

На правах рукописи



Красавин Егор Эдуардович

**РАЗРАБОТКА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ОБТЕКАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ БОЛЬШОЙ
КРИВИЗНЫ**

Специальность: 1.1.9. – Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2024

Работа выполнена на кафедре «Аэродинамика, динамика и управление летательных аппаратов» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:

Никитченко Юрий Алексеевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Официальные оппоненты:

Кузнецов Михаил Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры фундаментальной физики и нанотехнологии федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Государственный университет просвещения»

Кусов Андрей Леонидович, кандидат физико-математических наук, начальник лаборатории акционерного общества «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения»

Ведущая организация:

Федеральное автономное учреждение «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского» (ФАУ «ЦАГИ»)

Защита диссертации состоится «27» декабря 2024 г. в 12 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.08 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, А-80, ГСП-3, МАИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и на сайте МАИ по ссылке:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=182749

Автореферат разослан «___» _____ 2024 г.

Отзывы на автореферат в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, Ученый совет МАИ.

Ученый секретарь диссертационного совета,
24.2.327.08, д.ф.-м.н., с.н.с.

Гидасов В.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Разработка методов численного моделирования течений высокой степени динамической (поступательной) неравновесности представляет собой весьма актуальную задачу, недостаточно полно изученную как теоретически, так и экспериментально.

Одной из задач газовой динамики является расчет газодинамических параметров в окрестности поверхностей большой кривизны (острой кромки) на сверх и гиперзвуковых режимах течения. В окрестности острой кромки формируется течение высокой степени неравновесности, которое является характерным при больших числах Маха и Кнудсена. Особенностью острой кромки является появление сильно уплотненной области, в которой ударная волна максимально приближается к поверхности летательного аппарата и локализуется в окрестности носовой части. Возникновение ударной волны сопровождается значительным увеличением градиентов газодинамических параметров. Малые с точки зрения механики сплошной среды параметры, например девиатор напряжений и тепловой поток, становятся соизмеримы с основными газодинамическими параметрами: давлением и полным потоком энергии.

Степень разработанности темы

Модель сплошной среды начинает свою историю с уравнения Эйлера, начиная со второй половины 18 века. Область применения таких моделей существует только для малых чисел Кнудсена, что ограничивает их использование. В качестве элементарного объекта берется жидкая частица, после чего записываются законы сохранения массы, импульса и энергии, из которых получается модель Эйлера. Модель Эйлера рассматривается только в невязкой среде. В случае, если производится расчет для вязкого газа, применяется модель Навье-Стокса-Фурье (НСФ). Модель НСФ является системой законов сохранения и замкнута феноменологическими законами Стокса (обобщенный закон Ньютона) и Фурье. С точки зрения молекулярно-кинетической теории газов (МКТ), модель НСФ представляет собой первое приближение системы моментных уравнений

НСФ представляет собой первое приближение системы моментных уравнений неполного второго порядка. Термин "первое приближение" означает, что в уравнениях неравновесных величин (неравновесных напряжений, тепловых потоков, разности поступательной и вращательной температур) учитываются члены только первого порядка малости (процедура Чепмена-Энскога).

Во второй половине 20 века активно развивались модельные кинетические уравнения (МКУ), которые являются упрощенным вариантом кинетического уравнения Больцмана. В таких моделях за элементарный объем принимается группа молекул, объединенная определенным газодинамическим параметром. В первую очередь кинетические модели использовались для описания течений одноатомных газов. Если говорить про модели многоатомных газов, то они появились значительно позже.

В отдельную группу можно определить методы прямого статистического моделирования (Direct simulation Monte-Carlo, DSMC) или методы Монте-Карло. Здесь в качестве элементарного объекта используется отдельная молекула. Расчет с использованием данных моделей осложнен повышенной трудоемкостью, которая напрямую связана с количеством вычислительных операций. В связи с этим приходится вводить определенные допущения, так как полное решение современной практической задачи невозможно даже на суперкомпьютере.

Кинетические модели в свою очередь описывают течение на молекулярном уровне, но имеют удвоенную размерность, что для практических задач сложно реализуемо. Применимость кинетических моделей в высоко неравновесной области также ограничена малым размером вычислительных сеток, определяемым длиной свободного пробега молекулы, что сопровождается значительным увеличением времени вычислительного процесса. Модели, основанные на МКТ, достаточно адекватно описывают течение газа в переходной и свободномолекулярной области. В гидродинамической области такие модели практически не реализуемы.

Цель диссертационной работы – разработка метода численного решения задачи обтекания острой кромки на базе модели Навье-Стокса-Фурье.

Основные задачи работы

1. Определение особенностей модели Навье-Стокса-Фурье в области высоконеравновесных течений на примере задачи о профиле ударной волны.
2. Оценка области применимости (по числам Кнудсена) модели Навье-Стокса-Фурье к расчету обтекания поверхностей большой кривизны.
3. Разработка метода численной реализации модели Навье-Стокса-Фурье применительно к обтеканию острых кромок.

Научная новизна работы

- Установлено, что степень неравновесности газа в окрестности острой кромки примерно вдвое превышает степень неравновесности в плоской ударной волне при тех же числах Маха;
- Показано, что верхняя граница области применимости модели Навье-Стокса-Фурье для описания течения в окрестности поверхности большой кривизны целесообразно оценивать как $Kn = 0.01$;
- Предложен метод описания течений высокой степени неравновесности вблизи острой кромки с использованием модели Навье-Стокса-Фурье.

