

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский авиационный институт»  
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



Зверев Николай Андреевич

**Моделирование одномерных нестационарных  
механодиффузионных процессов в  
многокомпонентных цилиндрических телах**

1.1.8 – «Механика деформируемого твёрдого тела»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент

Земсков Андрей Владимирович

Москва – 2023

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Математическая постановка нестационарных задач механодиффузии в цилиндрической системе координат</b> . . . . .	12
1.1. Современное состояние исследований . . . . .	12
1.2. Модель механодиффузии в произвольной криволинейной системе координат . . . . .	16
1.3. Постановка одномерных задач . . . . .	18
1.4. Краевые условия . . . . .	21
1.5. Метод решения . . . . .	23
<b>Глава 2. Построение собственных функций упругодиффузионного оператора в цилиндрической системе координат</b> . . . . .	27
2.1. Постановка и решение задачи Штурма-Лиувилля . . . . .	27
2.2. Представление решения задачи механодиффузии в виде рядов по собственным функциям . . . . .	36
2.3. Преобразование интегральных операторов . . . . .	40
2.4. Предельный переход к задаче для сплошного цилиндра . . . . .	45
<b>Глава 3. Моделирование нестационарных механодиффузионных процессов в сплошном цилиндре</b> . . . . .	49
3.1. Интегральное представление решения . . . . .	49
3.2. Алгоритм построения поверхностных функций Грина . . . . .	51
3.3. Алгоритм построения объемных функций Грина . . . . .	54
3.4. Решение задачи для сплошного цилиндра методом эквивалентных граничных условий . . . . .	56

3.5.	Предельные переходы к модели с бесконечной скоростью распространения диффузионных потоков и к упругой модели . . . . .	59
3.6.	Статические механодиффузионные процессы . . . . .	61
3.7.	Примеры расчетов . . . . .	64
<b>Глава 4. Моделирование нестационарных механодиффузионных процессов в полом цилиндре . . . . .</b>		
4.1.	Интегральное представление решения . . . . .	79
4.2.	Алгоритм построения поверхностных функций Грина . . . . .	81
4.3.	Алгоритм построения объемных функций Грина . . . . .	83
4.4.	Решение задачи для полого цилиндра методом эквивалентных граничных условий . . . . .	85
4.5.	Модели с бесконечной скоростью распространения диффузионных потоков, несвязанные и статические модели . . . . .	89
4.6.	Примеры расчетов . . . . .	91
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>107</b>
<b>Список использованных источников . . . . .</b>		<b>108</b>

## Введение

В последнее время все больший научный и практический интерес представляют связанные нестационарные модели механики деформируемого твердого тела, в частности, модели механо-dиффузии, поскольку сама диффузия, влияя на напряженно-деформированное состояние тела, может оказывать нежелательное воздействие на конструкции или их отдельные элементы. Например, диффузия, вызывая движение вакансий и дислокаций, может влиять на процесс трещинообразования и старения материалов. В связи с этим, представляется практически важным вопрос о качественной и количественной оценках взаимодействия механических и диффузионных полей. Также немаловажную роль в вопросах моделирования технических систем играет учет других полей, например, тепловых и электромагнитных, наличие которых может вызывать термоупругие, термодиффузионные, пьезоэлектрические, пьезомагнитные и прочие эффекты.

Существует достаточно много подходов к созданию математических моделей, описывающих те или иные процессы, в той или иной степени приближенные к реальным физическим или механическим процессам. К одному из наиболее перспективных подходов относится построение и анализ моделей связанных полей, к которым можно отнести механическое и диффузионное поля, благодаря которому становится возможным наиболее точное и комплексное описание технологических и физических процессов, происходящих в изучаемом теле (сплошной деформируемой среде).

Как известно, наличие диффузионных потоков приводит к перераспределению компонентов вещества, вызывающего объемные изменения, вследствие чего в диффузионной зоне возникает напряженно-деформированное состояние. Оно, в свою очередь, влияет на величину диффузионного потока, поскольку в результате деформаций изменяется расстояние между атомами решетки. Однако влияние механических нагрузок на диффузионное поле имеет достаточно



сложную природу и зависит от механизма диффузии. Если диффузия происходит по вакансионному механизму, то увеличение давления уменьшает скорость диффузии. Происходит это потому, что увеличение содержания вакансий увеличивает объем кристалла, давление стремится уменьшить объем кристалла и поэтому понижает содержание вакансий, соответственно уменьшая скорость диффузии. Если диффузия происходит по межузельному механизму, то, с одной стороны, увеличение давления повышает содержание межузельных атомов, а с другой стороны, атомы в кристалле сближаются и перемещение между узлами затрудняется.

Работа посвящена исследованию нестационарного взаимодействия механического и диффузионных полей в цилиндрических телах. С практической точки зрения интерес к такого рода проблемам возникает благодаря тому, что данные тела являются основой различных трубопроводов (нефте- и газопроводы, системы отопления), используются в качестве валов и втулок в конструкциях, имеющих очень широкий спектр применения в технике. При этом взаимодействие тех или иных физических полей, в процессе эксплуатации указанных объектов, может оказывать негативное влияние на функционирование и целостность конструкций или же их отдельных элементов, испытывающих нагрузки различной физической природы.

Для полноценного анализа возникающих при этом эффектов необходима разработка моделей механодиффузии, а также специальных методов решения соответствующих начально-краевых задач. В этой связи важно отметить, что на сегодняшний день не существует общих аналитических методов исследования нестационарных задач механики связанных полей и, в частности, задач механодиффузии.

**Структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 123 наименований. Общий объем диссертации – 122 страницы, включая 52 рисунка и 1 таблицу.

**В первой главе** приведен обзор научных публикаций по заявленной тематике исследования, сделанных за последние десятилетия в России и за её пределами. Были проанализированы различные подходы к построению моделей механодиффузии, а также используемые методы решения динамических задач механодиффузии для тел с плоскими и криволинейными границами.

Отмечено, что в части решения нестационарных задач, за редким исключением, использовались преимущественно численно-аналитические методы, основанные на применении преобразования Лапласа с его последующим численным обращением с помощью метода Дурбина и его модификаций. При этом вопросы, связанные с построением собственных функций упругодиффузионного оператора в криволинейных системах координат, с последующим использованием рядов Фурье по системам собственных функций, в известных на сегодняшний день публикациях не рассматривались.

Далее в этой главе приводится замкнутая математическая постановка одномерной задачи упругой диффузии для цилиндрических тел. Здесь же дается общее описание алгоритма решения поставленной задачи, основанного на использовании метода эквивалентных граничных условий, согласно которому решение сформулированной задачи выражается через известное решение вспомогательной задачи, которое, в свою очередь, находится с помощью разложения в ряды по собственным функциям упруго-диффузионного оператора.

**Во второй главе** дается постановка задачи Штурма-Лиувилля для одномерного упругодиффузионного оператора в цилиндрической системе координат. Показано, что аналитическое решение этой задачи возможно только для 4-х типов граничных условий. Эти 4 типа граничных условий определяют, так называемые, вспомогательные задачи, с помощью которых по методу эквивалентных граничных условий находится решение основной задачи.

Здесь же, используя найденные собственные функции, построены интегральные преобразования, применяемые в дальнейшем при решении задач для

сплошного и полого цилиндров, находящихся под действием нестационарных упругодиффузионных возмущений.

**В третьей и четвертой главах** описывается алгоритм решения одномерных нестационарных задач механодиффузии для однородного ортотропного сплошного и полого цилиндров, находящихся под действием поверхностных и объемных возмущений, с учетом релаксации диффузионных потоков. Для решения этих задач используется описанный выше метод эквивалентных граничных условий.

Для построения функций Грина вспомогательных задач используется интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение в ряды по собственным функциям упругодиффузионного оператора, которые получены в главе 2. Обращение преобразования Лапласа осуществляется аналитически с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

С целью верификации полученных решений построены предельные переходы к моделям с бесконечной скоростью распространения диффузионных потоков, а также к классическим несвязанным задачам упругости и диффузии, решения которых известны. Здесь же рассмотрены предельные переходы к статическим моделям механодиффузии.

На примере трехкомпонентного цилиндра, выполненного из сплава цинка, меди и алюминия, находящегося под действием поверхностных и объёмных механодиффузионных нагрузок, исследовано взаимодействие механического и диффузионного полей. Проанализировано влияние релаксационных эффектов на кинетику массопереноса. Решение представлено в аналитической форме и в виде графиков зависимости искомых полей перемещения и приращений концентрации компонент среды от времени и координат.

В заключении приводятся основные результаты диссертации.

**Целью диссертационной работы** является исследование нестационарного взаимодействия механических и диффузионных полей в различных упру-

гих телах цилиндрической формы, а также постановка новых начально-краевых задач механодиффузии, их решение и практические расчеты, выполненные в математических пакетах и позволяющие количественно оценить эффекты, обусловленные взаимным влиянием вышеуказанных полей друг на друга.

**Актуальность работы** связана с тем, что за последние годы, согласно проделанному обзору, значительно возрос интерес ученых к проблеме исследования связанных механодиффузионных процессов, да и сами модели, описывающие эти процессы, постоянно совершенствуются, что необходимо для получения более точного описания функционирования конструкций и их отдельных элементов, эксплуатирующихся в условиях разнофакторных внешних воздействий. При этом данная тема, несмотря на возросшую за последние годы публикационную активность, изучена далеко не полностью. Это в полной мере относится к моделям механодиффузии для тел с криволинейными границами, где в части разработки методов решения нестационарных задач сделано очень мало.

**Методы исследования.** Для построения замкнутой модели механодиффузии используется математический аппарат линейной теории упругости, законы термодинамики и, в частности, законы массопереноса. Метод решения основан на применении аппарата обобщенных функций, теории интегральных преобразований и рядов Фурье. Также применяется метод эквивалентных граничных условий, который позволяет выразить решение одной начально-краевой задачи через известное решение другой задачи, отличающейся от исходной только набором краевых условий.

**Научная новизна работы** заключается в построении численно-аналитических решений нового класса одномерных нестационарных задач упругой диффузии в цилиндрической системе координат, с учетом релаксации диффузионных потоков. В частности, были решены задачи для сплошного и полого цилиндров, находящихся под действием либо поверхностных, либо объемных возмущений.

**Достоверность и обоснованность результатов** обеспечивается использованием известных методов построения моделей механики деформируемого твёрдого тела и термодинамики, апробированных методов решения начально-краевых задач и строго доказанных утверждений. Кроме того, проведено сравнение результатов с известными решениями задач теории упругости. Для одномерных задач также выполнялась проверка путем перехода к решениям соответствующих статических задач.

**Практическая значимость работы** заключается в разработке методик расчета напряженно-деформированного состояния упругих сред и элементов конструкций цилиндрической формы, работающих в условиях нестационарных внешних воздействий, с учетом протекающих в них явлений массопереноса. Примерами таких конструкций являются: нефте- и газопроводы, трубопроводы систем отопления, валы и втулки в механизмах и двигателях.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

- постановка и разработка метода решения одномерной задачи механо диффузии для ортотропных многокомпонентных цилиндрических тел,
- постановка и решение задачи Штурма-Лиувилля для одномерного упруго-диффузионного оператора в цилиндрической системе координат,
- построение объемных и поверхностных функций Грина для сплошного и полого ортотропных цилиндров,
- численное исследование взаимодействия механического и диффузионных полей в цилиндрических телах под действием различных поверхностных и объемных нестационарных механо-диффузионных возмущений.

**Апробация работы.** Все основные результаты данной работы являлись предметами докладов, обсуждений и дискуссий на всероссийских и международных конференциях, симпозиумах и семинарах:

- Международный симпозиум «Динамические и технологические пробле-

мы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Калужская область, г. Кременки, 2018–2023);

– Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте» (Беларусь, Гомель, 2020–2023);

– XIX Всероссийская школа-семинар «Современные проблемы аэрогидродинамики» (Сочи, 2019);

– Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, МАИ, 2019–2020);

– Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2017–2023);

– Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, 2019–2022);

– Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2016–2018);

– Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Краснодарский край, Дивноморское, 2021–2023);

– Всероссийская конференция молодых учёных-механиков «YSM» (Сочи, 2018, 2020–2023);

– Конференция-конкурс молодых учёных научно-исследовательского института механики МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, 2021);

– Международная конференция «Современные проблемы механики сплошных сред» (Ростов-на-Дону, 2020);

– Международная молодёжная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики» (Томск, 2019);

– Всероссийская конференция «Механика деформируемого твёрдого тела в проектировании конструкций» (Пермь, 2022).

**Публикации.** По теме диссертационного исследования опубликовано: 5 статей [12–16] в рецензируемых журналах, 11 статей в сборниках трудов всероссийских и международных конференций [18–24, 26–29] и 25 тезисов докладов. Всего – 41 публикация.

## Глава 1

# Математическая постановка нестационарных задач механодиффузии в цилиндрической системе координат

В данной главе приведён обзор современного состояния исследований в области механодиффузии, а также построена одномерная нестационарная модель упругой диффузии в цилиндрической системе координат.

### 1.1. Современное состояние исследований

Взаимодействие диффузии и напряжений – предмет давних исследований, носящих как экспериментальный, так и теоретический характер. В настоящее время проблема анализа механодиффузионных процессов в сплошных средах также остается весьма актуальной, ибо круг исследуемых вопросов в этой области постоянно расширяется за счет того, что учитываются возмущения различной физической природы, в частности, температурные и электромагнитные. Кроме того, зачастую используются уточненные модели теплообмена, учитывающие конечную скорость распространения тепловых и диффузионных потоков, играющих важную роль при расчете целого ряда быстропротекающих нестационарных процессов.

Среди наиболее близких к тематике диссертационного исследования работ можно выделить работы ряда зарубежных авторов, среди которых: M. Aouadi, S.Y. Atwa, Z. Egypt, D. Bhattacharya, M. Kanoria, S. Choudhary, S. Deswal, K. Kalkal, M. Elhagary, M.I.A. Othman, A.M. El-Sayed, R. Kumar, V. Chawla, T. Kansal, J.N. Sharma, H.H. Sherief, F.A. Hamza, H. Saleh. Среди российских



и советских ученых в данной области науки известны: Бурак Я.И., Вильчевская Е.Н., Дасюк Я.И., Еремеев В.С., Индейцев Д.А., Князева А.Г., Келлер И.Э., Кушнир Р.М., Морозов Н.Ф., Подстригач Я.С., Раврик М.С., Стерлин М.Д., Фрейдин А.Б., Швец Р.Н.

Говоря об истории вопроса, следует отметить, что в 1932 году советский ученый-физик, профессор МГУ, член-корреспондент АН СССР – Сергей Тихонович Конобеевский (1890-1970) – обнаружил влияние внутренних напряжений на процессы диффузии в сплавах [6, 37]. Им также были созданы основы современной теории старения и распада как сплавов, так и твердых растворов, металлических соединений. Первая научная публикация на эту тему была сделана спустя 4 года В.С. Горским – в 1936 году. В ней был рассмотрен вопрос об обмене положениями двух разноименных соседних атомов в изгибаемой пластинке из медно-золотого сплава, а также впервые экспериментально была доказана непосредственная связь между диффузией и внутренними напряжениями в твердых телах и сплошных средах [8]. Были и другие публикации на эту тему, в которых были получены основные экспериментальные зависимости между деформациями и тепломассопереносом в твердых телах [7, 46, 94, 98].

Первая попытка теоретически осмыслить взаимосвязь между напряженно-деформированным состоянием и дислокационной структурой, возникающей в процессе диффузии, была предпринята значительно позже [99]. В настоящее время сформирована достаточно строгая математическая теория термомехано-диффузии, основанная на феноменологических подходах и моделях термодинамики и механики сплошной среды [4, 11, 42, 43, 50, 72, 95].

Надо сказать, что теоретические основы, заложенные в работах конца 20-го века [4, 11, 50, 54, 55, 95], позволили в дальнейшем перейти к построению замкнутых математических моделей и формулировке начально-краевых задач механо-диффузии, причем исследовались, в основном, линейные модели (в силу того, что они наиболее просты).

В известных на сегодняшний день работах рассматриваются вопросы, связанные с построением моделей механодиффузии [10, 11, 35, 42, 50, 54, 55, 80, 93], термоупругой диффузии [4, 7, 43, 47, 57–62, 64–71, 73, 75, 79, 81, 82, 89, 90, 92, 95, 96, 102–107, 112, 115–119], несвязанной электромагнитоупругой диффузии и термодиффузии [17, 21, 25, 60, 63, 72, 78, 87, 88, 97, 113, 123]. Следует отдельно выделить работы [36, 49, 84], посвященные моделированию механохимических процессов в упругих средах, а также [74, 75, 89, 90, 107], где учитывается вязкость материала и [89, 91], где рассматривались моментные среды.

В настоящее время практически все модели тепломассопереноса учитывают конечную скорость распространения тепловых и диффузионных возмущений, что обусловлено релаксацией диффузионных потоков [57–63, 68–70, 73, 76, 78, 81, 82, 87, 89–92, 97, 102, 104, 116, 117]. Это особенно важно при описании высокочастотных и импульсных процессов. В представленных выше работах используются модели: Каттанео, Лорда-Шульмана, Грина-Линсди, Грина-Нагди и т. д. Отдельно можно выделить статьи [58, 79, 83, 101, 105], где для описания релаксационных эффектов используется аппарат дробного дифференцирования.

Несколько сложнее обстоит дело с решением задач нестационарной связанной механодиффузии и термомеханодиффузии. Здесь следует отметить работы [63, 68, 73, 78, 88, 91, 95, 97, 106], посвященные методам решения начально-краевых задач термоупругости с учетом диффузии в прямоугольной декартовой системе координат, а также публикации [47, 48, 57–59, 61, 62, 69, 79, 81, 82, 85, 86, 89, 93, 96, 100, 107–111, 114, 116–118], в которых рассматриваются методы решения указанных задач в криволинейных (в основном, в цилиндрической или сферической) системах координат.

Анализ этих публикаций показывает, что в плане решения соответствующих начально-краевых задач, наиболее полно изучены модели в прямоугольной декартовой системе координат. При решении нестационарных задач в различных криволинейных системах координат основной проблемой является нахож-

дение системы собственных функций, являющихся решением соответствующей задачи Штурма-Лиувилля. Этот вопрос достаточно основательно рассмотрен в работе [41], посвященной моделям теплопереноса в сплошных средах, в том числе, в телах, имеющих цилиндрическую и сферическую формы. Применительно к связанным задачам механодиффузии и термомеханодиффузии, данный вопрос на сегодняшний день в известных научных работах не обсуждался.

При решении нестационарных задач для сплошных сред используются, как правило, интегральные преобразования [57, 58, 61–63, 69, 73, 79, 81, 82, 89, 90, 96, 102, 115]: Лапласа, Фурье, Ганкеля и т. д., что продемонстрировано в указанных работах. При этом обращение преобразования Лапласа осуществляется численно с помощью метода Дурбина (и его модификаций) [61–63, 81, 82, 89, 90, 101, 102], алгоритма Gaver–Stehfast [115, 116], а также с помощью квадратурных формул, основанных на использовании ортогональных многочленов [69], сумм Римана [57, 58, 69, 73, 79, 96] и т. д. Не вдаваясь в обсуждение достоинств и недостатков данных подходов, отметим только, что такие алгоритмы подходят лишь для определенного класса функций. При этом надо отметить, что при решении связанных задач искомые величины в пространстве изображений имеют очень громоздкий вид. Поэтому верифицировать тот или иной алгоритм обращения изображений весьма сложно.

Достаточно основательный анализ существующих на сегодняшний день методов обращения преобразования Лапласа дан в работе [51]. Выводы, полученные авторами, позволяют утверждать, что универсального алгоритма обращения интегрального преобразования Лапласа не существует. Таким образом, вопросы, связанные с разработкой аналитических методов решения нестационарных задач, и, в частности, задач термомеханодиффузии, также являются актуальными.

Ввиду бурного развития вычислительной техники, ряд ученых пытаются использовать для решения начально-краевых задач численные методы, напри-

мер, метод конечных разностей [47, 49] или конечных элементов [65, 70, 117]. При всех достоинствах численных методов, нельзя не упомянуть, что при использовании, например, конечно-разностных схем, существенным вопросом является их анализ на устойчивость, что, в свою очередь, влияет на сходимость решения, полученного с их помощью, к решению исходной задачи. Это достаточно сложная математическая проблема, связанная с установлением непрерывной зависимости конечно-разностных схем от входных данных, к которым относятся коэффициенты дифференциальных операторов, а также параметры начальных и граничных условий. Указанное свойство, как известно, характеризует корректность конечно-разностных схем и в каждом конкретном случае требует отдельного исследования. Такие же проблемы могут возникнуть и при использовании метода конечных элементов.

В заключение отметим, что в известных на сегодняшний день публикациях рассматривались нестационарные задачи только для бинарных систем. Таким образом, постановки задач для многокомпонентных сред являются новыми. Предлагаемые алгоритмы, позволяющие получать решение начально-краевых задач механодиффузии для цилиндрических тел в явном виде, также обладают научной новизной и являются отличительной особенностью настоящей работы.

## **1.2. Модель механодиффузии в произвольной криволинейной системе координат**

Для построения модели, описывающей одномерные механодиффузионные процессы в телах цилиндрической формы, воспользуемся общей моделью механодиффузии для произвольных анизотропных тел [31, 43, 113]:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} &= \nabla_j (C^{ijkl} \nabla_l u_k) - \sum_{r=1}^N \nabla_j \left( \alpha^{(r)ij} \eta^{(r)} \right) + \rho F^i, \\
\sum_{r=1}^N \nabla_i \left( D^{(qr)ij} \nabla_j \eta^{(r)} \right) - \frac{m^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0} \nabla_i \left[ D^{(q)ij} \nabla_j \left( \alpha^{(q)kl} \nabla_l u_k \right) \right] + F^{(q)} &= \quad (1.1) \\
&= \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} + \tau^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial t^2}, \quad \eta^{(N+1)} = - \sum_{j=1}^N \eta^{(j)} \quad (q = \overline{1, N}),
\end{aligned}$$

где:  $i, j, k, l = \overline{1, 3}$ ;  $t$  – время;  $u^i$  – компоненты вектора механических перемещений;  $x^j$  – криволинейные координаты;  $\nabla_j$  – ковариантная производная по криволинейной координате  $x^j$ ;  $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$  – приращение концентрации многокомпонентного вещества;  $n_0^{(q)}$  и  $n^{(q)}$  – начальная и текущая концентрации  $q$ -го вещества в составе  $N + 1$ -компонентной среды;  $m^{(q)}$  – молярная масса  $q$ -го вещества в составе  $N + 1$ -компонентной среды;  $\mathbf{C} = C^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$  – тензор упругих постоянных;  $\rho$  – плотность сплошной среды;  $\boldsymbol{\alpha}^{(q)} = \alpha^{(q)ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  – упругодиффузионный тензор, характеризующий деформации, возникающие вследствие диффузии;  $D^{(qr)ij} = g^{(qr)} D^{(q)ij}$ ,  $D^{(q)ij}$  – коэффициенты диффузии;  $g^{(qr)}$  – термодинамические множители Даркена;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T_0$  – температура сплошной среды;  $\mathbf{F} = F^i \mathbf{e}_i$  – удельная плотность объёмных сил;  $F^{(q)}$  – объёмная плотность источников массопереноса;  $\tau^{(q)}$  – время релаксации диффузионных потоков.

Термодинамические множители Даркена определяются так [11, 31, 43]:

$$g^{(qr)} = \delta_{qr} + \frac{n^{(q)} d \ln \gamma^{(q)}}{n^{(r)} d \ln n^{(r)}}. \quad (1.2)$$

Здесь  $\delta_{qr}$  – символ Кронекера,  $\gamma^{(q)}$  – коэффициент активности.

Если среда является идеальным твердым раствором, то [11, 31, 43]

$$\gamma^{(q)} = 1, \quad g^{(qr)} = \delta_{qr}. \quad (1.3)$$

В системе (1.1) первое равенство представляет собой уравнение движения сплошной среды с учетом массопереноса. Следующие равенства – это уравнения

массопереноса с учетом деформации среды. Наконец, последнее равенство – закон сохранения массы в локальной форме.

### 1.3. Постановка одномерных задач

Объектом рассмотрения в данной работе является тело цилиндрической формы (сплошной или полый цилиндр), находящееся под действием поверхностных и объемных механодиффузионных возмущений. Цилиндр выполнен из однородного многокомпонентного материала (твердый раствор) и под действием приложенной механической нагрузки в нем возникает восходящий диффузионный поток (эффект Горского [8]), т.е. перераспределение концентрации компонентов твердого раствора под действием упругой деформации. При этом массоперенос, вследствие вызываемых им объемных изменений, также влияет на напряженно-деформированное состояние цилиндра.

Для описания указанных физических процессов необходимо перейти к одномерной модели упругой диффузии в цилиндрической системе координат. Будем полагать, что искомые поля перемещений и приращения концентраций зависят только от радиальной координаты и времени (нестационарная задача)  $\mathbf{u} = \{u_r(r, t), 0, 0\}$ ,  $\eta = \eta(r, t)$ . Здесь  $u_r(r, t)$  – физическая компонента вектора механических перемещений, которая определяется так:

$$u_r = \frac{u_1}{H_1} = u^1 H_1 = u_1 = u^1,$$

где  $H_\alpha$  – параметры Ламе, которые находятся по формулам ( $g_{ij}$  – компоненты метрического тензора) [5]

$$H_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}, \quad H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1.$$

Вычисляя ковариантные производные в (1.1), получаем следующие пред-

ставления для уравнений движения сплошной среды:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= C_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{C_{11}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{C_{22}}{r^2} u_r - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial r} + \rho F_r, \\
0 &= \frac{C_{61}}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{(C_{62} + 2C_{16})}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{C_{62}}{r^3} u_r - \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\alpha_6^{(j)}}{r} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial r} + \frac{2\alpha_6^{(j)}}{r^2} \eta^{(j)} \right) + \rho \frac{F_\varphi}{r}, \\
0 &= C_{51} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{C_{52}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{C_{52}}{r^2} u_r - \sum_{j=1}^N \left( \alpha_5^{(j)} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial r} + \frac{\alpha_5^{(j)}}{r} \eta^{(j)} \right) + \rho F_z,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь  $F_r$ ,  $F_\varphi$  и  $F_z$  – физические компоненты вектора массовых сил,  $\alpha_j^{(q)}$  и  $C_{ij}$  – физические компоненты тензоров  $\boldsymbol{\alpha}^{(q)}$  и  $\mathbf{C}$  соответственно, записанные в нотации Фойгта [5].

Так как для нахождения  $u_r(r, t)$  вполне достаточно одного уравнения, то второе и третье равенства в (1.4) должны выполняться тождественно. Для этого необходимо потребовать:

$$C_{16} = C_{26} = 0, \quad C_{15} = C_{25} = 0, \quad \alpha_5^{(q)} = \alpha_6^{(q)} = 0, \quad F^2 = F^3 = 0. \tag{1.5}$$

Кроме того, в случае цилиндрической симметрии имеют место равенства [5, 45]:

$$C_{22} = C_{11}, \quad \alpha_1^{(q)} = \alpha_2^{(q)}. \tag{1.6}$$

Из равенств (1.5) и (1.6) следует, что для компонент тензора диффузии справедливы соотношения

$$D_1^{(q)} = D_2^{(q)}, \quad D_5^{(q)} = D_6^{(q)} = 0, \tag{1.7}$$

где  $D_j^{(q)}$  – физические компоненты тензора диффузии  $\mathbf{D}^{(q)} = D^{(q)ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ , записанные в нотации Фойгта.

Теперь, с учетом (1.5)–(1.7), находим оставшиеся ковариантные производные  $\nabla_i [D^{ij} \nabla_j (\alpha^{kl} \nabla_k u_l)]$  и  $\nabla_i D^{(qr)ij} \nabla_j \eta^{(q)}$  в (1.1). В результате получаем урав-

нения, описывающие одномерные упруго-диффузионные процессы в цилиндрической системе координат [12–15, 121]:

$$\begin{aligned}
C_{11} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial r} + \rho F_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
-\Lambda_{11}^{(q)} \left( \frac{\partial^3 u_r}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r^3} \right) + \sum_{r=1}^N \left( D_1^{(qr)} \frac{\partial^2 \eta^{(r)}}{\partial r^2} + \right. \\
\left. + D_1^{(qr)} \frac{1}{r} \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial r} \right) + \rho F^{(q)} = \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} + \tau^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь  $D_j^{(qr)} = g^{(qr)} D_j^{(r)}$ ,  $F^{(q)}$  – объемная плотность источников массопереноса, а коэффициенты  $\Lambda_{\alpha\beta}^{(q)}$  определяются по формулам

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{(q)} = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_\alpha^{(q)} \alpha_\beta^{(q)}}{\rho R T_0}.$$

Перейдем к безразмерным величинам (при одинаковом начертании они обозначаются символом «\*», который далее опускается) по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
r^* = \frac{r}{L}, \quad u = \frac{u_r}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{11}}{\rho}, \quad c_{ij} = \frac{C_{ij}}{C_{11}}, \quad \eta_q = \eta^{(q)} \\
\alpha_q = \frac{\alpha_1^{(q)}}{C_{11}}, \quad D_{qr} = \frac{D_1^{(qr)}}{CL}, \quad \Lambda_q = \frac{\Lambda_{11}^{(q)}}{CL}, \quad F_1 = \frac{F_r L}{C_{11}}, \quad F_{q+1} = \frac{F^{(q)} L}{C},
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где  $C$  – скорость волны растяжения-сжатия в упругой среде,  $L$  – линейный масштаб, который в задачах для сплошного цилиндра выбирается равным радиусу цилиндра, а в задачах для полого цилиндра – равным внешнему радиусу.

В результате получаем (штрих обозначает производную по переменной  $r$ , точка – производную по безразмерному времени  $\tau$ ):

$$\begin{aligned}
\ddot{u} = u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta'_j + F_1, \\
\dot{\eta}_q + \tau_q \ddot{\eta}_q = -\Lambda_q \left( u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + \sum_{j=1}^N D_{qj} \left( \eta''_j + \frac{\eta'_j}{r} \right) + F_{q+1}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$



## 1.4. Краевые условия

Для получения замкнутой постановки задачи, на поверхности цилиндрического тела ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ) задаются краевые условия следующего вида:

– кинематические условия

$$\begin{aligned} u_r|_{r=r_2} &= f^{(11)}(t), \quad \eta^{(q)}\Big|_{r=r_2} = f^{(q+1,1)}(t), \\ u_r|_{r=r_1} &= f^{(12)}(t), \quad \eta^{(q)}\Big|_{r=r_1} = f^{(q+1,2)}(t); \end{aligned} \quad (1.11)$$

– динамические условия

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=r_2} &= f^{(11)}(t), \quad \left( J_r^{(q)} + \tau^{(q)} \frac{\partial J_r^{(q)}}{\partial t} \right) \Big|_{r=r_2} = f^{(q+1,1)}(t), \\ \sigma_r|_{r=r_1} &= f^{(12)}(t), \quad \left( J_r^{(q)} + \tau^{(q)} \frac{\partial J_r^{(q)}}{\partial t} \right) \Big|_{r=r_1} = f^{(q+1,2)}(t); \end{aligned} \quad (1.12)$$

Возможны также смешанные условия, представляющие собой всевозможные комбинации кинематических и динамических условий (1.11) и (1.12).

