

На правах рукописи



Давыдов Сергей Андреевич

**Анализ напряжённо-деформированного  
состояния упругих сред  
с учётом тепломассопереноса**

01.02.04 – «Механика деформируемого твёрдого тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2020

Работа выполнена в *ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»*.

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, доцент Земсков Андрей Владимирович.

**Официальные оппоненты:**

**Келлер Илья Эрнстович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией нелинейной механики деформируемого твердого тела «Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН» – филиала ФГБНУ Пермского федерального исследовательского центра Уральского отделения РАН («ИМСС УрО РАН»).

**Любичева Анастасия Николаевна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории трибологии ФГБНУ Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН).

**Ведущая организация:** Институт проблем машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук» («ИПМ РАН»).

Защита состоится *«09» декабря 2020 г.* в *14:00* на заседании диссертационного совета *Д. 212.125.05* при *ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»*, расположенном по адресу: *125993, г.Москва, Волоколамское шоссе, дом 4, МАИ*.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»* и на сайте: <https://mai.ru/upload/iblock/7ca/Dissertatsiya-Davydov-S.A..pdf>

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

*к.ф.-м.н., доцент*

*Федотенков Григорий Валерьевич.*

## Общая характеристика работы

На современном уровне развития технологий создание материалов с заранее запрограммированными свойствами и модификация уже имеющихся материалов под новые стандарты качества – одно из актуальных направлений разработок в области технологии обработки конструкционных материалов. Разработка математических моделей воздействия различных факторов на обрабатываемый материал и анализ получаемых результатов позволяют рассмотреть большее число эффектов взаимодействия физических полей при минимизации финансовых затрат в случае исследования сложных высокотехнологических процессов.

Существует целый ряд подходов к созданию математических моделей, и один из перспективных, дающих возможность наиболее точно описать комплексные технологические и физические процессы, является построение и анализ моделей связанных полей: механических, тепловых, электрических, магнитных и диффузионных. Известно, что деформация тела связана с изменением содержащегося в нем тепла, а именно, изменяющееся во времени поле деформаций вызывает изменение поля температуры, и наоборот. Таким же образом, наличие диффузионных потоков приводит к перераспределению компонентов вещества, поэтому в диффузионной зоне возникает напряжённо-деформированное состояние, которое в свою очередь за счет деформации кристаллической решетки влияет на величину диффузионного потока.

Моделирование связанности полей необходимо не только при описании технологических процессов. Использование функциональных элементов машин и приборов, изготовленных из многокомпонентных материалов, в условиях интенсивных нагрузок различной физической природы обуславливает необходимость исследования термомеханического поведения этих элементов. Количественное описание и прогнозирование свойств тел из упомянутых материалов основывается на теоретических моделях механики сплошной среды, которые в рамках континуальных представлений учитывают взаимосвязь физико-механических полей в телах сложной внутренней структуры.

Модели, рассматривающие поведение материала в упругой зоне с учётом тепломассопереноса, называются термоупругодиффузионными моделями. Также применимы словосочетания “термоупругая диффузия”, “термоупругость с учетом диффузии”. Термин “thermoelastic diffusion” часто используется за рубежом наряду с термином “thermoelastodiffusion”. Следует отметить, что в настоящее время не существует общих методов аналитического исследования нестационарных задач механики связанных полей, в частности задач термомеханодиффузии.

Данная работа посвящена разработке аналитических методов исследования одного из классов нестационарных задач термоупругой диффузии, а именно – одномерных задач для тел с плоскими границами.

**Целью работы** является исследование нестационарного взаимодействия механических, температурных и диффузионных полей в упругих средах, включающее постановки и решения новых задач, а также практические расчеты, позволяющие количественно оценить эффекты, обусловленные взаимным влиянием указанных полей друг на друга.

**Актуальность работы** обусловлена все более и более возрастающим интересом к проблеме исследования связанных термомеханодиффузионных процессов, что подтверждается большим числом современных публикаций как в России, так и за рубежом. Модели, описывающие указанные процессы, постоянно совершенствуются с целью получения более точного описания функционирования конструкций и их отдельных элементов, работающих в условиях воздействия нагрузок различной физической природы.

**Методы исследования.** Для построения замкнутой модели термоупругой диффузии используется аппарат линейной теории упругости, законы термодинамики и тепломассопереноса. Метод решения базируется на теории обобщенных функций, с помощью которой искомые решения представляются в интегральной форме. Ядрами этих представлений являются функции Грина, для нахождения которых используется метод разделения переменных, реализующийся с помощью разложений в ряды по собственным функциям термоупругодиффузионного оператора и преобразования Лапласа. Указанный

подход позволяет в явном виде получить решения рассматриваемых задач, что в свою очередь позволяет с помощью математических пакетов проанализировать эффекты, связанные с взаимодействием механического, температурного и диффузионных полей.

**Научная новизна** работы состоит в построении решений нового класса одномерных нестационарных задач термоупругой диффузии в прямоугольной декартовой системе координат с учетом релаксации тепловых и диффузионных потоков, а также наличия перекрестных диффузионных эффектов.

**Достоверность и обоснованность результатов** обеспечивается использованием известных математических методов построения моделей механики связанных полей, которые базируются на известных уравнениях механики деформируемого твёрдого тела, тепломассопереноса и термодинамики. Для решения начально-краевых задач используются апробированные методы математической физики. Для верификации результатов выполнялось сравнение полученных решений задач термомеханодиффузии с известными решениями задач упругости и исследовались переходы к решениям соответствующих статических задач.

**Практическая значимость работы** состоит в разработке методик расчета напряженно-деформированного состояния упругих сред и элементов конструкций, работающих в условиях нестационарных внешних воздействий, с учетом протекающих в них явлений тепломассопереноса. Интерес к подобного рода проблемам объясняется тем, что взаимодействие физических полей в сплошных средах может оказывать нежелательное влияние на функционирование конструкций и их отдельных элементов, работающих в условиях нагрузок различной физической природы. Анализ возникающих при этом эффектов невозможен без разработки моделей термомеханодиффузии и методов решения соответствующих начально-краевых задач. Всё это в целом обуславливает практическую значимость работы.