Объект исследования – течения высокой степени динамической неравновесности.

Предмет исследования – физико-математические модели неравновесных течений совершенных газов.

Теоретическая и практическая значимость работы

- изучена область применимости и свойства модели Навье-Стокса-Фурье применительно к абсолютно острым кромкам.
- получено численное решение задачи при обтекании газом поверхности большой кривизны для высокоскоростных течений.
- разработанная физико-математическая модель может использоваться при разработке вычислительных ядер CFD – пакетов, ориентированных на расчеты высокоскоростных течений.

Методология и методы исследования

В работе применялся аналитический метод исследования. Для изучения свойств полученной физико-математической модели использовался метод численного эксперимента. Полученные результаты сравнивались с известными экспериментальными и расчетными данными.

Положения, выносимые на защиту

- Структурный анализ уравнений Навье-Стокса-Фурье для неравновесных течений;
- Диапазон применимости моделей первого приближения по числу K_n для описания обтекания поверхности большой кривизны;
- Метод расчета обтекания поверхности большой кривизны с использованием модели Навье-Стокса-Фурье.

Достоверность результатов исследования подтверждена сравнением полученных данных с результатами расчетных и экспериментальных работ других авторов.

Апробация и внедрение результатов

Материалы работы докладывались:

- Научный семинар С.М. Белоцерковского (15 февраля 2024 г.). Доклад «Вариант расчета обтекания тонкой пластины с использованием модели Навье-Стокса-Фурье»;
- XXII международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023). Доклад «Оценка применимости моделей первого приближения для описания обтекания поверхностей большой кривизны»;
- Гагаринские чтения – 2021: XLVII Международная молодежная научная конференция. Доклад «Анализ систем моментных уравнений различных порядков и уравнений Навье-Стокса-Фурье для течений высокой степени неравновесности»;

- 19-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2020». Доклад «Структурный анализ систем моментных уравнений и уравнений Навье-Стокса-Фурье для неравновесных течений»;

- Гагаринские чтения – 2020: XLVI Международная молодежная научная конференция Доклад «Структурный анализ моментных уравнений на примере задачи о профиле плоской ударной волны».

Зарегистрированы программные продукты:

- «Программа расчета обтекания тонкой пластины под нулевым углом атаки с искусственно внесенной точкой торможения», свидетельство о регистрации № 2024680226;

- «Программа расчёта ударной волны с вычислением моментов высокого порядка с использованием модельного кинетического уравнения многоатомных газов», свидетельство о регистрации №2023683877;

- «Программа расчёта обтекания пластины со скругленным носиком под нулевым углом атаки с использованием модели Навье-Стокса-Фурье», свидетельство о регистрации №2023666661;

- «Программа расчёта обтекания пластины со скругленным носиком под нулевым углом атаки с использованием двухтемпературной модели», свидетельство о регистрации №2023666596.

Личный вклад автора

В процессе научной деятельности соискателем лично получены результаты, которые изложены в диссертационной работе. Исследования включают математическую постановку проблемы, разработку физико-математических моделей, создание программ на языке Fortran, обработку и анализ результатов, которые выносятся на защиту. Автор лично подготовил публикации, отражающие содержание диссертации и выступал с докладами по выполненной работе.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, списка сокращений и условных обозначений. Общий объём

составляет 100 страниц, включая 28 рисунков. Библиографический список содержит 86 наименований.

Представленная диссертационная работа является одним из результатов комплексной исследовательской работы в области неравновесной газовой динамики, проводимой на кафедре «Аэродинамика, динамика и управление летательных аппаратов» МАИ. Работа выполнена в рамках государственных заданий Минобрнауки России, темы FSFF-2020-0013 и FSFF-2023-0008.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении раскрыта актуальность разработки методов описания течений газовой динамики, показана степень разработанности темы, сформулированы цель и задачи работы, выделены объект и предмет исследования, показана научная и практическая значимость работы, представлена апробация и внедрение результатов.

В первой главе рассматриваются особенности применения модели Навье-Стокса-Фурье для описания течений высокой степени неравновесности. Проведен анализ расчетов сильно неравновесных течений с помощью модели НСФ в ее классическом виде. Выявлено, что некоторые величины становятся соизмеримы по порядку величины с основными газодинамическими переменными в сильно неравновесных течениях.

Для анализа моментных уравнений напряжений и теплового потока рассмотрим систему моментных уравнений 3-го порядка в незамкнутом виде: (Нумерация уравнений с 1 по 7).

