

На правах рукописи



**Жуков Виталий Владимирович**

**Исследование внутренних механизмов переноса тепла, массы,  
импульса с учетом релаксационных явлений**

Специальность: 01.04.14 – Теплофизика и теоретическая  
теплотехника

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Самара – 2021

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Самарский государственный технический университет»

**Научный руководитель:** доктор технических наук, доцент  
Кудинов Игорь Васильевич

**Официальные оппоненты:** Карташов Эдуард Михайлович  
доктор физико – математических наук,  
профессор, ФГБОУ ВО «МИРЭА –  
Российский технологический университет»,  
профессор кафедры «Высшая и прикладная  
математика»

Супельняк Максим Игоревич  
кандидат технических наук, ПАО  
«Калужский двигатель», ведущий инженер-  
конструктор КБ расчётов и надёжности

**Ведущая организация:** Акционерное общество «Центральный  
научно– исследовательский институт  
машиностроения»

Защита состоится «14» февраля 2022 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.08, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»  
<https://mai.ru/upload/iblock/cd7/f2azsb4ej3ea94jcyfbgl3rs51onbmkd/Dissertatsiya-ZHukov-V.V..pdf>

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 212.125.08,  
д.т.н., профессор

Зуев Юрий Владимирович



## **Общая характеристика работы**

**Актуальность темы диссертации.** Теплофизика – это наука, в которой теоретическими и экспериментальными методами исследуются свойства веществ в твердом, жидком и газообразном состоянии при протекании процессов тепло- и массообмена в широком диапазоне температур и давлений. Известные математические модели указанных процессов основаны на параболических уравнениях, выведенных на основе уравнений теплового и массового балансов с учетом эмпирических законов Фурье и Фика. При их выводе используются гипотезы о локальном термодинамическом равновесии и сплошности среды, согласно которым пренебрегается молекулярно – атомным строением вещества, то есть считается, что в областях пространственной и временной переменных, сопоставимых с длиной и временем свободного пробега микрочастиц (молекул, атомов, электронов, ионов, фононов), теплообмен происходит мгновенно, так как величинами, характеризующими релаксационные свойства веществ (время релаксации, характерный пространственный масштаб микроструктуры – длина свободного пробега микрочастиц), пренебрегается. В связи с чем, в классических моделях оказывается заложенной бесконечная скорость распространения потенциалов исследуемых полей и, следовательно, они не могут быть использованы для описания процессов переноса при малых и сверхмалых значениях временной и пространственной переменных (включая наноматериалы и нанопленки), а также для всех быстропротекающих процессов, время изменения которых сопоставимо с временем релаксации. Для описания таких процессов необходима разработка новых математических моделей, основанных на учете релаксационных свойств материалов, позволяющих учитывать конечную скорость распространения возмущений исследуемых величин.

### **Степень разработанности темы исследования**

Разработаны математические модели локально-неравновесных процессов тепломассопереноса, колебаний твердых тел и газов, получены их аналитические и численные решения, проведены сравнения с экспериментальными данными, на основе которых выполнена идентификация моделей.

**Объектом исследования** являются локально-неравновесные процессы переноса тепла, массы, импульса с учетом пространственно-временной нелокальности, протекающие в реальных технических устройствах.

**Предметом исследования** являются твердые, жидкие и газообразные среды, для которых создаются математические модели с учетом релаксационных явлений.

**Целью работы** является исследование внутренних механизмов переноса тепла, массы, импульса на основе новых математических моделей,

учитывающих пространственно – временную нелокальность реальных физических процессов.

### **Задачи работы**

1. Моделирование условий инерции и локализации теплоты, характеризующих конечную скорость её распространения, в нелинейных задачах теплопроводности с нелинейными источниками теплоты.

2. Моделирование условий возникновения теплового взрыва (неограниченного возрастания температуры) в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды и зависящими от температуры источниками теплоты.

3. Исследование внутренних механизмов переноса теплоты с учетом нелокальности реальных физических процессов на основе локально – неравновесных моделей, учитывающих молекулярно – атомное строение веществ.

4. Разработка математической модели нестационарной трехмерной теплопроводности с учетом релаксационных явлений и программного обеспечения для исследования высокоскоростных процессов тепломассопереноса и термоупругости в технических объектах сложной геометрической формы.

5. Исследование причин и условий возникновения ударных волн напряжений и перемещений на основе локально – неравновесной модели несвязанной динамической термоупругости.

6. Математическое моделирование колебаний газа с учетом релаксационных явлений применительно к термоакустическим двигателям.

### **Новизна результатов исследований**

1. Получены новые данные о причинах и условиях возникновения автомодельности, инерции и локализации теплоты в нелинейных задачах теплопроводности с нелинейным источником теплоты, позволившие сделать вывод о связи между линейным гиперболическим и нелинейным параболическим дифференциальными операторами.

2. На основе определения дополнительных искомым функций и дополнительных граничных условий разработан приближенный аналитический метод решения нелинейных задач теплопроводности с нелинейным источником теплоты, получен критерий, позволяющий отделить стационарные процессы от процессов неограниченного возрастания температуры (теплового взрыва).

3. На основе локально – неравновесных математических моделей, включающих релаксационные свойства материалов (время релаксации, характерный пространственный масштаб микроструктуры) выполнены исследования внутренних механизмов переноса теплоты.