**Апробация результатов исследования.** Все основные результаты работы были предметом докладов, обсуждений и дискуссий на российских и международных конференциях, симпозиумах и съездах:

- 14th International Conference on Fracture ICF 14 (Rhodes, Greece, 2017);
- 7th International Conf. on Math Modeling in Physical Sciences (Moscow, 2018);
- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Московская область, Ярополец, Кременки, 2013 – 2020);
- Междунар. научно-практические конф. «Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов» и «Проблемы безопасности на транспорте» (Белоруссия, Гомель, 2017 – 2019);
- XIX Всероссийская школа-семинар «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2019);
- Междунар. конф. «Авиация и космонавтика» (Москва, 2014 – 2019);
- Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики». (Тула, 2014);
- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2014 – 2019);
- Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, 2014 – 2020);
- Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2015 – 2017);
- Всерос. школа-семинар «Мат. моделирование и биомех. в современном университете» (Краснодарский край, Дивноморское, 2016 – 2019);
- Всероссийская конференция молодых учёных-механиков (Сочи, 2017, 2018);
- IV Конференция молодых ученых и специалистов «Научно-технологическое развитие судостроения» (Санкт-Петербург, 2017);
- Междунар. конф. «Современные проб. МСС» (Ростов-на-Дону, 2016, 2018);
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019);

На различных этапах работа поддерживалась грантом РФФИ (код проекта 18-31-00437).

**Публикации.** Основные материалы диссертации опубликованы в 35 печатных работах, из них 10 статей в рецензируемых журналах, 25 в сборниках

трудов конференций и тезисов докладов.

**Структура и объём диссертационной работы:** Диссертация состоит из введения, трёх глав, списка литературы из 187 наименований, заключения и приложений. Объём диссертации – 120 страниц, включая 27 рисунков.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

**В первой главе** дан обзор современного состояния исследований, из которого следует, что несмотря на большое разнообразие существующих в настоящее время моделей термомехано-диффузии, учитывающих в том числе релаксационные тепловые и диффузионные эффекты, в основном рассматривались несвязанные задачи, либо связанные задачи в статической или в стационарной постановке. Для решения нестационарных задач в большинстве случаев использовались численные методы исследования.

Также в этой главе построена замкнутая линейная система уравнений термоупругой диффузии для многокомпонентных анизотропных сред в произвольной криволинейной системе координат. Из неё, как частный случай, получена одномерная модель в прямоугольной декартовой системе координат (точки – производные по безразмерному времени  $\tau$ , а штрихи – производные по безразмерной координате  $x$ ):

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' - b_u \vartheta' - \sum_{q=1}^N \alpha_q \eta_q' + F_1(x, \tau), \\ \dot{\vartheta} + \tau_{\vartheta} \ddot{\vartheta} &= \kappa \vartheta'' - b_{\vartheta} (\dot{u}' + \tau_{\vartheta} \ddot{u}') - \sum_{q=1}^N \beta_q (\dot{\eta}_q + \tau_{\vartheta} \ddot{\eta}_q) + F_2(x, \tau), \\ \dot{\eta}_q + \tau_q \ddot{\eta}_q &= \sum_{p=1}^N D_{qp} \eta_p'' - \Lambda_q u''' - M_q \vartheta'' + F_{q+2}(x, \tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь все параметры являются безразмерными. Их связь с размерными величинами определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x_1}{L}, \quad u = \frac{u_1}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \alpha_q = \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}}, \\
D_{qp} &= \frac{D_{11}^{(qp)}}{CL}, \quad b_\vartheta = \frac{b_{11}}{\rho c_0}, \quad \kappa = \frac{\kappa_{11}}{\rho c_0 LC}, \quad \tau_\vartheta = \frac{Ct_\vartheta}{L}, \quad \tau_\eta = \frac{Ct_\eta^{(q)}}{L}, \\
\Lambda_q &= \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_{11}^{(qq)} \alpha_{11}^{(q)}}{\rho RT_0 CL}, \quad M_q = \frac{n_0^{(q)} D_{11}^{(qq)} \ln [n_0^{(q)} \gamma^{(q)}]}{CL}, \quad \vartheta = \frac{T - T_0}{T_0}, \\
\beta_q &= \frac{R \ln [n_0^{(q)} \gamma^{(q)}]}{m^{(q)} c_0}, \quad b_u = \frac{b_{11} T_0}{C_{1111}}, \quad F_1(\tau, x) = \frac{F(t, x_1) L}{C^2}, \\
F_2(\tau, x) &= \frac{F_\vartheta(t, x_1) L}{c_0 C T_0}, \quad F_{q+2}(\tau, x) = \frac{F_\eta^{(q)}(t, x_1) L}{n_0^{(q)} C}.
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $L$  – характерный линейный размер,  $C$  – скорость волн растяжения-сжатия,  $t$  – время,  $x_i$  – прямоугольные декартовы координаты;  $u_i$  – компоненты вектора перемещения;  $\rho$  – плотность среды;  $C_{ijkl}$  – компоненты тензора упругих постоянных;  $T_0$  – начальная температура среды;  $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ ;  $n_0^{(q)}$ ,  $n^{(q)}$  – начальная и актуальная концентрации (массовые доли) компоненты  $q$ -го вещества; коэффициенты  $\alpha_{ij}^{(q)}$  характеризуют объёмное расширение за счет массопереноса;  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $D_{ij}^{(qp)}$  – коэффициенты диффузии;  $m^{(q)}$  – молярная масса;  $b_{ij}$  – температурные постоянные;  $\kappa_{ij}$  – коэффициенты теплопроводности;  $c_0$  – удельная теплоемкость;  $F$  – плотность массовых сил;  $F_\vartheta$  – объемная плотность тепловых источников;  $F_\eta^{(q)}$  – плотность источников массопереноса;  $t_\vartheta$  – время релаксации тепловых потоков;  $t_\eta^{(q)}$  – время релаксации диффузионных потоков.

Уравнения (1) дополняются граничными условиями 3-х видов:

$$\begin{aligned}
u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), \quad u|_{x=1} = f_{12}(\tau), \\
-\kappa \vartheta'|_{x=0} &= f_{21}(\tau), \quad \left( \Lambda_q u'' + M_q \vartheta' - \sum_{r=1}^N D_{qr} \eta_r' \right) \Big|_{x=0} = f_{q+2,1}(\tau), \\
-\kappa \vartheta'|_{x=1} &= f_{22}(\tau), \quad \left( \Lambda_q u'' + M_q \vartheta' - \sum_{r=1}^N D_{qr} \eta_r' \right) \Big|_{x=1} = f_{q+2,2}(\tau);
\end{aligned} \tag{3}$$



$$\begin{aligned}
\vartheta|_{x=0} &= f_{21}(\tau), & \eta_q|_{x=0} &= f_{q+2,1}(\tau), \\
\vartheta|_{x=1} &= f_{22}(\tau), & \eta_q|_{x=1} &= f_{q+2,2}(\tau), \\
\left(u' - b_u \vartheta - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j\right)\Big|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & \left(u' - b_u \vartheta - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j\right)\Big|_{x=1} &= f_{12}(\tau);
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
-\kappa \vartheta'|_{x=0} &= f_{21}(\tau), & \vartheta|_{x=1} &= f_{22}(\tau), \\
u|_{x=0} &= f_{11}(\tau), & \left(\Lambda_q u'' + M_q \vartheta' - \sum_{r=1}^N D_{qr} \eta_r'\right)\Big|_{x=0} &= f_{q+2,1}(\tau), \\
\eta_q|_{x=1} &= f_{q+2,2}(\tau), & \left(u' - b_u \vartheta - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j\right)\Big|_{x=1} &= f_{12}(\tau).
\end{aligned} \tag{5}$$

Начальные условия принимаются нулевыми.

