пластины  $w$  и длиной трещины  $l_0$ . Равенство (20) является необходимым критерием при хрупком разрушении образца. Так как  $p$  и  $\bar{\epsilon}_1$  положительны, то из равенства (18) видно, что  $\bar{\sigma}_0 < \bar{\sigma}_c$  при  $l_0 < l_c$  для любых длин трещин. Построим в квадрате  $(\bar{l}, \bar{\sigma})$  «длина трещины – напряжения» (рис. 4) кривые  $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$ ,  $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$  разрушающих нагрузок компактного образца (диаграммы разрушения [12, 13]).

Кривые 1, 2 (или 1, 3 для плоского напряженного состояния) делят квадрант на три области. В области ниже кривой 1 длина исходной трещины не меняется (трещина для соответствующих нагрузок устойчива); в области между кривыми 1 и 2 (или 1 и 3) трещина подрастает на длину зоны предразрушения, оставаясь устойчивой; в области выше кривой 2 (или 3) длина трещины



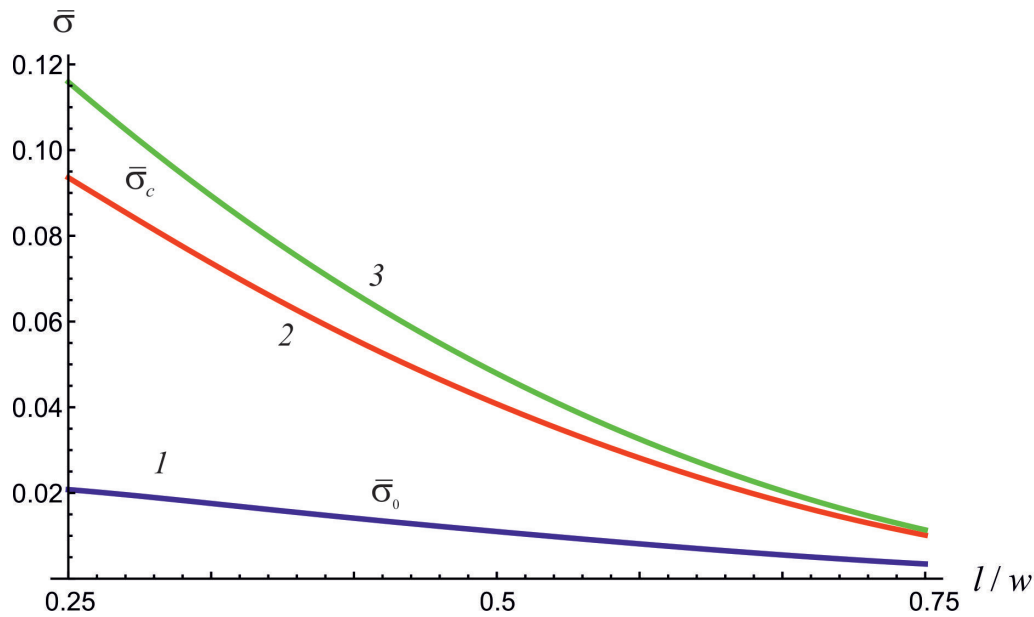


Рис. 4. Графики хрупкого и квазихрупкого разрушения: кривая 1 – необходимый критерий; кривая 2 – достаточный критерий при плоской деформации; кривая 3 – достаточный критерий при плоском напряженном состоянии

увеличивается катастрофически (трещина неустойчива) [12–13]. Для удобства приложений длина трещины  $l$  на рис. 4 отнесена к ширине образца  $w$ . Вычисления были проведены при следующих значениях параметров:  $w = 60$  мм,  $d = 0.7$  мм,  $\nu = 0.33$ ,  $\bar{\epsilon}_1 = 2.5$  при плоском напряженном состоянии и  $\bar{\epsilon}_1 = 4$  — при плоской деформации.

### Выводы

Продвижение трещины нормального отрыва в упругопластических материалах, имеющих предельную деформацию, описывается с помощью уточненной модели ЛПД. Построены графики квазихрупкого разрушения для компактного образца. Эти графики состоят из двух кривых, которые делят квадрант «длина трещины – напряжения» на три области, соответствующие отсутствию разрушения, накоплению повреждений в зоне предразрушения при повторных нагружениях и разделению образца на части. Параметры модели подбираются по  $(\sigma - \epsilon)$ -диаграмме одноосного растяжения и критическому коэффициенту интенсивности напряжений  $K_{Ic}$ . Параметр осреднения  $d$  можно определить как  $d = 2(K_{Ic}/\sigma_t)^2/\pi$ , где  $\sigma_t$  – предел прочности материала на растяжение [12]. Полученные компактные формулы (17), (18), (20) могут оказаться

полезными для расчетов на прочность деталей и узлов механизмов и машин.