Исходя из того, что среда в начальный момент времени находится в невозмущенном состоянии, начальные условия полагаются нулевыми

$$u_r|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_r|_{t=0} = 0, \quad \eta_r|_{t=0} = 0, \quad \dot{\eta}_r|_{t=0} = 0, \quad (1.13)$$

В цилиндрической системе координат физические компоненты тензора механических напряжений и вектора диффузионного потока имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\varphi - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta^{(j)} = C_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{12} \frac{u_r}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta^{(j)}, \\ \sigma_\varphi &= C_{12}\varepsilon_r + C_{11}\varepsilon_\varphi - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta^{(j)} = C_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{11} \frac{u_r}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta^{(j)}, \\ \sigma_z &= C_{13}\varepsilon_r + C_{13}\varepsilon_\varphi - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta^{(j)} = C_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{13} \frac{u_r}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_3^{(j)} \eta^{(j)}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned}
& J_r^{(q)} + \tau^{(q)} \frac{\partial J_r^{(q)}}{\partial t} = \\
& = \frac{1}{H_1} \left[ \frac{D^{(q)11} m^{(q)} n_0^{(q)}}{RT_0} \nabla_1 \left( \alpha^{(q)kl} \nabla_l u_k \right) - \sum_{r=1}^N D^{(qr)11} \nabla_1 \eta^{(r)} \right] = \\
& = \Lambda_{11}^{(q)} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - \sum_{r=1}^N D_1^{(qr)} \frac{\partial \eta^{(r)}}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Наиболее типичными являются следующие виды граничных условий на каждой из поверхностей полого цилиндрического тела: либо

$$\begin{aligned}
& u_r|_{r=r_2} = f^{(11)}(t), \quad u_r|_{r=r_1} = f^{(12)}(t), \\
& \left[ \Lambda_{11}^{(q)} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N D_1^{(qj)} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial r} \right] \Big|_{r=r_2} = f^{(q+1,1)}(t), \\
& \left[ \Lambda_{11}^{(q)} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N D_1^{(qj)} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial r} \right] \Big|_{r=r_1} = f^{(q+1,2)}(t),
\end{aligned} \tag{1.16}$$

либо

$$\begin{aligned}
& \left( C_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{12} \frac{u_r}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta^{(j)} \right) \Big|_{r=r_2} = f^{(11)}(t), \quad \eta^{(q)} \Big|_{r=r_2} = f^{(q+1,1)}(t), \\
& \left( C_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{12} \frac{u_r}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta^{(j)} \right) \Big|_{r=r_1} = f^{(12)}(t), \quad \eta^{(q)} \Big|_{r=r_1} = f^{(q+1,2)}(t).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Переходя к безразмерным величинам по формулам (1.9) получаем (штрих обозначает производную по безразмерной радиальной координате):

– для граничных условий (1.16)

$$\begin{aligned}
& u|_{r=1} = f_{11}(\tau), \quad \left[ \Lambda_q \left( u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N D_{qj} \eta_j' \right] \Big|_{r=1} = f_{q+1,1}(\tau), \\
& u|_{r=R_1} = f_{12}(\tau), \quad \left[ \Lambda_q \left( u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N D_{qj} \eta_j' \right] \Big|_{r=R_1} = f_{q+1,2}(\tau),
\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$f_{1l}(\tau) = \frac{f^{(1l)}(\tau L/C)}{L}, \quad f_{q+1,l}(\tau) = \frac{f^{(q+1,l)}(\tau L/C)}{C}, \quad R_1 = \frac{r_1}{r_2};$$

– для граничных условий (1.17)

$$\begin{aligned} \left( u' + c_{12} \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=1} &= f_{11}(\tau), \quad \eta_q|_{r=1} = f_{q+1,1}(\tau), \\ \left( u' + c_{12} \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=R_1} &= f_{12}(\tau), \quad \eta_q|_{r=R_1} = f_{q+1,2}(\tau), \\ f_{1l}(\tau) &= \frac{f^{(1l)}(\tau L/C)}{C_{11}}, \quad f_{q+1,l}(\tau) = f^{(q+1,l)}(\tau L/C). \end{aligned} \quad (1.19)$$

В случае изотропной среды:  $c_{11} = c_{22} = \lambda + 2\mu = 1$ ,  $c_{12} = \lambda$ , где  $\lambda$  и  $\mu$  – безразмерные упругие постоянные Ламе.

Для сплошного цилиндра краевые условия на границе  $r = R_1$  заменяются условием ограниченности искомых полей в точке  $r = 0$ . Для внешних поверхностных возмущений принимаем следующие обозначения  $f_k(\tau) = f_{k1}(\tau)$ .

В соответствии с физической постановкой задачи, изложенной в п. 1.2, в дальнейшем будем рассматривать начально-краевую задачу для уравнений (1.10) с нулевыми начальными условиями и краевыми условиями (1.19).

## 1.5. Метод решения

Следует отметить, что метод разделения переменных, часто используемый при решении начально-краевых задач, накладывает определенные ограничения на вид дифференциальных операторов, входящих в дифференциальное уравнение, на геометрию рассматриваемой области и на вид граничных условий. Этот вопрос, на примере задач дифракции цилиндрических и сферических волн, достаточно подробно обсуждался в работах [38, 39]. Было доказано, что невозможно осуществить процедуру разделения пространственных переменных в многомерных задачах в цилиндрической системе координат в случае, когда на границе задаются нормальные напряжения.

В связанных задачах термоупругости и механо диффузии этот эффект про-

является уже в одномерных задачах. Граничные условия (1.19) не позволяют разделить пространственную и временную переменные, что, в свою очередь, не позволяет использовать ряды Фурье для построения решения краевой задачи.

Поэтому для решения поставленных задач будет использоваться метод эквивалентных граничных условий [12, 15, 30–33, 77, 120, 122], суть которого заключается в том, что вместо поставленной задачи рассматривается некоторая вспомогательная задача, описываемая теми же уравнениями, имеющая ту же область решения, но отличающаяся от исходной задачи граничными условиями. Последние выбираются таким образом, чтобы была возможность получить аналитическое решение вспомогательной задачи, например, методом разделения переменных Фурье. Далее строятся соотношения, связывающие правые части граничных условий обеих задач. В результате появляется возможность выразить решение исходной задачи через решение вспомогательной задачи. Для описания метода рассмотрим начально-краевую задачу (1.10), (1.19), записанную в операторной форме

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}; \quad (1.20)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{y})|_{\Pi} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau) \quad (\mathbf{x} \in \Pi); \quad (1.21)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{y})|_{\tau=0} = 0. \quad (1.22)$$

Здесь  $\mathbf{L}$  – матричный дифференциальный оператор уравнений (1.10),  $\mathbf{M}$  – матричный дифференциальный оператор краевых условий (1.19),  $\mathbf{N}$  – матричный дифференциальный оператор начальных условий,  $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, \eta_1, \dots, \eta_N)^T$  – столбец неизвестных,  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{f}$  – правые части уравнений (1.10) и краевых условий (1.19).

Наряду с задачей (1.20)–(1.22) рассмотрим задачу, определяемую уравнением (1.20), начальными условиями (1.22) и следующими краевыми условиями:

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{y})|_{\Pi} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \tau) \quad (\mathbf{x} \in \Pi). \quad (1.23)$$

Предположим, что решение задачи (1.20), (1.22), (1.23) известно и его можно представить в виде

$$\mathbf{y} = \int_0^\tau \int_{\Pi} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tau, t) \mathbf{f}^*(\mathbf{z}, t) dSdt + \int_0^\tau \int_G \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tau, t) \mathbf{F}(\mathbf{z}, t) dzdt, \quad (1.24)$$

где  $\tilde{\mathbf{G}}$  и  $\mathbf{G}$  – матрицы поверхностных и объемных функции Грина соответственно.

Тогда решение задачи (1.20)–(1.22) можно выразить через решение задачи (1.20), (1.22), (1.23). Для этого потребуем, чтобы решение (1.24) удовлетворяло граничному условию (1.21). Получим интегральное уравнение относительно функции  $\mathbf{f}^*$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\Pi} \mathbf{M} [\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tau, t)] \mathbf{f}^*(\mathbf{z}, t) dSdt = \\ & = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau) - \int_0^\tau \int_G \mathbf{M} [\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tau, t)] \mathbf{F}(\mathbf{z}, t) dzdt. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Найдя из этого уравнения функцию  $\mathbf{f}^*$  и подставив в формулу (1.24), получаем решение задачи (1.20)–(1.22).

В соответствии с изложенным алгоритмом, в качестве вспомогательной задачи для цилиндра, находящегося под действием равномерно приложенного по всей его поверхности давления, будем использовать задачу с краевыми условиями следующего вида (обоснование дается в главе 2):

$$\begin{aligned} & \left( u' + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=1} = f_{11}^*(\tau), \quad \eta_q|_{r=1} = f_{q+1,1}(\tau), \\ & \left( u' + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=R_1} = f_{12}^*(\tau), \quad \eta_q|_{r=R_1} = f_{q+1,2}(\tau), \end{aligned} \quad (1.26)$$

где функции  $f_{1l}^*(\tau)$  подлежат определению.

Таким образом, алгоритм решения задачи (1.10), (1.19) с нулевыми начальными условиями разбивается на ряд этапов:

- вначале находятся функции Грина вспомогательной задачи (1.10), (1.26). Для их нахождения используются интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение в ряды Фурье по собственным функциям упругодиффузионного оператора. Этому вопросу посвящена глава 2;
- затем строится интегральное уравнение вида (1.25), которое связывает между собой правые части граничных условий (1.19) и (1.26). Из этого уравнения определяются функции  $f_{1l}^*(\tau)$ ;
- решение исходной задачи (1.10), (1.19) определяется как свертка функций Грина вспомогательной задачи (1.10), (1.26) с найденными функциями  $f_{1l}^*(\tau)$ .

## Глава 2

## Построение собственных функций упругодиффузионного оператора в цилиндрической системе координат

В данной главе даётся постановка и приводится решение задачи Штурма-Лиувилля, позволяющей получить собственные функции упругодиффузионного оператора, используемые в дальнейшем для построения решения задач, сформулированных в главе 1.

### 2.1. Постановка и решение задачи Штурма-Лиувилля

Будем искать решение уравнения (1.10), при отсутствии массовых сил, в виде

$$u(r, \tau) = V(r) W(\tau), \quad \eta_q(r, \tau) = \Phi_q(r) \Psi(\tau). \quad (2.1)$$

Полагаем для простоты, что релаксационные эффекты отсутствуют ( $\tau_q = 0$ ) и среда является идеальным твердым раствором ( $D_{qr} = \delta_{kr} D_q$ ). Тогда, подставляя (2.1) в (1.10), получаем [12]

$$\begin{aligned} V(r) \ddot{W}(\tau) &= V''(r) W(\tau) + \frac{V'(r) W(\tau)}{r} - \\ &\quad - \frac{V(r) W(\tau)}{r^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j'(r) \Psi(\tau), \\ \Phi_q(r) \Psi'(\tau) &= D_q \left( \Phi_q''(r) \Psi(\tau) + \frac{\Phi_q'(r) \Psi(\tau)}{r} \right) - \\ &\quad - \Lambda_q \left( V'''(r) W(\tau) + \frac{2V''(r) W(\tau)}{r} - \frac{V'(r) W(\tau)}{r^2} + \frac{V(r) W(\tau)}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Теперь первое уравнение поделим на  $V(r) W(\tau)$ , а остальные уравнения

– на  $\Phi_q(r) \Psi(\tau)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{W}(\tau)}{W(\tau)} &= \frac{V''(r)}{V(r)} + \frac{V'(r)}{rV(r)} - \frac{1}{r^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\Phi'_j(r) \Psi(\tau)}{V(r) W(\tau)}, \\ \frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)} &= D_q \left( \frac{\Phi''_q(r)}{\Phi_q(r)} + \frac{\Phi'_q(r)}{r\Phi_q(r)} \right) - \\ -\Lambda_q &\left( \frac{V'''(r) W(\tau)}{\Phi_q(r) \Psi(\tau)} + \frac{2V''(r) W(\tau)}{r\Phi_q(r) \Psi(\tau)} - \frac{V'(r) W(\tau)}{r^2\Phi_q(r) \Psi(\tau)} + \frac{V(r) W(\tau)}{r^3\Phi_q(r) \Psi(\tau)} \right). \end{aligned}$$

В этих уравнениях левая часть не зависит от  $r$ , а в правых частях есть слагаемые, не зависящие от  $\tau$ , поэтому будем искать решение на множестве таких функций, в которых обе части уравнений не зависят ни от  $r$ , ни от  $\tau$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{W}(\tau)}{W(\tau)} &= \frac{V''(r)}{V(r)} + \frac{V'(r)}{rV(r)} - \frac{1}{r^2} - p \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\Phi'_j(r)}{V(r)} = -\gamma^2, \\ \frac{\dot{\Psi}(\tau)}{\Psi(\tau)} &= D_q \left( \frac{\Phi''_q(r)}{\Phi_q(r)} + \frac{\Phi'_q(r)}{r\Phi_q(r)} \right) - \\ -\frac{\Lambda_q}{p} &\left( \frac{V'''(r)}{\Phi_q(r)} + \frac{2V''(r)}{r\Phi_q(r)} - \frac{V'(r)}{r^2\Phi_q(r)} + \frac{V(r)}{r^3\Phi_q(r)} \right) = -\gamma^2\omega, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\Psi(\tau)}{W(\tau)} = p, \quad (2.3)$$

где  $\gamma$ ,  $\omega$  и  $p$  – некоторые константы.

В результате приходим к следующей задаче Штурма-Лиувилля [12]:

$$\begin{aligned} V''(r) + \frac{V'(r)}{r} - \frac{V(r)}{r^2} - p \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi'_j(r) &= -\gamma^2 V(r), \\ D_q \left( \Phi''_q(r) + \frac{\Phi'_q(r)}{r} \right) - \frac{\Lambda_q}{p} \left( V'''(r) + \frac{2V''(r)}{r} - \frac{V'(r)}{r^2} + \frac{V(r)}{r^3} \right) &= \\ = -\gamma^2 \omega \Phi_q(r). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Эта система дополняется нулевыми граничными условиями.

Для упрощения выкладок ограничимся случаем, когда  $N = 1$ . Индекс  $q$ , обозначающий номер компоненты вещества, для краткости записи опустим. Та-



ким образом, вместо уравнений (2.4) будем рассматривать уравнения вида

$$\begin{aligned} V''(r) + \frac{V'(r)}{r} - \frac{V(r)}{r^2} - p\alpha\Phi'(r) &= -\gamma^2 V(r), \\ D \left( \Phi''(r) + \frac{\Phi'(r)}{r} \right) - \frac{\Lambda}{p} \left( V'''(r) + \frac{2V''(r)}{r} - \frac{V'(r)}{r^2} + \frac{V(r)}{r^3} \right) &= \\ &= -\gamma^2 \omega \Phi(r). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Решение будем искать в следующей форме [40, 44]:

$$V(r) = V^* J_1(\nu r) + V^{**} Y_1(\nu r), \quad \Phi(r) = \Phi^* J_0(\nu r) + \Phi^{**} Y_0(\nu r), \quad (2.6)$$

где  $J_\alpha(z)$  – функция Бесселя 1-го рода порядка  $\alpha$ ,  $Y_\alpha(z)$  – функция Бесселя 2-го рода (функция Неймана) порядка  $\alpha$  [1, 56].

Подставляя (2.6) в (2.5), с учетом равенств

$$\begin{aligned} \frac{dJ_0(\nu r)}{dr} &= \nu J_0'(\nu r) = -\nu J_1(\nu r), \\ \frac{dY_0(\nu r)}{dr} &= \nu Y_0'(\nu r) = -\nu Y_1(\nu r), \\ \frac{dJ_1(\nu r)}{dr} &= \nu J_1'(\nu r) = \nu J_0(\nu r) - \frac{J_1(\nu r)}{r}, \\ \frac{dY_1(\nu r)}{dr} &= \nu Y_1'(\nu r) = \nu Y_0(\nu r) - \frac{Y_1(\nu r)}{r}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dJ_1(\nu r)}{dr} \right] &= - \left( \nu^2 - \frac{1}{r^2} \right) J_1(\nu r), \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dJ_0(\nu r)}{dr} \right] &= -\nu^2 J_0(\nu r); \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} V''(r) + \frac{V'(r)}{r} - \frac{V(r)}{r^2} &= -\nu^2 V(r), \\ V''' + \frac{2V''}{r} - \frac{V'}{r^2} + \frac{V}{r^3} &= \frac{d}{dr} \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

получаем:

$$\begin{aligned} (\nu^2 - \gamma^2) V^* - p\nu\alpha\Phi^* &= 0, \quad -\frac{\Lambda}{p} V^* + (D\nu^2 - \gamma^2\omega) \Phi^* = 0, \\ (\nu^2 - \gamma^2) V^{**} - p\nu\alpha\Phi^{**} &= 0, \quad -\frac{\Lambda}{p} V^{**} + (D\nu^2 - \gamma^2\omega) \Phi^{**} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Эти две однородные системы имеют одинаковые матрицы коэффициентов. Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы их определители равнялись нулю:

$$\begin{vmatrix} \nu^2 - \gamma^2 & -p\nu\alpha \\ -\frac{\Lambda\nu^3}{p} & D\nu^2 - \gamma^2\omega \end{vmatrix} = (\nu^2 - \gamma^2) (D\nu^2 - \gamma^2\omega) - \nu^4\alpha\Lambda = 0.$$

Как видно из данного разложения, характеристическое уравнение не зависит от параметра  $p$ , поэтому в дальнейшем, без ограничения общности, будем полагать, что  $p = 1$ . Корни характеристического уравнения имеют вид

$$\nu_l = \pm\gamma\sqrt{\frac{D - \omega \pm \sqrt{(D - \omega)^2 - 4\omega(D - \alpha\Lambda)}}{2D}} \quad (l = \overline{1,4}). \quad (2.10)$$

Рассмотрим далее уравнения относительно  $W$  и  $\Psi$  в (2.2):

$$\ddot{W}(\tau) = -\gamma^2 W(\tau), \quad \dot{\Psi}(\tau) = -\gamma^2\omega\Psi(\tau).$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$W(\tau) = C_1 e^{i\gamma\tau} + C_2 e^{-i\gamma\tau}, \quad \Psi(\tau) = C e^{-\gamma^2\omega\tau}.$$

Подставляя эти равенства в (2.3), получаем

$$C_1 e^{i\gamma\tau} + C_2 e^{-i\gamma\tau} = C e^{-\gamma^2\omega\tau}.$$

Это равенство возможно, если  $\omega = \pm i/\gamma$ . При этом одна из констант  $C_1$  или  $C_2$  должна быть равна нулю, т.е.

$$\omega = \frac{i}{\gamma} \Rightarrow C_1 = 0, \quad C = C_2,$$

или

$$\omega = -\frac{i}{\gamma} \Rightarrow C_2 = 0, \quad C = C_1.$$

Воспользуемся для определенности первым равенством. Подставляя эти значения в (2.10), получаем

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \gamma A_1, \quad \nu_2 = \gamma A_2, \quad \nu_3 = -\nu_1, \quad \nu_4 = -\nu_2, \\ A_1 &= \sqrt{\frac{\gamma D - i + \sqrt{(\gamma D - i)^2 - 4i\gamma(D - \alpha\Lambda)}}{2\gamma D}}, \\ A_2 &= \sqrt{\frac{\gamma D - i - \sqrt{(\gamma D - i)^2 - 4i\gamma(D - \alpha\Lambda)}}{2\gamma D}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, общее решение системы (2.5) имеет вид

$$\begin{aligned} V(r) &= \sum_{l=1}^2 [V_l^* J_1(\nu_l r) + V_l^{**} Y_1(\nu_l r)], \\ \Phi(r) &= \sum_{l=1}^2 [\Phi_l^* J_0(\nu_l r) + \Phi_l^{**} Y_0(\nu_l r)], \end{aligned} \quad (2.12)$$

где постоянные  $V_l^*$ ,  $V_l^{**}$ ,  $\Phi_l^*$  и  $\Phi_l^{**}$  находятся из граничных условий и связаны между собой соотношениями, вытекающими из уравнений (2.9):

$$\Phi_l^* = \frac{\nu_l^2 - \gamma^2}{\nu_l \alpha} V_l^*, \quad \Phi_l^{**} = \frac{\nu_l^2 - \gamma^2}{\nu_l \alpha} V_l^{**}. \quad (2.13)$$

Учитывая свойства функций Бесселя [56], будем рассматривать следующие виды граничных условий [12]:

$$\begin{aligned} V|_{r=R_1} &= 0, \quad V|_{r=R_2} = 0, \\ \left[ \Lambda \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D\Phi' \right] \Big|_{r=R_1} &= 0, \\ \left[ \Lambda \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D\Phi' \right] \Big|_{r=R_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

или

$$\begin{aligned} \left( V' + \frac{V}{r} - \alpha\Phi \right) \Big|_{r=R_1} &= 0, \quad \left( V' + \frac{V}{r} - \alpha\Phi \right) \Big|_{r=R_2} = 0, \\ \Phi|_{r=R_1} &= 0, \quad \Phi|_{r=R_2} = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
V|_{r=R_1} = 0, \quad \left( V' + \frac{V}{r} - \alpha\Phi \right) \Big|_{r=R_2} = 0, \\
\left[ \Lambda \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D\Phi' \right] \Big|_{r=R_1} = 0, \quad \Phi|_{r=R_2} = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
\left( V' + \frac{V}{r} - \alpha\Phi \right) \Big|_{r=R_1} = 0, \quad V|_{r=R_2} = 0, \\
\Phi|_{r=R_1} = 0, \quad \left[ \Lambda \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D\Phi' \right] \Big|_{r=R_2} = 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Начнем с граничных условий вида (2.14). Подставляя (2.12) в (2.14), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^2 [V_l^* J_1(\nu_l R_2) + V_l^{**} Y_1(\nu_l R_2)] &= 0, \\
\sum_{l=1}^2 \delta_l [V_l^* J_1(\nu_l R_2) + V_l^{**} Y_1(\nu_l R_2)] &= 0, \\
\sum_{l=1}^2 [V_l^* J_1(\nu_l R_1) + V_l^{**} Y_1(\nu_l R_1)] &= 0, \\
\sum_{l=1}^2 \delta_l [V_l^* J_1(\nu_l R_1) + V_l^{**} Y_1(\nu_l R_1)] &= 0, \\
\delta_l &= \frac{D(\nu_l^2 - \gamma^2)}{\alpha} - \Lambda \nu_l^2.
\end{aligned}$$

Запишем матрицу этой системы:

$$\begin{pmatrix}
J_1(\nu_1 R_2) & J_1(\nu_2 R_2) & Y_1(\nu_1 R_2) & Y_1(\nu_2 R_2) \\
\delta_1 J_1(\nu_1 R_2) & \delta_2 J_1(\nu_2 R_2) & \delta_1 Y_1(\nu_1 R_2) & \delta_2 Y_1(\nu_2 R_2) \\
J_1(\nu_1 R_1) & J_1(\nu_2 R_1) & Y_1(\nu_1 R_1) & Y_1(\nu_2 R_1) \\
\delta_1 J_1(\nu_1 R_1) & \delta_2 J_1(\nu_2 R_1) & \delta_1 Y_1(\nu_1 R_1) & \delta_2 Y_1(\nu_2 R_1)
\end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований она приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{Y_1(\nu_2 R_2)}{J_1(\nu_2 R_2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Y_1(\nu_2 R_1)}{J_1(\nu_2 R_1)} - \frac{Y_1(\nu_2 R_2)}{J_1(\nu_2 R_2)} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что необходимым условием существования ненулевого решения является выполнение следующего равенства:

$$J_1(\nu_2 R_2) Y_1(\nu_2 R_1) - Y_1(\nu_2 R_2) J_1(\nu_2 R_1) = 0.$$

При этом  $V_1^* = 0$  и  $V_1^{**} = 0$ . Для остальных постоянных получаем

$$V_2^* = -\frac{Y_1(\gamma \tilde{A}_2 R_2)}{J_1(\gamma \tilde{A}_2 R_2)} V_2^{**}, \quad \forall V_2^{**} \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, приходим к следующему решению:

$$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}(\lambda_n r), \quad \Phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \Psi_{10}(\lambda_n r); \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(\lambda_n r) &= Y_1(\lambda_n R_2) J_1(\lambda_n r) - J_1(\lambda_n R_2) Y_1(\lambda_n r), \\ \Psi_{10}(\lambda_n r) &= Y_1(\lambda_n R_2) J_0(\lambda_n r) - J_1(\lambda_n R_2) Y_0(\lambda_n r), \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $\lambda_n$  удовлетворяют уравнению

$$\Psi_{11}(\lambda_n R_1) = 0. \quad (2.20)$$

Для граничных условий вида (2.15) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения величин  $V_l^*$  и  $V_l^{**}$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^2 \varepsilon_l [V_l^* J_0(\nu_l R_2) + V_l^{**} Y_0(\nu_l R_2)] &= 0, \\
\sum_{l=1}^2 (\beta_l - \varepsilon_l) [V_l^* J_0(\nu_l R_2) + V_l^{**} Y_0(\nu_l R_2)] &= 0, \\
\sum_{l=1}^2 \varepsilon_l [V_l^* J_0(\nu_l R_1) + V_l^{**} Y_0(\nu_l R_1)] &= 0, \\
\sum_{l=1}^2 (\beta_l - \varepsilon_l) [V_l^* J_0(\nu_l R_1) + V_l^{**} Y_0(\nu_l R_1)] &= 0, \\
\varepsilon_l &= \frac{\gamma^2 - \nu_l^2}{\nu_l}, \quad \beta_l = \nu_l.
\end{aligned}$$

Матрица этой системы приводится к виду

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{Y_0(\nu_2 R_2)}{J_0(\nu_2 R_2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Y_0(\nu_2 R_1)}{J_0(\nu_2 R_1)} - \frac{Y_0(\nu_2 R_2)}{J_0(\nu_2 R_2)} \end{pmatrix}.$$

Отсюда снова получаем, что  $V_1^* = 0$  и  $V_1^{**} = 0$ , а для остальных неизвестных

$$V_2^* = -\frac{Y_0(\nu_2 R_2)}{J_0(\nu_2 R_2)} V_2^{**}, \quad \forall V_2^{**} \in \mathbb{R}.$$

Подставляя в (2.12), получаем

$$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{01}(\lambda_n r), \quad \Phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \Psi_{00}(\lambda_n r); \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{01}(\lambda_n r) &= Y_0(\lambda_n R_2) J_1(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n R_2) Y_1(\lambda_n r), \\
\Psi_{00}(\lambda_n r) &= Y_0(\lambda_n R_2) J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n R_2) Y_0(\lambda_n r),
\end{aligned} \quad (2.22)$$

где  $\lambda_n$  удовлетворяют уравнению

$$\Psi_{00}(\lambda_n R_1) = 0. \quad (2.23)$$

Таблица 2.1 Решения задачи Штурма-Лиувилля

Граничные условия	Решение задачи Штурма-Лиувилля
$V(R_2) = 0, V(R_1) = 0,$ $\left[ \Lambda_q \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D_q \Phi'_q \right] \Big _{r=R_2} = 0,$ $\left[ \Lambda_q \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D_q \Phi'_q \right] \Big _{r=R_1} = 0;$	$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}(\lambda_n r),$ $\Phi_q(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} \Psi_{10}(\lambda_n r),$ $\Psi_{11}(\lambda_n R_1) = 0;$
$\Phi_q(R_2) = 0, \Phi_q(R_1) = 0,$ $\left( V' + \frac{V}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j \right) \Big _{r=R_1} = 0,$ $\left( V' + \frac{V}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j \right) \Big _{r=R_2} = 0;$	$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{01}(\lambda_n r),$ $\Phi_q(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} \Psi_{00}(\lambda_n r),$ $\Psi_{11}(\lambda_n R_1) = 0;$
$\Phi_q(R_2) = 0, V(R_1) = 0,$ $\left[ \Lambda_q \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D_q \Phi'_q \right] \Big _{r=R_1} = 0,$ $\left( V' + \frac{V}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j \right) \Big _{r=R_2} = 0;$	$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}(\lambda_n r),$ $\Phi_q(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} \Psi_{10}(\lambda_n r),$ $\Psi_{01}(\lambda_n R_1) = 0;$
$\Phi_q(R_1) = 0, V(R_2) = 0,$ $\left[ \Lambda_q \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D_q \Phi'_q \right] \Big _{r=R_2} = 0,$ $\left( V' + \frac{V}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j \right) \Big _{r=R_1} = 0;$	$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{01}(\lambda_n r),$ $\Phi_q(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} \Psi_{00}(\lambda_n r),$ $\Psi_{10}(\lambda_n R_1) = 0.$

Аналогичным образом находятся собственные функции для задач с крайними условиями (2.16) и (2.17).

Выполненные построения остаются справедливыми в случае более сложных моделей для многокомпонентных сред ( $N \geq 1$ ) и с учетом эффектов релаксации ( $\tau_q \neq 0$ ). Например, при  $\tau_q \neq 0$ ,  $N = 1$  изменяется только второе равенство в (2.2), которое записывается так:

$$\frac{\dot{\Psi}(\tau) + \tau_q \ddot{\Psi}(\tau)}{\Psi(\tau)} = -\gamma^2 \omega \quad (q = 1).$$

При этом система (2.4) не изменяется и представление ее решения в форме (2.6) сохраняется. Поэтому далее аналогичным образом получается результат в виде (2.12), с той лишь разницей, что коэффициенты  $\gamma A_j$  будут отличаться от тех, что получены при  $\tau_q = 0$  и  $N = 1$ . Алгоритм построения собственных функций обобщается на случай многокомпонентной среды ( $N > 1$ ) [12].

Полученные результаты представлены в таблице 2.1.

## 2.2. Представление решения задачи механо-dиффузии в виде рядов по собственным функциям

Рассмотрим следующие ряды:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Psi_{\alpha\beta}(\lambda_n r), \quad f_n = \frac{1}{\|\Psi_{\alpha\beta}(\lambda_n r)\|^2} \int_{R_1}^{R_2} r f(r) \Psi_{\alpha\beta}(\lambda_n r) dr. \quad (2.24)$$

Здесь функции  $\Psi_{\alpha\beta}(\lambda_n r)$  определены в таблице 2.1 предыдущего пункта, а величины  $\|\Psi_{\alpha\beta}(\lambda_n r)\|^2$  определяются так:

$$\|\Psi_{kl}(\lambda_n r)\|^2 = \int_{R_1}^{R_2} r \Psi_{kl}(\lambda_n r) \Psi_{kl}(\lambda_n r) dr. \quad (2.25)$$

Используя известное равенство [56]

$$\int z Z_\nu(\lambda z) S_\nu(\mu z) dz = \frac{\mu z Z_\nu(\lambda z) S_{\nu-1}(\mu z) - \lambda z Z_{\nu-1}(\lambda z) S_\nu(\mu z)}{\lambda^2 - \mu^2},$$



где в качестве  $Z_\nu$  и  $S_\nu$  выступает любая из функций  $J_\nu$  или  $Y_\nu$ , а  $\lambda$  и  $\mu$  – произвольные числа, нетрудно получить аналогичное соотношение для введенных в предыдущем пункте функций  $\Psi_{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned} & \int r \Psi_{\alpha\beta}(\lambda r) \Psi_{\alpha\beta}(\mu r) dr = \\ & = \frac{\mu r \Psi_{\alpha\beta}(\lambda r) \Psi_{\alpha,\beta-1}(\mu r) - \lambda r \Psi_{\alpha,\beta-1}(\lambda r) \Psi_{\alpha\beta}(\mu r)}{\lambda^2 - \mu^2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Рассмотрим далее несколько случаев.