Решение сформулированных задач представляем в виде свёрток:

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{k=1}^{N+2} \left[ \int_{\Omega} \tilde{G}_{1k}(x, \xi, \tau) F_k(\xi, \tau) d\xi + \sum_{l=1}^2 G_{1kl}(x, \tau) * f_{kl}(\tau) \right], \\
\vartheta &= \sum_{k=1}^{N+2} \left[ \int_{\Omega} \tilde{G}_{2k}(x, \xi, \tau) F_k(\xi, \tau) d\xi + \sum_{l=1}^2 G_{2kl}(x, \tau) * f_{kl}(\tau) \right], \\
\eta_q &= \sum_{k=1}^{N+2} \left[ \int_{\Omega} \tilde{G}_{q+2,k}(x, \xi, \tau) F_k(\xi, \tau) d\xi + \sum_{l=1}^2 G_{q+2,kl}(x, \tau) * f_{kl}(\tau) \right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь символ «\*» означает свертку по времени;  $\tilde{G}_{ik} = \tilde{G}_{ik}(x, \xi, \tau)$  – объёмные, а  $G_{ikl} = G_{ikl}(x, \tau)$  – поверхностные функции Грина задачи (1) ( $i = \overline{1, N+2}$ ). В качестве геометрической области  $\Omega$  рассматриваются: одномерный плоский слой  $[0, 1]$  и полупространство  $[0, \infty)$ .

Поверхностные функции Грина  $G_{ikl}(x, \tau)$  удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}
\ddot{G}_{1kl} &= G''_{1kl} - b_u G'_{2kl} - \sum_{q=1}^N \alpha_q G'_{q+2,kl}, \\
\dot{G}_{2kl} + \tau \vartheta \ddot{G}_{2kl} &= \kappa G''_{2kl} - b_\vartheta \left( \dot{G}'_{1kl} + \tau \vartheta \ddot{G}'_{1kl} \right) - \sum_{q=1}^N \beta_q \left( \dot{G}_{q+2,kl} + \tau \vartheta \ddot{G}_{q+2,kl} \right),
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\dot{G}_{q+2,kl} + \tau_q \ddot{G}_{q+2,kl} = \sum_{p=1}^N D_{qp} G''_{p+2,kl} - \Lambda_q G'''_{1kl} - M_q G''_{2kl};$$

а также каким-либо из граничных условий, аналогичных (3) – (5). Для демонстрации термоупругодиффузионных эффектов ограничимся рассмотрением условий, аналогичных (3):

$$\begin{aligned} G_{1k}(x, \tau)|_{x=0} &= \delta_{1k} \delta(\tau), & -\kappa G'_{2k}(x, \tau)|_{x=0} &= \delta_{2k} \delta(\tau), \\ \left( \Lambda_q G''_{1k}(x, \tau) + M_q G'_{2k}(x, \tau) - \sum_{p=1}^N D_{qp} G'_{p+2,k}(x, \tau) \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{q+2,k} \delta(\tau), \\ G_{1k}(x, \tau)|_{x=1} &= 0, & -\kappa G'_{2k}(x, \tau)|_{x=1} &= 0, \\ \left( \Lambda_q G''_{1k}(x, \tau) + M_q G'_{2k}(x, \tau) - \sum_{p=1}^N D_{qp} G'_{p+2,k}(x, \tau) \right) \Big|_{x=1} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Объёмные функции Грина  $\tilde{G}_{ikl}(x, \xi, \tau)$  удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{G}}_{1k} &= \tilde{G}''_{1k} - b_u \tilde{G}'_{2kl} - \sum_{q=1}^N \alpha_q \tilde{G}'_{q+2,kl} + \delta_{1k} \delta(x - \xi) \delta(\tau), \\ \ddot{\tilde{G}}_{2kl} + \tau_\vartheta \ddot{\tilde{G}}_{2k} &= \kappa \tilde{G}''_{2k} - b_\vartheta \left( \dot{\tilde{G}}'_{1k} + \tau_\vartheta \ddot{\tilde{G}}'_{1k} \right) - \\ &- \sum_{q=1}^N \beta_q \left( \dot{\tilde{G}}_{q+2,k} + \tau_\vartheta \ddot{\tilde{G}}_{q+2,kl} \right) + \delta_{2k} \delta(x - \xi) \delta(\tau), \\ \dot{\tilde{G}}_{q+2,kl} + \tau_q \ddot{\tilde{G}}_{q+2,kl} &= \sum_{p=1}^N D_{qp} \tilde{G}''_{p+2,kl} - \Lambda_q \tilde{G}'''_{1k} - M_q \tilde{G}''_{2kl} + \delta_{q+2,k} \delta(x - \xi) \delta(\tau); \end{aligned} \quad (9)$$

а также однородным граничным условиям, соответствующим (3) – (5).

**Во второй главе** в рамках построенных моделей рассматривается одномерная нестационарная задача термоупругой диффузии для слоя и полупространства в декартовой системе координат с учётом конечной скорости распространения тепловых и диффузионных возмущений.