4. Разработана математическая модель несвязанной задачи динамической термоупругости с учётом пространственно – временной

нелокальности в тепловой и динамической задачах, позволяющая выполнять исследования ударных волн напряжений и перемещений при воздействии на материалы мощных энергетических потоков.

5. Разработана математическая модель колебаний газа с учётом его релаксационных свойств, позволяющая выполнять исследования резонансных и бифуркационно – флаттерных колебаний (биений) при воздействии внешней тепловой и механической нагрузки.

6. Разработана математическая модель продольных колебаний стержня с учетом релаксационных явлений и выполнена ее верификация с использованием результатов экспериментальных исследований.

**Теоретическая значимость результатов исследования.** В диссертации впервые получены аналитические решения ряда краевых задач, описывающих процессы теплопроводности, теплового взрыва, колебаний упругих твёрдых тел и газов с учётом релаксационных явлений. Найденные решения, ввиду учёта релаксационных свойств материалов, являются наиболее приближенными к реальным физическим процессам и позволили получить некоторые новые, неизвестные ранее особенности их протекания.

**Практическая значимость результатов исследования.** Разработана компьютерная программа для решения нестационарных трёхмерных задач локально-неравновесной теплопроводности, которая позволяет определять значения температур и тепловых потоков при быстропротекающих процессах в телах сложной геометрической формы. Разработанные алгоритмы и комплексы программ, реализующие полученные в диссертации аналитические и численные решения краевых задач тепломассопереноса, использованы на предприятии РКЦ «Прогресс» при проектировании, доводке, испытаниях и эксплуатации изделий космической техники.

#### **Методология и методы диссертационного исследования**

В диссертации развивается новое научное направление, связанное с разработкой математических моделей локально – неравновесных процессов переноса тепла, массы, импульса с учетом релаксационных явлений. Вывод моделей основан на учете в эмпирических формулах законов Фурье и Гаука скоростей и ускорений движущих сил (градиентов соответствующих величин) и их следствий (теплового потока и нормальных напряжений). Введение в эти формулы коэффициентов релаксации позволяет учесть длину и время свободного пробега микрочастиц (электронов, ионов, атомов, фононов и др.). Для исследования полученных моделей разрабатываются методы получения их приближенных и точных аналитических решений, а также численные методы. При разработке аналитических методов используется новое направление, основанное на использовании дополнительных искомым функций и дополнительных граничных условий.

**Достоверность результатов исследования** обосновывается адекватностью разработанных моделей реальным процессам, происходящим

в конкретных устройствах, на сопоставлении найденных решений с численными и экспериментальными данными, а также с точными решениями, приведенными в независимых источниках.

#### **Положения, выносимые на защиту**

1. Результаты многовариантных численных исследований нелинейных краевых задач с нелинейными источниками теплоты, позволившие заключить о возникновении автомодельности, инерции и локализации теплоты, обусловленные конечной скоростью её распространения.

2. Результаты исследований внутренних механизмов переноса теплоты с учётом нелокальности реальных физических процессов на основе локально – неравновесных математических моделей, учитывающих релаксационные свойства материалов.

3. Математическая модель нестационарной трёхмерной теплопроводности с учётом пространственно – временной нелокальности и результаты разработки программного комплекса 3D – моделирования высокоскоростных процессов теплопроводности и термоупругости с учётом релаксационных явлений для конструкций сложной геометрической формы.

4. Математическая модель несвязанной задачи динамической термоупругости с учётом пространственно – временной нелокальности в тепловой и динамической задачах, позволяющая выполнять исследования ударных волн напряжений и перемещений при воздействии на материалы мощных энергетических потоков.

5. Результаты разработки математической модели продольных колебаний стержня с учетом релаксационных явлений и ее верификации на основе экспериментальных исследований.

6. Математическая модель колебаний газа с учётом его релаксационных свойств, позволяющая выполнять исследования резонансных и бифуркационно – флаттерных колебаний при воздействии внешней тепловой и механической нагрузки применительно к пневмо– и термоакустическим двигателям.

#### **Вклад автора в проведенное исследование.**

В теоретической части работы: разработка математических моделей локально-неравновесных процессов теплопроводности (в том числе для трехмерного случая), термоупругости, колебаний упругих тел и газов.

В расчётной части: разработка методов математического моделирования процессов теплопроводности, колебаний упругих тел и газов, написание алгоритмов, поиск решений, оценка достоверности полученных решений.

В экспериментальных исследованиях: постановка и выполнение экспериментальных исследований продольных и поперечных колебаний стержней, обработка и анализ экспериментальных данных, верификация разработанных математических моделей.

**Апробация полученных в диссертации результатов.** Наиболее важные положения диссертации были доложены и обсуждены на Десятой Всероссийской конференции с Международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2016 г.); XXIX Международной конференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ – 29» (Самара, 2016 г.); X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Самара, 2017); Седьмой Российской национальной конференции по теплообмену (Москва, 2018 г.).

**Связь диссертации с государственными программами научных исследований.** Исследования выполнялись в соответствии с Аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы» по тематическому плану НИР № 551/02, при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № FSSS-2020-0019), по грантам РНФ (проект № 18 – 79 – 00171) и РФФИ (проект № 20-38-70021).

**Внедрение результатов работы.** Результаты диссертации были использованы при проведении хозяйственных работ с Волжской территориальной генерирующей компанией, а также в РКЦ «Прогресс». Экономический эффект, подтвержденный актами о внедрении, приведёнными в приложениях диссертации, составляет 1,2 млн. руб.