1. Пусть  $\lambda$  удовлетворяет уравнению (2.20)

$$\Psi_{11}(\lambda R_1) = J_1(\lambda R_2) Y_1(\lambda R_1) - Y_1(\lambda R_2) J_1(\lambda R_1) = 0.$$

При этом из (2.19) следует, что

$$\Psi_{11}(\lambda R_2) = J_1(\lambda R_2) Y_1(\lambda R_2) - Y_1(\lambda R_2) J_1(\lambda R_2) = 0. \quad (2.27)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{R_1}^{R_2} r \Psi_{11}(\lambda r) \Psi_{11}(\mu r) dr = \\ & = \frac{\mu R_2 \Psi_{11}(\lambda R_2) \Psi_{10}(\mu R_2) - \lambda R_2 \Psi_{10}(\lambda R_2) \Psi_{11}(\mu R_2)}{\lambda^2 - \mu^2} - \\ & - \frac{\mu R_1 \Psi_{11}(\lambda R_1) \Psi_{10}(\mu R_1) - \lambda R_1 \Psi_{10}(\lambda R_1) \Psi_{11}(\mu R_1)}{\lambda^2 - \mu^2} = \\ & = \frac{\lambda R_2 \Psi_{10}(\lambda R_2) \Psi_{11}(\mu R_2) - \lambda R_1 \Psi_{10}(\lambda R_1) \Psi_{11}(\mu R_1)}{\mu^2 - \lambda^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для вычисления предела при  $\mu \rightarrow \lambda$  воспользуемся правилом Лопиталья-Бернулли:

$$\begin{aligned} & \int_{R_1}^{R_2} r \Psi_{11}(\mu r) \Psi_{11}(\mu r) dr = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\lambda R_2 \Psi_{10}(\lambda R_2) \Psi_{11}(\mu R_2) - \lambda R_1 \Psi_{10}(\lambda R_1) \Psi_{11}(\mu R_1)}{\mu^2 - \lambda^2} = \\ & = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\lambda R_2^2 \Psi_{10}(\lambda R_2) \Psi'_{11}(\mu R_2) - \lambda R_1^2 \Psi_{10}(\lambda R_1) \Psi'_{11}(\mu R_1)}{\mu} = \\ & = \frac{1}{2} [R_2^2 \Psi_{10}(\lambda R_2) \Psi'_{11}(\lambda R_2) - R_1^2 \Psi_{10}(\lambda R_1) \Psi'_{11}(\lambda R_1)]. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся следующими формулами, которые вытекают из формул для производных функций Бесселя [56]:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_{11}(\lambda r)}{dr} &= \lambda\Psi'_{11}(\lambda r) = -\frac{1}{r}\Psi_{11}(\lambda r) + \lambda\Psi_{10}(\lambda r), \\ \frac{d\Psi_{10}(\lambda r)}{dr} &= \lambda\Psi'_{10}(\lambda r) = -\lambda\Psi_{11}(\lambda r).\end{aligned}\tag{2.29}$$

Тогда

$$\begin{aligned}& \int_{R_1}^{R_2} r\Psi_{11}(\mu r)\Psi_{11}(\lambda r)dr = \\ &= \frac{1}{2} [R_2^2\Psi_{10}(\lambda R_2)\Psi'_{11}(\lambda R_2) - R_1^2\Psi_{10}(\lambda R_1)\Psi'_{11}(\lambda R_1)] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ R_2^2 \left( \Psi_{10}(\lambda R_2) - \frac{\Psi_{11}(\lambda R_2)}{\lambda R_2} \right) \Psi_{10}(\lambda R_2) - \right. \\ & \quad \left. - R_1^2 \left( \Psi_{10}(\lambda R_1) - \frac{\Psi_{11}(\lambda R_1)}{\lambda R_1} \right) \Psi_{10}(\lambda R_1) \right] = \\ &= \{ \Psi_{11}(\lambda R_2) = \Psi_{11}(\lambda R_1) = 0 \} = \frac{R_2^2}{2} [\Psi_{10}(\lambda R_2)]^2 - \frac{R_1^2}{2} [\Psi_{10}(\lambda R_1)]^2.\end{aligned}$$

Если же  $\mu \neq \lambda$  и тоже удовлетворяет уравнению (2.20), то из равенства (2.28) с учётом (2.27) получаем

$$\int_{R_1}^{R_2} r\Psi_{11}(\lambda r)\Psi_{11}(\mu r)dr = 0.$$

Таким образом

$$\int_{R_1}^{R_2} r\Psi_{11}(\lambda_n r)\Psi_{11}(\lambda_k r)dr = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \Psi_1(\lambda_n), & k = n \end{cases},\tag{2.30}$$

$$\Psi_1(\lambda_n) = \|\Psi_{11}(\lambda_n r)\|^2 = \frac{R_2^2}{2} [\Psi_{10}(\lambda_n R_2)]^2 - \frac{R_1^2}{2} [\Psi_{10}(\lambda_n R_1)]^2.\tag{2.31}$$

Аналогично получаем:

$$\int_{R_1}^{R_2} r\Psi_{10}(\lambda_n r)\Psi_{10}(\lambda_k r)dr = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \Psi_1(\lambda_n), & k = n \end{cases},\tag{2.32}$$

где  $\lambda_n$  удовлетворяют уравнению (2.20) и при этом  $\Psi_1(\lambda_n) = \|\Psi_{11}(\lambda_n r)\|^2 = \|\Psi_{10}(\lambda_n r)\|^2$ .

Разобранный случай соответствует краевой задаче с граничными условиями вида (2.14).

2. Для задачи с граничными условиями (2.15) при вычислении величин  $\|\Psi_{\alpha\beta}(\lambda_n r)\|^2$  предполагается, что  $\lambda_n$  удовлетворяют уравнению (2.23), откуда следует, что

$$\Psi_{00}(\lambda_n R_2) = J_0(\lambda_n R_2) Y_0(\lambda_n R_2) - Y_0(\lambda_n R_2) J_0(\lambda_n R_2) = 0.$$

Выполняем аналогичные действия и получаем ( $\alpha = 0, 1$ ):

$$\int_{R_1}^{R_2} r \Psi_{0\alpha}(\lambda_n r) \Psi_{0\alpha}(\lambda_k r) dr = \begin{cases} 0, & \forall n \neq k \\ \Psi_0(\lambda_n), & k = n \end{cases}, \quad (2.33)$$

$$\Psi_0(\lambda_n) = \|\Psi_{0\alpha}(\lambda_n r)\|^2 = \frac{R_2^2}{2} [\Psi_{01}(\lambda_n R_2)]^2 - \frac{R_1^2}{2} [\Psi_{01}(\lambda_n R_1)]^2. \quad (2.34)$$

3. В задачах со смешанными граничными условиями вида (2.16) полагаем, что  $\lambda_n$  удовлетворяют уравнению

$$\Psi_{01}(\lambda_n R_1) = 0. \quad (2.35)$$

Тогда

$$\int_{R_1}^{R_2} r \Psi_{1\alpha}(\lambda_n r) \Psi_{1\alpha}(\lambda_k r) dr = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \tilde{\Psi}_1(\lambda_n), & k = n \end{cases} \quad (\alpha = 0, 1) \quad (2.36)$$

$$\tilde{\Psi}_1(\lambda_n) = \frac{R_2^2}{2} [\Psi_{11}(\lambda_n R_2)]^2 - \frac{R_1^2}{2} [\Psi_{10}(\lambda_n R_1)]^2. \quad (2.37)$$

4. Наконец, для краевых условий (2.17) значения  $\lambda_n$  удовлетворяют уравнению

$$\Psi_{10}(\lambda_n R_1) = 0. \quad (2.38)$$

В этом случае

$$\int_{R_1}^{R_2} r \Psi_{0\alpha}(\lambda_n r) \Psi_{0\alpha}(\lambda_k r) dr = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \tilde{\Psi}_0(\lambda_n), & k = n \end{cases} \quad (\alpha = 0, 1) \quad (2.39)$$

$$\tilde{\Psi}_0(\lambda_n) = \frac{R_2^2}{2} [\Psi_{00}(\lambda_n R_2)]^2 - \frac{R_1^2}{2} [\Psi_{01}(\lambda_n R_1)]^2. \quad (2.40)$$

### 2.3. Преобразование интегральных операторов

При использовании рядов (2.24), для решения поставленных в работе задач необходимо получить формулы для преобразования дифференциальных операторов, входящих в (1.10). Как и прежде, будем рассматривать 4 вида граничных условий (2.14)–(2.17).

Рассмотрим вначале краевые условия (2.14). В соответствии с результатами, полученными в предыдущих пунктах, решение задачи ищется в виде

$$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}(\lambda_n r), \quad v_n = \frac{1}{\Psi_1(\lambda_n)} \int_{R_1}^{R_2} r V(r) \Psi_{11}(\lambda_n r) dr, \quad (2.41)$$

$$\Phi_q(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} \Psi_{10}(\lambda_n r), \quad \varphi_{qn} = \frac{1}{\Psi_1(\lambda_n)} \int_{R_1}^{R_2} r \Phi_q(r) \Psi_{10}(\lambda_n r) dr,$$

где величины  $\Psi_1(\lambda_n)$  определяются по формулам (2.31), а  $\lambda_n$  являются корнями уравнения (2.20).

Найдем формулы для преобразования производных в уравнениях (1.10).

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} r V'(r) \Psi_{10}(\lambda_n r) dr &= \int_{R_1}^{R_2} r \Psi_{10}(\lambda_n r) dV = r \Psi_{10}(\lambda_n r) V \Big|_{R_1}^{R_2} - \\ &- \int_{R_1}^{R_2} [\Psi_{10}(\lambda_n r) - r \lambda_n \Psi_{11}(\lambda_n r)] V dr = r \Psi_{10}(\lambda_n r) V \Big|_{R_1}^{R_2} - \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$- \int_{R_1}^{R_2} \Psi_{10}(\lambda_n r) V dr + \lambda_n \int_{R_1}^{R_2} r \Psi_{11}(\lambda_n r) V dr.$$

Таким образом

$$\int_{R_1}^{R_2} r \left( V' + \frac{V}{r} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) dr = r \Psi_{10}(\lambda_n r) V \Big|_{R_1}^{R_2} + \lambda_n \Psi_{11}(\lambda_n) v_n. \quad (2.43)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} r \Phi'_q(r) \Psi_{11}(\lambda_n r) dr &= \int_{R_1}^{R_2} r \Psi_{11}(\lambda_n r) d\Phi_q = r \Psi_{11}(\lambda_n r) \Phi_q \Big|_{R_1}^{R_2} - \\ - \int_{R_1}^{R_2} [\Psi_{11}(\lambda_n r) - \Psi_{11}(\lambda_n r) + r \lambda_n \Psi_{10}(\lambda_n r)] \Phi_q dr &= -\lambda_n \int_{R_1}^{R_2} r \Psi_{10}(\lambda_n r) \Phi_q dr. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\int_{R_1}^{R_2} r \Phi'_q(r) \Psi_{11}(\lambda_n r) dr = -\lambda_n \Psi_{11}(\lambda_n) \varphi_{qn}. \quad (2.44)$$

Далее для дифференциального оператора 2-го порядка, с учетом равенства

$$V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rV') - \frac{V}{r^2}, \quad (2.45)$$

имеем:

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) \Psi_{11}(\lambda_n r) r dr &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{d}{dr} (rV') \Psi_{11}(\lambda_n r) dr - \int_{R_1}^{R_2} \frac{V}{r} \Psi_{11}(\lambda_n r) dr = \\ = rV' \Psi_{11}(\lambda_n r) \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} rV' \left[ -\frac{1}{r} \Psi_{11}(\lambda_n r) + \lambda_n \Psi_{10}(\lambda_n r) \right] dr &- \int_{R_1}^{R_2} \frac{V}{r} \Psi_{11}(\lambda_n r) dr = \\ = \int_{R_1}^{R_2} V' \Psi_{11}(\lambda_n r) dr - \lambda_n \int_{R_1}^{R_2} rV' \Psi_{10}(\lambda_n r) dr - \int_{R_1}^{R_2} \frac{V}{r} \Psi_{11}(\lambda_n r) dr. \end{aligned}$$

Первый интеграл преобразуем так:

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} V' \Psi_{11}(\lambda_n r) dr &= V \Psi_{11}(\lambda_n r) \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} V \left[ -\frac{1}{r} \Psi_{11}(\lambda_n r) + \lambda_n \Psi_{10}(\lambda_n r) \right] dr = \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{V}{r} \Psi_{11}(\lambda_n r) dr - \lambda_n \int_{R_1}^{R_2} V \Psi_{10}(\lambda_n r) dr. \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в предыдущее равенство, получаем

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) \Psi_{11}(\lambda_n r) r dr &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{V}{r} \Psi_{11}(\lambda_n r) dr - \lambda_n \int_{R_1}^{R_2} V \Psi_{10}(\lambda_n r) dr - \\ - \lambda_n \int_{R_1}^{R_2} r V' \Psi_{10}(\lambda_n r) dr - \int_{R_1}^{R_2} \frac{V}{r} \Psi_{11}(\lambda_n r) dr &= -\lambda_n \int_{R_1}^{R_2} r \left( V' + \frac{V}{r} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) dr. \end{aligned}$$

Используя (2.43), приходим к следующей формуле для преобразования дифференциального оператора 2-го порядка (2.45):

$$\int_{R_1}^{R_2} \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) \Psi_{11}(\lambda_n r) r dr = -\lambda_n r \Psi_{10}(\lambda_n r) V \Big|_{R_1}^{R_2} - \lambda_n^2 \Psi_1(\lambda_n) v_n. \quad (2.46)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \left( \Phi_q'' + \frac{\Phi_q'}{r} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) r dr &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{d}{dr} (r \Phi_q') \Psi_{10}(\lambda_n r) dr = \\ &= r \Phi_q' \Psi_{10}(\lambda_n r) \Big|_{R_1}^{R_2} + \lambda_n \int_{R_1}^{R_2} r \Phi_q' \Psi_{11}(\lambda_n r) dr. \end{aligned}$$

С учетом формулы (2.44), получаем

$$\int_{R_1}^{R_2} \left( \Phi_q'' + \frac{\Phi_q'}{r} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) r dr = r \Phi_q' \Psi_{10}(\lambda_n r) \Big|_{R_1}^{R_2} - \lambda_n^2 \Psi_1(\lambda_n) \varphi_{qn}. \quad (2.47)$$

Для дифференциального оператора 3-го порядка, с учетом представления

$$Z''' + \frac{2Z''}{z} - \frac{Z'}{z^2} + \frac{Z}{z^3} = \frac{d}{dz} \left( Z'' + \frac{Z'}{z} - \frac{Z}{z^2} \right) + \frac{1}{z} \left( Z'' + \frac{Z'}{z} - \frac{Z}{z^2} \right), \quad (2.48)$$

имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{R_1}^{R_2} \left( V''' + \frac{2V''}{r} - \frac{V'}{r^2} + \frac{V}{r^3} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) r dr = \\
& = \int_{R_1}^{R_2} \frac{d}{dr} \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) r dr + \\
& + \int_{R_1}^{R_2} \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) r dr = \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) r \Big|_{R_1}^{R_2} - \\
& - \int_{R_1}^{R_2} \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) [\Psi_{10}(\lambda_n r) - r \lambda_n \Psi_{11}(\lambda_n r)] dr = \\
& = \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) r \Big|_{R_1}^{R_2} + \lambda_n \int_{R_1}^{R_2} r \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) \Psi_{11}(\lambda_n r) dr.
\end{aligned}$$

С учетом (2.46), это равенство преобразуется так:

$$\begin{aligned}
& \int_{R_1}^{R_2} \left( V''' + \frac{2V''}{r} - \frac{V'}{r^2} + \frac{V}{r^3} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) r dr = \\
& = \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) r \Big|_{R_1}^{R_2} - \lambda_n^2 r \Psi_{10}(\lambda_n r) V \Big|_{R_1}^{R_2} - \lambda_n^3 \Psi_1(\lambda_n) v_n.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Для задачи с краевыми условиями (2.15) решение ищется в виде

$$\begin{aligned}
V(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{01}(\lambda_n r), \quad v_n = \frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \int_{R_1}^{R_2} r V(r) \Psi_{01}(\lambda_n r) dr, \\
\Phi_q(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} \Psi_{00}(\lambda_n r), \quad \varphi_{qn} = \frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \int_{R_1}^{R_2} r \Phi_q(r, \tau) \Psi_{00}(\lambda_n r) dr,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

где величины  $\Psi_0(\lambda_n)$  определяются по формулам (2.34), а  $\lambda_n$  являются корнями уравнения (2.23).

Выполняя аналогичные построения, получаем:

$$\int_{R_1}^{R_2} r \left( V' + \frac{V}{r} \right) \Psi_{00}(\lambda_n r) dr = \int_{R_1}^{R_2} r \Psi_{00}(\lambda_n r) dV = \lambda_n \Psi_0(\lambda_n) v_n. \quad (2.51)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} r \Phi'_q(r) \Psi_{01}(\lambda_n r) dr = r \Psi_{01}(\lambda_n r) \Phi_q(r) \Big|_{R_1}^{R_2} - \lambda_n \Psi_0(\lambda_n) \varphi_{qn}. \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} & \int_{R_1}^{R_2} \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) \Psi_{01}(\lambda_n r) r dr = \\ & = r \left( V' + \frac{V}{r} \right) \Psi_{01}(\lambda_n r) \Big|_{R_1}^{R_2} - \lambda_n^2 \Psi_0(\lambda_n) v_n. \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} \left( \Phi''_q + \frac{\Phi'_q}{r} \right) \Psi_{00}(\lambda_n r) r dr = \lambda_n r \Psi_{01}(\lambda_n r) \Phi_q(r) \Big|_{R_1}^{R_2} - \lambda_n^2 \Psi_0(\lambda_n) \varphi_{qn}. \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} & \int_{R_1}^{R_2} \left( V''' + \frac{2V''}{r} - \frac{V'}{r^2} + \frac{V}{r^3} \right) \Psi_{00}(\lambda_n r) r dr = \\ & = \lambda_n r \left( V' + \frac{V}{r} \right) \Psi_{01}(\lambda_n r) \Big|_{R_1}^{R_2} - \lambda_n^3 \Psi_0(\lambda_n) v_n. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Точно так же получаем формулы для преобразования дифференциальных операторов оставшихся двух задач. В частности, для краевой задачи со смешанными граничными условиями (2.16) имеем:

$$\int_{R_1}^{R_2} r \left( V' + \frac{V}{r} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) dr = -R_1 \Psi_{10}(\lambda_n R_1) V(R_1) + \lambda_n v_n \tilde{\Psi}_1(\lambda_n), \quad (2.56)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} r \Phi'_q(r) \Psi_{11}(\lambda_n r) dr = R_2 \Psi_{11}(\lambda_n R_2) \Phi_q(R_2) - \lambda_n \varphi_{qn} \tilde{\Psi}_1(\lambda_n), \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} & \int_{R_1}^{R_2} \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) \Psi_{11}(\lambda_n r) r dr = \lambda_n R_1 \Psi_{10}(\lambda_n R_1) V(R_1) + \\ & + R_2 \left[ V'(R_2) + \frac{V(R_2)}{R_2} \right] \Psi_{11}(\lambda_n R_2) - \lambda_n^2 v_n \tilde{\Psi}_1(\lambda_n), \end{aligned} \quad (2.58)$$



$$\int_{R_1}^{R_2} \left( \Phi_q'' + \frac{\Phi_q'}{r} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) r dr = -R_1 \Phi_q'(R_1) \Psi_{10}(\lambda_n R_1) + \quad (2.59)$$

$$+ \lambda_n R_2 \Psi_{11}(\lambda_n R_2) \Phi_q(R_2) - \lambda_n^2 \varphi_{qn} \tilde{\Psi}_1(\lambda_n),$$

$$\begin{aligned} & \int_{R_1}^{R_2} \left( V''' + \frac{2V''}{r} - \frac{V'}{r^2} + \frac{V}{r^3} \right) \Psi_{10}(\lambda_n r) r dr = \\ & = \lambda_n R_2 \left[ V'(R_2) + \frac{V(R_2)}{R_2} \right] \Psi_{11}(\lambda_n R_2) - \lambda_n^3 v_n \tilde{\Psi}_1(\lambda_n) - \\ & - \left[ V''(R_1) + \frac{V'(R_1)}{R_1} - \frac{V(R_1)}{R_1^2} - \lambda_n^2 V(R_1) \right] \Psi_{10}(\lambda_n R_1) R_1. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Решение этой задачи ищется в виде

$$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}(\lambda_n r), \quad v_n = \frac{1}{\tilde{\Psi}_1(\lambda_n)} \int_{R_1}^{R_2} r V(r) \Psi_{11}(\lambda_n r) dr, \quad (2.61)$$

$$\Phi_q(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} \Psi_{10}(\lambda_n r), \quad \varphi_{qn} = \frac{1}{\tilde{\Psi}_1(\lambda_n)} \int_{R_1}^{R_2} r \Phi_q(r) \Psi_{10}(\lambda_n r) dr,$$

где  $\lambda_n$  удовлетворяют уравнению

$$\Psi_{01}(\lambda_n R_1) = 0.$$

## 2.4. Предельный переход к задаче для сплошного цилиндра

В задаче Штурма-Лиувилля для круга  $0 \leq r \leq R_0$  имеем два вида граничных условий:

$$V(R_0) = 0, \quad \left[ \Lambda_q \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) - D_q \Phi_q' \right] \Big|_{r=R_0} = 0 \quad (2.62)$$

или

$$\Phi_q(R_0) = 0, \quad \left( V' + \frac{V}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_q \right) \Big|_{r=R_0} = 0. \quad (2.63)$$

Постоянные  $V_l^{**}$  и  $\Phi_l^{**}$  в (2.12) следует положить равными нулю, так как функция  $Y_0(r)$  не является ограниченной в нуле. В этом случае:

$$\begin{aligned}\Psi_{00}(\lambda_n r) &= \Psi_{10}(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r), \\ \Psi_{10}(\lambda_n r) &= \Psi_{11}(\lambda_n r) = J_1(\lambda_n r),\end{aligned}\tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}\|\Psi_{00}(\lambda_n r)\|^2 &= \|\Psi_{01}(\lambda_n r)\|^2 = \|J_1(\lambda_n r)\|^2 = \frac{R_0^2}{2}[J_1(\lambda_n R_0)]^2, \\ \|\Psi_{10}(\lambda_n r)\|^2 &= \|\Psi_{11}(\lambda_n r)\|^2 = \|J_0(\lambda_n r)\|^2 = \frac{R_0^2}{2}[J_0(\lambda_n R_0)]^2.\end{aligned}\tag{2.65}$$

Тогда из формул (2.41) получаем, что решение краевой задачи с однородными граничными условиями (2.62) имеет вид

$$\begin{aligned}V(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n J_1(\lambda_n r), \quad v_n = \frac{2}{R_0^2 [J_0(\lambda_n R_0)]^2} \int_0^{R_0} r V(r) J_1(\lambda_n r) dr, \\ \Phi_q(r, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} J_0(\lambda_n r), \quad \varphi_{qn} = \frac{2}{R_0^2 [J_0(\lambda_n R_0)]^2} \int_0^{R_0} r \Phi_q(r) J_0(\lambda_n r) dr,\end{aligned}\tag{2.66}$$

где  $\lambda_n$  являются корнями уравнения

$$J_1(\lambda_n R_0) = 0.\tag{2.67}$$

При этом, с учетом свойств производных функций Бесселя, числа  $\lambda_n$  удовлетворяют также уравнению вида

$$J_0'(\lambda_n R_0) = 0.\tag{2.68}$$

Аналоги формул для преобразования производных запишутся так:

$$\int_0^{R_0} r \left( V' + \frac{V}{r} \right) J_0(\lambda_n r) dr = R_0 J_0(\lambda_n R_0) V(R_0) + \lambda_n \frac{R_0^2}{2} [J_0(\lambda_n R_0)]^2 v_n,\tag{2.69}$$

$$\int_0^{R_0} r \Phi_q'(r) J_1(\lambda_n r) dr = -\lambda_n \frac{R_0^2}{2} [J_0(\lambda_n R_0)]^2 \varphi_{qn},\tag{2.70}$$

$$\int_0^{R_0} \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) J_1(\lambda_n r) r dr = \quad (2.71)$$

$$= -\lambda_n R_0 J_0(\lambda_n R_0) V(R_0) - \lambda_n^2 \frac{R_0^2}{2} [J_0(\lambda_n R_0)]^2 v_n,$$

$$\int_0^{R_0} \left( \Phi_q'' + \frac{\Phi_q'}{r} \right) J_0(\lambda_n r) r dr = \quad (2.72)$$

$$= R_0 \Phi_q'(R_0) J_0(\lambda_n R_0) - \lambda_n^2 \frac{R_0^2}{2} [J_0(\lambda_n R_0)]^2 \varphi_{qn},$$

$$\int_0^{R_0} \left( V''' + \frac{2V''}{r} - \frac{V'}{r^2} + \frac{V}{r^3} \right) J_0(\lambda_n r) r dr = \quad (2.73)$$

$$= \left( V''(R_0) + \frac{V'(R_0)}{R_0} - \frac{V(R_0)}{R_0^2} \right) J_0(\lambda_n R_0) R_0 -$$

$$- \lambda_n^2 R_0 J_0(\lambda_n R_0) V(R_0) - \lambda_n^3 \frac{R_0^2}{2} [J_0(\lambda_n R_0)]^2 v_n.$$

Соответственно, для краевой задачи с граничными условиями (2.62) решение ищется в следующей форме

$$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n J_1(\lambda_n r), \quad v_n = \frac{2}{R_0^2 [J_1(\lambda_n R_0)]^2} \int_0^{R_0} r V(r) J_1(\lambda_n r) dr, \quad (2.74)$$

$$\Phi_q(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{qn} J_0(\lambda_n r), \quad \varphi_{qn} = \frac{2}{R_0^2 [J_1(\lambda_n R_0)]^2} \int_0^{R_0} r \Phi_q(r) J_0(\lambda_n r) dr,$$

где  $\lambda_n$  являются корнями уравнения

$$J_0(\lambda_n R_0) = 0, \quad (2.75)$$

а также удовлетворяют уравнению

$$\lambda_n R_0 J_1'(\lambda_n R_0) + J_1(\lambda_n R_0) = 0.$$

Формулы преобразования дифференциальных операторов тогда принима-

ют следующий вид:

$$\int_0^{R_0} r \left( V' + \frac{V}{r} \right) J_0(\lambda_n r) dr = \lambda_n \frac{R_0^2}{2} [J_1(\lambda_n R_0)]^2 v_n, \quad (2.76)$$

$$\int_0^{R_0} r \Phi_q'(r) J_1(\lambda_n r) dr = R_0 J_1(\lambda_n R_0) \Phi_q(R_0) - \lambda_n \frac{R_0^2}{2} [J_1(\lambda_n R_0)]^2 \varphi_{qn}, \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{R_0} \left( V'' + \frac{V'}{r} - \frac{V}{r^2} \right) J_1(\lambda_n r) r dr = \\ & = R_0 \left[ V'(R_0) + \frac{V(R_0)}{R_0} \right] J_1(\lambda_n R_0) - \lambda_n^2 \frac{R_0^2}{2} [J_1(\lambda_n R_0)]^2 v_n, \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{R_0} \left( \Phi_q'' + \frac{\Phi_q'}{r} \right) J_0(\lambda_n r) r dr = \\ & = \lambda_n R_0 J_1(\lambda_n R_0) \Phi_q(R_0) - \lambda_n^2 \frac{R_0^2}{2} [J_1(\lambda_n R_0)]^2 \varphi_{qn}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{R_0} \left( V''' + \frac{2V''}{r} - \frac{V'}{r^2} + \frac{V}{r^3} \right) J_0(\lambda_n r) r dr = \\ & = \lambda_n R_0 \left[ V'(R_0) + \frac{V(R_0)}{R_0} \right] J_1(\lambda_n R_0) - \lambda_n^3 \frac{R_0^2}{2} [J_1(\lambda_n R_0)]^2 v_n. \end{aligned} \quad (2.80)$$

## Глава 3

# Моделирование нестационарных механодиффузионных процессов в сплошном цилиндре

## 3.1. Интегральное представление решения

Рассматривается одномерная задача об определении напряженно-деформированного состояния сплошного  $N + 1$ -компонентного цилиндра радиуса  $R_0$ , находящегося под влиянием нестационарных механодиффузионных возмущений.

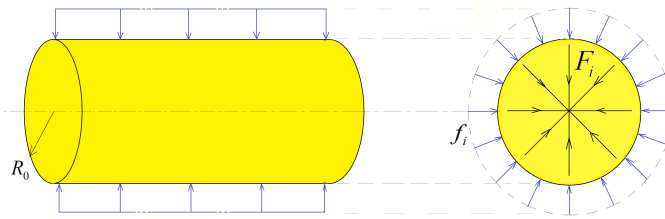


Рис. 3.1 Иллюстрация к постановке задачи. Сплошной цилиндр.  $f_i$  – поверхностные возмущения,  $F_j$  – объёмные возмущения

Физико-механические процессы в данной сплошной среде описываются связанной системой уравнений упругой диффузии (1.10), (1.19) с нулевыми начальными условиями. Полагая характерный линейный размер  $L = R_0$  и переходя к безразмерным величинам по формулам (1.9), приходим к начально-краевой задаче для цилиндра единичного радиуса. Полагаем для простоты, что среда является идеальным твердым раствором, т.е.  $D_{qr} = \delta_{kr} D_q$ .

Как было ранее отмечено (см. п. 1.4), основная проблема заключается в невозможности построения решения поставленной задачи в виде рядов Фурье. Это существенно осложняет обращение интегрального преобразования Лапласа-

са по времени, которое также используется при решении этой задачи. Для преодоления указанной трудности используется метод эквивалентных граничных условий, который заключается в том, что вместо исходной задачи (1.10), (1.19) рассматривается вспомогательная задача для уравнений (1.10) с граничными условиями вида

$$\left( u' + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=1} = f_1^*(\tau), \quad \eta_q|_{r=1} = f_{q+1}(\tau), \quad (3.1)$$

где функция  $f_1^*(\tau)$  подлежит определению. Решение этой задачи записывается в виде

$$\begin{aligned} u(r, \tau) &= \int_0^\tau G_{11}(r, \tau - t) f_1^*(t) dt + \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau G_{1m}(r, \tau - t) f_m(t) dt + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau \int_0^1 \tilde{G}_{1m}(r, \xi, t) F_m(\xi, \tau - t) dt d\xi, \\ \eta_q(r, \tau) &= \int_0^\tau G_{q+1,1}(r, \tau - t) f_1^*(t) dt + \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau G_{q+1,m}(r, \tau - t) f_m(t) dt + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau \int_0^1 \tilde{G}_{q+1,m}(r, \xi, t) F_m(\xi, \tau - t) dt d\xi, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $G_{nm}(r, \tau)$ ,  $\forall n, m = \overline{1, N+1}$  – поверхностные функции Грина, представляющие собой решения следующих начально-краевых задач:

$$\begin{aligned} \left( G''_{1m} + \frac{G'_{1m}}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+1,m} &= \ddot{G}_{1m}, \\ -\Lambda_q \left( G'''_{1m} + \frac{2G''_{1m}}{r} - \frac{G'_{1m}}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) + \\ + D_q \left( G''_{q+1,m} + \frac{G'_{q+1,m}}{r} \right) &= \dot{G}_{q+1,m} + \tau_q \ddot{G}_{q+1,m}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\left( G'_{1m} + \frac{1}{r} G_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m} \right) \Big|_{r=1} = \delta_{1m} \delta(\tau), \quad G_{q+1,m} \Big|_{r=1} = \delta_{q+1,m} \delta(\tau). \quad (3.4)$$

Соответственно  $\tilde{G}_{km}(r, \xi, \tau)$ ,  $\forall k, m = \overline{1, N+1}$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$  – объемные функции Грина рассматриваемой задачи, удовлетворяющие следующим начально-краевым задачам:

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{G}''_{1m} + \frac{\tilde{G}'_{1m}}{r} - \frac{\tilde{G}_{1m}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{G}'_{j+1,m} + \delta_{1m} \delta(r - \xi) \delta(\tau) = \ddot{\tilde{G}}_{1m}, \\ & -\Lambda_q \left( \tilde{G}'''_{1m} + \frac{2\tilde{G}''_{1m}}{r} - \frac{\tilde{G}'_{1m}}{r^2} + \frac{\tilde{G}_{1m}}{r^3} \right) + D_q \left( \tilde{G}''_{q+1,m} + \frac{\tilde{G}'_{q+1,m}}{r} \right) + \\ & + \delta_{q+1,m} \delta(r - \xi) \delta(\tau) = \dot{\tilde{G}}_{q+1,m} + \tau_q \ddot{\tilde{G}}_{q+1,m}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\left( \tilde{G}'_{1m} + \frac{\tilde{G}_{1m}}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{G}_{j+1,m} \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad \tilde{G}_{q+1,m} \Big|_{r=1} = 0. \quad (3.6)$$

Начальные условия для поверхностных и объемных функций Грина полагаем нулевыми.

## 3.2. Алгоритм построения поверхностных функций Грина

Для нахождения поверхностных функций Грина применяем к задаче (3.3), (3.4) интегральное преобразование Лапласа по времени, затем первое уравнение в (3.3) домножаем на  $rJ_1(\lambda_n r)$ , а второе – на  $rJ_0(\lambda_n r)$ , после чего интегрируем оба уравнения по  $r$  в промежутке  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( G''_{1m} + \frac{1}{r} G'_{1m} - \frac{1}{r^2} G_{1m} \right) J_1(\lambda_n r) r dr - \\ & - \sum_{j=1}^N \alpha_j \int_0^1 G'_{j+1,m} J_1(\lambda_n r) r dr = s^2 \int_0^1 G'_{1m} J_1(\lambda_n r) r dr, \end{aligned}$$

$$-\Lambda_q \int_0^1 \left( G_{1m}'''L + \frac{2}{r} G_{1m}''L - \frac{1}{r^2} G_{1m}'L + \frac{1}{r^3} G_{1m}^L \right) J_0(\lambda_n r) r dr + \quad (3.7)$$

$$+ D_q \int_0^1 \left( G_{q+1,m}''L + \frac{1}{r} G_{q+1,m}'L \right) J_0(\lambda_n r) r dr = (s + \tau_q s^2) \int_0^1 G_{q+1,m}^L J_0(\lambda_n r) r dr;$$

$$\left( G_{1m}'L + \frac{1}{r} G_{1m}^L - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m}^L \right) \Big|_{r=1} = \delta_{1m}, \quad G_{q+1,m}^L \Big|_{r=1} = \delta_{q+1,m}. \quad (3.8)$$

Здесь  $J_0(z)$ ,  $J_1(z)$  – функции Бесселя 0-го и 1-го порядков,  $\lambda_n$  – корни характеристического уравнения (2.75).