В этих выражениях и ниже повторяющиеся греческие подстрочные индексы в одночленах подразумевают свертку тензора, т.е. суммирование от 1 до 3, например:

$$P_{\alpha\alpha} \equiv P_{11} + P_{22} + P_{33}.$$

Система уравнений НСФ содержит уравнения (1) ... (3). Моментные уравнения (4), (5) и (6), (7) заменяются законом трения Стокса и законом Фурье соответственно.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{2}{3R} \phi_\alpha - \frac{1}{R_r} \omega_\alpha \right) = -\frac{\theta}{h\tau_p} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} P_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha P_{ij}^m) + P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \\ & - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\phi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \phi_\alpha \right) = -\frac{P_{ij}^m}{\tau_p} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \phi_{ijk}) + \phi_{ij\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \phi_{ik\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \phi_{jk\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\ & + \frac{R}{2} \left(P_{i\alpha} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_\alpha} + P_{k\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho m_{ijk\alpha}^{(4)}) = -\frac{2 \phi_{ijk}}{3 \tau_p} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + R_r P_{i\alpha} \frac{\partial T_r}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho m_{ijk\alpha}^{r(4)}) = -\frac{\omega_i}{\tau_p} \quad (7)$$

Почленно сложим (4) и (5). Перепишем полученное уравнение относительно напряжения, стоящего в релаксационном члене. Для p_{xx} , наибольшего из неравновесных напряжений в случае торможения потока, получим:

$$p_{xx} = -\tau_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \left(p_{xx}^m + \frac{5-3\gamma}{2} h \rho R \theta \right) \right) + \left(\frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3} h \right) P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \phi_{xxx} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \phi_x - (\gamma - 1) h \omega_x \right) \right) \quad (8)$$

В близких к равновесию условиях время релаксации τ_p связано с коэффициентом вязкости μ следующим образом:

$$\tau_p = \mu/p \quad (9)$$

Рассмотрим вклад каждого из слагаемых правой части (8):

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \left(p_{xx}^m + \frac{5-3\gamma}{2} h \rho R \theta \right) \right) \quad (10)$$

$$-\left(\frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \mu \frac{P_{xx}}{p} \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (11)$$

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left(2\varphi_{xxx} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \varphi_x - (\gamma-1) h \omega_x \right) \quad (12)$$

Вычислить напряжение непосредственно по (8), очевидно, невозможно. Воспользуемся решением МКУ, полученного для течения в плоской ударной волне азота при числе Маха $M_\infty = 5$. Свободные параметры МКУ подбирались по экспериментальным данным.

Значения слагаемых (8) взяты из кинетического решения и представлены на Рисунке 1. Координатная ось $0X$ проградуирована в длинах свободного пробега молекул в невозмущенном потоке. Значение $x=0$ соответствует локальному числу Маха $M=1$. На этом же рисунке (кривая 4) показан профиль p_{xx} , полученный из решения модели НСФ с объемной вязкостью. Этот вариант модели будет описан ниже. Все данные, представленные на рисунке отнесены к локальному термодинамическому давлению.

Профиль неравновесного напряжения МКУ, близкий к реальному, существенно шире профиля НСФ. Возмущения в потоке газа начинают формироваться значительно раньше, чем это предписывает модель НСФ.

На Рисунке 1 неравновесное напряжение превышает давление: по МКУ – примерно в 1.2 раза, по НСФ – примерно в 1.7 раза. По мере уменьшения неравновесности течения тепловые потоки стремятся к нулю, а вместе с ними и их градиент.

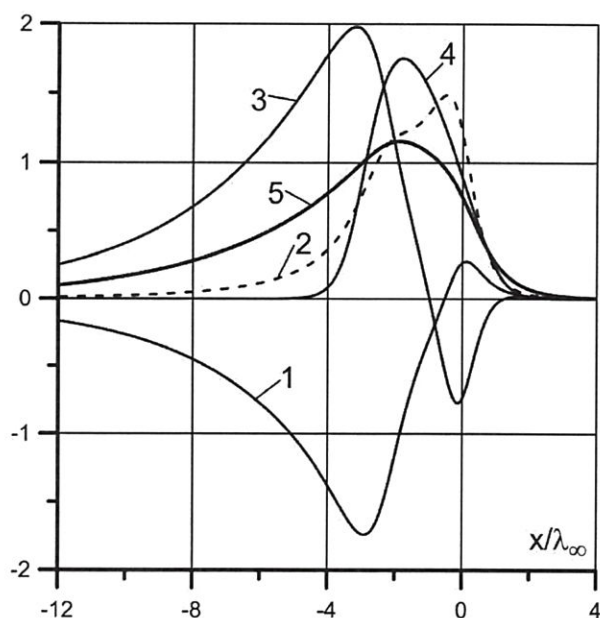


Рисунок 1 - Профили неравновесного напряжения и его составляющих в плоской ударной волне двухатомного газа. $M_\infty = 5$. 1 – (10), 2 – (11), 3 – (12), 4 – p_{xx} модели НСФ, 5 – p_{xx} решение МКУ.

Используя соотношение $q_i = \varphi_i + \omega_i$, почленно сложим свертку уравнения (6), домноженного на $3/2$, и уравнения (7). Перепишем полученное уравнение относительно теплового потока, стоящего в релаксационном члене. Для рассматриваемого одномерного течения:

$$q_x = -\tau_p \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \left(q_x + \frac{1}{2} \varphi_x \right) \right) + \left(q_x + \frac{1}{2} \varphi_x + 3\varphi_{xxx} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \right. \\ & \left. + RP_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma-1} T + \frac{3}{4} T_t + \frac{3}{2} T_{xx} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left(\frac{3}{4} m_{xx\alpha\alpha}^{(4)} + m_{xx}^{r(4)} \right) \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Как и в предыдущем случае рассмотрим вклад каждого из слагаемых правой части (13):

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \left(q_x + \frac{1}{2} \varphi_x \right) \right) \quad (14)$$

$$-\frac{\mu}{p} \left(q_x + \frac{1}{2} \varphi_x + 3\varphi_{xxx} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (15)$$

$$-\frac{\mu}{p} RP_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma-1} T + \frac{3}{4} T_t + \frac{3}{2} T_{xx} \right) \quad (16)$$

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left(\frac{3}{4} m_{xx\alpha\alpha}^{(4)} + m_{xx}^{r(4)} \right) \right) \quad (17)$$

Значения слагаемых (13) взяты из кинетического решения и представлены на Рисунке 2.