**Публикации по теме диссертации.** По теме диссертации опубликовано 16 работ, из них 15 работ являются публикациями в рецензируемых научных изданиях и публикациями, приравненными к ним.

#### **Краткое содержание работы**

**В первой главе** дан обзор и выполнен анализ известных публикаций по теме диссертации. Показано, что существуют различные модели локально – неравновесных процессов. Однако, несмотря на наличие большого числа моделей, в настоящее время отсутствует единая непротиворечивая теория локально – неравновесных процессов. Известные результаты различных теорий не всегда между собой согласуются. Показано, что наряду с совершенствованием известных моделей, необходима разработка новых теорий локально – неравновесных процессов.

**Во второй главе** диссертации представлены результаты численных исследований нелинейной задачи теплопроводности с нелинейным источником теплоты. Математическая постановка задачи для бесконечной пластины с симметричными граничными условиями первого рода при экспоненциальном изменении коэффициента теплопроводности и внутреннего источника теплоты от температуры

$$\lambda(t) = \lambda_0 \exp(\beta(t - t_0)); \quad \omega(t) = \omega_0 \exp(\gamma(t - t_0)) \quad (1)$$

имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( e^{\beta \Delta t \Theta(\xi, Fo)} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right) + Po e^{\gamma \Delta t \Theta(\xi, Fo)}, \quad (Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad (2)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (3) \quad \Theta(0, Fo) = 1; \quad (4) \quad \partial\Theta(1, Fo) / \partial\xi = 0, \quad (5)$$

где  $\Theta = \frac{t - t_0}{t_{CT} - t_0}$ ;  $Fo = \frac{a_0 \tau}{\delta^2}$ ;  $\xi = \frac{x}{\delta}$ ;  $Ro = \frac{\omega_0 \delta^2}{\lambda_0 \Delta t}$ ;  $\lambda_0 = c\rho a_0$ ;  $\Delta t = t_{CT} - t_0$ ;

$\Theta, \xi, Fo$  – соответственно безразмерные температура, координата, время (число Фурье);  $Ro$  – число Померанцева;  $\lambda_0, \omega_0$  – коэффициент теплопроводности и мощность источника теплоты при температуре  $t = t_0$ ;  $\beta, \gamma$  – коэффициенты;  $t$  – температура;  $x$  – координата;  $\tau$  – время;  $\delta$  – толщина пластины;  $t_0$  – начальная температура;  $t_{CT}$  – температура стенки.

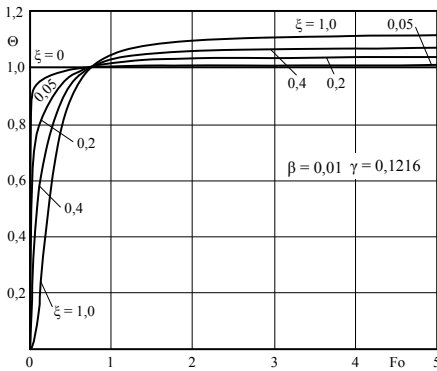


Рис. 1. Распределение температуры. Стационарное состояние при  $Fo \geq 5$  (тепловой взрыв не наблюдается)

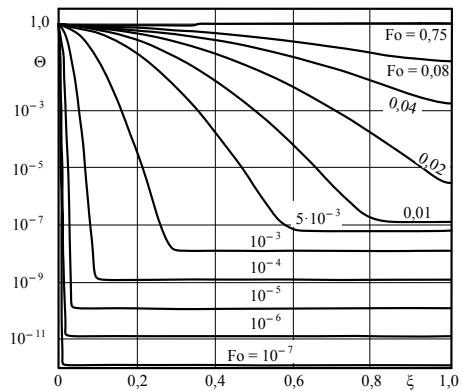


Рис. 2. Распределение температуры ( $\beta = 0,01; \gamma = 0,1216$ )

Анализ результатов численных исследований задачи (1) – (5) позволил обнаружить явления автомодельности, инерции и локализации теплоты (см. рис. 1, 2), а также неограниченного увеличения температуры (тепловое взрыва), связанные с внутренними механизмами теплопереноса. И, в частности, при автомодельном изменении температуры в определенном диапазоне времени наблюдается самоподобие температурных кривых. При инерции и локализации теплоты в некотором изменяющемся во времени диапазоне пространственной переменной температура не изменяется. Этот факт свидетельствует о конечной скорости её распространения, несмотря на то, что решается параболическое уравнение теплопроводности. В результате взаимного влияния граничного условия и источника теплоты могут наблюдаться два варианта: стационарное состояние; неограниченное увеличение температуры.



**В третьей главе** диссертации приводятся исследования точного аналитического решения уравнения теплопроводности, полученного с учетом пространственно – временной нелокальности. Вывод этого уравнения основан на учете скорости изменения теплового потока от времени и потока теплового потока  $\partial q/\partial x$  – по координате  $x$ . Формула закона Фурье для теплового потока в данном случае имеет вид

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} + l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right), \quad (6)$$

где  $\tau_1$  – время релаксации,  $c$ ;  $l$  – длина свободного пробега микрочастиц,  $m$ .