Далее, с учетом граничных условий (3.8) и формул (2.75)–(2.80), получаем

$$\begin{aligned} k_{1n}(s) G_{1mn}^L(s) - \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,mn}^L(s) &= \frac{2}{J_1(\lambda_n)} \delta_{1m}, \\ k_{q+1,n}(s) G_{q+1,mn}^L(s) - \Lambda_q \lambda_n^3 G_{1mn}^L(s) &= \\ &= \frac{2\lambda_n \Lambda_q}{J_1(\lambda_n)} \left( \frac{D_q}{\Lambda_q} \delta_{q+1,m} - \delta_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{j+1,m} \right), \\ k_{1n}(s) &= \lambda_n^2 + s^2, \quad k_{q+1,n}(s) = D_q \lambda_n^2 + s + \tau_q s^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где, в соответствии с формулами (2.74),

$$\begin{aligned} G_{1m}^L(r, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1mn}^L(s) J_1(\lambda_n r), \\ G_{q+1,mn}^L(r, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,mn}^L(s) J_0(\lambda_n r), \\ G_{q+1,mn}^L(s) &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 r G_{q+1,m}^L(r, s) J_0(\lambda_n r) dr, \\ G_{1mn}^L(\lambda_n, s) &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 r G_{1m}^L(r, s) J_1(\lambda_n r) dr. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (3.9) имеет вид



$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} G_{11n}^L(s) \\ G_{1,q+1,n}^L(s) \end{array} \right\} &= \frac{2}{J_1(\lambda_n) P_n(s)} \left\{ \begin{array}{l} P_{11n}(s) \\ P_{1,q+1,n}(s) \end{array} \right\}, \\ G_{q+1,1n}^L(s) &= -\frac{2}{J_1(\lambda_n)} \left[ \frac{\lambda_n \Lambda_q}{k_{q+1,n}(s)} + \frac{P_{q+1,1n}(s)}{Q_{qn}(s)} \right], \\ G_{q+1,p+1,n}^L(s) &= -\frac{2}{J_1(\lambda_n)} \left[ \frac{\lambda_n (\Lambda_q \alpha_p - D_q \delta_{pq})}{k_{q+1,n}(s)} + \frac{P_{q+1,p+1,n}(s)}{Q_{qn}(s)} \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} P_n(s) &= k_{1n}(s) \Pi_n(s) - \lambda_n^4 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s), \quad Q_{qn}(s) = k_{q+1,n}(s) P_n(s), \\ \Pi_n(s) &= \prod_{j=1}^N k_{j+1,n}(s), \quad \Pi_{jn}(s) = \prod_{k=1, k \neq j}^N k_{k+1,n}(s); \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} P_{11n}(s) &= \Pi_n(s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s), \quad P_{q+1,kn}(s) = -\Lambda_q \lambda_n^3 P_{11n}(s), \\ P_{1,q+1,n}(s) &= \lambda_n^2 \alpha_q \left[ D_q \Pi_{qn}(s) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Учитывая то, что все функции в (3.11)–(3.13) являются рациональными и зависят от комплексного параметра  $s$ , оригиналы функций влияния по Лапласу можно отыскать аналитически, используя теорию вычетов и стандартные таблицы операционного исчисления [9] (штрихом в формулах ниже обозначена производная по параметру преобразования  $s$ ):

$$\begin{aligned} G_{1kn}(\tau) &= \frac{2}{J_1(\lambda_n)} \sum_{l=1}^{2N+2} A_{1kn}^{(l)} \exp(s_{ln}\tau), \\ G_{q+1,1n}(\tau) &= -\frac{2}{J_1(\lambda_n)} \left[ \sum_{l=1}^{2N+4} A_{q+1,1n}^{(l)} \exp(s_{ln}\tau) + \lambda_n \Lambda_q \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})} \right], \\ G_{q+1,p+1,n}(\tau) &= \frac{2}{J_1(\lambda_n)} \sum_{l=1}^{2N+4} A_{q+1,p+1,n}^{(l)} \exp(s_{ln}\tau) - \\ &\quad - \frac{2\lambda_n (\Lambda_q \alpha_p - D_q \delta_{pq})}{J_1(\lambda_n)} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1}(\lambda_n, \chi_{jqn})}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$A_{1kn}^{(l)} = \frac{P_{1kn}(s_{ln})}{P'_n(s_{ln})}, \quad A_{q+1, kn}^{(l)} = \frac{P_{q+1, kn}(s_{ln})}{Q'_{qn}(s_{ln})}.$$

Здесь  $s_{ln}(\lambda_n)$  – нули полинома  $P_n(s)$ , а  $\chi_{jqn}(\lambda_n)$  – дополнительные нули полинома  $Q_{qn}(s)$ , определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} \chi_{1qn}(\lambda_n) = s_{2N+3, n}(\lambda_n) &= \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\tau_q D_q \lambda_n^2}}{2\tau_q}, \\ \chi_{2qn}(\lambda_n) = s_{2N+4, n}(\lambda_n) &= \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\tau_q D_q \lambda_n^2}}{2\tau_q}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.3. Алгоритм построения объемных функций Грина

Алгоритм нахождения объёмных функций Грина полностью аналогичен алгоритму построения поверхностных функций Грина. Применяем интегральное преобразование Лапласа по времени к системе (3.5), (3.6), а затем первое уравнение в этой системе умножаем на  $rJ_1(\lambda_n r)$ , второе – на  $rJ_0(\lambda_n r)$  и затем интегрируем полученные равенства по  $r$  в промежутке  $[0, 1]$ . Опуская подробности, изложенные в предыдущем пункте, получаем (верхний индекс « $L$ » обозначает трансформанту Лапласа,  $s$  – параметр преобразования):

$$k_{1n}(s) \tilde{G}_{1mn}^L(\xi, s) - \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{G}_{j+1, mn}^L(\xi, s) = F_{1n}(\xi), \quad (3.16)$$

$$\Lambda_q \lambda_n^3 \tilde{G}_{1mn}^L(\xi, s) - k_{q+1, n}(s) \tilde{G}_{q+1, mn}^L(\xi, s) = F_{q+1, n}(\xi),$$

где  $\lambda_n$  – корни уравнения  $J_0(\lambda_n) = 0$ , функции  $k_{ln}(s)$  определены в (3.9), а остальные параметры полученной системы определяются так:

$$F_{1n}(\xi) = \frac{2\delta_{1m}}{J_1^2(\lambda_n)} J_1(\lambda_n \xi) \xi, \quad F_{q+1, n}(\xi) = -\frac{2\delta_{q+1, m}}{J_1^2(\lambda_n)} J_0(\lambda_n \xi) \xi, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{1m}^L(r, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{1mn}^L(\xi, s) J_1(\lambda_n r), \\ \tilde{G}_{q+1, m}^L(r, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{q+1, mn}^L(\xi, s) J_0(\lambda_n r), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{1mn}^L(\xi, s) &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 r \tilde{G}_{1m}^L(r, \xi, s) J_1(\lambda_n r) dr, \\ \tilde{G}_{q+1,mn}^L(\xi, s) &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 r \tilde{G}_{q+1,m}^L(r, \xi, s) J_0(\lambda_n r) dr.\end{aligned}$$

Решение системы (3.16) имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{11n}^L(\xi, s) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi) \tilde{P}_{11n}(s)}{J_1^2(\lambda_n) P_n(s)}, \\ \tilde{G}_{1,q+1,n}^L(\xi, s) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi) \tilde{P}_{1,q+1,n}(s)}{J_1^2(\lambda_n) P_n(s)}, \\ \tilde{G}_{q+1,1n}^L(\xi, s) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi) \tilde{P}_{q+1,1n}(s)}{J_1^2(\lambda_n) Q_{qn}(s)}, \\ \tilde{G}_{q+1,p+1,n}^L(\xi, s) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \left[ \frac{\delta_{qp}}{k_{q+1,n}(s)} + \frac{\tilde{P}_{q+1,p+1,n}(s)}{Q_{qn}(s)} \right],\end{aligned}\tag{3.19}$$

где величины  $\tilde{P}_{mkn}(s)$  определяются из формул

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{11n}(s) &= \Pi_n(s), \quad \tilde{P}_{q+1,kn}(s) = \Lambda_q \lambda_n^3 \tilde{P}_{1kn}(s), \\ \tilde{P}_{1,q+1,n}(s) &= \lambda_n \alpha_q \Pi_{qn}(s),\end{aligned}\tag{3.20}$$

а многочлены  $P_n(s)$ ,  $Q_{qn}(s)$ ,  $\Pi_n(s)$  и  $\Pi_{jn}(s)$  – по формулам (3.12).

Используя обратное интегральное преобразование Лапласа по времени, по аналогии с методикой, описанной в предыдущем пункте, определяем оригиналы объёмных функций влияния (производные берутся по переменной  $s$ ):

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{11n}(\xi, \tau) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+2} \tilde{A}_{11n}^{(k)}(s_{kn}) \exp(s_{kn}\tau), \\ \tilde{G}_{1,q+1,n}(\xi, \tau) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+2} \tilde{A}_{1,q+1,n}^{(k)}(s_{kn}) \exp(s_{kn}\tau), \\ \tilde{G}_{q+1,1n}(\xi, \tau) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+4} \tilde{A}_{q+1,1n}^{(k)}(s_{kn}) \exp(s_{kn}\tau),\end{aligned}\tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{q+1,p+1,n}(\xi, \tau) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \left[ \sum_{l=1}^2 \frac{\delta_{qp} \exp(\chi_{lqn} \tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{lqn})} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{2N+4} \tilde{A}_{q+1,p+1,n}^{(k)}(s_{kn}) \exp(s_{kn} \tau) \right]; \\ \tilde{A}_{1mn}^{(k)}(s_{kn}) &= \frac{\tilde{P}_{1mn}(s_{kn})}{P'_n(s_k)}, \quad \tilde{A}_{q+1,mn}^{(k)}(s_{kn}) = \frac{\tilde{P}_{q+1,mn}(s_{kn})}{Q'_{qn}(s_{kn})}; \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} G_{1m}(r, \xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1mn}(\xi, \tau) J_1(\lambda_n r), \\ G_{q+1,m}(r, \xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,mn}(\xi, \tau) J_0(\lambda_n r), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где  $s_{kn} \forall k = \overline{1, 2N+2}$  – нули полинома  $P_n(s)$ ,  $\chi_{jqn}$  – дополнительные нули полинома  $Q_{qn}(s)$ , определяемые по формулам (3.15).

### 3.4. Решение задачи для сплошного цилиндра методом эквивалентных граничных условий

Для нахождения решения задачи (1.10), (1.19) полагаем, что решение вспомогательной задачи (1.10), (3.1) должно удовлетворять граничным условиям (1.19). Поэтому

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= \int_0^{\tau} X_1(1, \tau - t) f_1^*(t) dt + \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^{\tau} X_m(1, \tau - t) f_m(t) dt + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N+1} \int_0^1 \int_0^{\tau} \tilde{X}_m(r, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} X_m(r, t) &= G'_{1m}(r, t) + \frac{c_{12}}{r} G_{1m}(r, t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m}(r, t), \\ \tilde{X}_k(r, \xi, t) &= \tilde{G}'_{1k}(r, \xi, t) + \frac{c_{12}}{r} \tilde{G}_{1k}(r, \xi, t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{G}_{j+1,k}(r, \xi, t). \end{aligned}$$

С учетом граничных условий (3.1), имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \left[ G'_{11}(1, \tau - t) + G_{11}(1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,1}(1, \tau - t) \right] f_1^*(t) dt = \\ = \int_0^\tau \delta(\tau - t) f_1^*(t) dt = f_1^*(\tau). \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (3.24) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1^*(\tau) + \int_0^\tau a(\tau - t) f_1^*(t) dt = \varphi(\tau), \\ a(\tau - t) = (c_{12} - 1) G_{11}(1, \tau - t), \\ \varphi(\tau) = f_1(\tau) + (1 - c_{12}) \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau G_{1m}(1, \tau - t) f_m(t) dt + \\ + (1 - c_{12}) \sum_{k=1}^{N+1} \int_0^1 \int_0^\tau \tilde{G}_{1k}(1, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Полученное уравнение решается численно с помощью квадратурных формул. Так как функции Грина могут иметь особенности, то, с целью более успешного применения формул численного интегрирования, имеет смысл преобразовать уравнение (3.25) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau f_1^*(t) dt + \int_0^\tau A(\tau - t) f_1^*(t) dt = F(\tau), \\ A(\tau) = \int_0^\tau a(t) dt, \quad A(\tau - t) = \int_0^{\tau-t} a(\xi) d\xi, \\ F(\tau) = \varphi(\tau) - A(\tau) f_1^*(0). \end{aligned} \quad (3.26)$$

При этом функции  $f_1^*(0)$  должны удовлетворять определённым соотношениям. Исходя из условия сопряжения начальных и граничных условий в угловых точках пространственно-временной области рассматриваемых задач, а так-

же с учетом нулевых начальных условий, будем далее полагать, что  $f_1^*(0) = 0$ . Следовательно,  $F(\tau) = \varphi(\tau)$ .

Теперь, для решения уравнения (3.26) разбиваем область  $[0, T]$  изменения времени  $\tau$  на  $N_\tau$  отрезков точками  $t_m = mh$  ( $m = \overline{0, N_\tau}$ ) с равномерным шагом  $h = T/N_\tau$  и вводим сеточные функции вида  $y_m = f_1^*(t_m)$ ,  $A_m = A(t_m)$ .

Интеграл в уравнении (3.26) при  $\tau = t_m$  приближенно заменяем суммой, соответствующей формуле средних прямоугольников:

$$\int_0^\tau A(\tau - t) \frac{\partial f_1^*(t)}{\partial t} dt \approx hS_{m-1/2} + hA_{1/2} y_{m-1/2},$$

$$S_{m-1/2} = \sum_{l=1}^{m-1} A_{m-l+1/2} y_{l-1/2},$$

$$\int_0^\tau \frac{\partial f_1^*(t)}{\partial t} dt \approx hQ_{m-1/2} + hQ_{1/2} y_{m-1/2}, \quad Q_{m-1/2} = \sum_{l=1}^{m-1} y_{l-1/2},$$

$$t_{m-1/2} = \frac{t_{m-1} + t_m}{2} = h \left( m - \frac{1}{2} \right),$$

$$t_{m-l+1/2} = t_m - t_{l-1/2} = h \left( m - l + \frac{1}{2} \right) \quad (\forall m = \overline{1, N_\tau}).$$

В результате приходим к рекуррентной последовательности равенств вида ( $\forall m \geq 1$ ):

$$(A_{1/2} + 1) y_{m-1/2} = \frac{\varphi(t_m)}{h} - S_{m-1/2} - Q_{m-1/2}.$$

Откуда получаем:

$$y_{m-1/2} = \frac{1}{A_{1/2} + 1} \left[ \frac{\varphi(t_m)}{h} - S_{m-1/2} - Q_{m-1/2} \right]. \quad (3.27)$$

Решение исходной задачи (1.10), (1.19) получается путем численного вычисления сверток (3.2) функций Грина вспомогательной задачи (1.10), (3.1) с функцией, полученной в результате численного решения уравнения (3.26). Значения этой функции в узлах сетки определяются по формулам (3.27). Таким образом, численное решение исходной задачи запишется так:

$$\begin{aligned}
u(r, \tau_i) &= h \sum_{m=1}^i G_{11}^* (r, t_{i-m+1/2}) y_{m-1/2} + \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^{\tau_i} G_{1m} (r, \tau_i - t) f_m (t) dt + \\
&\quad + \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^{\tau_i} \int_0^1 \tilde{G}_{1m} (r, \xi, t) F_m (\xi, \tau_i - t) dt d\xi, \\
\eta_q (r, \tau_i) &= h \sum_{m=1}^i G_{q+1,1}^* (r, t_{i-m+1/2}) y_{m-1/2} + \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^{\tau_i} G_{q+1,m} (r, \tau_i - t) f_m (t) dt + \quad (3.28) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^{\tau_i} \int_0^1 \tilde{G}_{q+1,m} (r, \xi, t) F_m (\xi, \tau_i - t) dt d\xi, \\
G_{mk}^* (x, \tau) &= \int_0^{\tau} G_{mk} (x, t) dt.
\end{aligned}$$

### 3.5. Предельные переходы к модели с бесконечной скоростью распространения диффузионных потоков и к упругой модели

Полагая  $\tau_q = 0$ , получаем классическую модель механодиффузии с бесконечной скоростью распространения диффузионных потоков. При  $\tau_q \rightarrow 0$  степень многочлена  $P(\lambda_n, s)$  изменяется с  $2N + 2$  до  $N + 2$ , а для дополнительных нулей имеют место следующие предельные переходы:

$$\chi_{1q}(\lambda_n) \rightarrow -D_q \lambda_n^2, \quad \chi_{2q}(\lambda_n) \rightarrow -\infty \quad (\tau_q \rightarrow 0).$$

Тогда:

$$\exp(\chi_{1q}\tau) \rightarrow \exp(-D_q \lambda_n^2 \tau), \quad \exp(\chi_{2q}\tau) \rightarrow 0 \quad (\tau_q \rightarrow 0).$$

Полагая далее  $\alpha_p = 0$ , переходим к классическим моделям упругости и массопереноса для сплошного цилиндра в задаче (1.10), (3.1). Вычисляя соответствующие пределы в (3.13) и (3.20) при  $\alpha_q \rightarrow 0$ , получаем (учитывая, что

$\Lambda_q \rightarrow 0$  при  $\alpha_q \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_q \rightarrow 0} P_{11n}(s) &= \Pi_n(s), \quad \lim_{\alpha_q \rightarrow 0} P_{1,q+1,n}(s) = 0, \quad \lim_{\alpha_q \rightarrow 0} P_{q+1,kn}(s) = 0, \\ \lim_{\alpha_q \rightarrow 0} \tilde{P}_{11n}(s) &= \Pi_n(s), \quad \lim_{\alpha_q \rightarrow 0} \tilde{P}_{1,q+1,n}(s) = 0, \quad \lim_{\alpha_q \rightarrow 0} \tilde{P}_{q+1,kn}(s) = 0, \\ \lim_{\alpha_q \rightarrow 0} P_n(s) &= k_{1n}(s) \Pi_n(s), \quad \lim_{\alpha_q \rightarrow 0} Q_{qn}(s) = k_{q+1,n}(s) k_{1n}(s) \Pi_n(s). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Поверхностные функции Грина для несвязанных задач будем обозначать в виде  $G^u(r, \tau)$ ,  $G_q^\eta(r, \tau)$  и представлять в форме рядов:

$$\begin{aligned} G^u(r, \tau) &= G_{11}(r, \tau)|_{\alpha_q=0} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^u(\tau) J_1(\lambda_n r), \\ G_q^\eta(r, \tau) &= G_{q+1,q+1}(r, \tau)|_{\alpha_q=0} = \sum_{n=1}^{\infty} G_{qn}^\eta(\tau) J_0(\lambda_n r), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где коэффициенты этих рядов определяются по формулам (3.14) при  $\alpha_q = 0$ .

Аналогичным образом, для объемных функций Грина получаем

$$\begin{aligned} \tilde{G}^u(r, \xi, \tau) &= \tilde{G}_{11}(r, \xi, \tau)|_{\alpha_q=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n^u(\xi, \tau) J_1(\lambda_n r), \\ \tilde{G}_q^\eta(r, \xi, \tau) &= \tilde{G}_{q+1,q+1}(r, \xi, \tau)|_{\alpha_q=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{qn}^\eta(\xi, \tau) J_0(\lambda_n r). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Здесь коэффициенты рядов находятся по формулам (3.21) при  $\alpha_q = 0$ .

С учетом предельных переходов (3.29), имеем

$$\begin{aligned} G_n^u(\tau) &= \frac{2 \sin \lambda_n \tau}{J_1(\lambda_n) \lambda_n}, \quad G_{qn}^\eta(\tau) = \frac{2 \lambda_n D_q}{J_1(\lambda_n)} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn} \tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})}, \\ \tilde{G}_n^u(\xi, \tau) &= \frac{2 \xi J_1(\lambda_n \xi) \sin \lambda_n \tau}{\lambda_n J_1^2(\lambda_n)}, \\ G_{qn}^\eta(\xi, \tau) &= \frac{2 \xi J_0(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn} \tau)}{k'_{q+1,n}(\lambda_n, \chi_{jqn})}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

В соответствии с (3.28), решение исходной задачи (1.10), (1.19), при  $\alpha_q = 0$ ,



запишется так:

$$u(r, \tau_i) = \sum_{m=1}^i G(r, t_{i-m+1/2}) y_{m-1/2} + \int_0^{\tau_i} \int_0^1 \tilde{G}^u(r, \xi, \tau) F_1(\xi, \tau_i - t) dt d\xi, \quad (3.33)$$

$$\eta_q(r, \tau) = 0, \quad G(r, \tau) = \int_0^{\tau} G^u(r, t) dt.$$

### 3.6. Статические механодиффузионные процессы

Полагая в граничных условиях (1.19) и (3.1), а также в уравнениях (1.10)

$$f_1^*(\tau) = \tilde{f}_1^* H(\tau), \quad f_1(\tau) = \tilde{f}_1 H(\tau), \quad f_{q+1}(\tau) = \tilde{f}_{q+1} H(\tau), \quad (3.34)$$

$$F_k(\xi, \tau) = \tilde{F}_k(\xi) H(\tau)$$

и переходя к пределу при  $\tau \rightarrow \infty$ , получаем решение статической задачи механодиффузии для сплошного цилиндра.

Функции Грина статической задачи  $G_{mk}^{st}(r)$  выражаются через функции Грина  $G_{mk}(r, \tau)$  соответствующей динамической задачи с помощью равенства [9]

$$G_{mk}^{st}(r) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [G_{mk}(r, \tau) * H(\tau)] =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s G_{mk}^L(r, s) \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} G_{mk}^L(r, s). \quad (3.35)$$

Здесь символ «\*» обозначает свертку по времени.

В этом случае из формул (3.11)–(3.13) получаем

$$G_{11n}^{st} = G_{11n}^L(0) = \frac{2}{J_1(\lambda_n) \lambda_n^2}, \quad G_{1,q+1,n}^{st} = G_{1,q+1,n}^L = \frac{2\alpha_q}{J_1(\lambda_n) \lambda_n^2}, \quad (3.36)$$

$$G_{q+1,1n}^{st} = G_{q+1,1n}^L(0) = 0, \quad G_{q+1,p+1,n}^{st} = G_{q+1,p+1,n}^L(0) = \frac{2\delta_{pq}}{J_1(\lambda_n) \lambda_n},$$

$$G_{11}^{st}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{11}^{st}(\lambda_n) J_1(\lambda_n r) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n) \lambda_n^2},$$

$$G_{q+1,1}^{st}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,1}^{st}(\lambda_n) J_0(\lambda_n r) = 0,$$

$$G_{1,q+1}^{st}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1,q+1}^{st}(\lambda_n) J_1(\lambda_n r) = 2\alpha_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n) \lambda_n^2},$$

$$G_{q+1,p+1}^{st}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,p+1}^{st}(\lambda_n, \tau) J_0(\lambda_n r) = 2\delta_{pq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n) \lambda_n}.$$

Аналогичным образом, для объемных функций Грина  $\tilde{G}_{mk}^{st}(r)$  статической задачи из формул (3.19), (3.20) и (3.13) находим

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{11n}^{st}(\xi) &= \tilde{G}_{11n}^L(\xi, 0) = \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi) \Phi}{J_1^2(\lambda_n) \lambda_n^2}, \\ \tilde{G}_{1,q+1,n}^{st}(\xi) &= \tilde{G}_{1,q+1,n}^L(\xi, 0) = \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi) \alpha_q \Phi_q}{J_1^2(\lambda_n) \lambda_n^3}, \\ \tilde{G}_{q+1,1n}^{st}(\xi) &= \tilde{G}_{q+1,1n}^L(\xi, 0) = \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi) \Lambda_q \Phi}{J_1^2(\lambda_n) \lambda_n D_q} = \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi) \Lambda_q \Phi_q}{J_1^2(\lambda_n) \lambda_n}, \\ \tilde{G}_{q+1,p+1,n}^{st}(\xi) &= \tilde{G}_{q+1,p+1,n}^L(\xi, 0) = \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)}{D_q \lambda_n^2 J_1^2(\lambda_n)} (\delta_{qp} + \Lambda_q \alpha_p \Phi_p), \end{aligned} \quad (3.37)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\prod_{j=1}^N D_j}{\prod_{j=1}^N D_j - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \prod_{k=1, k \neq j}^N D_k}, \\ \Phi_q &= \frac{\prod_{k=1, k \neq q}^N D_k}{\prod_{j=1}^N D_j - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \prod_{k=1, k \neq j}^N D_k}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Тогда, с учетом (3.18), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{11}^{st}(r, \xi) &= 2\xi \Phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n) \lambda_n^2} J_1(\lambda_n r), \\ \tilde{G}_{1,q+1}^{st}(r, \xi) &= 2\xi \alpha_q \Phi_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n) \lambda_n^3} J_1(\lambda_n r), \\ \tilde{G}_{q+1,1}^{st}(r, \xi) &= 2\xi \Lambda_q \Phi_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n) \lambda_n} J_0(\lambda_n r), \\ \tilde{G}_{q+1,p+1}^{st}(r, \xi) &= \frac{2\xi (\delta_{qp} + \Lambda_q \alpha_p \Phi_p)}{D_q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \xi)}{\lambda_n^2 J_1^2(\lambda_n)} J_0(\lambda_n r). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Статический аналог уравнения (3.25) запишется так:

$$\tilde{f}_1^* + (c_{12} - 1) G_{11}^{st}(1) \tilde{f}_1^* = \tilde{\varphi}, \quad (3.40)$$

где

$$\tilde{\varphi} = \tilde{f}_1 + (1 - c_{12}) \sum_{m=2}^{N+1} G_{1m}^{st}(1) \tilde{f}_m + (1 - c_{12}) \sum_{k=1}^{N+1} \int_0^1 \tilde{G}_{1k}^{st}(1, \xi) F_k(\xi) d\xi. \quad (3.41)$$

Следовательно

$$\tilde{f}_1^* = \frac{\tilde{\varphi}}{1 + (c_{12} - 1) G_{11}^{st}(1)}. \quad (3.42)$$

Отсюда, преобразуя в (3.28) свертки, в соответствии с равенством (3.35) и учитывая (3.42), получаем решение статического аналога задачи (1.10), (1.19) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u^{st}(r) &= \frac{\tilde{\varphi} G_{11}^{st}(r)}{1 + (c_{12} - 1) G_{11}^{st}(1)} + \sum_{m=2}^{N+1} G_{1m}^{st}(r) \tilde{f}_m + \\ &+ \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^1 \tilde{G}_{1m}^{st}(r, \xi) \tilde{F}_m(\xi) d\xi, \\ \eta_q^{st}(r) &= \frac{\tilde{\varphi} G_{q+1,1}^{st}(r)}{1 + (c_{12} - 1) G_{11}^{st}(1)} + \sum_{m=2}^{N+1} G_{q+1,m}^{st}(r) \tilde{f}_m + \\ &+ \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^1 \tilde{G}_{q+1,m}^{st}(r, \xi) \tilde{F}_m(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Если на поверхности цилиндра заданы только механические нагрузки, т.е.  $\tilde{f}_m = 0$ , ( $\forall m \geq 2$ ), то  $\eta_q^{st}(r) = 0$ . Следовательно, статические радиальные механические нагрузки на поверхности цилиндра, в рамках линейной модели (1.10), (1.19), никак не влияют на диффузионное поле внутри цилиндра. Это согласуется с экспериментальными исследованиями, согласно которым увеличение коэффициента объемной диффузии в первом приближении пропорционально скорости деформации [94, 98]. Так как в статике скорость деформации равна нулю, получаем и нулевую диффузию.

### 3.7. Примеры расчетов

В качестве примера рассматриваем трехкомпонентный цилиндр ( $N = 2$ , независимые компоненты: цинк и медь, которые диффундируют в алюминии). Радиус цилиндра  $5 \cdot 10^{-4}$  м. Физические характеристики этого материала следующие [2]:

$$\begin{aligned} C_{12} &= 6.93 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \quad C_{66} = 2.56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \quad T_0 = 700\text{К}, \quad \rho = 2700 \frac{\text{КГ}}{\text{М}^3}, \\ L &= 0.5 \cdot 10^{-2} \text{М}, \quad \alpha_1^{(1)} = 6.55 \cdot 10^7 \frac{\text{ДЖ}}{\text{КГ}}, \quad \alpha_1^{(2)} = 6.14 \cdot 10^7 \frac{\text{ДЖ}}{\text{КГ}}, \\ D_1^{(1)} &= 2.62 \cdot 10^{-12} \frac{\text{М}^2}{\text{С}}, \quad D_1^{(2)} = 2.89 \cdot 10^{-15} \frac{\text{М}^2}{\text{С}}, \\ m^{(1)} &= 0.065 \frac{\text{КГ}}{\text{МОЛЬ}}, \quad m^{(2)} = 0.064 \frac{\text{КГ}}{\text{МОЛЬ}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Предполагается, что начальные концентрации цинка и меди в составе сплава малы: цинк – 1,0%, медь – 4,5%.

**Пример 3.1.** Полагаем для расчета, что массовые силы отсутствуют, а поверхностные возмущения в граничных условиях (1.19) имеют вид:

$$f_1(\tau) = H(\tau), \quad f_{q+1}(\tau) = 0. \quad (3.45)$$

По формулам (3.27) вычисляем  $f_1^*(t_m)$ , а затем по формулам (3.28) находим решение исходной задачи. Результаты вычислений показаны на рисунках 3.2–3.6.

На рис. 3.2 представлено пространственное распределение поля механических перемещений внутри цилиндра. Расчеты по формулам (3.28) и (3.33) показывают, что на рассматриваемом промежутке времени решения упругодиффузионной и упругой задач совпадают (рисунок 3.3). Это согласуется с результатами, полученными в работах других авторов [31], где отмечается, что влияние диффузии на механическое поле начинает заметно проявляться в виде фазового сдвига только по истечении определенного промежутка времени, который на несколько порядков превышает рассмотренный здесь. Однако при статических

нагрузках влияние диффузионных процессов на поле механических перемещений пренебрежимо мало (рисунок 3.4).

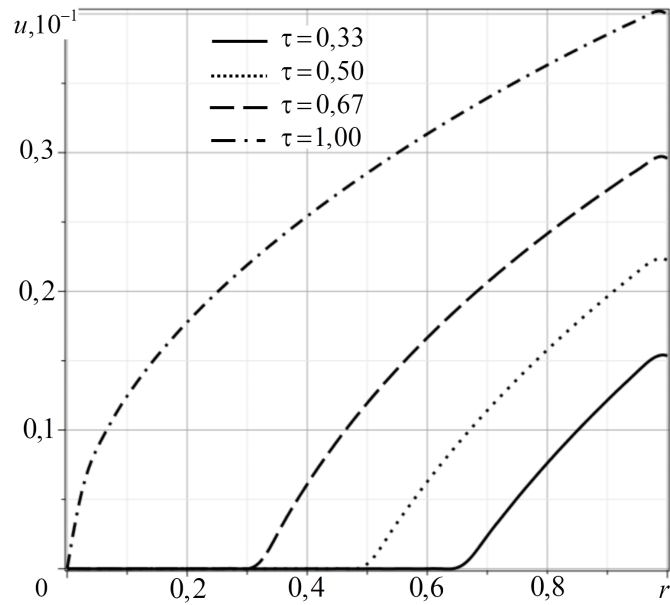


Рис. 3.2 Перемещения  $u(r, \tau)$ .