В отличие от [12, 13] в данной работе предложена уточнённая модель ЛПД, в которой формула (18) единообразно учитывает вид нагружения, номинальные напряжения при изгибе и растяжении, расположение трещины, тип разрушения (хрупкое, квазихрупкое), механические характеристики материала.

### Список источников

1. Свирский Ю.А., Баутин А.А., Лукьянчук А.А., Басов В.Н. Приближенный метод решения упругопластической задачи // Вестник Московского авиационного института. 2020. Т. 27. № 2. С. 61-70. DOI: 10.34759/vst-2020-2-61-70
2. Бохоева Л.А., Курохтин В.Ю., Перевалов А.В., Рогов В.Е., Покровский А.М., Чермошеница А.С. Испытания элементов конструкций и узлов вертолета на усталостную прочность // Вестник Московского авиационного института. 2017. Т. 24. № 1. С. 7-16.
3. Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // Materials Science and Engineering: R: Reports. 2014. Vol. 75, pp. 1–48. DOI: 10.1016/j.mser.2013.11.001
4. Zhu X.-K., Joyce J.A. Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization // Engineering Fracture Mechanics. 2012. Vol. 85, pp. 1–46. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2012.02.001
5. Weißgraeber P., Leguillon D., Becker W. A review of finite fracture mechanics: crack initiation at singular

- and non-singular stress raisers // *Archive of Applied Mechanics*. 2016. Vol. 86, pp. 375-401. DOI: 10.1007/s00419-015-1091-7
6. Zhu X.K., Chao Y.J. Specimen Size Requirements for Two-parameter Fracture Toughness Testing // *International Journal of Fracture*. 2005. Vol. 135. No. 1, pp. 117-136. DOI: 10.1007/s10704-005-3946-3
  7. Meliani M.H., Matvienko Y.G., Pluvinage G. Two-parameter fracture criterion ( $K_{p,c} - T_{ef,c}$ ) based on notch fracture mechanics // *International Journal of Fracture*. 2011. Vol. 167. No. 2, pp. 173-182. DOI: 10.1007/s10704-010-9542-1
  8. Newman J.C.Jr., Newman J.C.III. Validation of the Two-Parameter Fracture Criterion using Finite-Element Analyses with the critical CTOA fracture criterion // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 136, pp. 131-141. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.01.021
  9. Warren J.M., Lacy T., Newman J.C. Validation of the Two-Parameter Fracture Criterion using 3D finite-element analyses with the critical CTOA fracture criterion // *Engineering Fracture Mechanics*. 2016. Vol. 151, pp. 130-137. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.11.007
  10. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В. и др. Об одном подходе к оценке прочности адгезионного слоя в слоистом композите // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 2(64). С. 63–77.
  11. Сукнев С.В. Нелокальные и градиентные критерии разрушения квазихрупких материалов при сжатии // *Физическая мезомеханика*. 2018. Т. 21. № 4. С. 22-32. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-14003
  12. Корнев В.М. Критические кривые разрушения и эффективный диаметр структуры хрупких и квазихрупких материалов // *Физическая мезомеханика*. 2013. Т. 16. № 5. С. 25-34.
  13. Kornev V.M., Kurguzov V.D. Sufficient discrete-integral criterion of rupture strength // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2001. Vol. 42. No. 2, pp. 328-336. DOI: 10.1023/A:1018896407455
  14. Kurguzov V.D., Astapov N.S., Astapov I.S. Fracture model for structured quasibrittle materials // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014. Vol. 55. No. 6, pp. 1055-1065. DOI: 10.1134/S0021894414060182
  15. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // *Прикладная механика*. 1959. Т. 5. № 4. С. 391-401.
  16. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1960. Vol. 8. No. 2, pp. 100-104. DOI: 10.1016/0022-5096(60)90013-2
  17. Neuber G. *Kerbspannungslehre: Grundlagen für Genaue Spannungsrechnung (German Edition)*. — Berlin: Springer-Verlag, 1937. — 167 p.
  18. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // *Прикладная математика и механика*. 1969. Т. 33. № 2. С. 212-222.
  19. Ковчик С.Е., Морозов Е.М. Т. 3. Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения // *Механика разрушения и прочность материалов / Справ. пособие: В 4 т.* — Киев: Наукова думка, 1988. — 434 с.
  20. Ито Ю., Мураками Ю., Хасебэ Н. и др. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Пер. с англ. В.И. Даниленко; Под ред. Р.В. Гольдштейна, Н.А. Махутова.* — М.: Мир, 1990. — Т. 1. — 448 с.
  21. Anderson T.L. *Fracture mechanics: fundamentals and applications.* — CRC Press: London, 2005. — 640 p.
  22. Gross D., Seelig T. *Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics (Mechanical Engineering Series)*. — Springer: Berlin, 2006. — 333 p.
  23. Саврук М.П. *Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4 т. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами.* — Киев: Наукова думка, 1988. — 619 с.
  24. Либовиц Г. (ред.) *Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения.* — М.: Мир, 1975. С. 204-335.