Подставляя (6) в уравнение теплового баланса

$$c\rho \partial T/\partial t = -\partial q/\partial x, \quad (7)$$

находим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + l^2 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}. \quad (8)$$

Уравнение (8) описывает изменение температуры с учетом пространственно – временной нелокальности ввиду учета длины  $l$  и времени  $\tau_1$  свободного пробега микрочастиц.

Уравнение, аналогичное уравнению (8), можно получить, если в эмпирической формуле закона Фурье учесть скорости изменения теплового потока и градиента температуры, то есть

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_2 \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (9)$$

где  $\tau_2$  – время релаксации градиента температуры.

Подставляя (9) в уравнение теплового баланса (7), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_2 a \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}. \quad (10)$$

Так как  $a = v^2 \tau_2$  (где  $v = \sqrt{a\tau_2}$  – скорость тепловой волны), то  $a\tau_2 = v^2 \tau_2^2 = l^2$ , следовательно, уравнения (8), (10) идентичны.

В случае, когда в формуле закона Фурье учитываются скорости изменения теплового потока и градиента температуры, а также ускорение теплового потока, она принимает вид

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_2 \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} - \tau_1^2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}.$$

Подставляя последнее соотношение в уравнение теплового баланса (7), находим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_2 a \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}. \quad (11)$$

Если ввести безразмерные переменные и параметры вида

$$\Theta = \frac{T - T_{CT}}{T_0 - T_{CT}}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad Fo = \frac{at}{\delta^2}; \quad F_1 = \frac{a\tau_1}{\delta^2}; \quad F_2 = \frac{a\tau_2}{\delta^2}; \quad F_3 = \frac{l^2}{\delta^2}; \quad F_2 = F_3, \quad (12)$$

то уравнения (10), (11) примут вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + F_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + F_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + F_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} + F_1^2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial Fo^3} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + F_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo}. \quad (14)$$

Найдем решение уравнения (13) для бесконечной пластины при симметричны граничных условиях первого рода. Краевые условия в этом случае будут

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad \frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo} = 0; \quad \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0; \quad \Theta(1, Fo) = 0. \quad (15)$$

Точное аналитическое решение задачи (13), (15) имеет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} \exp(z_k Fo) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo)] \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right), \quad (16)$$

где  $z_{ik} = [-(1 + F_2 v_k) \pm \sqrt{(1 + F_2 v_k)^2 - 4F_1 v_k}] / (2F_1)$ ,  $(i = 1, 2; \quad r = 2k - 1)$ ;

$$C_{1k} = -C_{2k} z_{2k} / z_{1k}; \quad C_{2k} = (-1)^{k+1} 4 / [r\pi(1 - z_{2k} / z_{1k})].$$

Из анализа результатов расчетов по формуле (16) следует, что в зависимости от толщины пластины  $\delta$  существует два режима теплообмена – диффузионный и баллистический. Диффузионный режим наблюдается для толщин пластины, значительно превышающих длину свободного пробега микрочастиц. Решение (16) в этом случае полностью совпадает с классическим точным аналитическим решением параболического уравнения теплопроводности (то есть при  $F_1 = F_2 = 0$  в уравнении (13)) во всем диапазоне времени нестационарного процесса, за исключением его малых и сверхмалых значений. Для указанных значений времени граничное условие первого рода (тепловой удар) не может быть принято мгновенно – процесс его установления занимает некоторый диапазон начального временного участка.

С уменьшением толщины пластины (что при прочих равных условиях приводит к увеличению  $F_1$  и  $F_2$  (см. обозначения (12)) до величин, соизмеримых с длиной свободного пробега микрочастиц, диффузионный процесс теплообмена сменяется на баллистический. В этом случае теплообмен протекает при практическом отсутствии градиента температуры по пространственной переменной.

Решение уравнения (14) при краевых условиях (15) (к которым добавляется еще одно начальное условие  $\partial^2 \Theta(\xi, 0) / \partial Fo^2 = 0$ ) имеет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_{1k} e^{z_{1k} Fo} + C_{2k} e^{z_{2k} Fo} + C_{3k} e^{z_{3k} Fo}) \cos(r \frac{\pi}{2} \xi), \quad (r = 2k - 1), \quad (17)$$

где  $z_{ik}$ , ( $i=1, 2, 3$ ) – корни характеристического уравнения;  $c_{ik}$ , ( $i=1, 2, 3$ ) – константы интегрирования, определяемые из начальных условий краевой задачи.

Результаты расчетов по формуле (17) для  $\delta = 10^{-6}$  м приведены на рис. 3. Из их анализа следует, что, как и в предыдущем случае, установление граничного условия первого рода происходит в течение некоторого диапазона начального времени. Однако существенным отличием является тот факт, что температурные кривые, вплоть до момента времени, когда тепловая волна достигает центра пластины, пересекают линию начальной температуры  $\Theta(\xi, 0) = 1,0$  под некоторым углом  $\alpha$ . Этот факт свидетельствует о конечной скорости распространения теплоты. С уменьшением толщины пластины вплоть до величин, сопоставимых с длиной и временем свободного пробега микрочастиц, происходит баллистический перенос теплоты.