Применяя к (7) и (8) преобразование Лапласа по времени с учётом нулевых начальных условий ( $s$  – параметр преобразования; верхний индекс «L» обозначает трансформанту Лапласа соответствующей функции), получаем

систему вида:

$$\begin{aligned}
s^2 G_{1k}^L(x, s) &= G_{1k}^{L''}(x, s) - b_u G_{2k}^{L'}(x, s) - \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+2,k}^{L'}(x, s), \\
\omega(s) G_{2k}^L(x, s) &= \kappa G_{2k}^{L''}(x, s) - b_\vartheta \omega(s) G_{1k}^{L'}(x, s) - \omega(s) \sum_{q=1}^N \beta_q G_{q+2,k}^L(x, s), \\
\chi_q(s) G_{q+2,k}^L(x, s) &= \sum_{p=1}^N D_{qp} G_{p+2,k}^{L''}(x, s) - \Lambda_q G_{1k}^{L'''}(x, s) - M_q G_{2k}^{L''}(x, s);
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
G_{1k}^L(x, s)|_{x=0} &= \delta_{1k}, \quad -\kappa G_{2k}^{L'}(x, s)|_{x=0} = \delta_{2k}, \\
\left( \Lambda_q G_{1k}^{L''}(x, s) + M_q G_{2k}^{L'}(x, s) - \sum_{p=1}^N D_{qp} G_{p+2,k}^{L'}(x, s) \right) \Big|_{x=0} &= \delta_{q+2,k}, \\
G_{1k}^L(x, s)|_{x=1} &= 0, \quad -\kappa G_{2k}^{L'}(x, s)|_{x=1} = 0, \\
\left( \Lambda_q G_{1k}^{L''}(x, s) + M_q G_{2k}^{L'}(x, s) - \sum_{p=1}^N D_{qp} G_{p+2,k}^{L'}(x, s) \right) \Big|_{x=1} &= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Для краткости записи в (10) введены следующие обозначения:

$$\omega(s) = s(1 + \tau_\vartheta s), \quad \chi_q(s) = s(1 + \tau_q s). \tag{12}$$

Далее представляем изображения функций Грина в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
G_{1k}^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}^L(s) \sin(\lambda_n x) \quad (\lambda_n = \pi n), \\
\left\{ \begin{array}{l} G_{2k}^L(x, s) \\ G_{q+2,k}^L(x, s) \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} G_{2k0}^L(s) \\ G_{q+2,k0}^L(s) \end{array} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} G_{2kn}^L(s) \\ G_{q+2,kn}^L(s) \end{array} \right\} \cos(\lambda_n x).
\end{aligned} \tag{13}$$

Для того, чтобы найти указанные коэффициенты разложения

$$G_{1kn}^L(s) \equiv G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, s) = 2 \int_0^1 G_{1k}^L(x, s) \sin(\lambda_n x) dx, \tag{14}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{2kn}^L(s) \\ G_{q+2,kn}^L(s) \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} G_{2k}^{Lc}(\lambda_n, s) \\ G_{q+2,k}^{Lc}(\lambda_n, s) \end{array} \right\} = 2 \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} G_{2k}^L(x, s) \\ G_{q+2,k}^L(x, s) \end{array} \right\} \cos(\lambda_n x) dx,$$

умножаем в (10) первое уравнение на  $2 \sin(\lambda_n x)$ , а остальные – на  $2 \cos(\lambda_n x)$ . Затем интегрируем по пространственной переменной  $x$  в интервале от 0 до 1. Получаем следующую СЛАУ относительно коэффициентов  $G_{ikn}^L$ :

$$\begin{aligned} k_1 G_{1kn}^L - b_u \lambda_n G_{2kn}^L - \lambda_n \sum_{q=1}^N \alpha_q G_{q+2,kn}^L &= F_1, \\ b_\vartheta \omega \lambda_n G_{1kn}^L + k_2 G_{2kn}^L + \omega \sum_{q=1}^N \beta_q G_{q+2,kn}^L &= F_2, \end{aligned} \quad (15)$$

$$-\Lambda_q \lambda_n^3 G_{1kn}^L - M_q \lambda_n^2 G_{2kn}^L + k_{q+2} G_{q+2,kn}^L + \lambda_n^2 \sum_{p=1, p \neq q}^N D_{qp} G_{p+2,kn}^L = F_{q+2},$$

где

$$F_1 = 2\lambda_n \delta_{1k}, \quad F_2 = 2(b_\vartheta \omega \delta_{1k} + \delta_{2k}), \quad F_{q+2} = 2(-\Lambda_q \lambda_n^2 \delta_{1k} + \delta_{q+2,k}); \quad (16)$$

$$k_1(\lambda_n, s) = s^2 + \lambda_n^2, \quad k_2(\lambda_n, s) = \omega(s) + \kappa \lambda_n^2, \quad k_{q+2}(\lambda_n, s) = \chi_q(s) + D_{qq} \lambda_n^2. \quad (17)$$

Решение системы (15) имеет вид

$$G_{210}^L = 2b_\vartheta, \quad G_{220}^L = 2\frac{1}{\omega}, \quad G_{2,q+2,0}^L = -2\frac{\beta_q}{\chi_q}, \quad G_{q+2,q+2,0}^L = 2\frac{1}{\chi_q}; \quad (18)$$

$$G_{ikn}^L = \frac{P_{ik}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}. \quad (19)$$

Здесь  $P(\lambda_n, s)$  – определитель однородной системы (15)

$$P(\lambda_n, s) = \begin{vmatrix} k_1 & -b_u \lambda_n & -\alpha_1 \lambda_n & -\alpha_2 \lambda_n & \dots & -\alpha_N \lambda_n \\ b_\vartheta \lambda_n \omega & k_2 & \beta_1 \omega & \beta_2 \omega & \dots & \beta_N \omega \\ -\Lambda_1 \lambda_n^3 & -M_1 \lambda_n^2 & k_3 & D_{12} \lambda_n^2 & \dots & D_{1N} \lambda_n^2 \\ -\Lambda_2 \lambda_n^3 & -M_2 \lambda_n^2 & D_{21} \lambda_n^2 & k_4 & \dots & D_{2N} \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Lambda_N \lambda_n^3 & -M_N \lambda_n^2 & D_{N1} \lambda_n^2 & D_{N2} \lambda_n^2 & \dots & k_N \end{vmatrix}, \quad (20)$$

а  $P_{ik}(\lambda_n, s)$  – определители, полученные по правилу Крамера из  $P(\lambda_n, s)$  путём замены  $i$ -ого столбца на столбец

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_{N+2})^T. \quad (21)$$

Таким образом получены коэффициенты разложения изображений функций Грина (13) задачи (1), (3).

Далее производится переход к оригиналам. Так как функции  $P(\lambda_n, s)$  и  $P_{ik}(\lambda_n, s)$  являются многочленами, то изображения коэффициентов Фурье для функций Грина являются рациональными функциями относительно параметра преобразования  $s$ . Поэтому, для нахождения их оригиналов воспользуемся таблицами операционного исчисления и теоремами о вычетах.