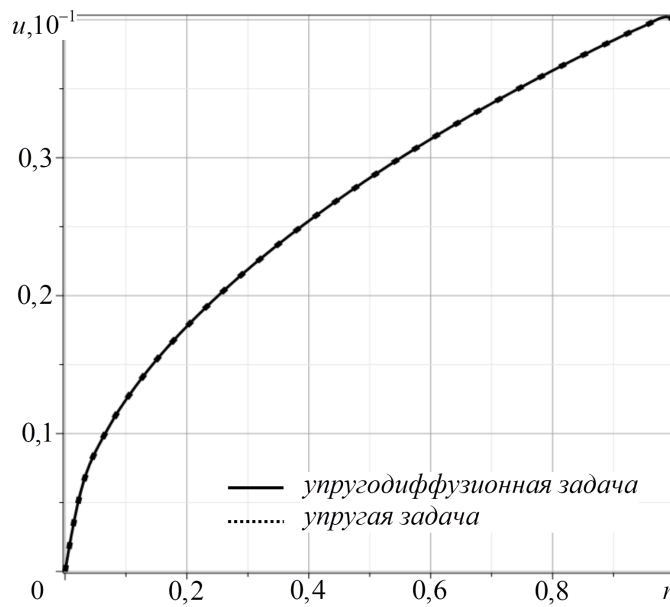
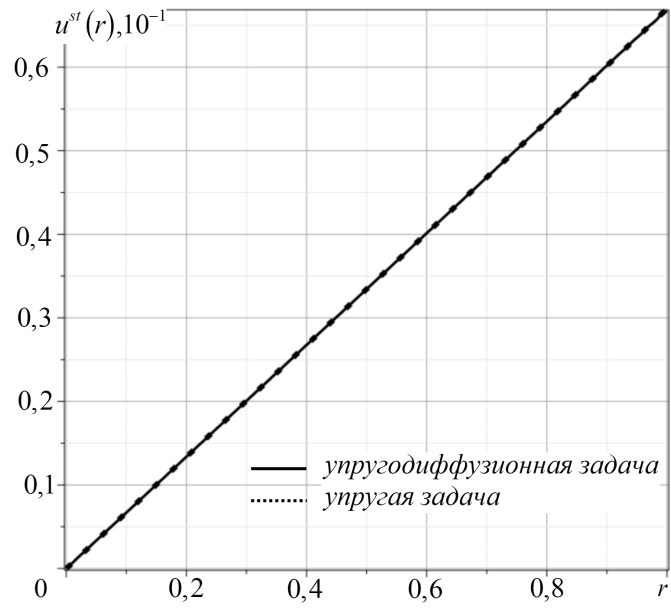
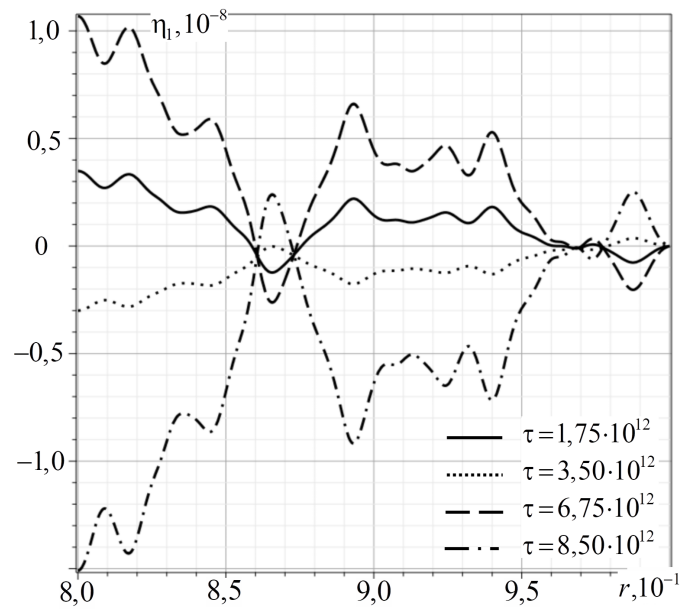


Рис. 3.3 Перемещения  $u(r, \tau)$ .

Рис. 3.4 Перемещения  $u^{st}(r)$ .Рис. 3.5 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$ .

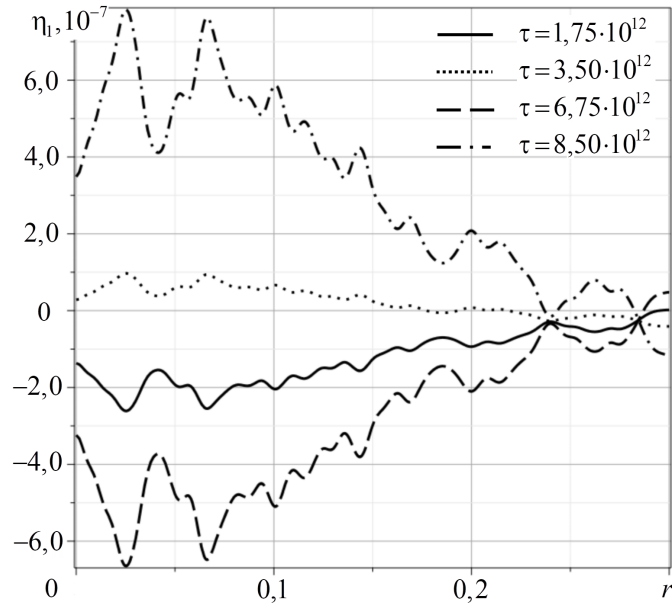


Рис. 3.6 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$ .

На рисунках 3.5 и 3.6 продемонстрировано изменение приращения концентрации первого компонента (цинк), которое инициировано механическими нагрузками, приложенными к боковой поверхности сплошного цилиндра. Как видно, несмотря на значительный промежуток времени (безразмерному времени  $\tau = 10^{12}$  соответствует  $1.62 \cdot 10^5$  сек), приращения концентраций цинка и меди имеют очень маленькие значения.

**Пример 3.2.** Следующий пример демонстрирует взаимодействие механического и диффузионного полей в сплошном цилиндре, находящемся под действием внешних объемных нестационарных возмущений. Для расчета полагаем, что объемные возмущения заданы следующим образом:

$$F_1(r, \tau) = J_1(\lambda_1 r) H(\tau), \quad F_{q+1}(r, \tau) = 0. \quad (3.46)$$

Результаты вычислений по формулам (3.27), (3.28) представлены на рисунках 3.7–3.16.

На рисунках 3.7–3.9 показано поле механических перемещений, а графики

на рисунках 3.8 и 3.9 позволяют сравнить поля перемещений упругой и упруго-диффузионной задач при статических и динамических объемных возмущениях.

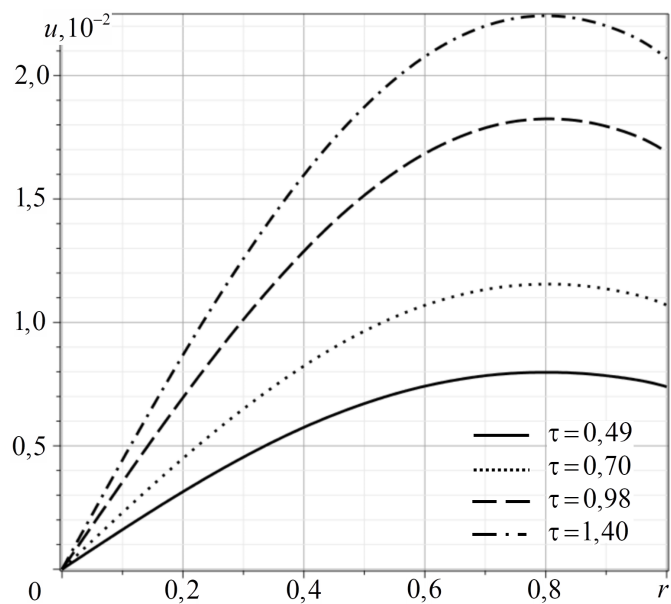


Рис. 3.7 Перемещения  $u(r, \tau)$ .

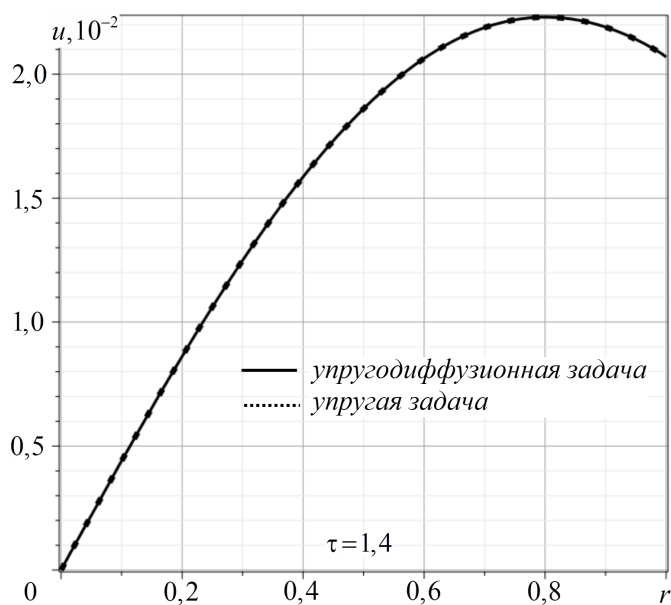


Рис. 3.8 Перемещения  $u(r, \tau)$  в момент времени  $\tau = 1,4$ .



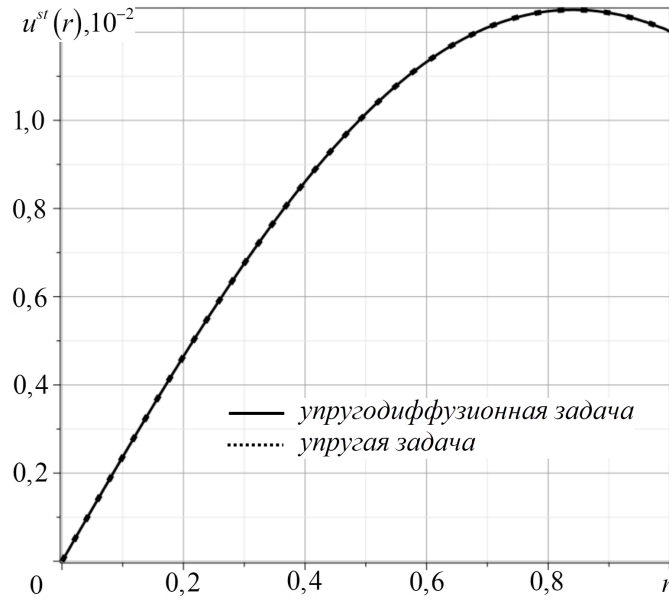


Рис. 3.9 Поле механических перемещений  $u^{st}(r)$ .

Как видно на рисунках 3.8 и 3.9, при объемных механических возмущениях, как, впрочем, и при поверхностных, влияние диффузионных процессов на поле механических перемещений пренебрежимо мало.

На рисунках 3.10–3.16 продемонстрированы приращения концентраций цинка и меди, инициированные механическими нагрузками (3.46). Как видно, характер диффузионных процессов для цинка и меди одинаков, однако имеются различия в интенсивности.

Эти же рисунки позволяют проанализировать влияние релаксационных эффектов на кинетику массопереноса. Например, видно, что в начальные моменты времени (рис. 3.10–3.13) результаты расчетов по модели с релаксацией и по классической модели массопереноса различаются на несколько порядков. Однако со временем релаксационные эффекты начинают затухать (рис. 3.14 и 3.15) и к моменту времени  $\tau = 10^{12}$  практически исчезают (рис. 3.16).

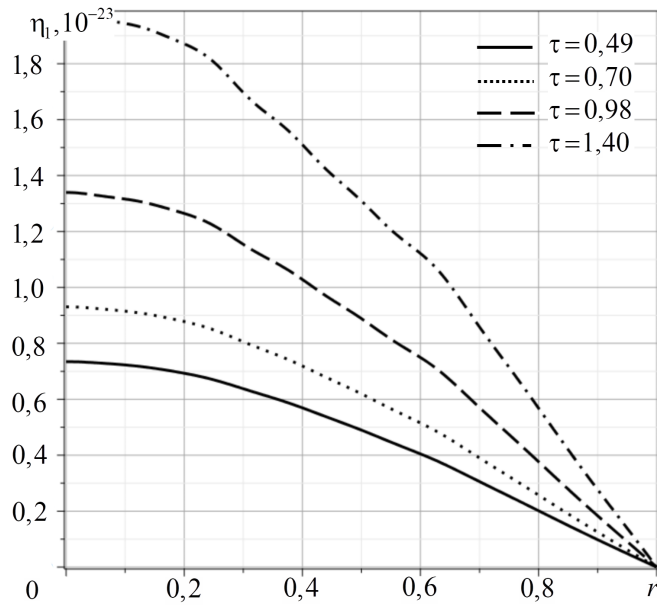


Рис. 3.10 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  с учетом релаксации ( $\tau^{(1)} = 200$  сек).

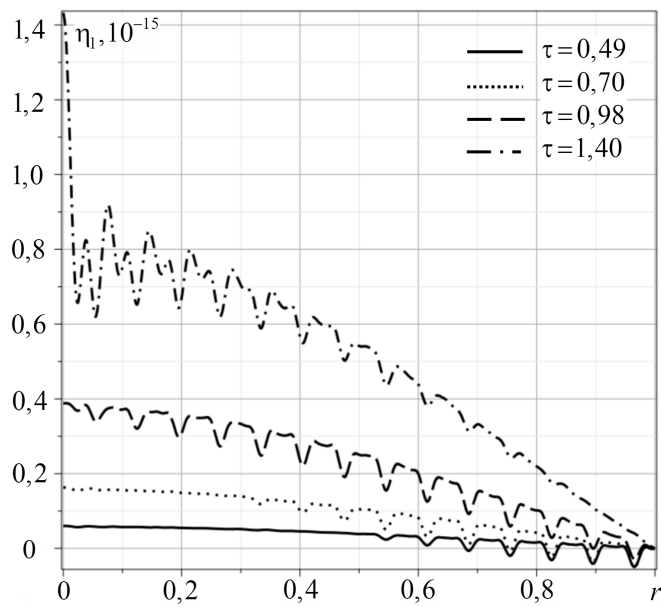


Рис. 3.11 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  без учета релаксации ( $\tau^{(1)} = 0$  сек).

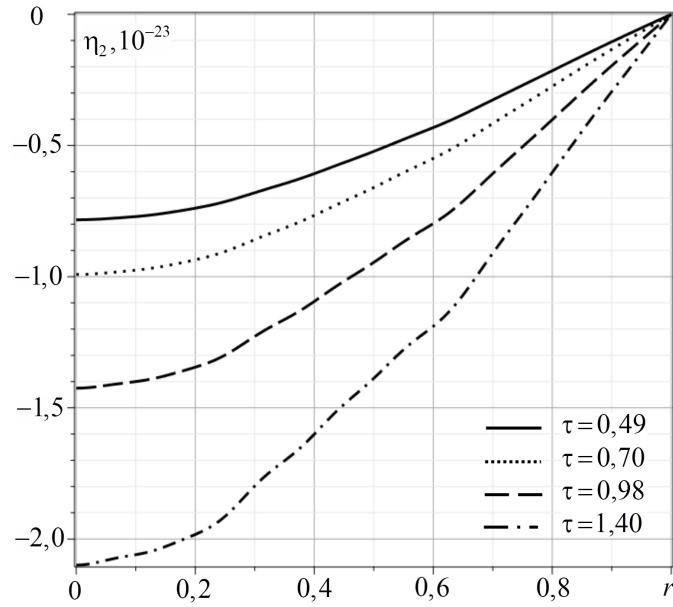


Рис. 3.12 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  с учетом релаксации ( $\tau^{(1)} = 200$  сек).

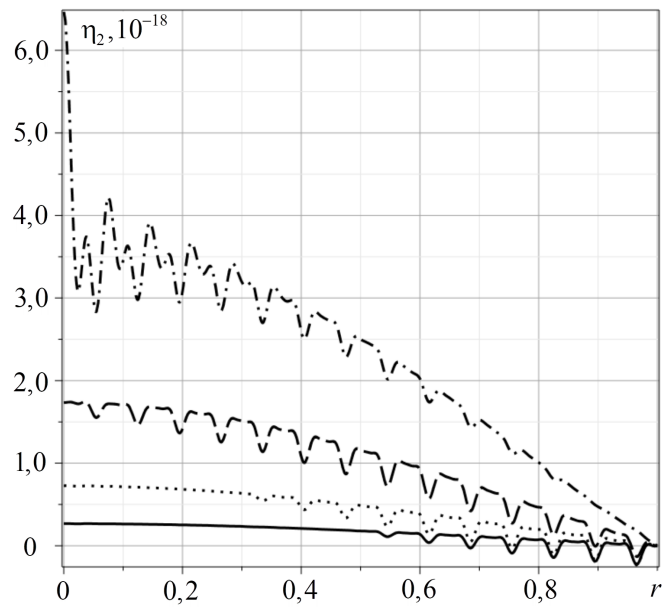


Рис. 3.13 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  без учета релаксации ( $\tau^{(1)} = 0$  сек).

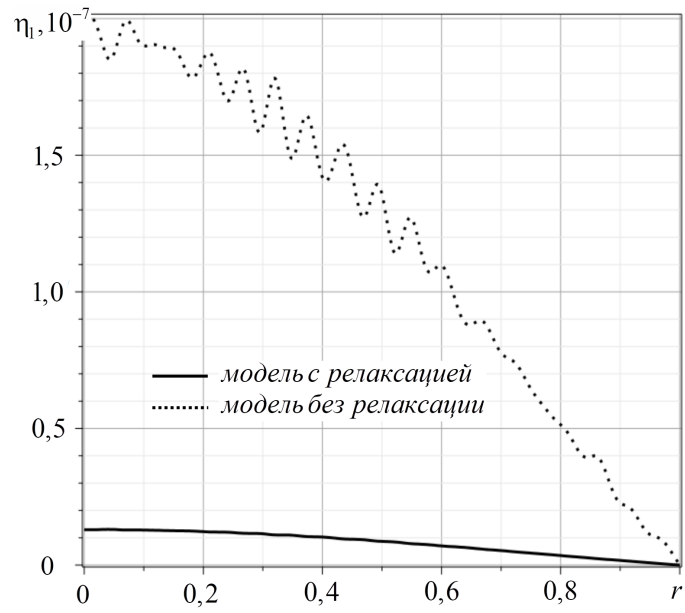


Рис. 3.14 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$ . Сравнение моделей с релаксацией и без релаксации в момент времени  $\tau = 0.35 \cdot 10^9$ .

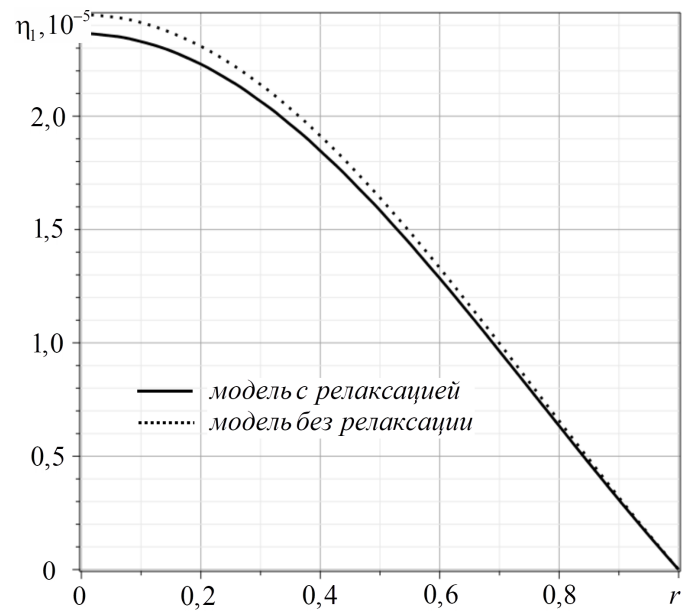


Рис. 3.15 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$ . Сравнение моделей с релаксацией и без релаксации в момент времени  $\tau = 0.5 \cdot 10^{11}$ .

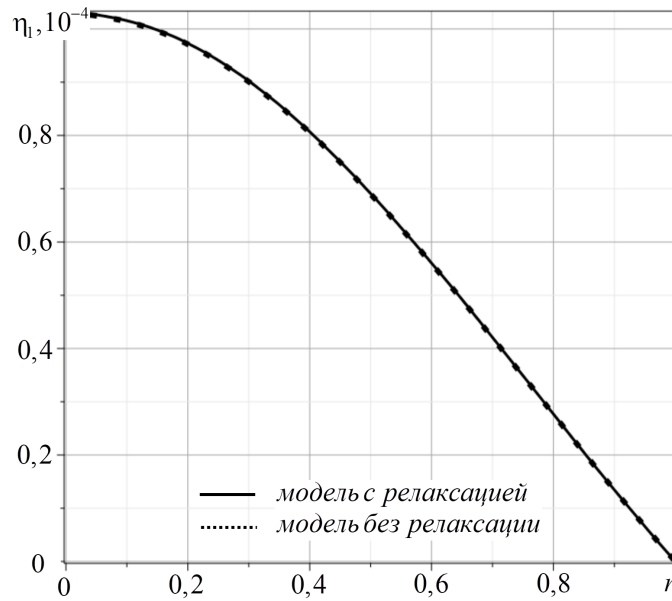


Рис. 3.16 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$ . Сравнение моделей с релаксацией и без релаксации в момент времени  $\tau = 0.5 \cdot 10^{12}$ .

Таким образом, релаксационные эффекты проявляются на некотором конечном промежутке времени и далее исчезают.

Кроме того, увеличение начальных концентраций цинка и меди в составе сплава в  $k$  раз приводит к такому же  $k$ -кратному увеличению приращений концентраций цинка и меди и очень слабо влияет на поле механических перемещений сплошного цилиндра.

**Пример 3.3.** Проведем аналогичные расчеты для случая, когда внешние возмущения содержат только объемные источники массы цинка:

$$F_1(r, \tau) = 0, \quad F_2(r, \tau) = J_0(\lambda_1 r) H(\tau), \quad F_{q+2}(r, \tau) = 0. \quad (3.47)$$

Результаты вычислений представлены на рисунках 3.17–3.25.

Рисунки 3.17–3.19 демонстрируют поле механических перемещений в различные моменты времени, которое инициировано объемными источниками массопереноса первого компонента сплава (цинк). Как видно, с течением времени механические перемещения, вызванные диффузионными процессами, могут до-

стигать существенных значений (рисунок 3.19).

Полученные результаты согласуются с результатами, полученными в работе [31], где показано, что в аналогичной задаче для слоя с плоскими границами  $u(r, \tau) \sim \tau$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , что примерно можно наблюдать на рисунках 3.18 и 3.19.

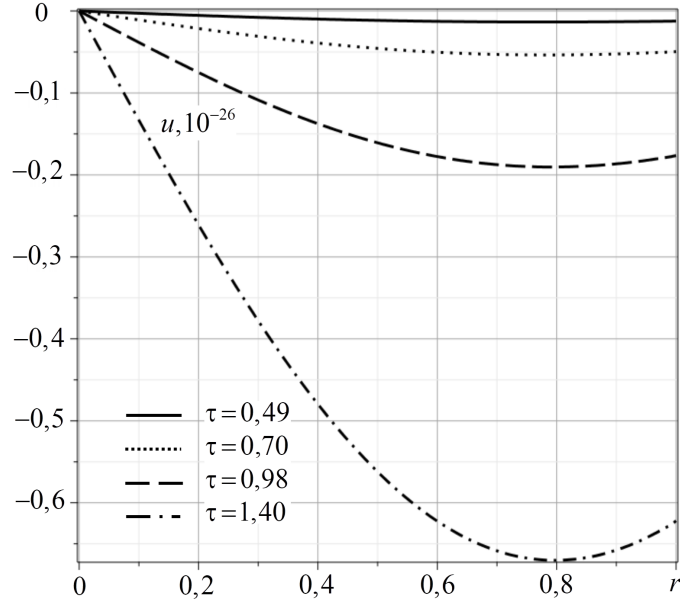


Рис. 3.17 Перемещения  $u(r, \tau)$  (начальные моменты времени).

На рисунках 3.20–3.25 показаны приращения концентраций цинка и меди, вызванные наличием объемных источников массы цинка. В частности, на рисунках 3.20–3.23 можно проследить динамику роста концентрации цинка, которая возникает при заданных возмущениях (3.47). Однако, в отличие от перемещений, концентрация цинка не растет бесконечно, а имеет предельное значение, совпадающее с решением статической задачи. Это предельное значение достигается при  $\tau \sim 10^{12}$ .

На рисунках 3.24–3.25 можно видеть, что диффузия цинка очень слабо влияет на массоперенос меди. Даже при очень больших временах приращение концентрации меди является пренебрежимо малым.

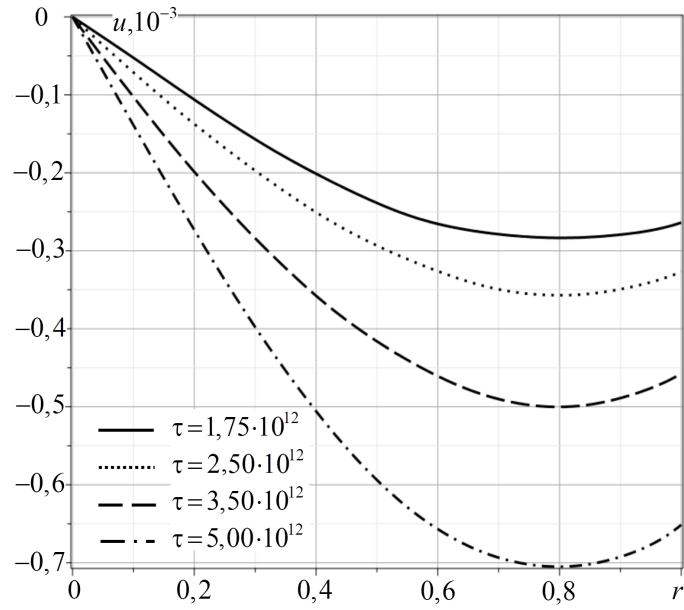


Рис. 3.18 Перемещения  $u(r, \tau)$  (времена порядка  $10^{12}$ ).

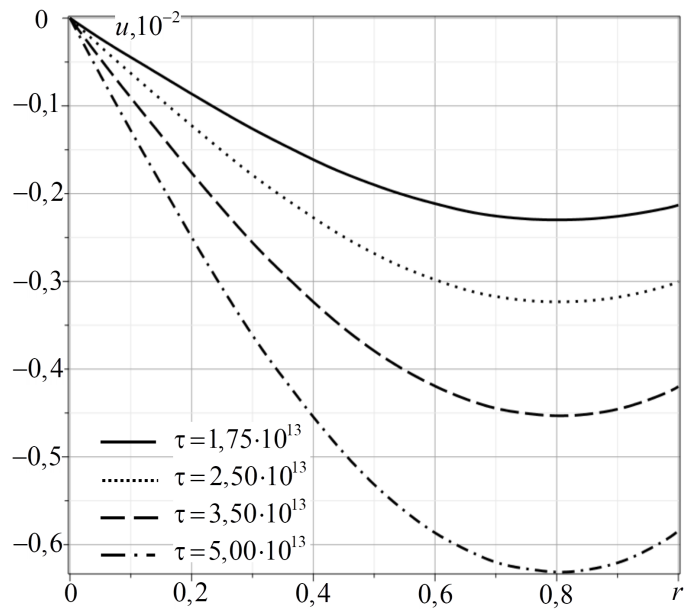


Рис. 3.19 Перемещения  $u(r, \tau)$  (времена порядка  $10^{13}$ ).

Результаты, полученные в данной главе, опубликованы в работах [13–16, 19, 20, 22–24, 26, 27, 29].

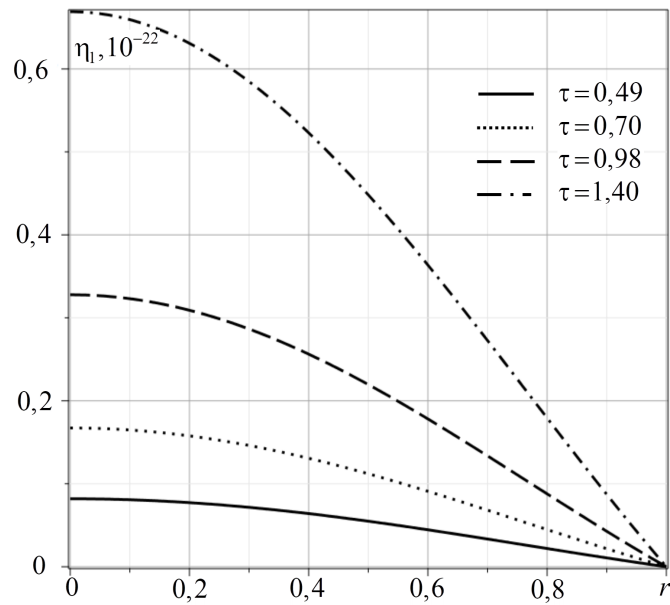


Рис. 3.20 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  с учетом релаксации ( $\tau^{(1)} = 200$  сек, начальные времена).

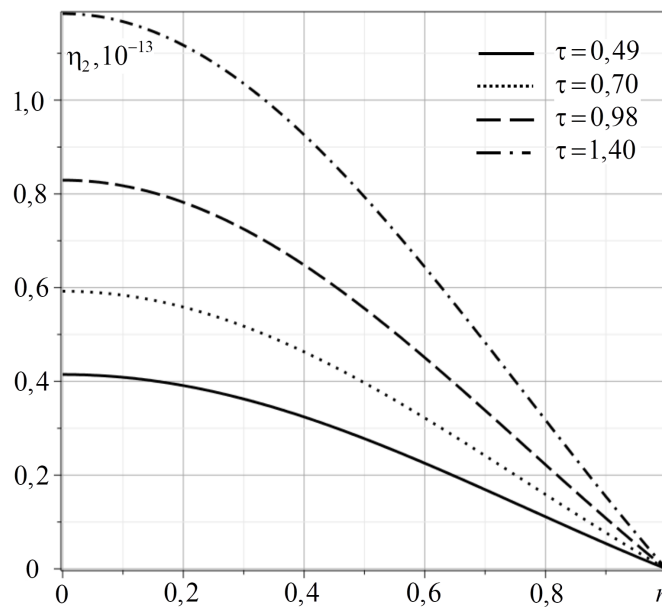


Рис. 3.21 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  ( $\tau^{(2)} = 200$  сек, начальные времена).



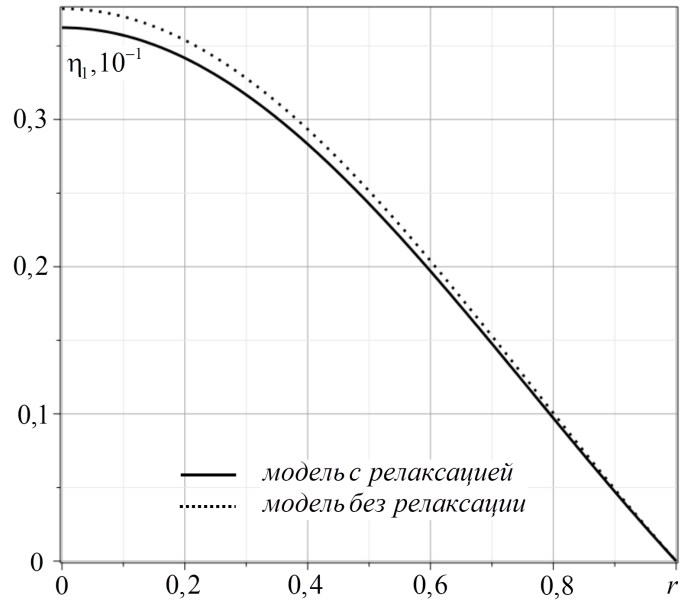


Рис. 3.22 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$ . Сравнение моделей с релаксацией и без релаксации в момент времени  $\tau = 0.5 \cdot 10^{11}$ .

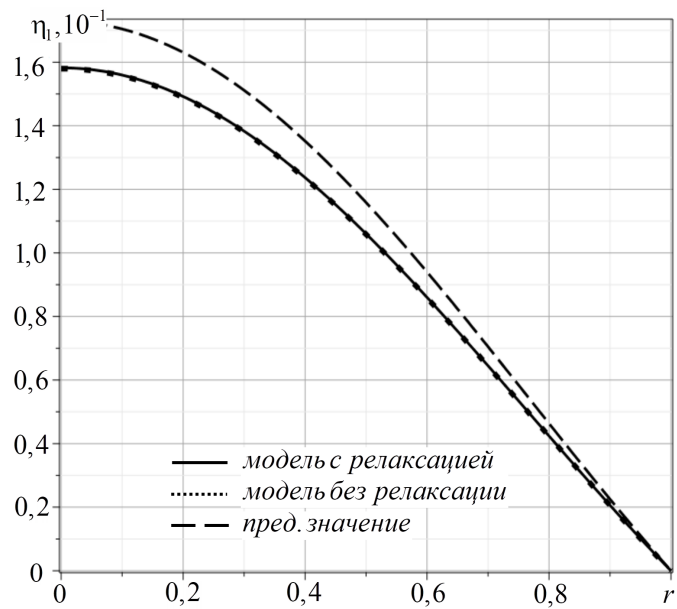


Рис. 3.23 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$ . Сравнение моделей в момент времени  $\tau = 0.5 \cdot 10^{12}$ .

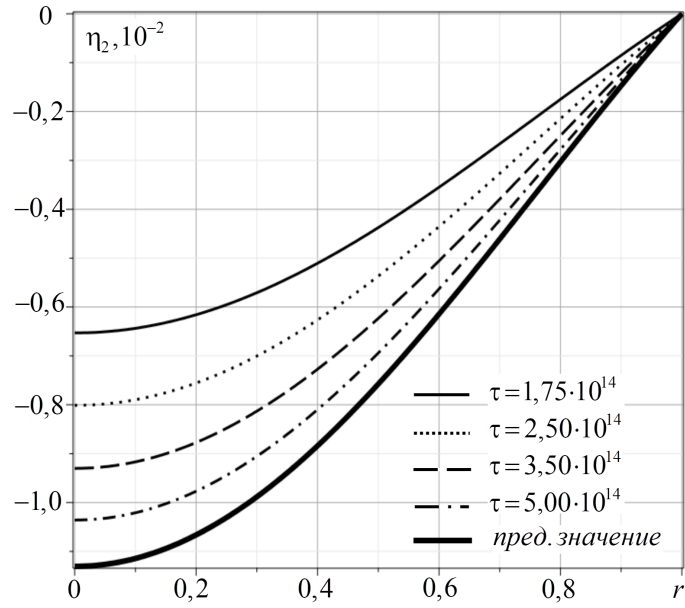


Рис. 3.24 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  с учетом релаксации ( $\tau^{(1)} = 200$  сек).