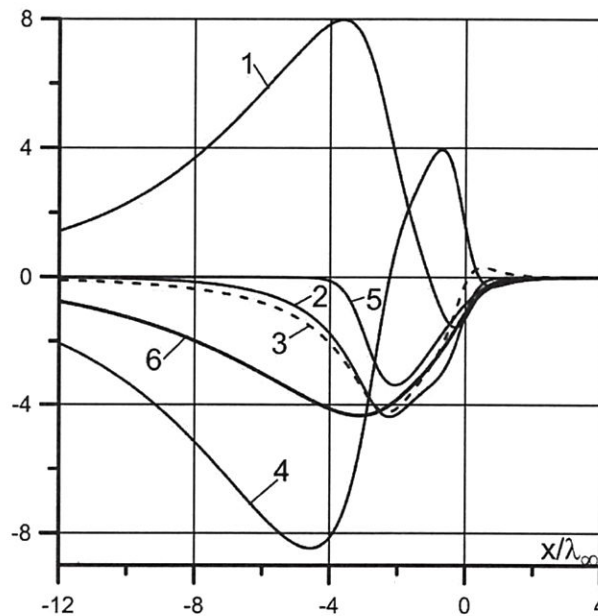


Рисунок 2 - Профили теплового потока и его составляющих в плоской ударной волне двухатомного газа. $M_\infty = 5$. 1 – (14), 2 – (15), 3 – (16), 4 – (17), 5 – q_x модели НСФ, 6 – q_x решение МКУ.

В решении МКУ (кривая 6) тепловой поток формируется в более широкой области, чем в решении НСФ (кривая 5). Основной вклад в тепловой поток вносит градиент моментов четвертого порядка, определение которых возможно только в системе моментных уравнений 4-го порядка. Напомним, что система НСФ – система неполного второго порядка, и в ней используется только член (16) (кривая 3) в первом приближении, т.е. закон Фурье. Остальные члены (13), включая (17), при переходе газа в равновесное состояние стремятся к нулю.

В сильно неравновесных течениях неравновесные напряжения и тепловые потоки в значительной степени определяются процессами, не учитываемыми моделью первого приближения – моделью НСФ.

Во второй главе рассматривается сверхзвуковое обтекание двухатомным газом пластины бесконечного размаха, установленной параллельно набегающему потоку. Носик пластины скруглен. Радиус скругления характеризует число Кнудсена Kn решаемой задачи. Целью работы является оценка максимального значения Kn , при котором решения для модели НСФ и М2Т практически совпадают.

Для плоского двумерного течения (ОХУ) использовалась модель НСФ, которая представляет собой систему моментных уравнений неполного второго порядка.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{c_v \rho} \left(P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + P_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + P_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (18)$$

В настоящей работе для коэффициента вязкости используется аппроксимация $\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^S$. Параметр $Z = 2.5$.

В двухтемпературной модели энергии теплового движения молекул рассматриваются отдельно. Система уравнений этой модели, в отличие от М2Т содержит два уравнения энергии с релаксационными членами, отвечающими за выполнение второго закона термодинамики:

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial T_t}{\partial x} + u_y \frac{\partial T_t}{\partial y} + \frac{2}{3\rho R} \left(\begin{array}{l} P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + P_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \\ P_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \end{array} \right) = -\frac{5-3\gamma}{2Z} \frac{T_t - T_r}{\tau_p} \quad (19)$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial T_r}{\partial x} + u_y \frac{\partial T_r}{\partial y} + \frac{2(\gamma-1)}{(5-3\gamma)\rho R} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) = \frac{3(\gamma-1)}{2Z} \frac{T_t - T_r}{\tau_p} \quad (20)$$

В этой модели коэффициент вязкости определяется поступательной температурой: $\mu/\mu_\infty = (T_t/T_\infty)^S$.

Решение системы дифференциальных уравнений формулировалось в виде краевой задачи на трехдиагональных матрицах с нестационарным членом,

развернутых по оси X . Перед носиком пластины ($y < 1$) значение искомой функции в правой граничной точке определялось условиями скольжения погранслоя (третья краевая задача), в остальной вычислительной области условием $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho, u_x, T) = 0$ (вторая краевая задача). Производные аппроксимировались центральными разностями на трех точках.

При проведении расчетов по двум моделям использовались идентичные расчетные сетки и алгоритмы. На Рисунке 3-4 показано распределение температуры при $M=2$ и различных числах Кнудсена.