Пусть  $s_{jn} = s_j(\lambda_n) \in \mathbb{C}$  ( $j = \overline{1, 2N+4}$ ) – нули многочлена  $P(\lambda_n, s)$ , тогда оригиналы функций Грина для данной задачи в силу линейности преобразования Лапласа примут вид:

$$G_{1k}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1kn}(\tau) \sin(\lambda_n x),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{2k}(x, \tau) \\ G_{q+2,k}(x, \tau) \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} G_{2k0}(\tau) \\ G_{q+2,k0}(\tau) \end{array} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} G_{2kn}(\tau) \\ G_{q+2,kn}(\tau) \end{array} \right\} \cos(\lambda_n x); \quad (22)$$

где

$$G_{210} = 2b_\vartheta \delta(\tau), \quad G_{220} = 2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\vartheta}\right) \right],$$

$$G_{2,q+2,0} = -2\beta_q \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_q}\right) \right], \quad G_{q+2,q+2,0} = 2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_q}\right) \right]; \quad (23)$$

$$G_{ikn} = \sum_{j=1}^{2N+4} \frac{P_{ik}(\lambda_n, s_{jn})}{P'(\lambda_n, s_{jn})} \exp(s_{jn}\tau). \quad (24)$$

Здесь штрих обозначает производную по параметру  $s$ .

Для нахождения перемещений, а так же приращений температуры и концентраций, найденные функции Грина (22) подставляются в свёртки (6).

Результаты второй главы опубликованы в работах [1–5, 7, 9, 13–24, 26, 30, 32, 34].

**В третьей главе** приводится анализ полученных решений, исследуется влияние связанности полей перемещений, температур и концентраций. Также рассматривается учёт конечной скорости распространения тепловых и диффузионных возмущений. Показана необходимость учёта релаксационных эф-

фффектов в связанных задачах термоупругой диффузии на временах, соизмеримых с этими временами релаксации. Помимо этого, исследовано влияние учёта перекрёстных диффузионных эфффектов на термоупругодиффузионные процессы в сплошных средах. Построено решение стационарной задачи термоупругой диффузии для многокомпонентных сред. Приведён переход от нестационарного к стационарному решению.

Рассмотрим задачу (1) для теплоизолированного и зафиксированного на границах однородного слоя из дюралюминия ( $q = 1 : 95\%$  – алюминий,  $q = 2 : 5\%$  – медь) толщиной 1мм при температуре 600К. Безразмерные величины с учётом формул (2) имеют вид:

$$\begin{aligned}
M_1 &= -7,24 \cdot 10^{-14}, & M_2 &= -1,57 \cdot 10^{-18}, & \Lambda_1 &= 8,91 \cdot 10^{-15}, \\
\Lambda_2 &= 1,05 \cdot 10^{-18}, & D_{11} &= 3,29 \cdot 10^{-15}, & D_{12} &= 5,24 \cdot 10^{-20}, \\
D_{21} &= 4,54 \cdot 10^{-16}, & D_{22} &= 4,13 \cdot 10^{-20}, & \alpha_1 &= 4,41 \cdot 10^{-6}, \\
\alpha_2 &= 9,29 \cdot 10^{-7}, & \kappa &= 9,65 \cdot 10^{-6}, & b_u &= 1,38 \cdot 10^{-2}, \\
b_\vartheta &= 1.01, & \beta_1 &= -7,12 \cdot 10^{-5}, & \beta_2 &= -6.47 \cdot 10^{-6}, \\
\tau_T &= 6.37 \cdot 10^{-2}, & \tau_1 &= 1.27 \cdot 10^5, & \tau_2 &= 2.55 \cdot 10^5.
\end{aligned} \tag{25}$$

Положим для расчёта все правые части в граничных условиях (3) равными нулю, кроме диффузионного потока на верхней границе  $x = 0$ :

$$f_{31}(\tau) = \varphi \cdot H(\tau), \tag{26}$$

где полагаем  $\varphi = 10^{-16}$ . Тогда решение задачи имеет вид ( $\lambda_n = \pi n$ ):

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \frac{(e^{s_j \tau} - 1) P_{13}(\lambda_n, s_j)}{s_j P'(\lambda_n, s_j)} \sin(\lambda_n x), \\
\vartheta(x, \tau) &= \varphi \vartheta_0 + \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \frac{(e^{s_j \tau} - 1) P_{23}(\lambda_n, s_j)}{s_j P'(\lambda_n, s_j)} \cos(\lambda_n x), \\
\eta_q(x, \tau) &= \delta_{3q} \varphi \eta_{30} + \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \frac{(e^{s_j \tau} - 1) P_{q+2,3}(\lambda_n, s_j)}{s_j P'(\lambda_n, s_j)} \cos(\lambda_n x).
\end{aligned} \tag{27}$$

Нулевые гармоники  $\vartheta_0$  и  $\eta_{30}$  представлены так:

$$\vartheta_0 = -2\beta_1 \tau - 2\beta_1 \tau_\vartheta (e^{-\tau/\tau_\vartheta} - 1), \quad \eta_{30} = 2\tau + 2\tau_q (e^{-\tau/\tau_q} - 1).$$

Результаты вычисления свёрток (6) показаны на Рис. 1 – 4. Они демонстрируют взаимосвязь механических и диффузионных полей при заданном диффузионном потоке (26). Вычисления проводились при 1000 членах рядов Фурье. Дальнейшее увеличение количества членов ряда не приводит к каким-либо видимым изменениям. Линии: сплошная –  $\tau = 1 \cdot 10^{13}$ , пунктирная –  $\tau = 2 \cdot 10^{13}$ , штриховая –  $\tau = 3 \cdot 10^{13}$ .  $\tau = 10^{13}$  примерно соответствует 432 часам.

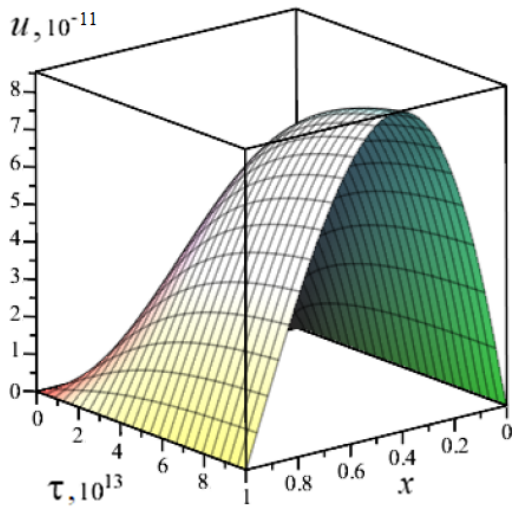


Рис. 1. Зависимость  $u(x, \tau)$  от  $x$  и  $\tau$ .