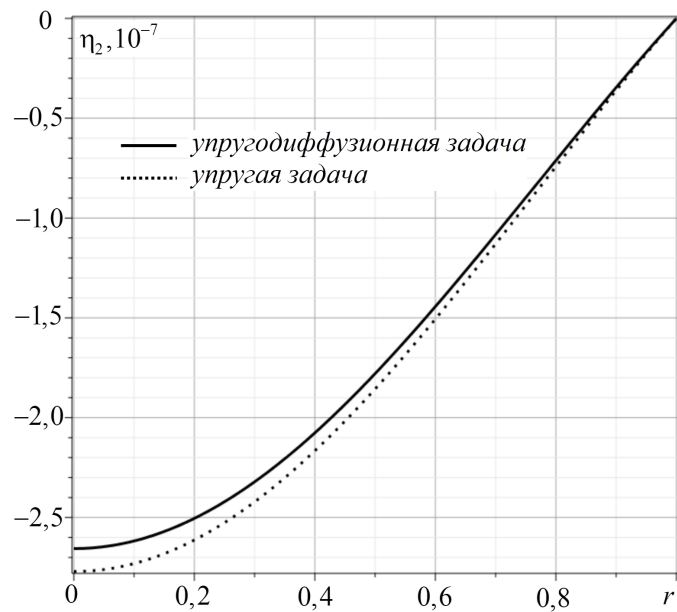


Рис. 3.25 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$ . Сравнение моделей в момент времени  $\tau = 0,5 \cdot 10^{11}$ .

## Глава 4

# Моделирование нестационарных механо-диффузионных процессов в полом цилиндре

## 4.1. Интегральное представление решения

Рассматривается одномерная задача об определении напряженно-деформированного состояния полого  $N + 1$ -компонентного цилиндра ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ), находящегося под влиянием нестационарных упругодиффузионных возмущений.

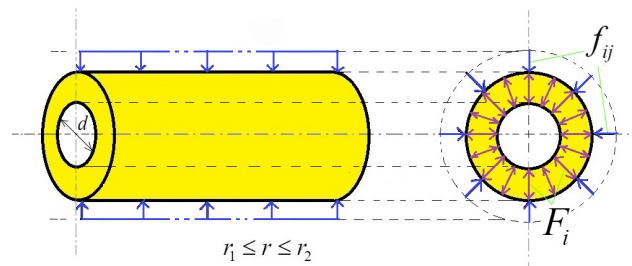


Рис. 4.1 Иллюстрация к постановке задачи. Полый цилиндр.  $f_{ij}$  – поверхностные возмущения,  $F_j$  – объёмные возмущения

Физико-механические процессы в цилиндре описываются связанной системой уравнений упругой диффузии (1.10), (1.19) с нулевыми начальными условиями. Характерный линейный размер  $L = r_2$ , материал цилиндра – идеальный твердый раствор, т.е.  $D_{qr} = \delta_{kr} D_q$ .

Как и прежде, вместо исходной задачи (1.10), (1.19) рассматривается вспомогательная задача для уравнений (1.10) с граничными условиями вида

$$\left( u' + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=1} = f_{11}^*(\tau), \quad \eta_q|_{r=1} = f_{q+1,1}(\tau), \quad (4.1)$$

$$\left( u' + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=R_1} = f_{12}^*(\tau), \quad \eta_q|_{r=R_1} = f_{q+1,2}(\tau), \quad R_1 = \frac{r_1}{r_2},$$

где функции  $f_{1l}^*(\tau)$  ( $l = 1, 2$ ) подлежат определению.

Решение этой задачи записывается в виде

$$\begin{aligned} u(r, \tau) = & \sum_{l=1}^2 \int_0^\tau G_{11l}(r, \tau-t) f_{1l}^*(t) dt + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau G_{1ml}(r, \tau-t) f_{ml}(t) dt + \\ & + \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{1m}(r, \xi, t) F_m(\xi, \tau-t) dt d\xi, \\ \eta_q(r, \tau) = & \sum_{l=1}^2 \int_0^\tau G_{q+1,1l}(r, \tau-t) f_{1l}^*(t) dt + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau G_{q+1,ml}(r, \tau-t) f_{ml}(t) dt + \\ & + \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{q+1,m}(r, \xi, t) F_m(\xi, \tau-t) dt d\xi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь  $G_{nml}(r, \tau)$  ( $n, m = \overline{1, N+1}$ ) – поверхностные функции Грина рассматриваемой задачи, т.е. решения следующих краевых задач с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} & \left( G''_{1ml} + \frac{G'_{1ml}}{r} - \frac{G_{1ml}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+1,ml} = \ddot{G}_{1ml}, \\ -\Lambda_q \left( G'''_{1ml} + \frac{2G''_{1ml}}{r} - \frac{G'_{1ml}}{r^2} + \frac{G_{1ml}}{r^3} \right) + D_q \left( G''_{q+1,ml} + \frac{G'_{q+1,ml}}{r} \right) = \\ & = \dot{G}_{q+1,ml} + \tau_q \ddot{G}_{q+1,ml}; \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & \left( G'_{1ml} + \frac{1}{r} G_{1ml} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,ml} \right) \Big|_{r=1} = \delta_{1m} \delta_{1l} \delta(\tau), \\ & \left( G'_{1ml} + \frac{1}{r} G_{1ml} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,ml} \right) \Big|_{r=R_1} = \delta_{1m} \delta_{2l} \delta(\tau), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$G_{q+1,ml}|_{r=1} = \delta_{q+1,m} \delta_{1l} \delta(\tau), \quad G_{q+1,ml}|_{r=R_1} = \delta_{q+1,m} \delta_{2l} \delta(\tau).$$

Соответственно,  $\tilde{G}_{km}(r, \xi, \tau)$ ,  $\forall k, m = \overline{1, N+1}$ ,  $\forall \xi \in [0; 1]$  – объемные функции Грина, которые удовлетворяют системе уравнений (3.5) и краевым условиям вида

$$\begin{aligned} & \left[ \tilde{G}'_{1m} + \frac{\tilde{G}_{1m}}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{G}_{j+1,m} \right] \Big|_{r=1} = 0, \quad \tilde{G}_{q+1,m} \Big|_{r=1} = 0, \\ & \left[ \tilde{G}'_{1m} + \frac{\tilde{G}_{1m}}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{G}_{j+1,m} \right] \Big|_{r=R_1} = 0, \quad \tilde{G}_{q+1,m} \Big|_{r=R_1} = 0, \\ & \tilde{G}_{1m} \Big|_{\tau=0} = \dot{\tilde{G}}_{q+1,m} \Big|_{\tau=0} = \tilde{G}_{q+1,m} \Big|_{\tau=0} = \dot{\tilde{G}}_{q+1,m} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

## 4.2. Алгоритм построения поверхностных функций Грина

Применяем к задаче (4.3), (4.4) интегральное преобразование Лапласа по времени, после чего первое уравнение в (4.3) домножаем на  $r\Psi_{01}(\lambda_n r)$ , второе – на  $r\Psi_{00}(\lambda_n r)$ , а затем интегрируем по  $r$  в промежутке  $[R_1, 1]$ :

$$\begin{aligned} & \int_{R_1}^1 \left( G''_{1ml} + \frac{1}{r} G'_{1ml} - \frac{1}{r^2} G_{1ml} \right) \Psi_{01}(\lambda_n r) r dr - \\ & - \sum_{j=1}^N \alpha_j \int_{R_1}^1 G'_{j+1,ml} \Psi_{01}(\lambda_n r) r dr = s^2 \int_{R_1}^1 G_{1ml} \Psi_{01}(\lambda_n r) r dr, \\ & - \Lambda_q \int_{R_1}^1 \left( G'''_{1ml} + \frac{2}{r} G''_{1ml} - \frac{1}{r^2} G'_{1ml} + \frac{1}{r^3} G_{1ml} \right) \Psi_{00}(\lambda_n r) r dr + \\ & + D_q \int_{R_1}^1 \left( G'''_{q+1,ml} + \frac{1}{r} G''_{q+1,ml} \right) \Psi_{00}(\lambda_n r) r dr = (s + \tau_q s^2) \int_{R_1}^1 G_{q+1,ml} \Psi_{00}(\lambda_n r) r dr; \\ & \left( G'_{1ml} + \frac{1}{r} G_{1ml} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,ml} \right) \Big|_{r=1} = \delta_{1m} \delta_{1l}, \quad G_{q+1,ml} \Big|_{r=1} = \delta_{q+1,m} \delta_{1l}, \\ & \left( G'_{1ml} + \frac{1}{r} G_{1ml} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,ml} \right) \Big|_{r=R_1} = \delta_{1m} \delta_{2l}, \quad G_{q+1,ml} \Big|_{r=R_1} = \delta_{q+1,m} \delta_{2l}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь  $\lambda_n$  – корни уравнения  $\Psi_{00}(\lambda_n R_1) = 0$ .

Далее, преобразуя интегралы с помощью формул (2.51)–(2.55), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} k_{1n}(s) G_{1mln}^L(s) - \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,mln}^L(s) &= \frac{\delta_{1m}}{\Psi_0(\lambda_n)} \Omega_{ln}, \\ -\Lambda_q \lambda_n^3 G_{1mln}^L(s) + k_{q+1,n}(s) G_{q+1,mln}^L(s) &= \\ = -\frac{2\lambda_n \Lambda_q}{\Psi_0(\lambda_n)} \left( \delta_{1m} + \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{j+1,m} - \frac{D_q}{\Lambda_q} \delta_{q+1,m} \right) \Omega_{ln}; \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\Omega_{ln} = \Psi_{01}(\lambda_n) \delta_{1l} - R_1 \Psi_{01}(\lambda_n R_1) \delta_{2l}, \quad (4.9)$$

где  $k_{1n}(s)$  и  $k_{q+1,n}(s)$  находятся по формулам (3.17), а остальные величины определяются так:

$$\begin{aligned} G_{q+1,m}^L(r, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,mn}^L(s) \Psi_{00}(\lambda_n r), \\ G_{1m}^L(r, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1mn}^L(s) \Psi_{01}(\lambda_n r), \\ G_{q+1,mn}^L(s) &= \frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \int_{R_1}^1 r G_{q+1,m}^L(r, s) \Psi_{00}(\lambda_n r) dr, \\ G_{1mn}^L(s) &= \frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \int_{R_1}^1 r G_{1m}^L(r, s) \Psi_{01}(\lambda_n r) dr. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (4.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} G_{11ln}^L(s) \\ G_{1,q+1,ln}^L(s) \end{array} \right\} &= \frac{1}{\Psi_0(\lambda_n) P_n(s)} \left\{ \begin{array}{l} P_{11ln}(s) \\ P_{1,q+1,ln}(s) \end{array} \right\}, \\ G_{q+1,1ln}^L(s) &= -\frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \left[ \frac{\lambda_n \Lambda_q \Omega_{ln}}{k_{q+1,n}(s)} + \frac{P_{q+1,1ln}(s)}{Q_{qn}(s)} \right], \\ G_{q+1,p+1,ln}^L(\lambda_n, s) &= -\frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \left[ \frac{\lambda_n (\Lambda_q \alpha_p - D_q \delta_{pq}) \Omega_{ln}}{k_{q+1,n}(s)} + \frac{P_{q+1,p+1,ln}(s)}{Q_{qn}(s)} \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $P_n(s)$ ,  $Q_{qn}(s)$ ,  $\Pi_n(s)$ ,  $\Pi_{jn}(s)$  – полиномы, определяемые формулами (3.12), а остальные полиномы находятся по формулам

$$\begin{aligned} P_{11ln}(s) &= \Omega_{ln} \left[ \Pi_n(s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s) \right], \\ P_{1,q+1,ln}(s) &= \lambda_n^2 \alpha_q \Omega_{ln} \left[ D_q \Pi_{qn}(s) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s) \right], \\ P_{q+1,kl n}(s) &= -\Lambda_q \lambda_n^3 P_{1kl n}(s). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Используя обратное интегральное преобразование Лапласа по времени, определяем оригиналы поверхностных функций влияния в следующем виде (производные берутся по переменной  $s$ ):

$$\begin{aligned} G_{1kl n}(\tau) &= \frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \sum_{m=1}^{2N+2} A_{1kl n}^{(m)} \exp(s_{mn}\tau), \\ A_{1kl n}^{(m)} &= \frac{P_{1kl n}(s_{mn})}{P'_n(s_{mn})}, \quad A_{q+1,kl n}^{(m)} = \frac{P_{q+1,kl n}(s_{mn})}{Q'_{qn}(s_{mn})}, \\ G_{q+1,1ln}(\tau) &= -\frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \times \\ &\times \left[ \sum_{m=1}^{2N+4} A_{q+1,1ln}^{(m)} \exp(s_{mn}\tau) + \lambda_n \Lambda_q \Omega_l \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})} \right], \\ G_{q+1,p+1,ln}(\tau) &= -\frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \left[ \sum_{m=1}^{2N+4} A_{q+1,p+1,ln}^{(m)} \exp(s_{mn}\tau) + \right. \\ &\left. + \lambda_n \left( \Lambda_q \alpha_p - D_1^{(q)} \delta_{pq} \right) \Omega_l \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь  $s_{ln}$  – нули полинома  $P_n$ , а  $\chi_{jqn}$  – дополнительные нули полинома  $Q_{qn}$ , определяемые по формулам (3.15).

### 4.3. Алгоритм построения объемных функций Грина

Действуя так же, как и в предыдущем пункте, применяем к задаче (3.5), (4.5) преобразование Лапласа, после чего первое уравнение в (3.5) домножаем

на  $r\Psi_{01}(\lambda_n r)$ , второе – на  $r\Psi_{00}(\lambda_n r)$ , а затем проинтегрируем по  $r$  в промежутке  $[R_1, 1]$ . Используя при этом формулы для преобразования дифференциальных операторов (2.51)–(2.55), получаем систему линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} k_{1n}(\lambda_n, s) \tilde{G}_{1mn}^L(\xi, s) - \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{G}_{j+1, mn}^L(\xi, s) &= F_{1n}(\xi), \\ -\Lambda_q \lambda_n^3 \tilde{G}_{1mn}^L(\xi, s) + k_{q+1, n}(s) \tilde{G}_{q+1, mn}^L(\xi, s) &= F_{q+1, n}(\xi), \\ F_1(\xi) &= \frac{\delta_{1m} \xi \Psi_{01}(\lambda_n \xi)}{\Psi_0(\lambda_n)}, \quad F_{q+1, n}(\xi) = \frac{\delta_{q+1, m} \xi \Psi_{00}(\lambda_n \xi)}{\Psi_0(\lambda_n)}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{q+1, m}^L(r, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{q+1, mn}^L(\xi, s) \Psi_{00}(\lambda_n r), \\ \tilde{G}_{1m}^L(r, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{1mn}^L(\xi, s) \Psi_{01}(\lambda_n r), \\ \tilde{G}_{q+1, mn}^L(\xi, s) &= \frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \int_{R_1}^1 r \tilde{G}_{q+1, m}^L(r, \xi, s) \Psi_{00}(\lambda_n r) dr, \\ \tilde{G}_{1mn}^L(\xi, s) &= \frac{1}{\Psi_0(\lambda_n)} \int_{R_1}^1 r \tilde{G}_{1m}^L(r, \xi, s) \Psi_{01}(\lambda_n r) dr. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Как и ранее, решение системы (4.15) запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{11n}^L(\xi, s) &= \frac{\Psi_{01}(\lambda_n \xi) \xi \tilde{P}_{11n}(s)}{\Psi_0(\lambda_n) P_n(s)}, \\ \tilde{G}_{1, q+1, n}^L(\xi, s) &= \frac{\Psi_{00}(\lambda_n \xi) \xi \tilde{P}_{1, q+1, n}(s)}{\Psi_0(\lambda_n) P_n(s)}, \\ \tilde{G}_{q+1, 1n}^L(\xi, s) &= \frac{\Psi_{01}(\lambda_n \xi) \xi \tilde{P}_{q+1, 1n}(s)}{\Psi_0(\lambda_n) Q_{qn}(s)}, \\ \tilde{G}_{q+1, p+1, n}^L(\xi, s) &= \frac{\Psi_{00}(\lambda_n \xi) \xi}{\Psi_0(\lambda_n)} \left[ \frac{\delta_{qp}}{k_{q+1, n}(s)} + \frac{\tilde{P}_{q+1, p+1, n}(s)}{Q_{qn}(s)} \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь многочлены  $P_n(s)$ ,  $Q_{qn}(s)$ ,  $\Pi_n(s)$  и  $\Pi_{jn}(s)$  находятся по формулам (3.12), а многочлены  $\tilde{P}_{mkn}(s)$  – по формулам (3.20).



Оригиналы изображений по Лапласу (4.17) находятся с помощью стандартных таблиц операционного исчисления и вычетов [9]:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{11n}(\xi, \tau) &= \frac{\Psi_{01}(\lambda_n \xi) \xi}{\Psi_0(\lambda_n)} \sum_{l=1}^{2N+2} \tilde{A}_{11n}^{(l)}(s_{ln}) \exp(s_{ln} \tau), \\
\tilde{G}_{1,q+1,n}(\xi, \tau) &= \frac{\Psi_{00}(\lambda_n \xi) \xi}{\Psi_0(\lambda_n)} \sum_{l=1}^{2N+2} \tilde{A}_{1,q+1,n}^{(l)}(s_{ln}) \exp(s_{ln} \tau), \\
\tilde{G}_{q+1,p+1,n}(\xi, \tau) &= \frac{\Psi_{01}(\lambda_n \xi) \xi}{\Psi_0(\lambda_n)} \sum_{l=1}^{2N+4} \tilde{A}_{q+1,1n}^{(l)}(s_{ln}) \exp(s_{ln} \tau), \\
\tilde{G}_{q+1,p+1,n}(\xi, \tau) &= \frac{\Psi_{00}(\lambda_n \xi) \xi}{\Psi_0(\lambda_n)} \times \\
&\times \left[ \sum_{r=1}^2 \frac{\delta_{qp} \exp(\chi_{rqn} \tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{rqn})} + \sum_{l=1}^{2N+4} A_{q+1,p+1,n}^{(l)}(s_{ln}) \exp(s_{ln} \tau) \right].
\end{aligned} \tag{4.18}$$

где коэффициенты  $\tilde{A}_{mkn}^{(l)}$  находятся по формулам (3.22).

#### 4.4. Решение задачи для полого цилиндра методом эквивалентных граничных условий

Как и в главе 3, после нахождения функций Грина необходимо построить интегральные соотношения, связывающие правые части граничных условий (4.1) и (1.19). Для этого подставляем решение (4.2) задачи (1.10), (4.1) в граничные условия (1.19). Получаем уравнения относительно искомых функций  $f_{1k}^*(\tau)$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau [X_{11}(1, \tau - t) f_{11}^*(t) + X_{12}(1, \tau - t) f_{12}^*(t)] dt &= \varphi_1(\tau), \\
\int_0^\tau [X_{11}(R_1, \tau - t) f_{11}^*(t) + X_{12}(R_1, \tau - t) f_{12}^*(t)] dt &= \varphi_2(\tau),
\end{aligned} \tag{4.19}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) = & f_{11}(\tau) - \sum_{l=1}^2 \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau X_{ml}(1, \tau-t) f_{ml}(t) dt - \\ & - \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau \tilde{X}_k(1, \xi, \tau-t) F_k(\xi, t) d\xi dt, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\tau) = & f_{12}(\tau) - \sum_{l=1}^2 \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau X_{ml}(R_1, \tau-t) f_{ml}(t) dt - \\ & - \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau \tilde{X}_1(r, \xi, \tau-t) F_k(\xi, t) d\xi dt, \end{aligned}$$

$$X_{ml}(r, t) = G'_{1ml}(r, t) + \frac{c_{12}}{r} G_{1ml}(r, t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,ml}(r, t),$$

$$\tilde{X}_k(r, \xi, t) = \tilde{G}'_{1k}(r, \xi, t) + \frac{c_{12}}{r} \tilde{G}_{1k}(r, \xi, t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{G}_{j+1,k}(r, \xi, t).$$

Учитывая граничные условия (4.1) и рассуждая так же, как и в п. 3.4, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) = & f_{11}(\tau) + (1 - c_{12}) \sum_{l=1}^2 \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau G_{1ml}(1, \tau-t) f_{ml}(t) dt + \\ & + (1 - c_{12}) \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau \tilde{G}_{1k}(1, \xi, \tau-t) F_k(\xi, t) d\xi dt, \\ \varphi_2(\tau) = & f_{12}(\tau) + \frac{1 - c_{12}}{R_1} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau G_{1m2}(R_1, \tau-t) f_{m2}(t) dt + \\ & + \frac{1 - c_{12}}{R_1} \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau \tilde{G}_{1k}(R_1, \xi, \tau-t) F_k(\xi, t) d\xi dt. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Тогда система интегральных уравнений (4.19) записывается так:

$$\begin{aligned}
& f_{11}^*(\tau) + (c_{12} - 1) \int_0^\tau G_{111}(1, \tau - t) f_{11}^*(t) dt + \\
& + (c_{12} - 1) \int_0^\tau G_{112}(1, \tau - t) f_{12}^*(t) dt = \varphi_1(\tau), \\
& \frac{c_{12} - 1}{R_1} \int_0^\tau G_{111}(R_1, \tau - t) f_{11}^*(t) dt + f_{12}^*(\tau) + \\
& + \frac{c_{12} - 1}{R_1} \int_0^\tau G_{112}(R_1, \tau - t) f_{12}^*(t) dt = \varphi_2(\tau).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Путем однократного интегрирования по частям (см. п. 3.4) эта система приводится к виду (точка означает производную по времени)

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau a_{11}(\tau - t) \dot{f}_{11}^*(t) dt + \int_0^\tau a_{12}(\tau - t) \dot{f}_{12}^*(t) dt = \varphi_1(t), \\
& \int_0^\tau a_{21}(\tau - t) \dot{f}_{11}^*(t) dt + \int_0^\tau a_{22}(\tau - t) \dot{f}_{12}^*(t) dt = \varphi_2(t).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
a_{11}(\tau - t) &= (c_{12} - 1) G_{111}^*(1, \tau - t) + 1, \\
a_{12}(\tau - t) &= (c_{12} - 1) G_{112}^*(1, \tau - t), \\
a_{21}(\tau - t) &= \frac{c_{12} - 1}{R_1} G_{111}^*(R_1, \tau - t), \\
a_{22}(\tau - t) &= \frac{c_{12} - 1}{R_1} G_{112}^*(R_1, \tau - t) + 1, \\
G_{11i}^*(r, \tau) &= \int_0^\tau G_{11i}(r, t) dt.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Как и в задаче для сплошного цилиндра, эта система решается численно с помощью квадратурных формул средних прямоугольников. Интегралы в (4.23) аппроксимируются следующим образом:

$$\int_0^{t_m} a_{ij}(t_m - t) f_{1l}^*(t) dt = h A_{ij}^{(1/2)} y_l^{(m-1/2)} + h S_{ijl}^{(m-1/2)},$$

где

$$t_m = mh, \quad t_{m-1/2} = \left(m - \frac{1}{2}\right) h,$$

$$S_{ijl}^{(m-1/2)} = \sum_{k=1}^{m-1} A_{ij}^{(m-k+1/2)} y_l^{(k-1/2)} \quad (\forall m = \overline{0, N_\tau}),$$

$$y_l^{(m)} = \frac{\partial f_{1l}^*(t_m)}{\partial \tau}, \quad y_l^{(m-1/2)} = \frac{\partial f_{1l}^*(t_m - t_{1/2})}{\partial \tau},$$

$$A_{ij}^{(m)} = a_{ij}(t_m), \quad A_{ij}^{(m-k+1/2)} = a_{ij}(t_m - t_{k-1/2}).$$

Таким образом система интегральных уравнений (4.23) сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_{m-1/2} = \mathbf{b}_{m-1/2}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(1/2)} & A_{12}^{(1/2)} \\ A_{21}^{(1/2)} & A_{22}^{(1/2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{m-1/2} = \begin{pmatrix} y_1^{(m-1/2)} \\ y_2^{(m-1/2)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{m-1/2} = \begin{pmatrix} b_1^{(m-1/2)} \\ b_2^{(m-1/2)} \end{pmatrix}, \quad b_i^{(m-1/2)} = \frac{1}{h} \left( \varphi_i(t_m) - h S_{i11}^{(m-1/2)} - h S_{i22}^{(m-1/2)} \right),$$

решение которой находим по формулам Крамера

$$y_1^{(m-1/2)} = \frac{b_1 A_{22}^{(1/2)} - b_2 A_{12}^{(1/2)}}{A_{11}^{(1/2)} A_{22}^{(1/2)} - A_{12}^{(1/2)} A_{21}^{(1/2)}},$$

$$y_2^{(m-1/2)} = \frac{b_2 A_{11}^{(1/2)} - b_1 A_{21}^{(1/2)}}{A_{11}^{(1/2)} A_{22}^{(1/2)} - A_{12}^{(1/2)} A_{21}^{(1/2)}}. \quad (4.25)$$

В результате, решение исходной задачи (1.10), (1.19) в точках  $\tau = t_i$  запишется так:

$$u(r, t_i) = \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^{t_i} \tilde{G}_{1k}(r, \xi, t_i - t) F_k(\xi, t) d\xi dt +$$

$$+ h \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i G_{11l}^*(r, t_{i-m+1/2}) y_l^{(m-1/2)}, \quad (4.26)$$

$$\eta_q(r, t_i) = \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^{t_i} \tilde{G}_{q+1,k}(r, \xi, t_i - t) F_k(\xi, t) d\xi dt + \\ + h \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i G_{q+1,1l}^*(r, t_{i-m+1/2}) y_l^{(m-1/2)},$$

## 4.5. Модели с бесконечной скоростью распространения диффузионных потоков, несвязанные и статические модели

Предельные переходы к классическим моделям с бесконечными скоростями распространения диффузионных потоков, а также к упругим и статическим моделям осуществляются таким же образом, как и в п. 3.5, 3.6. Фактически, результат получается формальной заменой  $J_\alpha(\lambda_n r)$  на  $\Psi_{0\alpha}(\lambda_n r)$  и  $J_1^2(\lambda_n)/2$  на  $\Psi_0(\lambda_n)$  в формулах, полученных в п. 3.5 и 3.6. Например, функции Грина для несвязанных задач запишутся так (аналоги формул (3.32)):

$$G_{ln}^{ru}(\tau) = \frac{\Omega_{ln} \sin \lambda_n \tau}{\Psi_0(\lambda_n) \lambda_n}, \quad \tilde{G}_n^{ru}(\xi, \tau) = \frac{\Omega_{ln} \xi \Psi_{01}(\lambda_n \xi) \sin \lambda_n \tau}{\lambda_n \Psi_0(\lambda_n)}, \\ G_{lqn}^\eta(\tau) = \frac{\lambda_n D_q \Omega_{ln}}{\Psi_0(\lambda_n)} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn} \tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})}, \quad (4.27) \\ \tilde{G}_{qn}^\eta(\xi, \tau) = \frac{\Omega_{ln} \xi \Psi_{00}(\lambda_n \xi)}{\Psi_0(\lambda_n)} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn} \tau)}{k'_{q+1,n}(\lambda_n, \chi_{jqn})}.$$

Здесь коэффициенты  $\Omega_{ln}$  определяются по формулам (4.9).

Для перехода к статическим режимам задаём внешние возмущения в основной и вспомогательной задачи следующим образом

$$f_{1l}^*(\tau) = \tilde{f}_{1l}^* H(\tau), \quad f_{1l}(\tau) = \tilde{f}_{1l} H(\tau), \quad f_{q+1,l}(\tau) = \tilde{f}_{q+1,l} H(\tau), \\ F_k(\xi, \tau) = \tilde{F}_k(\xi) H(\tau)$$

Используя предельный переход (3.35), из формул (4.11), (4.12), (4.16) и (4.17) получаем статические функции Грина для полого цилиндра:

$$G_{11l}^{st}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_{ln} \Psi_{01}(\lambda_n r)}{\Psi_0(\lambda_n) \lambda_n^2}, \quad G_{1,q+1,l}^{st}(r) = \alpha_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_{ln} \Psi_{01}(\lambda_n r)}{\Psi_0(\lambda_n) \lambda_n^2},$$

$$G_{q+1,1l}^{st}(r) = 0, \quad G_{q+1,p+1,l}^{st}(r) = \delta_{pq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_{ln} \Psi_{00}(\lambda_n r)}{\Psi_0(\lambda_n) \lambda_n};$$
(4.28)

$$\tilde{G}_{11}^{st}(r, \xi) = \xi \Phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{01}(\lambda_n \xi)}{\Psi_0(\lambda_n) \lambda_n^2} \Psi_{01}(\lambda_n r),$$

$$\tilde{G}_{1,q+1}^{st}(r, \xi) = \xi \alpha_q \Phi_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{00}(\lambda_n \xi)}{\Psi_0(\lambda_n) \lambda_n^3} \Psi_{01}(\lambda_n r),$$

$$\tilde{G}_{q+1,1}^{st}(r, \xi) = \xi \Lambda_q \Phi_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{01}(\lambda_n \xi)}{\Psi_0(\lambda_n) \lambda_n} \Psi_{00}(\lambda_n r),$$
(4.29)

$$\tilde{G}_{q+1,p+1}^{st}(r, \xi) = \frac{\xi (\delta_{qp} + \Lambda_q \alpha_p \Phi_p)}{D_q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{00}(\lambda_n \xi)}{\Psi_0(\lambda_n) \lambda_n^2} \Psi_{00}(\lambda_n r),$$

где величины  $\Phi_q$  и  $\Phi$  определяются по формулам (3.38).

Статический аналог уравнений (4.22) в этом случае записывается в виде

$$\tilde{a}_{11} \tilde{f}_{11}^* + \tilde{a}_{12} \tilde{f}_{12}^* = \tilde{\varphi}_1, \quad \tilde{a}_{21} \tilde{f}_{11}^* + \tilde{a}_{22} \tilde{f}_{12}^* = \tilde{\varphi}_2,$$
(4.30)

где

$$\tilde{a}_{11} = 1 + (c_{12} - 1) G_{111}^{st}(1), \quad \tilde{a}_{12} = (c_{12} - 1) G_{112}^{st}(1),$$

$$\tilde{a}_{21} = \frac{c_{12} - 1}{R_1} G_{111}^{st}(R_1), \quad \tilde{a}_{22} = 1 + \frac{c_{12} - 1}{R_1} G_{112}^{st}(R_1),$$

$$\tilde{\varphi}_1 = \tilde{f}_{11} + (1 - c_{12}) \sum_{l=1}^2 \sum_{m=2}^{N+1} G_{1ml}^{st}(1) \tilde{f}_{ml} +$$

$$+ (1 - c_{12}) \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{1k}^{st}(1, \xi) F_k(\xi) d\xi,$$
(4.31)

$$\tilde{\varphi}_2 = \tilde{f}_{12} + \frac{1 - c_{12}}{R_1} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=2}^{N+1} G_{1ml}^{st}(R_1) \tilde{f}_{ml} +$$

$$+ \frac{1 - c_{12}}{R_1} \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{1k}^{st}(R_1, \xi) F_k(\xi) d\xi.$$

Решение (4.30) находим по формулам Крамера

$$\tilde{f}_{11}^* = \frac{\tilde{a}_{22}\tilde{\varphi}_1 - \tilde{a}_{12}\tilde{\varphi}_2}{\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21}}, \quad \tilde{f}_{12}^* = \frac{\tilde{a}_{11}\tilde{\varphi}_2 - \tilde{a}_{21}\tilde{\varphi}_1}{\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21}}. \quad (4.32)$$

Таким образом статический аналог формул (4.26) запишется так:

$$\begin{aligned} u(r) &= \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{1k}(r, \xi) F_k(\xi) d\xi + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i G_{11l}^{st}(r) \tilde{f}_{1l}^*, \\ \eta_q(r) &= \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{q+1,k}(r, \xi) F_k(\xi) d\xi + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i G_{q+1,1l}^{st}(r) \tilde{f}_{1l}^*, \end{aligned} \quad (4.33)$$

## 4.6. Примеры расчетов

Для расчета будем рассматривать полый цилиндр, внутренний радиус которого равен  $7 \cdot 10^{-4}$  м, внешний –  $10^{-3}$  м. Цилиндр выполнен из трехкомпонентного материала (цинк и медь диффундируют в дюралюминии), физические характеристики которого заданы равенствами (3.44). В качестве примеров рассмотрим различные способы нагружения цилиндра.