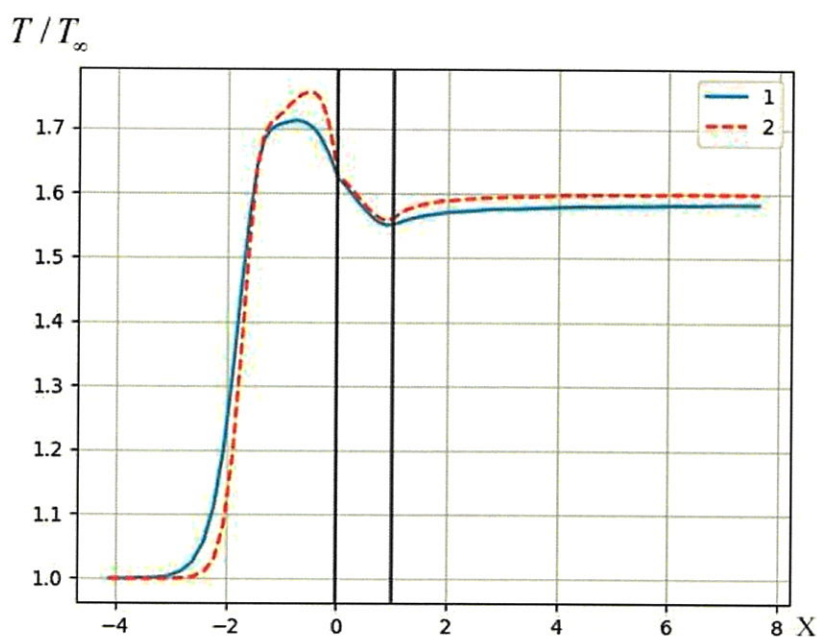


Рисунок 3 - Распределение температуры, $Kn=0.1$, $M=2$, 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления

В качестве практического примера отметим, что на высотах порядка 30 километров, характерных для летательных аппаратов с прямоточными реактивными двигателями, радиус скругления кромки воздухозаборника при указанных Kn может составлять от 10 до 1 мм.

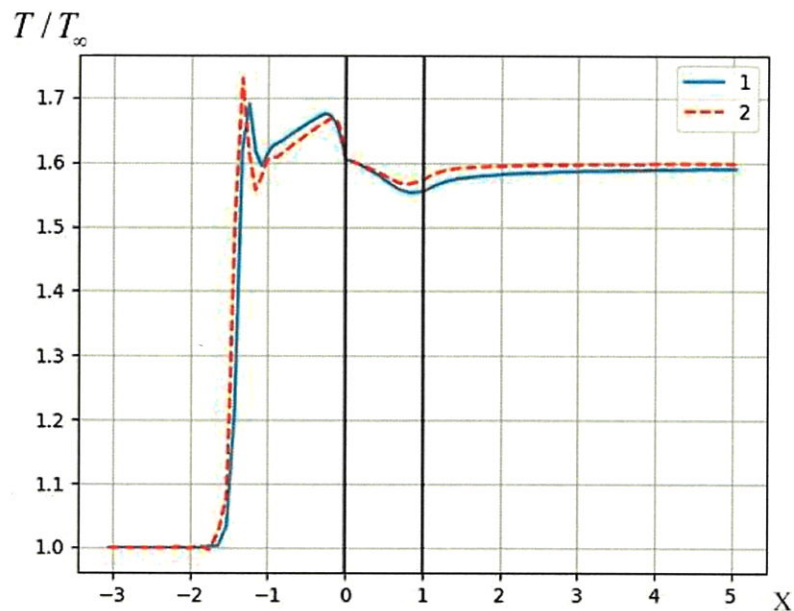


Рисунок 4 - Распределение температуры, $Kn=0.01$, $M=2$, 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления

Проведенные расчеты показывают, что при $Kn > 10^{-2}$ обе модели первого приближения, по разному описывающие энергообмен между поступательными и вращательными степенями свободы, приводят к существенно отличающимся распределениям температуры. Таким образом расширение области применимости модели НСФ до $Kn = 10^{-1}$ при расчетах обтекания поверхностей большой кривизны может приводить к существенной погрешности расчета.

В третьей главе предложен метод расчета обтекания тонкой пластины с искусственной точкой торможения. Рассматривается обтекание тонкой пластины бесконечного размаха, установленной под нулевым углом атаки. Численное решение задачи строится в прямоугольной декартовой системе координат OXY , начало которой расположено на носике пластины. Ось OY – нормаль к поверхности пластины. Ось OX на отрезке $x < 0$ совмещена с осью симметрии задачи, в остальной области – с поверхностью пластины.

В настоящей работе основное внимание уделяется обтеканию носовой части пластины, как наиболее неравновесной области течения. В этой связи протяженность пластины по оси OX не имеет принципиального значения, если она достаточно велика, чтобы не оказывать влияния на обтекание носовой части. При

такой постановке задачи и с учетом того, что толщина пластины пренебрежимо мала, в качестве характерного размера целесообразно принять среднюю длину свободного пробега молекулы в невозмущенном потоке. Пластина термостабилизирована и имеет температуру T_w .

Воспользуемся системой уравнений НСФ в безразмерной форме из второй главы настоящей работы. Для коэффициента вязкости используется аппроксимация $\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^s$. Показатель степени s принят $s=1$, а параметр Z в коэффициенте объемной вязкости принят $Z=2.5$.

На поверхности пластины выставлялись граничные условия скольжения погранслоя :

$$u_x|_{y=0} = \frac{\mu}{\rho\sqrt{T}} \left(\zeta_u \frac{\partial u_x}{\partial y} + \zeta_{ut} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (21)$$

$$T|_{y=0} - T_w = \zeta_T \frac{\mu}{\rho\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (22)$$

Значения коэффициентов ζ_{ut} , ζ_T при условии равенства единице коэффициентов аккомодации энергии и тангенциального импульса составляли $\zeta_{ut} = 1.431$, $\zeta_T = 0.2 \dots 0.735$. Коэффициент $\zeta_u = 2.862$ был завышен вдвое.