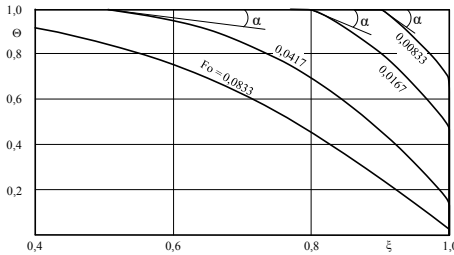


Рис. 3. Распределение температуры.

$$a = 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}; \quad \delta = 10^{-6} \text{ м};$$

$$\tau_1 = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ с}; \quad \tau_2 = 2,25 \cdot 10^{-8} \text{ с};$$

$$F_1 = 0,025; \quad F_2 = 0,0225; \quad F_3 = 0,00062$$

**В третьей главе** диссертации приводятся также результаты разработки математической модели трехмерной теплопроводности с учетом релаксационных явлений, позволяющей выполнять исследования высокоскоростных процессов теплопроводности и термоупругости в телах сложной конфигурации, в том числе и в наноматериалах. При выводе определяющего уравнения по направлениям координатных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  используются следующие формулы для тепловых потоков

$$q_x = -\tau_1 \frac{\partial q_x}{\partial t} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t}; \quad q_y = -\tau_1 \frac{\partial q_y}{\partial t} - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial t}; \quad (18)$$

$$q_z = -\tau_1 \frac{\partial q_z}{\partial t} - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial t}, \quad (19)$$

где  $\tau_1, \tau_2$  – времена релаксации.

Подставляя (18), (19) в уравнение теплового баланса

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z}, \quad (20)$$

получаем следующее уравнение локально – неравновесного теплообмена, представленное в безразмерном виде

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + Fo_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2} + Fo_2 \left( \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo} + \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \eta^2 \partial Fo} + \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \rho^2 \partial Fo} \right), \quad (21)$$

где  $Fo_1 = a\tau_1 / \delta^2$ ,  $Fo_2 = a\tau_2 / \delta^2$  – безразмерные времена релаксации.

Краевые условия к уравнению (21) для куба при симметричных граничных условиях первого рода имеют вид

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \eta, \rho, 0) = 1; \quad \Theta(0, \eta, \rho, Fo) = 0; \quad \Theta(\xi, 0, \rho, Fo) = 0; \quad \Theta(\xi, \eta, 0, Fo) = 0; \\ \Theta(1, \eta, \rho, Fo) = 0; \quad \Theta(\xi, 1, \rho, Fo) = 0; \quad \Theta(\xi, \eta, 1, Fo) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Отличительной особенностью разработанного для решения задачи (21), (22) программного комплекса является возможность моделирования высокоскоростных теплообменных процессов для трехмерных тел любой геометрической формы, в том числе и для наноматериалов. На основе разработанного метода математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса тепла разработан APDL – алгоритм, позволивший впервые исследовать температурные поля в телах сложной (произвольной) геометрической формы с учетом релаксационных явлений. Разработанный программный продукт позволяет использовать следующие средства автоматизации работы с расчётной моделью ANSYS: построение (импорт) геометрической модели, генерация расчётной сетки, наложение граничных и начальных условий, формирование матриц теплоемкости и теплопроводности, решение системы линейных уравнений, а также трёхмерное цветографическое отображение результатов расчёта (рис. 4).

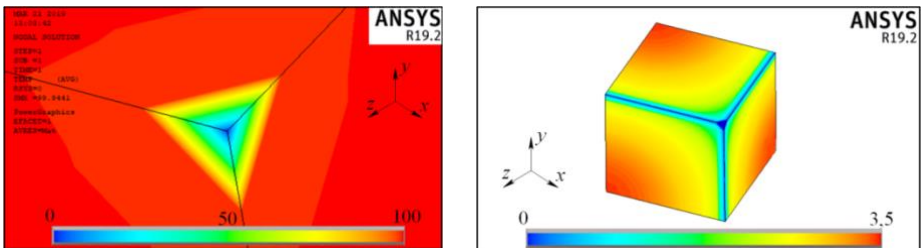


Рис. 4. Скрининг результатов расчета программного комплекса, созданного на базе Ansys

Полученные с помощью данного программного продукта температурные поля могут быть использованы в стандартных модулях Ansys, таких как Static Structural и Dynamic Structural для наиболее достоверного определения возникающих в результате высокоинтенсивного температурного воздействия

квазистатических и динамических температурных напряжений в твердых телах сложной геометрической формы.

**В четвертой главе** диссертации приведены результаты исследований динамической задачи термоупругости для бесконечной пластины при тепловом ударе на граничных поверхностях.

Для учета релаксационных свойств материалов формула закона Гука представляется в виде

$$\sigma = E \frac{\partial U}{\partial x} + E\tau_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \tau_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (23)$$

где  $\sigma$  – напряжение;  $E$  – модуль упругости;  $U$  – перемещение;  $x$  – координата;  $t$  – время;  $\tau_1, \tau_2$  – времена релаксации напряжения и градиента перемещения.

Уравнение равновесия с учетом сил сопротивления среды имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \beta \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (24)$$

где  $\rho$  – плотность;  $\beta$  – коэффициент сопротивления.