**Пример 4.1.** Полагаем для расчета, что массовые силы отсутствуют, а поверхностные возмущения в граничных условиях (1.19) имеют вид

$$f_{11}(\tau) = H(\tau), \quad f_{12}(\tau) = 0, \quad f_{q+1,1}(\tau) = f_{q+1,2}(\tau) = 0, \quad (4.34)$$

т.е. рассматривается случай, когда давление задано на внешней поверхности цилиндра, а внешняя поверхность свободна от нагружения.

Подставляя эти значения в формулы (4.26), получаем перемещения, вращения концентраций цинка и меди, соответствующие заданным нагрузкам.

Результаты вычислений представлены на рисунках 4.2–4.8. На рисунке 4.3 сравниваются поля перемещений для упругой (пунктирная линия) и упруго-диффузионной задач. Как видно, диффузионные процессы при заданных нагрузках (4.34) почти не влияют на механическое поле. Аналогичная ситуация имеет место для статических нагрузок (рисунки 4.7, 4.8).

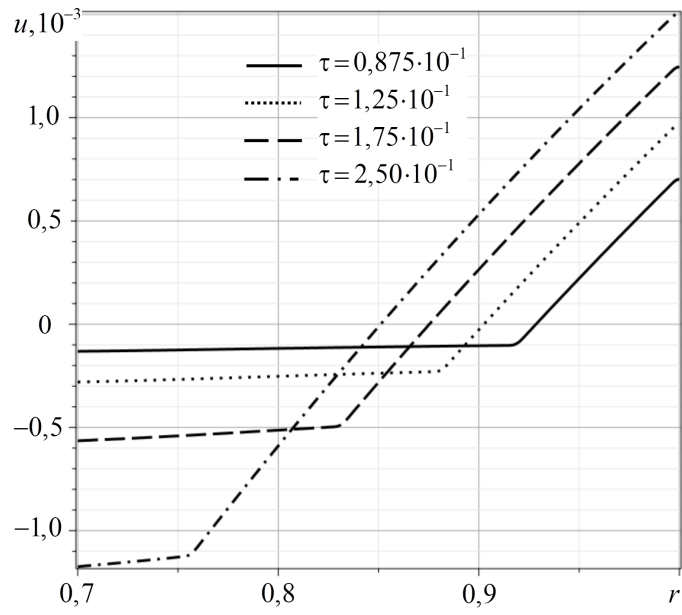


Рис. 4.2 Перемещения  $u(r, \tau)$ , соответствующие решению упругодиффузионной задачи.

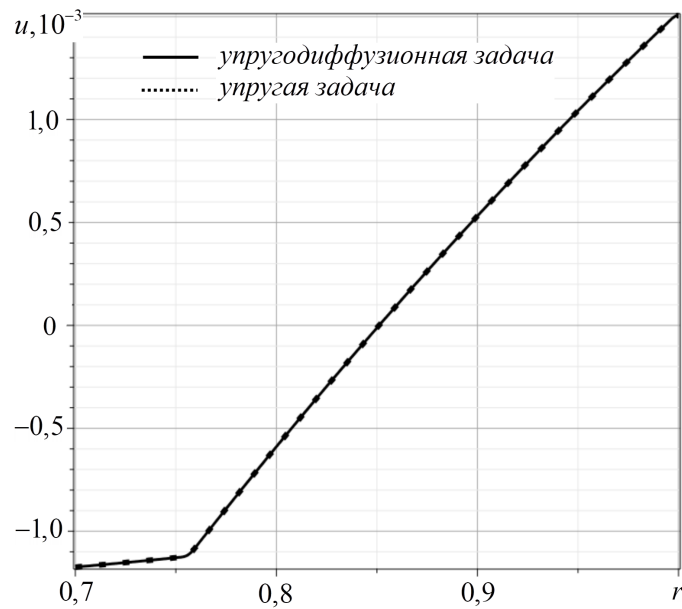
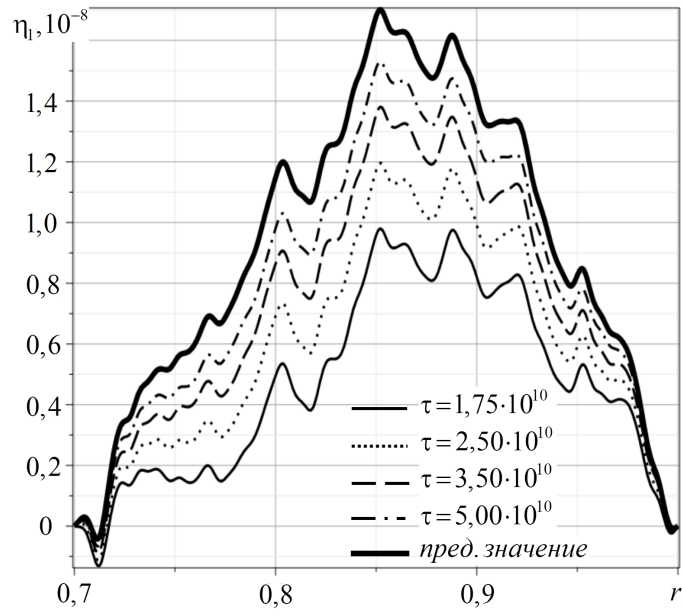
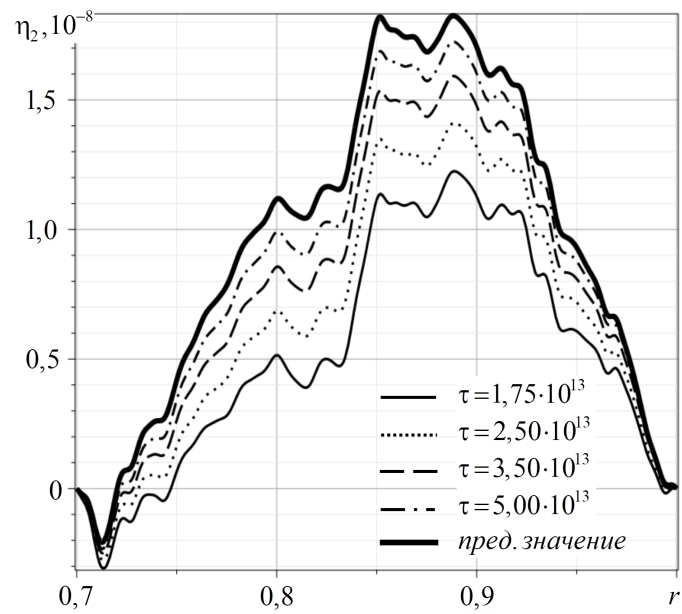


Рис. 4.3 Перемещения  $u(r, \tau)$ . Сравнение решений упругой и упругодиффузионной задач.



Рис. 4.4 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$ .Рис. 4.5 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$ .

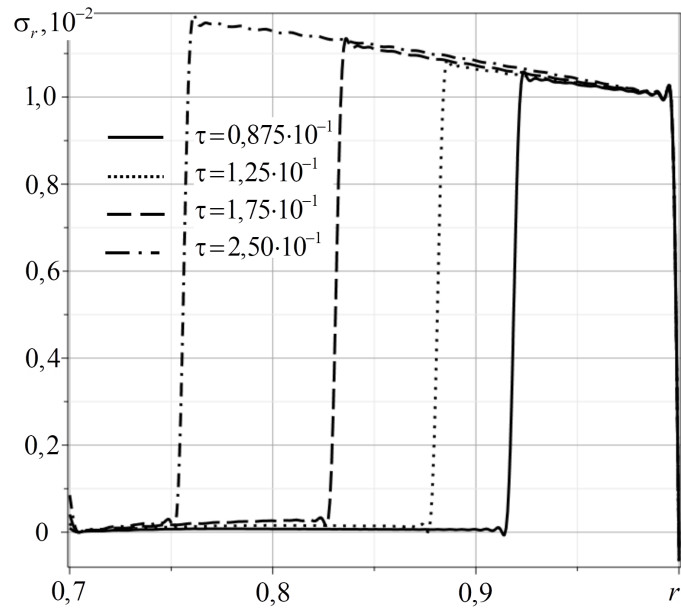


Рис. 4.6 Радиальные напряжения  $\sigma_r(r, \tau)$ .

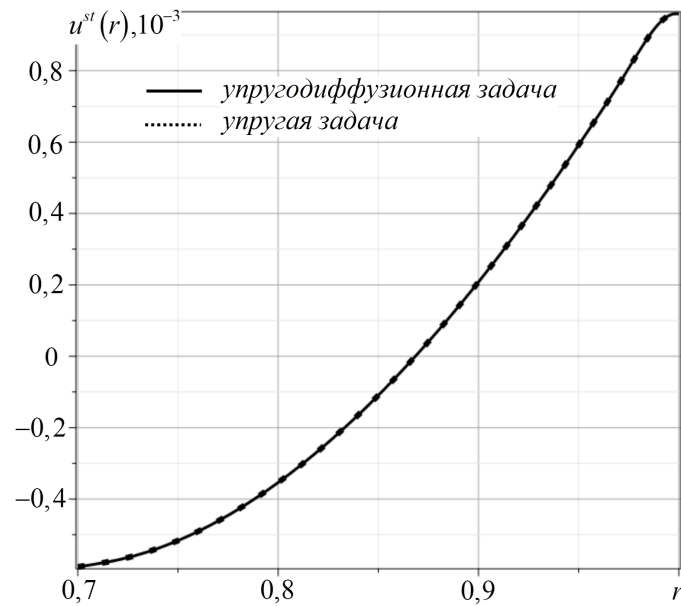


Рис. 4.7 Перемещения  $u^{st}(r)$  для статической задачи. Сравнение решений упругой и упругодиффузионной задач.

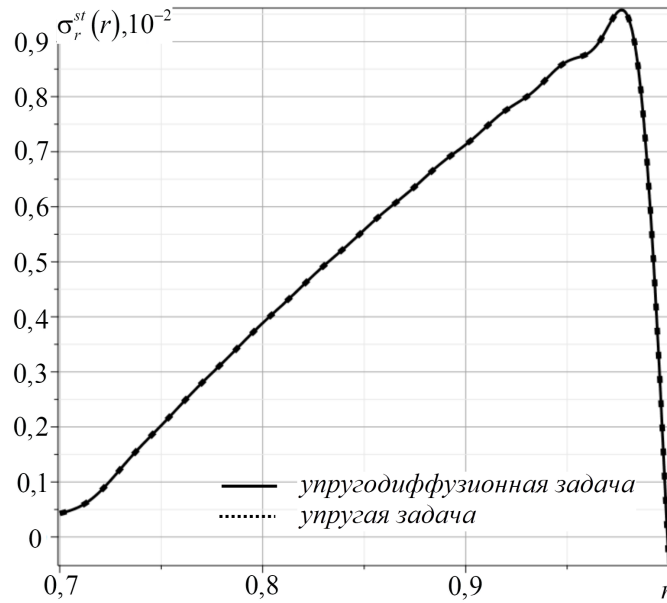


Рис. 4.8 Напряжения  $\sigma_r^{st}(r)$  для статической задачи. Сравнение решений упругой и упругодиффузионной задач.

На рисунках 4.4 и 4.5 показаны диффузионные поля, инициированные нагрузками (4.34). Жирная сплошная линия на этих рисунках соответствует максимальному приращению концентрации. Видно, что максимумы для цинка и меди достигаются в разные моменты времени. Для цинка это время  $\tau \sim 10^{12}$ . Для меди –  $\tau \sim 10^{15}$ . На рисунке 4.6 продемонстрированы радиальные напряжения.

**Пример 4.2.** Опять рассмотрим случай, когда давление задано на внешней поверхности цилиндра, а внутренняя поверхность свободна от нагружения, но на этот раз поверхностные возмущения в граничных условиях (1.19) зададим следующим образом:

$$f_{11}(\tau) = \tau \exp(-\tau), \quad f_{12}(\tau) = 0, \quad f_{q+1,1}(\tau) = f_{q+1,2}(\tau) = 0. \quad (4.35)$$

На рисунках 4.11–4.14 можно видеть, насколько существенно различаются диффузионные поля, рассчитанные с учетом и без учета релаксации диффузионных потоков. При этом данные диффузионные поля, по аналогии с преды-

дущими расчетными примерами, не оказывают сколь-либо существенного влияния на механические поля перемещений и напряжений, показанные на рисунках 4.9 и 4.10.

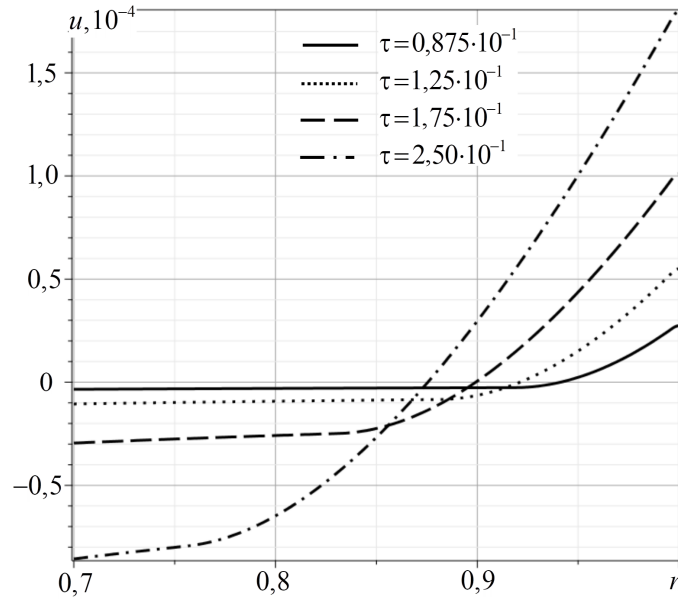


Рис. 4.9 Перемещения  $u(r, \tau)$ , соответствующие решению упругодиффузионной задачи.

**Пример 4.3.** Еще один пример демонстрирует взаимодействие механического и диффузионного полей в полем цилиндре, находящемся под действием внешних объемных нестационарных возмущений. Для расчета полагаем, что объемные возмущения заданы следующим образом:

$$F_1(r, \tau) = \Psi_{01}(\lambda_1 r) H(\tau), \quad F_{q+1}(r, \tau) = 0. \quad (4.36)$$

В этом расчетном примере (рисунки 4.18–4.27) показаны различные стадии развития процесса диффузии как с учетом релаксации диффузионных потоков, так и без ее учета. По аналогии с предыдущими примерами, здесь, в частности, показано, сколь существенным становится влияние релаксации на кинетику массопереноса в начальные моменты времени (рисунки 4.18–4.21), ее постепенное уменьшение с течением времени (рисунки 4.22–4.25) и, наконец,

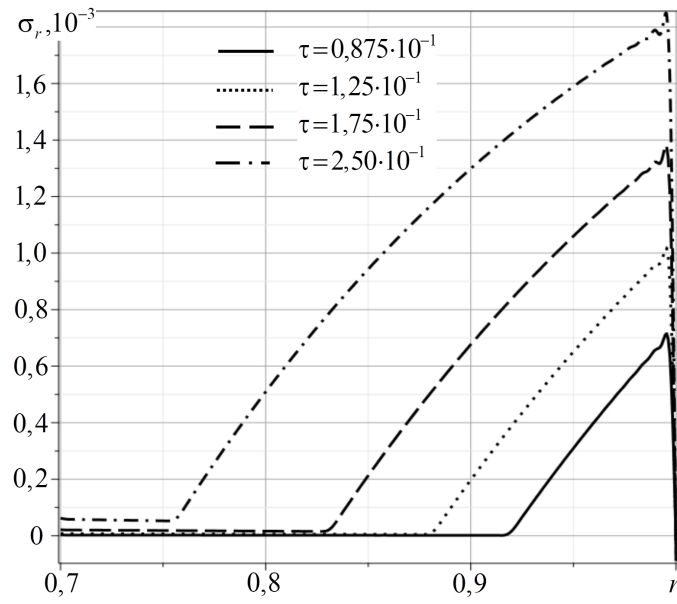


Рис. 4.10 Радиальные напряжения  $\sigma_r(r, \tau)$ .

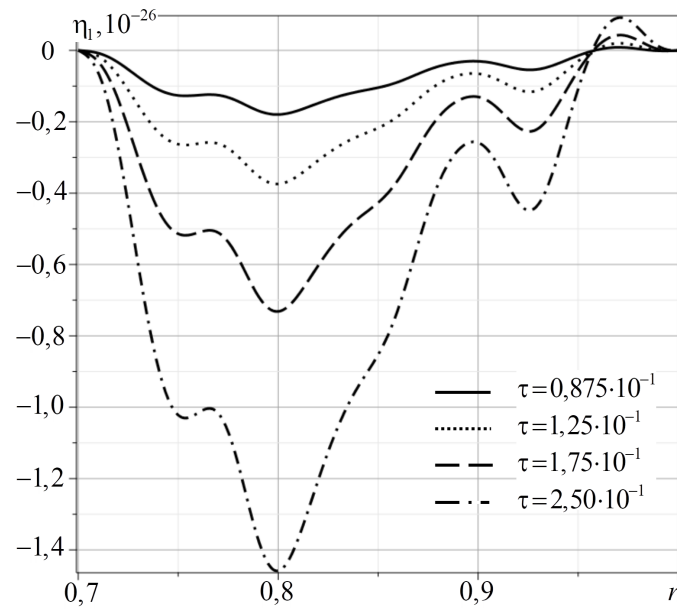


Рис. 4.11 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  с учетом релаксации диффузионных потоков.

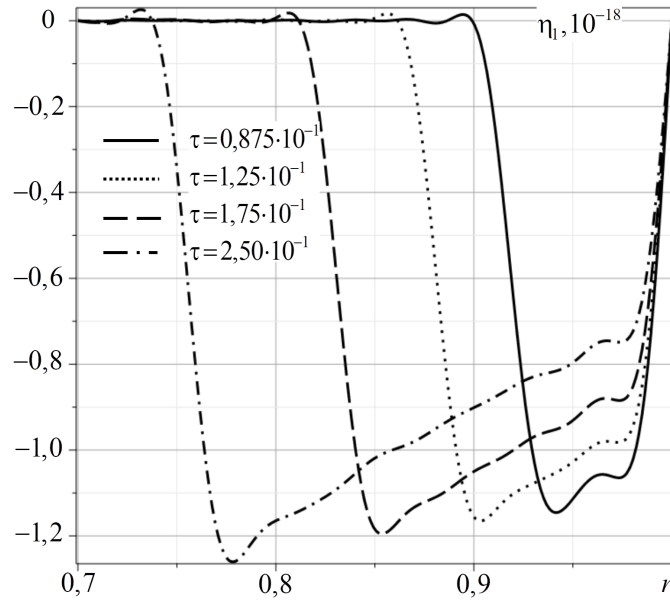


Рис. 4.12 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  без учета релаксации диффузионных потоков.

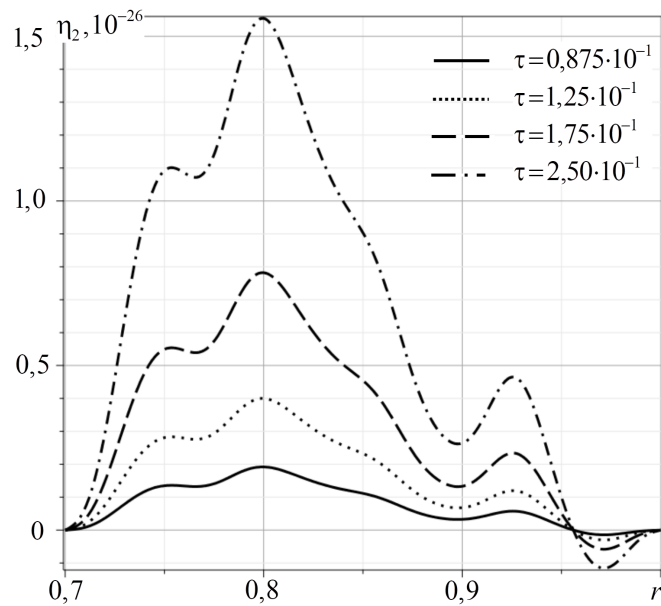


Рис. 4.13 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  с учетом релаксации диффузионных потоков.

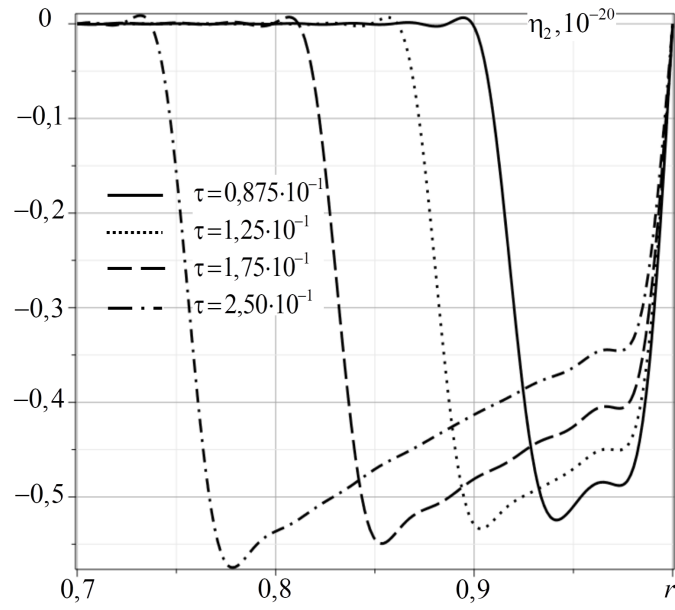


Рис. 4.14 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  без учета релаксации диффузионных потоков.

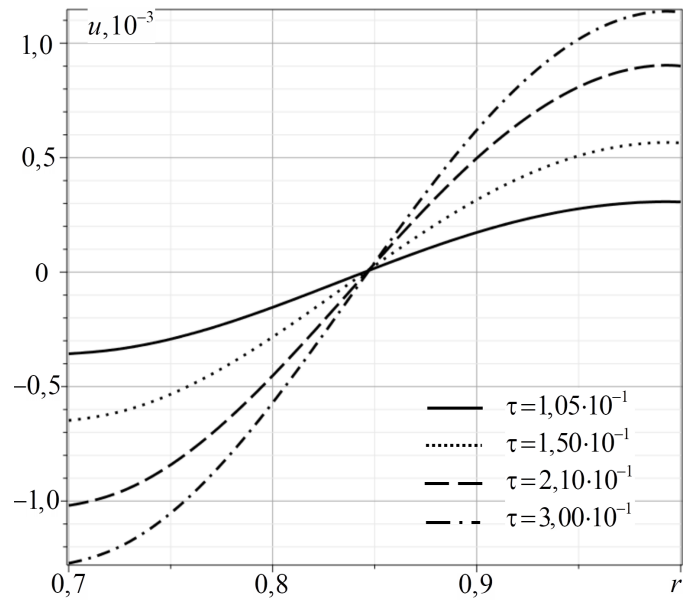
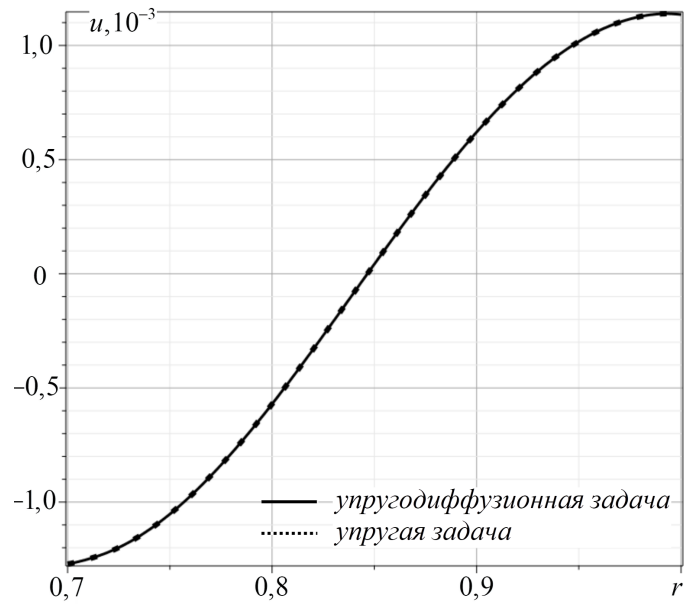
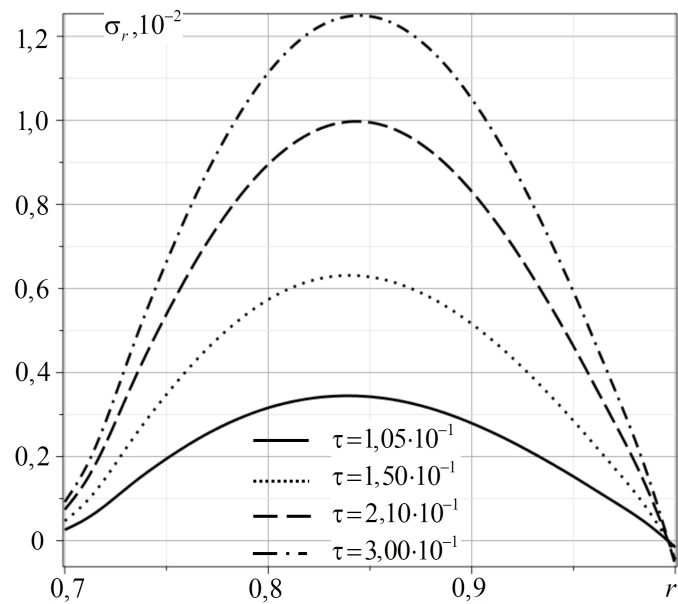


Рис. 4.15 Перемещения  $u(r, \tau)$ , соответствующие решению упругодиффузионной задачи.

Рис. 4.16 Перемещения  $u(r, \tau)$ .Рис. 4.17 Радиальные напряжения  $\sigma_r(r, \tau)$ .



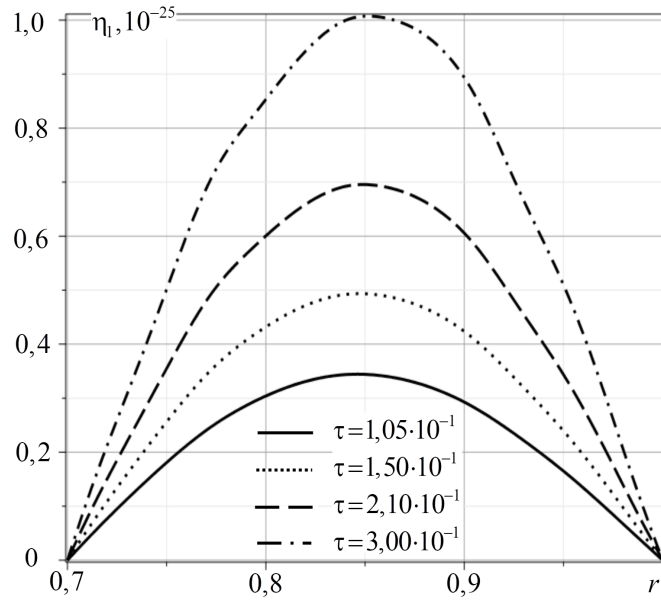


Рис. 4.18 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  с учетом релаксации (начальные моменты времени).

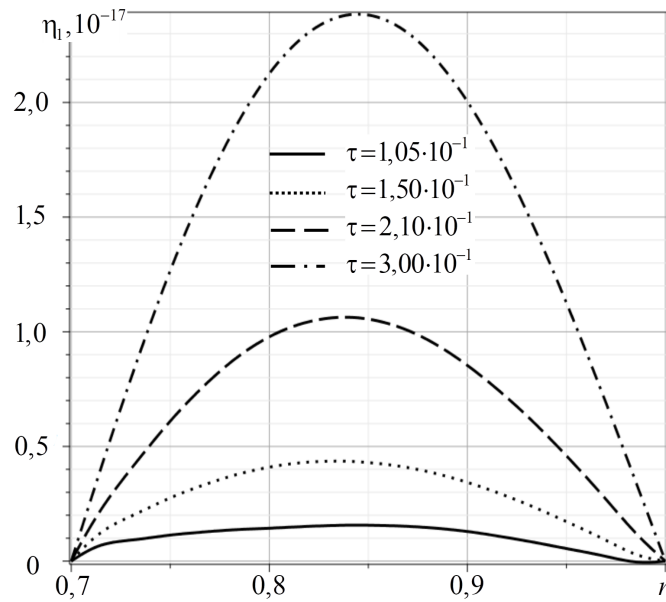


Рис. 4.19 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  без учета релаксации (начальные моменты времени).

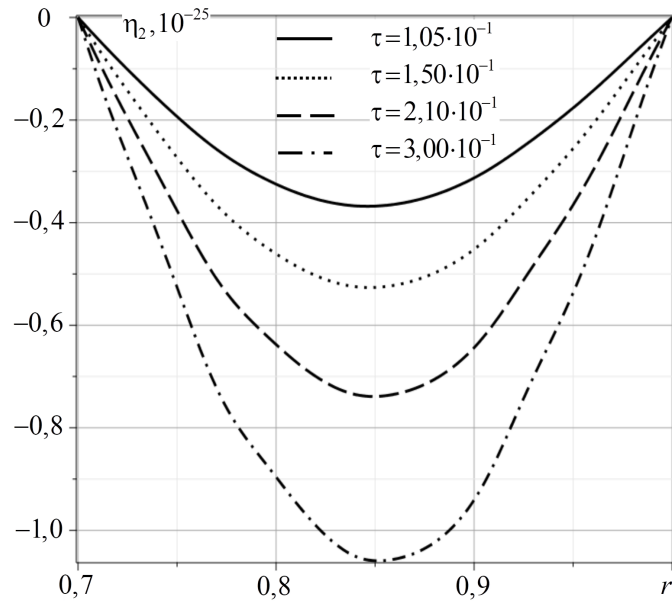


Рис. 4.20 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  с учетом релаксации (начальные моменты времени).

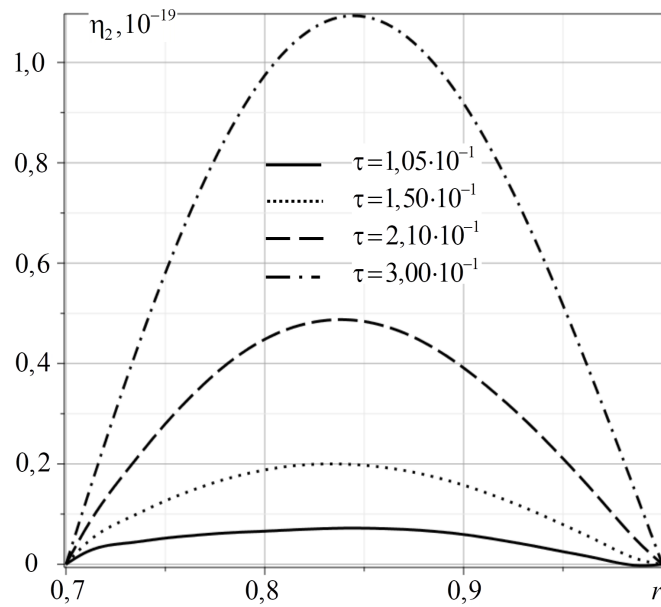


Рис. 4.21 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  без учета релаксации (начальные моменты времени).

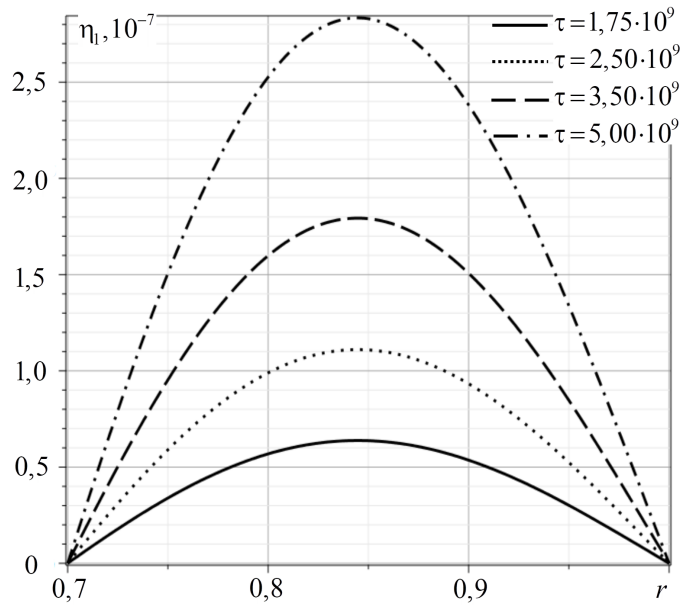


Рис. 4.22 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  с учетом релаксации (развитие процесса).