Уравнения (21) и (22) были преобразованы следующим образом:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\rho\sqrt{T}}{\zeta_u \mu} u_x - \frac{\zeta_{ut}}{\zeta_u \sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{4(\gamma-1)\rho\sqrt{T}}{(9\gamma-5)\zeta_T \mu} (T - T_w).$$

Было отмечено, такое преобразование позволяет включить граничные условия в разностную схему решения дифференциальных уравнений u_x и T . Кроме этого было учтено, что граничные условия скольжения погранслоя предусматривают линейный закон изменения скорости и температуры в кнудсеновском слое, т. е.

$$\left. \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$$

На участке этой оси, заканчивающемся носиком пластины и являющимся линией торможения, строится решение с точкой торможения на носике пластины. Для уравнения движения это первая краевая задача, так как в точке торможения заданы значения искомой функции u_x . Для уравнения энергии – третья краевая задача, связывающая в точке торможения значение температуры с ее производной:

$$T|_{x=0,y=0} - T_w = -\zeta_T \frac{\mu}{\rho\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial x}$$

Это выражение представляет собой граничное условие на поверхности малой площадки, внешняя нормаль которой направлена против оси OX .

Затем строится решение второй краевой задачи на всей оси OX . Весовые коэффициенты определены свободным параметром модели β , представляющим собой весовую долю решения с точкой торможения. Значение этого коэффициента подбирается в процессе тестирования модели.

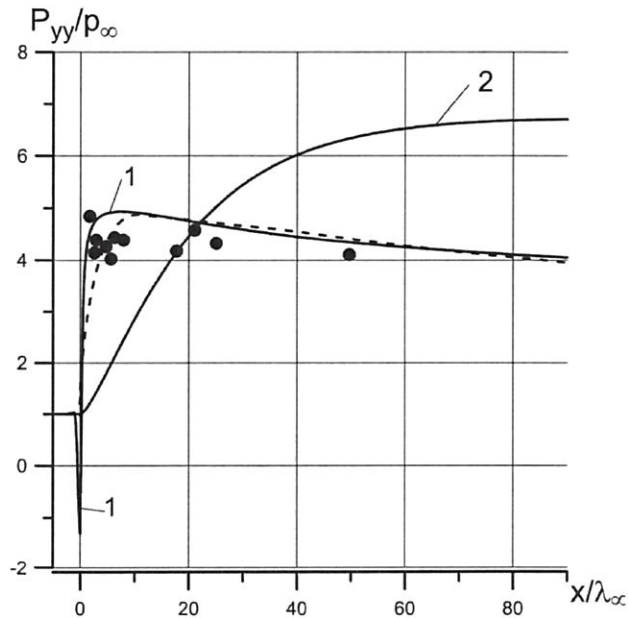


Рисунок 5 - Распределение нормального напряжения P_{yy} на линии $y=0$, $M_\infty=10.15$. Пунктирная линия – МКУ, маркеры – экспериментальные данные, 1 – решение НСФ с точкой торможения, 2 – решение НСФ без точки торможения

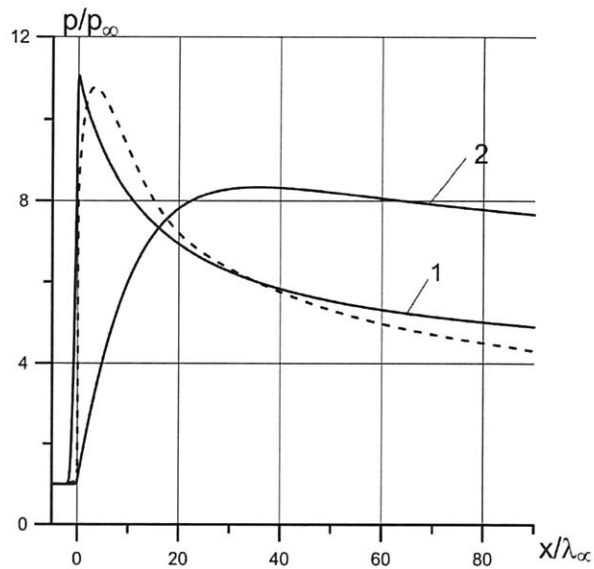


Рисунок 6 - Распределение давления на линии $y=0$, $M_{\infty}=10.15$. Пунктирная линия – МКУ, 1 – решение с НСФ точкой торможения, 2 – решение НСФ без точки торможения

Кривые распределений давления не содержат осцилляции и разрыва, что связано с тем, что давление является осредненной величиной нормальных напряжений, подчиняющейся закону сохранения энергии.

По данным рисунков 5 и 6 можно сделать вывод о том, что внесение в расчет точки торможения позволяет существенно улучшить решение модели НСФ.

Менее существенное улучшение наблюдается для температуры и плотности газа.