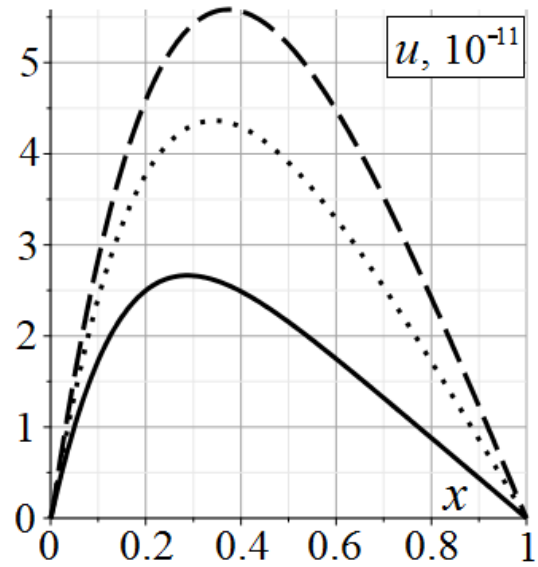


Рис. 2. Зависимость  $u(x, \tau)$  от  $x$ .

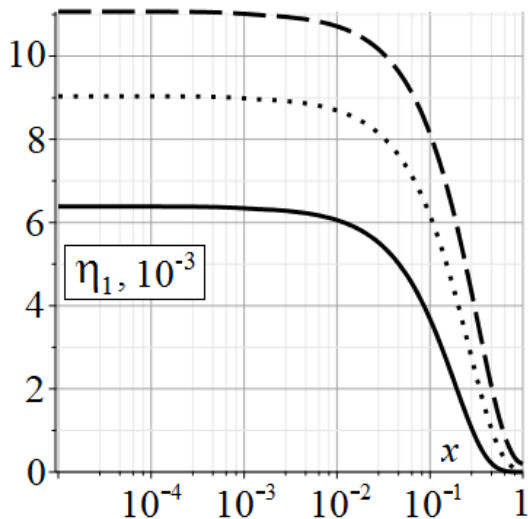


Рис. 3. Зависимость  $\eta_1(x, \tau)$  от  $x$ .

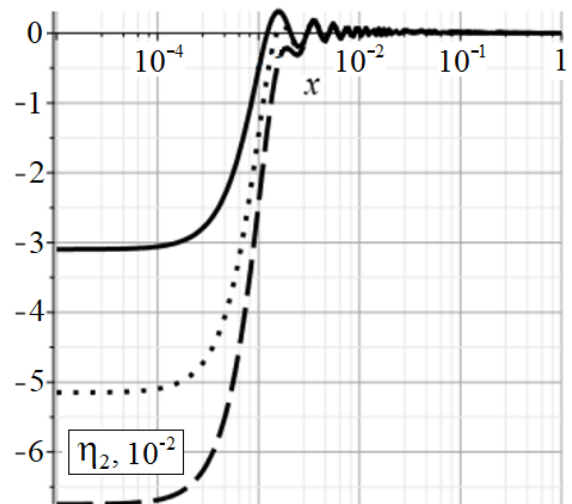


Рис. 4. Зависимость  $\eta_2(x, \tau)$  от  $x$ .

В задаче термоупругой диффузии при относительно больших временах

( $\tau \gg \tau_q > \tau_\vartheta$ ) можно пренебречь релаксационными эффектами и, полагая, что  $\tau_q \rightarrow 0$  и  $\tau_\vartheta \rightarrow 0$ , произвести переход к классическим законам Фурье и Фика. В этом случае равенства (12) принимают вид:

$$\omega(s) = s, \quad \forall q \quad \chi_q(s) = s. \quad (28)$$

Решения задач, полученные в Главе 2, сохраняют свой вид. Однако необходимо отметить, что количество корней многочлена  $P(\lambda_n, s)$  снизится с  $2N + 4$  до  $N + 3$ . Тогда оригиналы функций Грина записываются так ( $n \geq 1$ ):

$$G_{ikn}(\tau) = \sum_{j=1}^{N+3} \frac{P_{ik}(\lambda_n, s_j)}{P'(\lambda_n, s_j)} e^{s_j \tau}; \quad (29)$$

$$G_{220} = 2H(\tau), \quad G_{2,q+2,0} = -2\beta_q H(\tau), \quad G_{q+2,q+2,0} = 2H(\tau). \quad (30)$$

Решение задачи (1), (3) с учётом (26) и (28) представлено на Рис. 5 и 6. Линии: сплошная – с учётом конечной скорости распространения, пунктирная – без учёта конечной скорости распространения. Необходимо отметить, что различие между графиками стремится к нулю при значениях времени  $\tau$ , значительно превышающих времена релаксации.

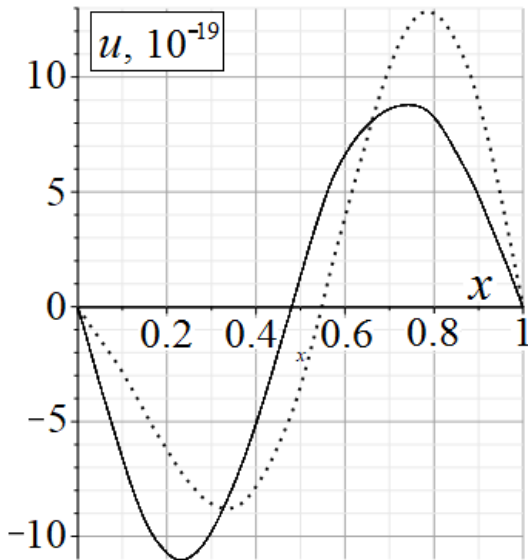


Рис. 5. Зависимость  $u(x, \tau)$  от  $x$  при  $\tau = 10^5$ .

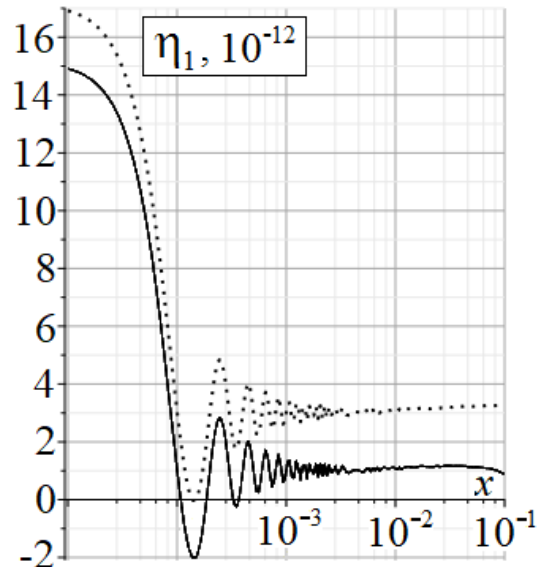


Рис. 6. Зависимость  $\eta_1(x, \tau)$  от  $x$  при  $\tau = 10^4$ .