## References

1. Svirskiy Y.A., Bautin A.A., Luk'yanchuk A.A., Basov V.N. Approximate method for local elastic-plastic problems solving. *Aerospace MAI Journal*, 2020, vol. 27, no. 2, pp. 61-70. DOI: 10.34759/vst-2020-2-61-70
2. Bokhoeva L.A., Kurokhtin V.Y., Perevalov A.V., Rogov V.E., Pokrovskii A.M., Chermoshentseva A.S. Helicopter structural elements and components fatigue resistance tests. *Aerospace MAI Journal*, 2017, vol. 24, no. 1, pp. 7-16.
3. Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, 2014, vol. 75, pp. 1–48. DOI: 10.1016/j.mser.2013.11.001
4. Zhu X.-K., Joyce J.A. Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization. *Engineering Fracture Mechanics*, 2012, vol. 85, pp. 1–46. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2012.02.001
5. Weißgraeber P., Leguillon D., Becker W. A review of finite fracture mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers. *Archive of Applied Mechanics*, 2016, vol. 86, pp. 375-401. DOI: 10.1007/s00419-015-1091-7
6. Zhu X.K., Chao Y.J. Specimen Size Requirements for Two-parameter Fracture Toughness Testing.



- International Journal of Fracture*, 2005, vol. 135, no. 1, pp. 117-136. DOI: 10.1007/s10704-005-3946-3
7. Meliani M.H., Matvienko Y.G., Pluinage G. Two-parameter fracture criterion ( $K_{c,c} - T_{ef,c}$ ) based on notch fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, 2011, vol. 167, no. 2, pp. 173-182. DOI: 10.1007/s10704-010-9542-1
  8. Newman J.C., Newman III J.C. Validation of the Two-Parameter Fracture Criterion using Finite-Element Analyses with the critical CTOA fracture criterion. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, vol. 136, pp. 131-141. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.01.021
  9. Warren J.M., Lacy T., Newman J.C. Validation of the Two-Parameter Fracture Criterion using 3D finite-element analyses with the critical CTOA fracture criterion. *Engineering Fracture Mechanics*, 2016, vol. 151, pp. 130-137. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.11.007
  10. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V. et al. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2020, no. 2(64), pp. 63-77.
  11. Suknev S.V. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2018, vol. 21, no. 4, pp. 22-32. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-14003
  12. Kornev V.M. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2013, vol. 16, no. 5, pp. 25-34.
  13. Kornev V.M., Kurguzov V.D. Sufficient discrete-integral criterion of rupture strength. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2001, vol. 42, no. 2, pp. 328-336. DOI: 10.1023/A:1018896407455
  14. Kurguzov V.D., Astapov N.S., Astapov I.S. Fracture model for structured quasibrittle materials. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, no. 6, pp. 1055-1065. DOI: 10.1134/S0021894414060182
  15. Leonov M.Ya., Panasyuk V.V. *Prikladnaya mekhanika*, 1959, vol. 5, no. 4, pp. 391-401.
  16. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 100-104. DOI: 10.1016/0022-5096(60)90013-2
  17. Neuber G. *Kerbspannungslehre: Grundlagen für Genaue Spannungsrechnung (German Edition)*. Berlin, Springer-Verlag, 1937, 167 p.
  18. Novozhilov V.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1969, vol. 33, no. 2, pp. 212-222.
  19. *Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov. T. 3. Kovchik S.E., Morozov E.M. Kharakteristiki kratkovremennoi treshchinostoikosti materialov i metody ikh opredeleniya* (Fracture Mechanics and Strength of Materials. Vol. 3. Kovchik S.E., Morozov E.M. Characteristics of short-term crack resistance of materials and methods for their determining), Kiev, Naukova dumka, 1988, 434 p.
  20. Murakami Y., Aoki S. (ed). *Stress intensity factors handbook*. In 2 vols. Pergamon Press, 1987. Vol. 1, 1464 p.
  21. Anderson T.L. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. CRC Press, London, 2005, 640 p.
  22. Gross D., Seelig T. *Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics (Mechanical Engineering Series)*. Springer, Berlin, 2006, 333 p.
  23. Savruk M.P. *Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov. Spravochnoe posobie v 4 t. T. 2. Koeffitsienty intensivnosti napryazhenii v telakh s treshchinami* (Fracture mechanics and strength of materials. Handbook in 4 vols. Vol. 2. Stress intensity factors in bodies with cracks), Kiev, Naukova dumka, 1988, 619 p.
  24. Liebowitz H. (ed). *Fracture: An Advanced Treatise. Vol. 2 - Mathematical Fundamentals*. Academic Press Inc., New York, 1968, pp. 204-335.

Статья поступила в редакцию 23.04.2022; одобрена после рецензирования 26.07.2022; принята к публикации 28.07.2022.

The article was submitted on 23.04.2022; approved after reviewing on 26.07.2022; accepted for publication on 28.07.2022.