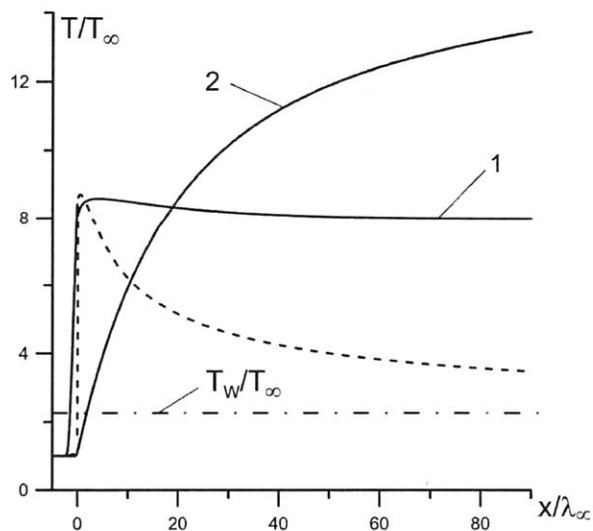


Рисунок 7 - Распределение температуры на линии $y=0$, $M_{\infty}=10.15$. Пунктирная линия – МКУ, штрихпунктирная линия – температура поверхности, 1 – решение НСФ с точкой торможения, 2 – решение НСФ без точки торможения

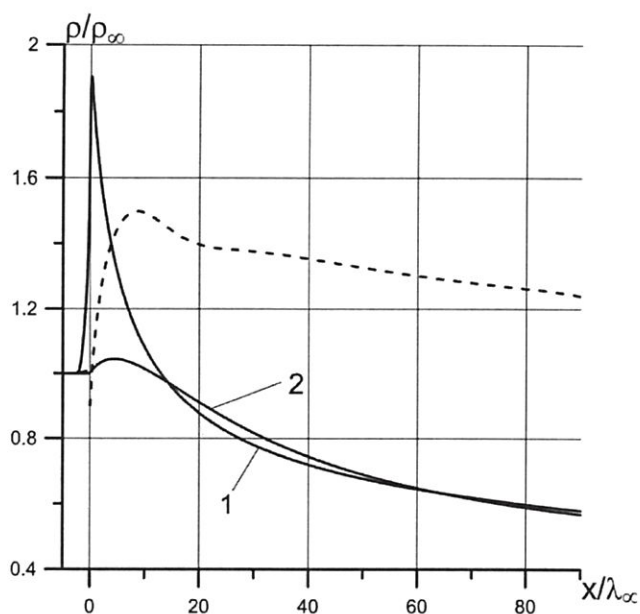


Рисунок 8 - Распределение плотности на линии $y=0$, $M_\infty=10.15$. Пунктирная линия – МКУ, 1 – решение НСФ с точкой торможения, 2 – решение НСФ без точки торможения

Обращает на себя внимание тот факт, что температура вдоль поверхности пластин не уменьшается даже на графиках модели НСФ с точкой торможения, хотя температура пластины в этой области существенно ниже температуры газа.

Предложенный вариант решения модели НСФ в задаче обтекания острой кромки позволяет существенно улучшить результаты расчета.

Анализ графиков распределения температуры и плотности позволяет предположить, что граничные условия скольжения погранслоя не достаточно адекватны физическим процессам, притекающим в условиях столь высокой динамической неравновесности.

В четвертой главе приведена оценка степени неравновесности для носика тонкой пластины и плоской ударной волны. Под степенью неравновесности будем понимать, определенную на единичном отрезке величину:

$$W = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{6 - 2\gamma}} \sqrt{\frac{p_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \frac{9}{4} (5 - 3\gamma)(\gamma - 1)(\rho R(T_i - T_r))^2}{\rho}}$$

Определенная таким образом степень неравновесности имеет простой физический смысл, наиболее наглядный на примере одноатомного газа, в котором множитель $5 - 3\gamma$ обращается в ноль. В этом случае дробь содержит два инварианта

тензора напряжений: его свертку и квадрат его девиатора. Множитель перед дробью выбран так, чтобы в теоретическом пределе степень неравновесности равнялась единице.

Теоретический предел неравновесного состояния имеет место в том случае, если вся энергия теплового движения молекул сосредоточена на одной поступательной степени свободы.

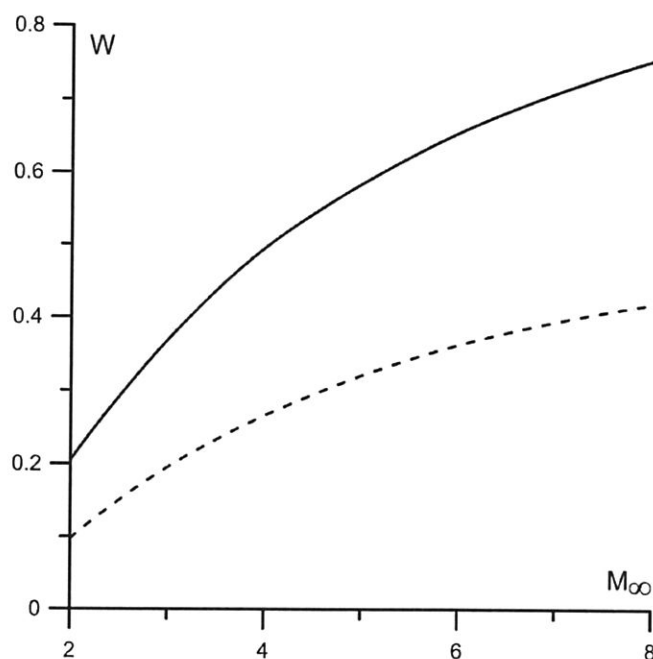


Рисунок 9 - Зависимость максимального значения степени неравновесности от числа Маха. Сплошная линия соответствует задаче об обтекании пластины, пунктирная – плоской ударной волне

Проведенные расчеты показывают, что течение в области носика тонкой пластины (острой кромки), существенно более неравновесно, чем в плоской ударной волне. Максимальные степени неравновесности отличаются примерно вдвое.