Таким образом, показано, что учёт ненулевых времён релаксации вносит значительный вклад в решение задачи термоупругой диффузии не только для самих потоков, но и для деформаций.

Также в Главе 3 рассматривается класс нестационарных задач связанной термоупругой диффузии без учёта перекрёстных диффузионных эффектов. В этом случае полагаем, что

$$D_{qp} = \delta_{qp} D_q = \begin{cases} D_q, & \text{если } q = p \\ 0, & \text{если } q \neq p \end{cases}. \quad (31)$$

Такого рода задачи нужны при расчёте напряжённо-деформированного состояния (НДС) термоупругой среды, когда взаимное перераспределение компонент среды за счёт внешних диффузионных потоков не представляет исследовательского интереса.

Рассмотренные ранее алгоритмы решения в Главе 2 сохраняют свой вид, однако определитель однородной системы (15) с учётом (31) записывается так:

$$P(\lambda_n, s) = \begin{vmatrix} k_1 & -b_u \lambda_n & -\alpha_1 \lambda_n & -\alpha_2 \lambda_n & \dots & -\alpha_N \lambda_n \\ b_\vartheta \lambda_n \omega & k_2 & \beta_1 \omega & \beta_2 \omega & \dots & \beta_N \omega \\ -\Lambda_1 \lambda_n^3 & -M_1 \lambda_n^2 & k_3 & 0 & \dots & 0 \\ -\Lambda_2 \lambda_n^3 & -M_2 \lambda_n^2 & 0 & k_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Lambda_N \lambda_n^3 & -M_N \lambda_n^2 & 0 & 0 & \dots & k_N \end{vmatrix}. \quad (32)$$

Он имеет вместо  $(N + 2)^2$  всего  $(5N + 4)$  ненулевых элементов за счёт пренебрежения перекрёстными диффузионными эффектами, что значительно упрощает его вычисление. Переход к оригиналам (22) осуществляется по формулам (23) и (24). Причём сами формулы остаются неизменными, а меняются только лишь входящие в них многочлены.

Проанализируем влияние перекрёстных диффузионных на эффекты физические поля на рассмотренном ранее расчётном примере. Перемещения  $u(x, \tau)$ , а также приращения температуры  $\vartheta(x, \tau)$  и концентрации  $\eta_1(x, \tau)$  при этом сохраняют свой вид как в случае с полной диффузионной матрицей.

В свою очередь, приращения  $\eta_2(x, \tau)$  показаны на Рис. 7. Линии: сплошная –  $\tau = 1 \cdot 10^{13}$ , пунктирная –  $\tau = 2 \cdot 10^{13}$ , штриховая –  $\tau = 3 \cdot 10^{13}$ .

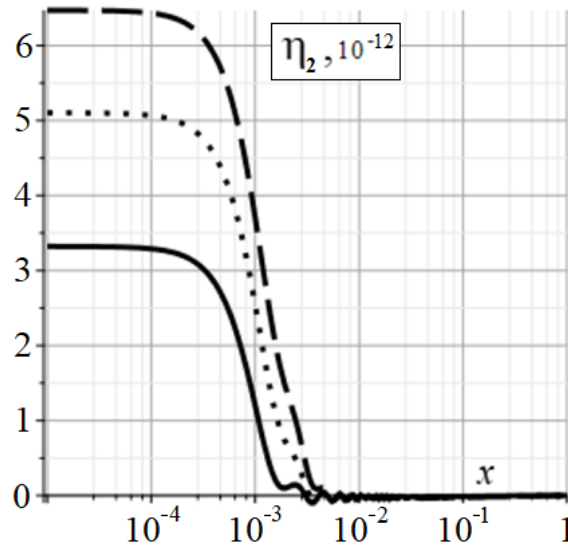


Рис. 7. Зависимость  $\eta_2(x, \tau)$  от координаты  $x$  без учёта перекрёстных диффузионных эффектов ( $D_{pq} = 0$ ).

При сравнении рисунков 4 и 7 видно, что пренебрежение перекрестными диффузионными эффектами приводит к значительному искажению результатов. При наличии диффузионного потока первой компоненты вещества – вторая реагирует на несколько порядков слабее, не отражая реальных процессов.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [6, 8, 10–12, 25, 27–29, 31, 33, 35].

**В Заключение** проведено основные результаты работы:

1. Построена модель термоупругодиффузионной анизотропной многокомпонентной среды с учетом конечных скоростей распространения тепловых и диффузионных потоков, а также с учетом перекрестных диффузионных эффектов.

2. Предложен алгоритм решения нестационарных задач термомехано-диффузии, основанный на использовании интегрального преобразования Лапласа и разложении в ряды Фурье.

3. Построены одномерные нестационарные поверхностные и объемные

функции Грина для сред с плоскими границами.

4. На основе представленных моделей и расчетных примеров исследована связанность механического, температурного и диффузионного полей.

5. Исследовано влияние релаксационных эффектов и перекрёстных диффузионных эффектов на термомеханодиффузионные процессы в сплошных средах.

6. Получено решение статической задачи термомеханодиффузии и исследованы возможности перехода от динамического режима к статическому.

## Основные работы по теме диссертации, опубликованные в изданиях, рекомендованных Перечнем ВАК

1. *Вестяк А.В., Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная одномерная задача термоупругой диффузии для однородных многокомпонентных сред с плоскими границами // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т. 160, кн. 1. – С. 183–195.
2. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Упругое полупространство под действием одномерных нестационарных диффузионных возмущений // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2014. – Т. 2, кн. 4. – С. 70–79. = *Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* An Elastic Half-Space under the Action of One-Dimensional Time-Dependent Diffusion Perturbations // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* – 2015. – Vol. 36, № 4. – P. 503–509.
3. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двухкомпонентное упруго-диффузионное полупространство под действием нестационарных возмущений // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического сотрудничества. – 2014. – № 2. – С. 31–38.
4. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомеханодиффузии // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 1. – С. 38–47.