Подставляя (23) в (24), с учетом соотношения между напряжениями и деформациями получаем следующее уравнение относительно перемещения, записанное в безразмерном виде

$$\frac{\partial^2 N(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + \eta \frac{\partial^3 N(\xi, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo} + \mu \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = r \frac{\partial N(\xi, Fo)}{\partial Fo} + l \frac{\partial^2 N(\xi, Fo)}{\partial Fo^2}, \quad (25)$$

где  $N = U / \delta$ ;  $\xi = x / \delta$ ;  $\Theta = (T - T_{cr}) / (T_0 - T_{cr})$ ;  $Fo = ct / \delta$ ;  $\eta = F_2 - \eta_1 F_1$ ;  $\mu = \mu_1 F_1$ ;  $r = \rho \beta c \delta / E$ ;  $l = \rho c^2 / E$ ;  $F_1 = c \tau_1 / \delta$ ;  $F_2 = c \tau_2 / \delta$ ;  $\eta_1 = A / E$ ;  $\mu_1 = \beta (T_0 - T_{cr}) / E$ .

В качестве температурной функции  $\Theta(\xi, Fo)$  принималось соотношение (16), полученное из решения краевой задачи (13), (15).

Краевые условия к уравнению (25) для бесконечной пластины имеют вид  $N(\xi, 0) = 0$ ;  $\partial N(\xi, 0) / \partial Fo = 0$ ;  $\partial N(l, Fo) / \partial \xi = 0$ ;  $N(0, Fo) = 0$ . (26)

Используя метод Фурье, в диссертации получено следующее точное аналитическое решение задачи (25), (26)

$$N(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_{1k} e^{-z_{1k} Fo} + C_{2k} e^{-z_{2k} Fo} + A_k(z_k)) \sin \left( (2k-1) \frac{\pi}{2} \xi \right), \quad (27)$$

где  $C_{1k}$ ,  $C_{2k}$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий;  $z_{1k}$ ,  $z_{2k}$  – корни характеристического уравнения.

Анализ результатов расчетов перемещений по формуле (27) позволяет заключить, что при тепловом ударе на внешних поверхностях возникают высокочастотные гармонические колебания перемещений, при которых

пластина периодически сжимается и расширяется относительно неподвижного центра симметрии. Показано, что частота колебаний зависит от скорости звука в теле (скорости перемещения упругой волны) и от характерного размера. Например, для стальной пластины, толщиной 0,5 м, она составляет 6000 Гц.

**В пятой главе** диссертации представлены результаты разработки математической модели продольных колебаний закрепленного на одном из торцов стержня с учетом релаксационных свойств материалов. Вывод уравнения модели основан на модифицированной формуле закона Гука (23). Подставляя (23) в уравнения движения (равновесия) с учетом сопротивления среды, получаем следующее уравнение, представленное в безразмерном виде

$$F_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial Fo^3} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} + F_3 \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + F_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo}, \quad (28)$$

где  $\Theta = \frac{U}{U_0}$ ;  $\xi = \frac{x}{\delta}$ ;  $Fo = \frac{et}{\delta}$ ;  $F_1 = \frac{e\tau_1}{\delta}$ ;  $F_2 = \frac{e\tau_2}{\delta}$ ;  $F_3 = \frac{\delta\mu}{e}$ ;  $e$  – скорость волны;  $U_0 = b\delta$ ;  $b$  – безразмерный коэффициент, учитывающий начальное перемещение стержня;  $\delta$  – длина стержня;  $\Theta, \xi, Fo$  – соответственно, безразмерные перемещение, координата, время;  $F_1, F_2$  – безразмерные коэффициенты релаксации;  $F_3$  – безразмерный коэффициент сопротивления среды.

Полученное в диссертации точное аналитическое решение для закрепленного на одном из торцов стержня имеет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \exp(\gamma_k Fo) [B_{1k} \cos(\beta_k Fo) - B_{2k} \sin(\beta_k Fo)] + C_{3k} \exp(z_{3k} Fo) \right\} \cos\left(\frac{r\pi}{2} \xi\right), \quad (29)$$

где  $\gamma_k, \beta_k, z_{3k}$  – корни характеристического уравнения;  $B_{1k}, B_{2k}, C_{3k}$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

На основе экспериментальных данных, полученных в РКЦ «Прогресс» (г. Самара), выполнена верификация математической модели путем определения коэффициентов релаксации и сопротивления, исходя из совпадения решения (29) и результатов эксперимента, то есть путем решения обратной краевой задачи. Результаты экспериментальных исследований приведены на рис. 5. Из их анализа следует, что наблюдаются два временных участка, с существенно отличающимися колебательными процессами. Так, на первом из них ( $0 \leq \tau \leq 0,03$  с) концевое сечение стержня участвует в двух колебательных процессах – с малой амплитудой и большой частотой (временные участки  $a$ ) и одновременно – с большой амплитудой и малой частотой (временной участок  $b$ ). На втором временном участке ( $0,03 \leq \tau < \infty$ )

происходит стабилизация колебаний с монотонно уменьшающейся амплитудой при  $\tau \rightarrow \infty$ .