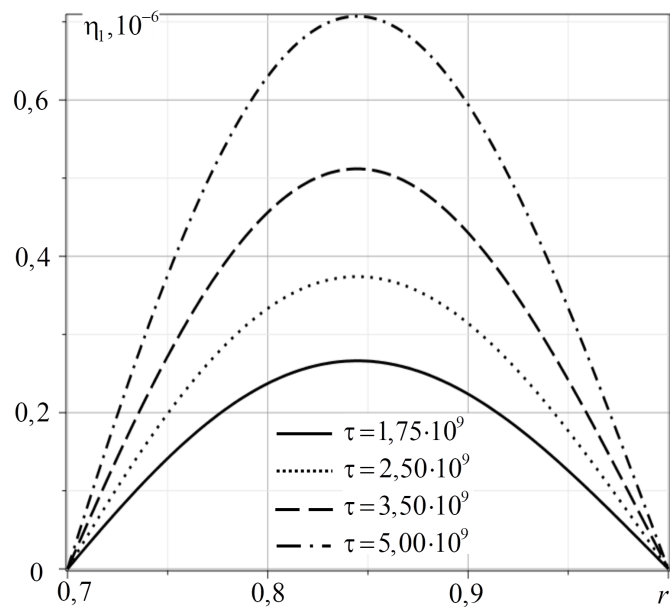


Рис. 4.23 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  без учета релаксации (развитие процесса).

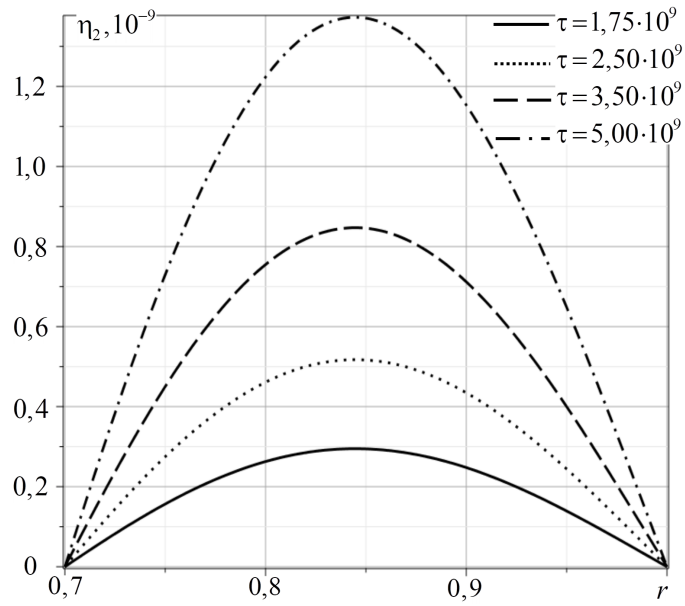


Рис. 4.24 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  с учетом релаксации (развитие процесса).

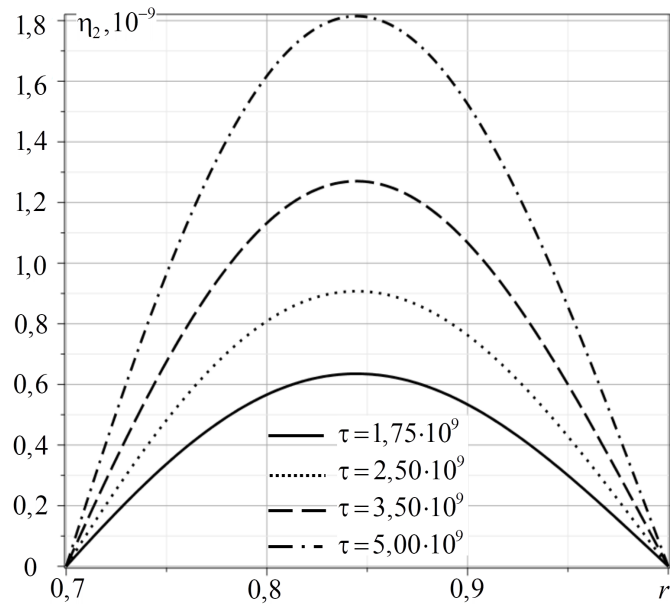


Рис. 4.25 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  без учета релаксации (развитие процесса).

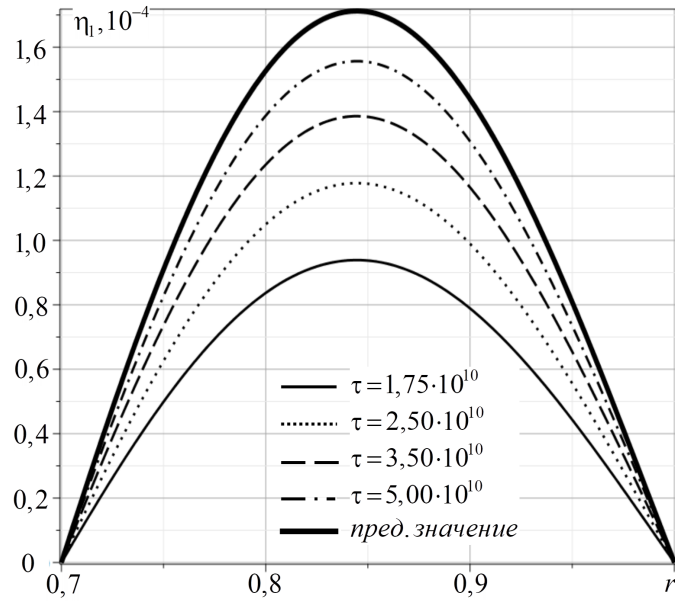


Рис. 4.26 Приращение концентрации цинка  $\eta_1(r, \tau)$  (предельное развитие процесса).

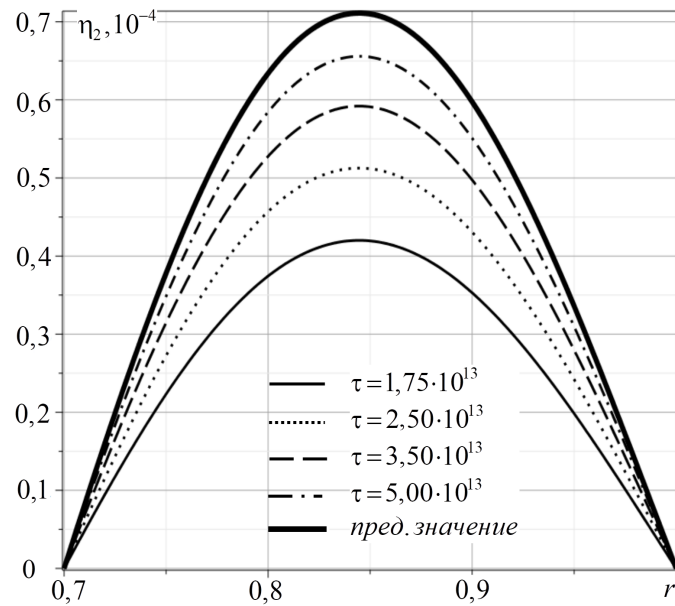


Рис. 4.27 Приращение концентрации меди  $\eta_2(r, \tau)$  (предельное развитие процесса).

полное затухание (рисунки 4.26, 4.27).

По результатам численного моделирования, выполненного в главах 3 и 4, можно сказать следующее:

1. Нестационарные механические нагрузки порождают слабое диффузионное поле, которое, в силу своей малости, уже практически не влияет на поле перемещений.
2. Статические поверхностные механические нагрузки не порождают диффузионного поля.
3. Нестационарные объемные источники массопереноса могут по прошествии времени породить существенные механические перемещения.
4. Релаксационные эффекты влияют на кинетику массопереноса только в начальные моменты времени, соизмеримые с временами релаксации компонент в составе сплошной среды.
5. Релаксационные диффузионные эффекты не влияют на поле механических перемещений.

Выводы, полученные в работе, совпадают на качественном уровне с результатами экспериментальных исследований, полученных ранее другими авторами [94]. Результаты, полученные в главе 4, опубликованы в работах [12,18,28].

## Заключение

В представленной диссертационной работе проведено исследование нестационарного взаимодействия механических и диффузионных полей в сплошных и полых цилиндрических телах.

Основные результаты работы:

1. Из общей модели механодиффузии для произвольной анизотропной среды получена одномерная модель механодиффузии в цилиндрической системе координат. Построенная модель учитывает конечную скорость распространения диффузионных возмущений, обусловленную релаксацией диффузионных потоков.

2. Сформулирована и решена задача Штурма-Лиувилля для одномерного упругодиффузионного оператора в цилиндрической системе координат. Построены системы собственных функций для упругодиффузионного оператора, соответствующие различным видам граничных условий, допускающих процедуру разделения переменных.

3. Методом эквивалентных граничных условий решены одномерные нестационарные задачи механодиффузии для сплошных и полых однородных многокомпонентных цилиндров, находящихся под действием поверхностных и объемных механодиффузионных возмущений.

4. Проанализированы:

– предельные переходы от модели с конечной скоростью распространения диффузионных возмущений к классической модели механодиффузии с бесконечной скоростью распространения диффузионных возмущений;

– предельные переходы к упругим и диффузионным задачам;

– предельные переходы к статическим задачам механодиффузии.

5. Исследовано взаимное влияние механических и диффузионных полей друг на друга при различных видах внешних нагружений цилиндрических тел.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др.;* под общей редакцией Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. // Физические величины: Справочник. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
3. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. Серия: Классический университетский учебник. Изд. 3. – М.: Бинوم. Лаборатория знаний, 2004. – 640 с.
4. *Бурак Я.Й., Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – Київ: Наукова думка, 2006. – 272 с.
5. *Вестяк В.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Математические основы термоупругости: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2021. – 92 с.
6. Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Конобеевский\\_Сергей\\_Тихонович](https://ru.wikipedia.org/wiki/Конобеевский_Сергей_Тихонович) (дата обращения: 21.02.2023).
7. *Герцирикен Д.С., Мазанко В.Ф., Тышкевич В.М., Фальченко В.М.* Массоперенос в металлах при низких температурах в условиях внешних воздействий // Институт металлофизики им. Г.В. Курдюмова НАН Украины. – Київ: Институт металлофизики, 2001. – 444 с.
8. *Горский В.С.* Исследование упругого последействия в сплаве Си-Аи с упорядоченной решеткой // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1936. – Т. 6, № 3. – С. 272–276.
9. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Государственное издательство физико-математиче-



ской литературы, 1961. – 524 с.

10. *Дудин Д.С., Келлер И.Э.* Обзор подходов к формулировке связанных уравнений взаимной диффузии в вязкоупругом теле // *Химическая физика и мезоскопия.* – 2022. – Т. 24, № 3. – С. 296–311.
11. *Еремеев В.С.* Диффузия и напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 182 с.
12. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Моделирование нестационарных механодиффузионных процессов в полом цилиндре с учетом релаксации диффузионных потоков // *Математическое моделирование.* – 2023. – Т. 35, № 1. – С. 95–112.
13. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Нестационарные связанные механодиффузионные процессы в ортотропном сплошном цилиндре с учетом релаксации диффузионных потоков // *Известия высших учебных заведений. Математика.* – 2022. – № 1. – С. 25–37 = *Zverev N.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* Unsteady coupled elastic diffusion processes in an orthotropic cylinder taking into account relaxation of diffusion fluxes // *Russian Mathematics.* – 2022. – Vol. 66, No 1. – pp. 19–30.
14. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Моделирование одномерных механодиффузионных процессов в ортотропном сплошном цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки.* – 2022. – Т. 26, № 1. – С. 62–78.
15. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная механодиффузия сплошного ортотропного цилиндра, находящегося под действием равномерного давления, с учетом релаксации диффузионных потоков // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2021. – Т. 27, № 4. – С. 570–586.
16. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Моделирование нестационарных связанных механодиффузионных процессов в изотропном сплош-

- ном цилиндре // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т. 82, № 2. – С. 156–167.
17. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная электромагнитоупругость пьезоэлектриков с учетом диффузии // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2020. – Т. 20, № 2. – С. 193–204.
18. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Нестационарная механодиффузия в ортотропных многокомпонентных полых цилиндрических телах с учетом релаксации диффузионных потоков // Материалы XXVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Т. 2. – М.: ООО «ТРП Москва», 2022. – С. 171–176.
19. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Нестационарная механодиффузия в ортотропных многокомпонентных телах цилиндрической формы под действием объемных возмущений // Материалы XXVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Т. 2. – М.: ООО «ТРП Москва», 2021. – С. 127–132.
20. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Применение метода эквивалентных граничных условий к решению одномерных задач механодиффузии для многокомпонентных цилиндрических тел, находящихся под действием поверхностных нагрузок // Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Аэрокосмические технологии. – Москва.: М., 2021. – С. 187–189.
21. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Модель нестационарной пьезомеханодиффузии с учетом релаксации диффузионных процессов // Международная молодежная научная конференция «XLVI Гагаринские чтения». Сборник трудов секции «Механика и моделирование материалов и технологий». – М.: ИПМех РАН, 2020. – С. 49–51.

22. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Модель одномерной нестационарной задачи упругой диффузии для ортотропного сплошного цилиндра с учетом релаксации диффузионных потоков // Международная молодежная научная конференция «XLVI Гагаринские чтения». Сборник трудов секции «Механика и моделирование материалов и технологий». – М.: ИПМех РАН, 2020. – С. 51–53.
23. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Нестационарная механодиффузия для многокомпонентного цилиндра под действием объемных возмущений с учетом релаксации // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы X Международной научно-практической конференции. Часть 1. – Т. 1. – Гомель.: Издательство БелГУТ Гомель, Белорусский государственный университет транспорта, 2020. – С. 86–87.
24. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Нестационарные упругодиффузионные волны в ортотропном сплошном цилиндре // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XX Международной конференции. – Т. 1. – Таганрог.: Издательство ЮФУ. Ростов-на-Дону, 2020. – С. 102–106.
25. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Модель нестационарной пьезомеханодиффузии с учетом релаксации диффузионных процессов // Механика и моделирование материалов и технологий. Сборник трудов Секции Международной молодежной научной конференции «XLV Гагаринские чтения». – М.: ИПМех РАН Москва, 2019. – С. 87–87.
26. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Нестационарные полярно-симметричные механодиффузионные процессы в изотропном сплошном цилиндре // Международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики»: Материалы конференции / под ред. М.Ю. Орлова. – Томск: ЗАО Издательство «Красное знамя», 2019. – С. 133–136.
27. *Зверев Н.А., Земсков А.В.* Постановка нестационарной задачи упругой диф-

- фузии для изотропного сплошного цилиндра // Проблемы безопасности на транспорте: материалы IX Международной научно-практической конференции. – Т. 2. – Гомель: БелГУТ, 2019. – С. 212–214.
28. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Полярно-симметричная стационарная задача механодиффузии для изотропного полого цилиндра // Материалы XXIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Т. 2. – М.: Москва, 2017. – С. 128–131.
29. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Сплошной ортотропный цилиндр под действием поверхностных полярно-симметричных стационарных возмущений // Материалы XXIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Т. 2. – М.: Москва, 2017. – С. 132–136.
30. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Нестационарный изгиб ортотропной консольно-закрепленной балки Тимошенко с учетом релаксации диффузионных потоков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2022. – Т. 62, № 11. – С. 1895–1911.
31. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 288 с.
32. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Файкин Г.М.* Нестационарный изгиб консольно-закрепленной балки Бернулли-Эйлера с учетом диффузии // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т. 14, № 1. – С. 40–50.
33. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Решение двумерных задач механодиффузии с помощью интегральных уравнений Вольтерры I-го рода // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2016. – № 1. – С. 49–56.
34. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двумерная нестационарная задача упру-

- гой диффузии для изотропной однокомпонентной полуплоскости // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, Книга 4. – С. 103–111.
35. *Индейцев Д.А., Мочалова Ю.А.* Диффузия примеси в материале под действием вибрационных нагрузок // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18, № 3. – С. 292–305.
36. *Индейцев Д.А., Стерлин М.Д.* Динамика перестройки твердого тела при физико-химических воздействиях // Доклады РАН. – 2011. – Т. 436, № 3. – С. 328–331.
37. Информационная система «Архивы РАН» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://isaran.ru/?q=ru/fund&ida=1&guid=A83B24B6-6A50-6BF3-64A5-02B91104E531> (Дата обращения: 21.02.2023)
38. *Исраилов М.Ш.* Сведение краевых задач динамической теории упругости к скалярным задачам для волновых потенциалов в криволинейных координатах // Известия РАН: Механика твердого тела. – 2011. – № 1. – С. 131–136.
39. *Исраилов М.Ш.* Разделение граничных условий для потенциалов на криволинейной границе в динамических задачах теории упругости // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 435, № 6. – С. 752–754.
40. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 4-е издание. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
41. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. Издание 4, переработанное и существенно дополненное. – М.: URSS, 2018. – 1080 с.
42. *Князева А.Г., Псахье С.Г.* Моделирование неравновесной диффузии, сопровождаемой внутренними напряжениями // Физическая мезомеханика. – 2005. – Спец. выпуск. – С. 41–44.
43. *Князева А.Г.* Введение в термодинамику необратимых процессов. – Томск:

- Издательство «Иван Федоров», 2014. – 172 с.
44. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 768 с.
  45. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
  46. Мацевитый Ю.М., Вакуленко К.В., Казак И.Б. О залечивании дефектов в металлах при пластической деформации (аналитический обзор) // Проблемы машиностроения. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 66–76.
  47. Минов А.В. Исследование напряженно-деформированного состояния поллого цилиндра, подверженного термодиффузионному воздействию углерода в осесимметричном тепловом поле, переменном по длине // Известия вузов. Машиностроение. – 2008. – № 10. – С. 21–26.
  48. Павлина В.С. О влиянии диффузии на температурные напряжения в окрестности цилиндрической полости // Физико-химическая механика материалов. – 1965. – № 3. – С. 390–394.
  49. Парфенова Е.С., Князева А.Г. Влияние параметров химической реакции на взаимодействие тепловых, диффузионных и механических волн в условиях обработки поверхности потоком частиц // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т. 14, № 1. – С. 77–90.
  50. Подстригач Я.С. Диффузионная теория неупругости металлов // Прикладная механика и техническая физика. – 1965. – № 2. – С. 67–72.
  51. Порошина Н.И., Рябов В.М. О методах обращения преобразования Лапласа // Вестник СПбГУ. Сер. 1. – 2011. – Вып. 3. – С. 55–64.
  52. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Том 1. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 797 с.
  53. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973. – Т. I. – 536 с., – Т. II. – 584 с.

54. *Швец Р.Н., Флячок В.М.* Уравнения механодиффузии анизотропных оболочек с учетом поперечных деформаций // Математические методы и физико-механические поля. – 1984. – № 20. – С. 54–61.
55. *Швец Р.Н., Флячок В.М.* Вариационный подход к решению динамических задач механотермодиффузии анизотропных оболочек // Математическая физика и нелинейная механика. – 1991. – № 16. – С. 39–43.
56. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1964. – 344 с.
57. *Abbas A.I.* The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium // Journal of measurements in engineering. – 2014. – Vol. 2, Is. 4. – pp. 175–184.
58. *Abbas A.I.* Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity // Applied Mathematical Modelling. – 2015. – Vol. 39, No 20. – pp. 6196–6206.
59. *Abbas A.I., Elmaboud Y.A.* Analytical solutions of thermoelastic interactions in a hollow cylinder with one relaxation time // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2017. – Vol. 22, No 2. – pp. 210–223.
60. *Abo-Dahab S.M.* Generalized Thermoelasticity with Diffusion and Voids under Rotation, Gravity and Electromagnetic Field in the Context of Four Theories // Applied Mathematics & Information Sciences. – 2019. – Vol. 13, No. 2. – pp. 317–337.
61. *Aouadi M.* A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // Intern. J. Mathem. and Mathem. Sci. – 2006. – Vol. 2006. – pp. 1–15. DOI: 10.1155/IJMMS/2006/25976.
62. *Aouadi M.* A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44. – pp. 5711–5722.
63. *Aouadi M.* Variable electrical and thermal conductivity in the theory of

- generalized thermoelastic diffusion // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. – 2005. – Vol. 57, No. 2. – pp. 350–366.
64. *Aouadi M.* On thermoelastic diffusion thin plate theory // Appl. Math. Mech. Engl. Ed. – 2015. – Vol. 36, No. 5. – pp. 350–366.
65. *Aouadi M., Copetti M.I.M.* Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2015. – pp. 1–24. Available from: DOI 10.1002/zamm.201400285.
66. *Aouadi M., Miranville A.* Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin-Pipkin's model // Asymptotic Analysis. – 2015. – Vol. 95. – pp. 129–160.
67. *Aouadi M., Miranville A.* Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory // Evolution equations and control theory. – 2015. – Vol. 4, No. 3. – pp. 241–263.
68. *Atwa S.Y., Egypt Z.* Generalized Thermoelastic Diffusion With Effect of Fractional Parameter on Plane Waves Temperature-Dependent Elastic Medium // Journal of Materials and Chemical Engineering. – 2013. – Vol. 1, Is. 2. – pp. 55–74.
69. *Bhattacharya D., Kanoria M.* The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // International Journal of Engineering and Technical Research (IJETR). – 2014. – Vol. 2, Is. 5. – pp. 151–159.
70. *Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M.* Finite Element Method to Study Elasto-Thermodiffusive Response inside a Hollow Cylinder with Three-Phase-Lag Effect // International Journal of Computer Sciences and Engineering. – 2019. – Vol. 7, Is. 1. – pp. 148–156.
71. *Bitsadze L.* About some solutions of the system of equations of the thermoelastic materials with diffusion microtemperatures and microconcentrations // Seminar



- of I. Vekua Institute of Applied Mathematics. REPORTS. – 2019. – Vol. 45.
72. *Burak Ya.J., Hachkevych O.R., Terletskii R.F.* Modelling and optimization in thermomechanics of electroconductive heterogeneous splids / Editor-in-Chief Burak Ya.J. and Kushnir R.M. V.1: Thermomechanics of multicomponent solids of low electrical conductivity. – Lviv: SPOLOM, 2006. – 300 p.
73. *Choudhary S., Deswal S.* Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion // *Meccanica*. – 2010. – Vol. 45. – pp. 401–413.
74. *Cohen D.S., White A.B.* Sharp fronts due to diffusion and viscoelastic relaxation in polymers // *Siam J. Appl. Math.* – 1991. – Vol. 51, No. 2. – pp. 472–483.
75. *Copetti M.I.M., Aouadi M.* A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory // *Applied Numerical Mathematics*. – 2016. – Vol. 109. – pp. 157–183.
76. *Davydov S.A., Zemskov A.V.* Thermoelastic Diffusion Phase-Lag Model for a Layer with Internal Heat and Mass Sources // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2022. – Vol. 183, Part C. – 122213.
77. *Davydov S.A., Zemskov A.V., Igumnov L.A., Tarlakovskiy D.V.* Non-stationary model of mechanical diffusion for half-space with arbitrary boundary conditions // *Materials Physics and Mechanics*. – 2016. – Vol. 28, No. 1/2. – pp. 72–76.
78. *Deswal S., Kalkal K.K.* A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // *International Journal of Thermal Sciences*. – 2011. – Vol. 50, No 5. – pp. 749–759.
79. *Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S.* Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction // *Physica B: Condensed Matter*. – 2016. – Vol. 496. – pp. 57–68.
80. *Dudin D., Keller I.* On description of fast diffusion in a coupled multicomponent system with microstructure within the framework of the thermodynamics of irreversible processes // *Advanced structured materials*. – 2021. – Vol. 141. –

- pp. 81–95.
81. *Elhagary M.A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // *Acta Mech.* – 2011. – Vol. 218. – pp. 205–215.
  82. *Elhagary M.A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite Medium with a Spherical Cavity // *Int. J. Thermophy.* – 2012. – Vol. 33. – pp. 172–183.
  83. *Ezzat M.A., El. Karamany Ahmed S., Fayik M.A.* Fractional order theory in thermoelastic solid with three-phase lag heat transfer // *J. Arch Appl Mech.* – 2012. – Vol. 82. – pp. 557–572. DOI: 10.1007/s00419-011-0572-6.
  84. *Freidin A., Morozov N., Petrenko S, Vilchevskaya E.* Chemical reactions in spherically symmetric problems of mechanochemistry // *Acta Mech.* – 2016. – Vol. 227, No 1. – pp. 43–56.
  85. *Hwang C.C., Huang I.B.* Diffusion-induced stresses in hollow cylinders for transient state // *IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN).* – 2012. – Vol. 2, Is. 8. – pp. 166–182.
  86. *Hwang C.C., Huang I.B.* Diffusion in hollow cylinders with mathematical treatment // *International Journal of Engineering Research and Development.* – 2012. – Vol. 3, Is. 8. – pp. 57–75.
  87. *Kaur L., Lata P.* Rayleigh wave propagation in transversely isotropic magneto-thermoelastic medium with three-phase-lag heat transfer and diffusion // *International Journal of Mechanical and Materials Engineering.* – 2019. – Vol. 14, No. 12. – DOI: 10.22034/JSM.2019.665384.
  88. *Kumar R., Chawla V.* A study of Green's functions for two-dimensional problem in orthotropic magnetothermoelastic media with mass diffusion // *Materials Physics and Mechanics.* – 2012. – Vol. 15. – pp. 78–95.
  89. *Kumar R., Devi S.* Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources // *CMST.* – 2019. – Vol. 25, No. 4. – pp. 167–176. – DOI: 10.12921/cmst.2018.0000034.

90. *Kumar R., Devi S.* Effects of Viscosity on a Thick Circular Plate in Thermoelastic Diffusion Medium // *Journal of Solid Mechanics*. – 2019. – Vol. 11, No. 3. – pp. 581–592. – DOI: 10.22034/JSM.2019.667247.
91. *Kumar R., Kansal T.* Fundamental Solution in the Theory of Thermomicrostretch Elastic Diffusive Solids // *Applied Mathematics*. – International Scholarly Research Network ISRN. – 2011. – Vol. 2011. – pp. 1–15. – Article ID 764632
92. *Lata P.* Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate // *Coupled systems mechanics*. – 2019. – Vol. 8, No 1. – pp. 39–53. – DOI: 10.12989/csm.2019.8.1.039.
93. *Lee S., Wang W.L., Chen J.R.* Diffusion-induced stresses in a hollow cylinder: Constant surface stresses // *Materials Chemistry and Physics*. – 2000. – Vol. 64, No 2. – pp. 123–130.
94. *Nachtrieb N.H., Handler G.S.* A relaxed vacancy model for diffusion in crystalline metals // *Acta Metallurgica*. – 1954. – Vol. 2, No 6. – pp. 797–802.
95. *Nowacki W.* Dynamical Problems of Thermodiffusion in Solids // *Proc. Vib. Prob.* – 1974. – Vol. 15. – pp. 105–128.
96. *Olesiak Z.S., Pyryev Yu.A.* A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder // *International Journal of Engineering Science*. – 1995. – Vol. 33, No 6. – pp. 773–780.
97. *Othman M.I.A., Elmaklizi Y.D.* 2-D Problem of Generalized Magneto-Thermoelastic Diffusion, with Temperature-Dependent Elastic Moduli // *Journal of physics*. – 2013. – Vol. 2, No 3. – pp. 4–11.
98. *Petit J., Nachtrieb N.H.* Self-Diffusion in Liquid Gallium // *Journal of Chemical Physics*. – 1956. – Vol. 24. – P. 1027.
99. *Prussin S.* Generation and Distribution of Dislocations by Solute Diffusion // *J. Appl. Phys.* – 1961. – Vol. 32. – pp. 1876–1881.
100. *Pyryev Yu.A., Mokrik R.I.* The coupled quasistatic problem of mechanical

- thermodiffusion for a cylinder // *Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya.* – 1997. – Vol. 40, No 2. – pp. 117–121.
101. *Salama M.M., Kozae A.M., Elsafty M.A., Abelaziz S.S.* A half-space problem in the theory of fractional order thermoelasticity with diffusion // *International Journal of Scientific and Engineering Research.* – 2015. – Vol. 6, Is. 1. – pp. 358–371.
102. *Sharma N., Kumar R., Ram P.* Plane strain deformation in generalized thermoelastic diffusion // *Int. J. Thermophys.* – 2008. – Vol. 29. – pp. 1503–1522.
103. *Sharma J.N., Sharma I., Chand S.* Elasto-thermodiffusive surface waves in a semiconductor half space underlying with varying temperature // *J. Therm Stresses.* – 2008. – Vol. 31. – pp. 956–975.
104. *Sharma D.K., Thakur D.* Effect of three phase lag model on the free vibration analysis of nonlocal elastic generalized thermo-diffusive sphere // *Materials Today: Proceedings.* – 2021. – Vol. 42, Part 2. – pp. 370–376.
105. *Sharma J.N., Thakur N., Singh S.* Propagation characteristics of elasto-thermodiffusive surface waves in semiconductor material half-space // *Therm Stresses.* – 2007. – Vol. 30. – pp. 357–380.
106. *Sherief H.H., Hamza F.A., Saleh H.* The theory of generalized thermoelastic diffusion // *International Journal of Engineering Science.* – 2004. – Vol. 42. – pp. 591–608.
107. *Shvets R.N.* On the deformability of anisotropic viscoelastic bodies in the presence of thermodiffusion // *Journal of mathematical science.* – 1999. – Vol. 97, No 1. – pp. 3830–3839.
108. *Shvets R.N., Buryak V.V.* On the influence of viscoelastic properties of a material on the stressed state of a cylinder under diffusion saturation // *Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya.* – 1990. – No 31. – pp. 41–44.
109. *Shvets R.N., Dasyuk Ya.I.* The stressed state of a cylinder arising under diffusion saturation // *Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya.* – 1975. – No 1. – pp. 64–69.

110. *Shvets R.N., Yatskiv A.I.* Construction of the solution of the mixed boundary-value problem of mechanothermodiffusion for layered bodies of canonical shape // *Matematichni Metodi ta Fiziko-Mekhanichni Polya.* – 1992. – No 35. – pp. 70–75.
111. *Soares J.S.* Diffusion of a fluid through a spherical elastic solid undergoing large deformations // *International Journal of Engineering Science.* – 2009. – Vol. 47. – pp. 50–63. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2008.07.001.
112. *Sur A., Kanoria M.* Elasto-Thermodiffusive Response in a Two-Dimensional Transversely Isotropic Medium // *Mechanics of Advanced Composite Structures.* – 2019. – Vol. 6. – No 2019. – pp. 95–104. DOI: 10.22075/MACS.2018.13517.1134.
113. *Tarlovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V.* Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media // *Encyclopedia of thermal stress, volume 2.* – Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference. – 2014. – pp. 1064–1071.
114. *Tartibi M., Guccione J.M., Steigmann D.J.* Diffusion and swelling in a bioelastic cylinder // *Mechanics Research Communications.* – 2019. – Vol. 97. – pp. 123–128. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2018.08.014>
115. *Tripathi J.J., Kedar G.D., Deshmukh K.C.* Generalized thermoelastic diffusion in a thick circular plate including heat source // *Alexandria Engineering Journal.* – 2016. – Vol. 55, Is 3. – pp. 2241–2249.
116. *Tripathi J.J., Kedar G.D., Deshmukh K.C.* Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions // *Acta Mech.* – 2015. – Vol. 226. – pp. 3263–3274.
117. *Xia R.H., Tian X.G., Shen Y.P.* The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity // *International Journal of Engineering Science.* – 2009. – Vol. 47. – pp. 669–679.
118. *Yang F.* Effect of diffusion-induced bending on diffusion-induced stress near the

- end faces of an elastic hollow cylinder // *Mechanics Research Communications*. – 2013. – Vol. 51. – pp. 72–77. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechrescom.2013.05.006>
119. *Zenkour A.M.* Thermoelastic diffusion problem for a half-space due to a refined dual-phase-lag Green-Naghdi model // *Journal of Ocean Engineering and Science*. – 2019. – DOI: 10.1016/j.joes.2019.12.001.
120. *Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V., Faykin G.M.* Unsteady bending of the orthotropic cantilever Bernoulli-Euler beam with the relaxation of diffusion fluxes // *ZAMM Z Angew Math Mech*. – 2022. – e202100107, DOI: 10.1002/zamm.202100107.
121. *Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2016. – Vol. 158, No 1. – 012101, DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012101.
122. *Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // *Materials Physics and Mechanics*. – 2015. – Vol. 23, No 1. – pp. 36–41.
123. *Zverev N.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* One-dimensional problem of piezoelectric electromagnetic diffusion for a layer // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – No 1129. – 012040. DOI: 10.1088/1742-6596/1129/1/012040.