5. *Давыдов С.А., Земсков А.В.*, Распространение одномерных связанных термоупругодиффузионных возмущений в изотропном полупространстве с учетом ненулевых времен релаксации // Труды Крыловского государственного научного центра. – 2018. – Специальный выпуск 2. – С. 144–150.
6. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Моделирование напряженно-деформированного состояния термоупругодиффузионного слоя // Тепловые процессы в технике. – 2020. – Т. 12, № 3. – С. 125–135.
7. *Davydov S.A., Zemskov A.V., Igumnov L.A., Tarlakovskiy D.V.* Non-stationary model of mechanical diffusion for half-space with arbitrary boundary conditions // Materials Physics and Mechanics. – 2016. – Vol. 28, № 1/2. – P. 72–76.
8. *Davydov S.A., Zemskov A.V.* Unsteady one-dimensional perturbations in multicomponent thermoelastic layer with cross-diffusion effect // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018. – 1129, 012009.
9. *Davydov S.A., Zemskov A.V., Akhmetova E.R.* Thermoelastic Diffusion Multicomponent Half-Space under the Effect of Surface and Bulk Unsteady Perturbations // Math. Comput. Appl. – 2019. – 24, 26.
10. *Davydov S.A., Vestyak A.V., Zemskov A.V.* Propagation of one-dimensional thermoelastodiffusive perturbations in a multicomponent layer // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – 1158, 022034.

### Публикации в других изданиях

11. *Ахметова Е.Р., Давыдов С.А., Земсков А.В.* Применение линейной нестационарной модели механодиффузии в расчёте технологических процессов на примере ионной имплантации // Тезисы докладов V международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М.: 2016. – С. 25–27.
12. *Волкова Л.В., Давыдов С.А., Земсков А.В., Фёдорова А.Д.* Исследование распространения связанных термоупругодиффузионных возмущений с конечной скоростью в средах с плоскими границами // Конференция по стро-

- ительной механике корабля, посвященная памяти профессора В.А. Постнова и 90-летию со дня его рождения. – С.-Пб, 2017. – Т. 2. – С. 135–137.
13. *Волкова Л.В., Давыдов С.А., Земсков А.В.* Одномерные нестационарные задачи термоупругой диффузии // Сборник трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – 2019. – Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. – С. 889–891.
14. *Волкова Л.В., Давыдов С.А., Земсков А.В.* Метод эквивалентных граничных условий для неидеальных твёрдых термоупругодиффузионных растворов // Материалы XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Т. 2, – М.: ООО «ТРП», 2020. – С. 34–36.
15. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Лебедев А.И., Тарлаковский Д.В.* Решение одномерной задачи упругой диффузии для двухкомпонентного полупространства // Материалы XX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. – Т. 1, – М.: ООО «ТР-принт», 2014. – С. 72–73.
16. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Метод эквивалентных граничных условий в одномерной задаче механодиффузии для полупространства // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – С. 168–174.
17. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Построение интегральных соотношений между граничными условиями в нестационарных задачах механодиффузии // Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). 2015. С. 67–68.
18. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Алгоритм решения одномерной связной задачи термоупругости с учётом диффузии для слоя // Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.

Горшкова. – Т.2. – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 56–58.

19. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Постановка задачи термоупругой диффузии для полупространства, находящегося под действием нестационарных поверхностных возмущений // Тезисы докладов IV международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 54–56.
20. *Давыдов С.А., Земсков А.В.*, Анализ особенностей в решении нестационарной задачи термомеханодиффузии для слоя // Труды XVIII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды»: в 2 томах. – Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2016. – Т. 1. – С. 170–174.
21. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная модель массопереноса в термоупругой многокомпонентной изотропной среде // Тезисы докладов Всероссийской конференции молодых ученых-механиков. – М.: Издательство Московского университета 2017. – С. 56.
22. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Постановка нестационарной задачи термоупругости с учетом диффузии для многокомпонентных сред // Материалы Секции «Механика и моделирование материалов и технологий» Международной молодёжной научной конференции «XLIII Гагаринские чтения». – М.: ИПМех РАН, 2017. – С. 25–26.
23. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Федорова А.Д.* Связанная нестационарная задача термоупругой диффузии для многокомпонентного полупространства // Тезисы докладов VI международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М.: ООО «ТР-принт», 2017. – С. 38–40.
24. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Постановка и алгоритм решения нестационарной задачи термомеханодиффузии для многокомпонентных сред // Материалы XXIII международного симпозиума «Динами-

ческие и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Т.1. – М.: ООО «ТРП» 2017. – С. 77–79.

25. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Модель термомехано-диффузии с конечной скоростью распространения тепловых и диффузионных возмущений // Материалы VIII Международной научно-практической конференции «Проблемы безопасности на транспорте»: в 2 ч. – Ч. 2 – Гомель: БелГУТ, 2017. – С. 183–185.
26. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Объёмные функции гринна нестационарной задачи термоупругой диффузии для многокомпонентного слоя // Тезисы докладов VII Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – М.: ООО «ТРП», 2018. – С. 38–40.
27. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Распространение в слое связанных термоупругих возмущений с учетом перекрестных диффузионных эффектов // Труды XIX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2018. – Т. 1. – С. 89–94.
28. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Релаксационные одномерные нестационарные упругодиффузионные процессы в сплошных средах. // Материалы XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО «ТРП», 2018. – С. 39–41.
29. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Фёдорова А.Д.* Моделирование связанных термоупругодиффузионных процессов при разработке новых материалов // Сборник трудов Секции Механика и моделирование материалов и технологий Международной молодёжной научной конференции «XLIV Гагаринские чтения». – М.: ИПМех РАН, 2018. – С. 46–47.
30. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Термоупругодиффузионный слой под действием нестационарных динамических возмущений // Материалы IX Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности

на транспорте»: – Т. 2. – Гомель: БелГУТ, 2019. – С. 203–205.

31. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Нестационарная задача термоупругой диффузии для многокомпонентного полупространства и ее приложения // Сборник трудов Секции «Механика и моделирование материалов и технологий» Международной молодежной научной конференции «XLV Гагаринские чтения». – М.: ИПМех РАН, 2019 – С. 62–64.
32. *Давыдов С.А., Земсков А.В.* Двумерная нестационарная задача термоупругой диффузии для слоя // Тезисы докладов XIX Всероссийской школы-семинара «Современные проблемы аэрогидродинамики» – М.: Издательство Московского университета, 2019. – С. 44–45.
33. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Приложения связанных нестационарных задач термоупругой диффузии в области разработки технологий изготовления биомеханических изделий // Тезисы докладов XIV Всероссийской школы «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете». – Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2019. – С. 43.
34. *Давыдов С.А.* Термоупругая диффузия в слое под действием смешанных нестационарных возмущений // Сборник материалов IX Всероссийской молодежной научной конференции «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики - 2019». – 2020. – С. 264-267.
35. *Davydov S.A., Zemskov A.V.* Stress-Strain State of a Thermoelastodiffusive Layer // Abstracts of 18th International Conference «Aviation and Cosmonautics – 2019». – М.:МАИ, 2019. – P. 484.