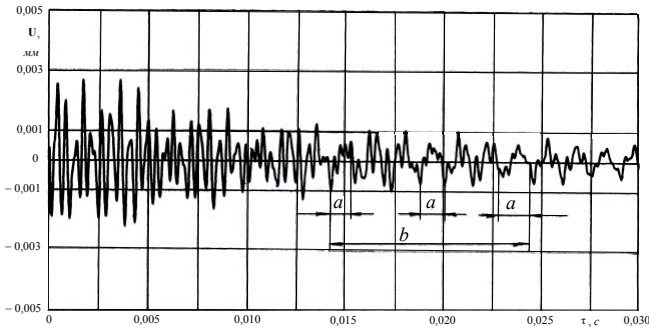


Рис. 5. Перемещение свободного торца стержня во времени

Уравнение, аналогичное уравнению (28), получено и для упругих колебаний газа при воздействии внешней нагрузки с учетом релаксационных явлений. Сравнивая уравнения для стержня и газа с уравнением (14), можно заключить, что они совпадают с точностью до постоянных величин. Следовательно, обнаруживается аналогия между тепловыми процессами, описываемыми гиперболическими уравнениями и колебательными процессами, в твердых телах, жидкостях и газах. Учитывая сложности верификации тепловых моделей, связанные с трудностями выполнения экспериментов для сверхмалых значений времени, для их верификации можно использовать результаты экспериментальных исследований колебательных процессов, где проблемы, связанные с определением поведения искомой функции для указанных времен не возникают.

**В шестой главе** диссертации приведены результаты разработки математической модели колебаний газа с учётом локальной неравновесности реальных процессов, а также результаты исследований условий возникновения автоколебательных процессов в термоакустике. Предложенная модель выведена на основе учёта релаксационных слагаемых во втором законе Ньютона и законе Гука. Представленная модель позволяет обнаруживать новые физические эффекты и моделировать процессы колебаний газа в нестационарном режиме, что особенно важно для дальнейшего развития и модернизации термоакустических двигателей, а также для фундаментального изучения большого количества процессов колебаний газа в нестационарных (переходных) режимах работы.

Математическая постановка задачи, описывающей самопроизвольное возникновение автоколебаний в резонаторе Гельмгольца (аналог термоакустического двигателя), имеет вид

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\rho_0 l S} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{P_0 S}{V \rho_0 l} x = \frac{k-1}{V \rho_0 l} Q; \quad (30) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = -K \left( \frac{Q}{m c_v} + \left( \alpha - \frac{P_0 S}{m c_v} \right) \right), \quad (31)$$

где  $x$  – перемещение;  $t$  – время;  $\rho_0$  – плотность газа;  $P_0$  – атмосферное давление;  $k$  – показатель адиабаты;  $S$  – площадь сечения трубки;  $V$  – объём резонатора;  $l$  – длина трубки;  $Q$  – количество теплоты;  $m$  – масса газа;  $c_v$  – теплоёмкость;  $\alpha$  – коэффициент;  $K$  – коэффициент теплоотдачи.

В результате аналитического решения системы дифференциальных уравнений (30), (31) получен критерий, определяющий условия возникновения автоколебаний и зависящий от перепада температур нагревателя и окружающей среды, от массы газа, длины и площади сечения трубки резонатора, а также от гидравлического сопротивления газа о стенки канала

$$\alpha_{кр} = \frac{p_0 S}{m c_v} + \frac{\gamma e}{K-1} \left( \omega_0^2 + \frac{\gamma K}{m^2 c_v} + \left( \frac{\gamma}{m} \right)^2 \right). \quad (32)$$

Показано, что автоколебания возникают в случае, если величина критерия больше или равна его критическому значению. В диссертации даны рекомендации по регулированию параметров термоакустического двигателя, позволяющие обеспечить его эффективную и стабильную работу.

### Заключение

1. Получены новые данные о причинах и условиях возникновения автомодельности, инерции и локализации теплоты в нелинейных задачах теплопроводности с нелинейными источниками теплоты, позволившие заключить об аналогии между линейным гиперболическим и нелинейным параболическим дифференциальными операторами вследствие взаимной зависимости между временем релаксации и зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности.

2. Разработаны локально – неравновесные математические модели, позволяющие выполнять исследования внутренних механизмов переноса теплоты с учетом молекулярно – атомного строения вещества, посредством введения времени релаксации и длины свободного пробега микрочастиц (носителей энергии).

3. Разработана математическая модель трехмерной теплопроводности с учетом пространственно – временной нелокальности, позволяющая выполнять исследования высокоскоростных процессов теплопереноса и термоупругости в телах сложной конфигурации, в том числе и наноматериалах. Совместно с ЗАО «Cadferm CIS» на основе последней версии Ansys 2020 R1 разработана компьютерная программа для решения нестационарных трёхмерных задач локально-неравновесной теплопроводности, которая позволяет определять значения температур и



тепловых потоков при быстропротекающих процессах в телах сложной геометрической формы. Полученные с помощью данного программного продукта температурные поля могут быть использованы в стандартных модулях Ansys, таких как Static Structural и Dynamic Structural, для наиболее достоверного определения возникающих в результате высокоинтенсивного температурного воздействия квазистатических и динамических температурных напряжений в твердых телах сложной геометрической формы.

4. Разработана математическая модель и получено точное аналитическое решение несвязанной задачи динамической термоупругости с учетом релаксационных явлений в тепловой и динамической задачах, позволяющая выполнять исследования ударных волн напряжений и перемещений при воздействии на материалы мощных потоков энергии (лазерных, электронных, ионных и др.)