Из теории скачков уплотнения, используемой в механике сплошной среды, известно, что прямой скачок (плоская ударная волна) более интенсивен, чем косые скачки. При обтекании тонкой пластины возникает косой скачок. При гиперзвуковых числах Маха скачок почти прижат к обтекаемой поверхности.

С точки зрения молекулярно-кинетической теории газов ударная волна (скачок уплотнения) представляет собой высокоградиентную и, следовательно, высоко неравновесную область. При обтекании острой кромки на

неравновесность течения оказывает влияние не только большие скорости потока, но и малые размеры обтекаемого объекта, т.е. острой кромки.

В заключении представлены основные результаты диссертационной работы, соответствующие поставленной цели и задачам исследования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана физико-математическая модель высокоскоростного обтекания поверхностей большой кривизны.

Основные новые научные результаты, полученные в диссертационной работе, состоят в следующем:

1. Предложен метод решения модели НСФ при обтекании острой кромки пластины. Внесение в расчет точки торможения позволяет существенно улучшить решение модели НСФ. Анализ графиков распределения температуры и плотности позволяет предположить, что граничные условия скольжения погранслоя не достаточно адекватны физическим процессам, притекающим в условиях столь высокой динамической неравновесности

2. Проведена оценка моделей первого приближения по числам Кнудсена. Проведенные расчеты показали, что при $Kn > 10^{-2}$ модели НСФ и М2Т показали различные распределения температуры. Распределения плотности достаточно близки во всем интервале. Расширение области применимости модели НСФ до $Kn = 10^{-1}$ при расчете обтекания острых кромок может приводить к существенным погрешностям.

Перспективы дальнейшей разработки темы

Создание физико-математических моделей тел с более сложной геометрией, например клин. Постановка граничных условий, которые физически адекватно характеризуют течение в высоко неравновесной области.

Основные научные результаты диссертации изложены в работах, опубликованных соискателем ученой степени:

в журналах, входящих в Перечень ВАК:

1. Красавин Е.Э., Буданова С.Ю., Никитченко Ю.А. Варианты модели Навье-Стокса-Фурье для сверх- и гиперзвуковых течений [Электронный ресурс] // Труды МАИ. – 2020. – №112 – Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=116323>.

2. Красавин Е.Э., Никитченко Ю.А., Березко М.Э. Сравнение модели Навье-Стокса-Фурье и двухтемпературной модели на примере задачи обтекания поверхности большой кривизны [Электронный ресурс] // Труды МАИ. – 2023. – № 131. – Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=175915>.

3. Красавин Е.Э. Оценка степени неравновесности газа в сверхзвуковых потоках // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика. – 2024. – №1.

4. Красавин Е.Э., Никитченко Ю.А. Вариант расчета обтекания тонкой пластины с использованием модели Навье-Стокса-Фурье // Ученые записки ЦАГИ. – 2024. – №3.– с. 42-49.

в журналах, входящих в международные системы цитирования:

5. Красавин Е.Э., Никитченко Ю.А. Расчет обтекания кромки тонкой пластины высокоскоростным потоком с использованием модели Навье-Стокса-Фурье и модельного кинетического уравнения // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2023. – № 4. (перевод: Krasavin E.E., Nikitchenko Y.A. Calculation of High-Speed Flow past a Thin Plate Edge Using the Navier–Stokes–Fourier Model and Model Kinetic Equation // Russ. Aeronaut, 66. – 2023. – pp.741–747.). (SCOPUS).

материалы всероссийских и международных конференций:

6. Красавин Е.Э., Никитченко Ю.А., Буданова С.Ю. Структурный анализ систем моментных уравнений и уравнений Навье-Стокса-Фурье для неравновесных течений // 19-я Международная конференция «Авиация и

космонавтика»: Сборник материалов конференции. – Москва. – 2020 г. – с. 469-470.

7. Красавин Е.Э. Структурный анализ моментных уравнений на примере задачи о профиле плоской ударной волны. // XLVI Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения»: Сборник материалов конференции. – Москва. – МАИ. – 2020. – с. 881.

8. Красавин Е.Э. Анализ систем моментных уравнений различных порядков и уравнений Навье-Стокса-Фурье для течений высокой степени неравновесности // XLVII Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения»: Сборник материалов конференции. – Москва. – 2021. – с. 11-12.

9. Красавин Е.Э., Никитченко Ю.А. Оценка применимости моделей первого приближения для описания обтекания поверхностей большой кривизны // Материалы XXIII Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023). – 2023. – с. 392-394.

10. Красавин Е.Э., Никитченко Ю.А. Вариант расчета обтекания тонкой пластины с использованием модели Навье-Стокса-Фурье // Материалы научного семинара С.М. Белоцерковского. – Москва. – 2024.

11. Красавин Е.Э., Никитченко Ю.А. Метод расчета обтекания абсолютно острой кромки с использованием модели Навье-Стокса-Фурье // Материалы XV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2024). – 2024. – с. 76-77.