5. Показана полная аналогия математических моделей переноса тепла, массы, импульса, полученных с учетом пространственно – временной нелокальности, что позволяет унифицировать верификацию моделей теплопроводности, используя экспериментальные данные по колебательным процессам твердых тел, для которых разработаны высокоточные технологии, позволяющие выполнять исследования для сверхмалых значений времени. Выполненные теоретические и экспериментальные исследования продольных и поперечных колебаний для твердого тела (закрепленного на одном из торцов стержня) подтверждают применимость и актуальность «релаксационных» методик. Учет коэффициентов релаксации позволяет значительно уменьшить расхождение теоретических и экспериментальных данных – с 42 % до 15 %. Результаты решения задачи о поперечных колебаниях стержня позволили обнаружить наиболее опасные сечения, в которых создаются максимальные высокочастотные колебания, оказывающие существенное влияние на надежность и долговечность конструкции.

6. Разработана математическая модель, описывающая возникновение автоколебаний газа под действием постоянного (непериодического) источника теплоты. Исследования точного аналитического решения полученной модели позволили определить условия возникновения автоколебаний. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и разработке термоакустических двигателей.

**Благодарности.** *Результаты работы получены с использованием оборудования центра коллективного пользования «Учебно-научный производственный центр «Вибрационная прочность и надежность аэрокосмических изделий» при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № FSSS-2020-0019). Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-38-70021.*

## Публикации по теме диссертации

### Публикации в рецензируемых научных изданиях и публикации, приравненные к ним

1. Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., Dovgallo A.I., Zhukov V.V. Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 200-201. P. 231 – 241. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.05.018.

2. Zhukov V.V. Study of analytical solution of the thermal conductivity equation considering relaxation phenomena under the third class boundary conditions // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1889. Art. 022027. doi: 10.1088/1742-6596/1889/2/022027.

3. Zhukov V.V., Kudinov I.V., Kutsev N.M., Mikheeva G.V., Klebleev R.M. Determination of quasi-static and residual stresses in the course of the thermoplastic hardening in a boundary layer of the material // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 709. Is. 3. Art. 033078. doi: 10.1088/1757-899X/709/3/033078.

4. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., Zhukov V.V. Mathematical model of rod oscillations with account of material relaxation behaviour // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 327. Is. 4. Art. 042059. doi: 10.1088/1757-899X/327/4/042059.

5. Eremin A.V., Kudinov V.A., Kudinov I.V., Zhukov V.V., Trubitsyn K.V. Mathematical model of fuel heat ignition considering space-time nonlocality // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 552. Is. 1. Art. 012003. doi: 10.1088/1757-899X/552/1/012003.

6. Kudinov V.A., Eremin A.V., Zhukov V.V. Mathematical Models of Heat Ignition And Explosion Considering Local Non-Equilibrium of Processes // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 891. Art. 012100. doi: 10.1088/1742-6596/891/1/012100.

7. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В. Критические условия теплового взрыва с учетом пространственно-временной нелокальности // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2018. №2. С. 100-104.

8. Еремин А.В., Жуков В.В., Кудинов И.В., Кудинов В.А. Резонансные и бифуркационные колебания стержня с учетом сил сопротивления и релаксационных свойств среды. // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 5. С. 124-132.

9. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В. Исследование сильнонеравновесной модели теплового воспламенения с учетом пространственно-временной нелокальности // Физика горения и взрыва. 2018. № 6. С. 25-29.

10. Еремин А. В., Кудинов И.В., Жуков В.В. Об одном методе решения задач теплообмена при течении жидкостей в плоских каналах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико-математические науки". 2016. № 1. С. 1-12.

11. Еремин А. В., Кудинов И.В., Абишева Л.С., Жуков В.В. Исследование теплообмена при течении жидкости в цилиндрическом канале // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Технические науки". 2015. №4. С. 85-92.

12. Кудинов В.А., Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Жуков В.В., Тарабрина Т.Б. Аналитическое решение нестационарной задачи теплообмена при ламинарном течении жидкости в цилиндрическом канале // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Технические науки" 2017. №4. С. 121-138.

13. Свид. 2020611223 Российская Федерация. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. Исследование нестационарных процессов переноса тепла в телах сложной геометрической формы с учетом двухфазного запаздывания / А.В. Еремин, Е.А. Кишов, В.В. Жуков, В.А. Кудинов, И.В. Кудинов, Е.В. Стефанюк; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО СамГТУ (RU). – № 2020610140; заявл. 10.01.2020; опубл. 27.01.2020, Реестр программ для ЭВМ.

14. Свид. 2018660951 Российская Федерация. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. Решение нелинейных задач нестационарной теплопроводности на основе фронта температурного возмущения / А.В. Еремин, И.В. Кудинов, В.К. Ткачев, В.В. Жуков, Е.В. Котова, Г.К. Максименко, Т.Е. Гаврилова, К.В. Трубицын; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО СамГТУ (RU). – № 2018617906; заявл. 26.07.2018; опубл. 30.08.2018, Реестр программ для ЭВМ.

15. Свид. 2017661494 Российская Федерация. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. Решение нестационарных задач теплопроводности на основе совместного использования методов Л.В. Канторовича и Бубнова-Галеркина / А.В. Еремин, В.В. Жуков, И.В. Кудинов, О.Ю. Курганова, В.К. Ткачев, М.П. Скворцова, С.В. Колесников; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВО СамГТУ (RU). – № 2017615113; заявл. 31.05.2017; опубл. 16.10.2017, Реестр программ для ЭВМ.

### **Другие публикации**

16. Еремин А. В., Кудинов И.В., Абишева Л.С., Жуков В.В. Скворцова М.П. Колебания стержня с учетом релаксационных свойств материалов // Прикладная математика и механика (Ульяновск). 2017. №11. С. 128-135.