

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Николичев Илья Андреевич

ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВОГО МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕЛЕТА
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ
УСТАНОВКОЙ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Специальность 05.07.09

Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель
д.т.н., профессор Константинов М.С.

Москва - 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ.....	20
1.1 Уравнения движения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой	20
1.2 Уравнения оптимального движения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой	29
1.3 Краевые задачи.....	56
1.4 Используемая модель возмущений	60
2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕЛЕТА КА С ЭРДУ ПОСТРОЕННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ	64
2.1 Методы численного дифференцирования	64
2.2 Применение математического аппарата дуальных чисел при решении возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ	77
2.3 Метод продолжения по параметру.....	85
2.4 Совместное использование метода продолжения и дуальных чисел	89
2.5 Прочие методы, применяемые в работе	102
2.5.1 Численное осреднение	102
2.5.2 Методы численного интегрирования	103
2.5.3 Методы решения систем нелинейных уравнений.....	104
3 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕЛЕТА КА С ЭРДУ	105
3.1 Применение аппарата дуальных чисел совместно с методом продолжения (на примере невозмущенных задач)	105
3.2 Применение аппарата дуальных чисел для анализа возмущенного движения	123
3.2.1 Качественный анализ на примере решения осредненной задачи на минимум тяги	124
3.2.2 Неосредненные задачи.....	132
4 ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ВСТРЕЧИ В ПРОБЛЕМЕ УВОДА МУСОРА ИЗ РАЙОНА ГСО	152
4.1 Постановка задачи встречи	152
4.2 Методика решения задачи встречи	163
4.3 Численные примеры и анализ полученных решений задачи оптимизации встречи.....	166
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	181
ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ.....	185

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ	186
ПРИЛОЖЕНИЕ А (МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ)	193
А.1 Алгебра дуальных чисел	193
А.2 Функция дуального переменного	216
А.3 Функция нескольких дуальных переменных	244
А.4 Свойства дуального представление элементарных функций	252
А.5 Элементарные функции дуального переменного	261
А.6 Дуальные числа с векторной дуальной частью	268

ВВЕДЕНИЕ

За последние шесть десятилетий, прошедших с начала старта полноценных теоретических и прикладных исследований возможности применения электроракетной двигательной установки (ЭРДУ) в качестве основного движителя, обеспечивающего заданное маневрирование космического аппарата (КА) при межорбитальных или межпланетных перелетах, актуальность их использования неизменно возрастала. Известно, что электроракетные двигатели (ЭРД) стали использоваться на КА для выполнения различных (в начале несложных) задач маневрирования (в первую очередь - коррекции) в экспериментальном режиме уже с первой половины 60-х годов. И к началу 80-х ЭРД стали повсеместно входить в состав корректирующих установок геостационарных аппаратов. Своеобразным «началом отсчета» практической реализации возможности применения ЭРД для активного межорбитального маневрирования КА, судя по всему, следует считать 1971 г., когда с помощью двух (тогда еще экспериментальных) стационарно-плазменных двигателей СПД-60 были достаточно ощутимо изменены параметры (большая полуось и эксцентриситет) солнечно-синхронной орбиты метеорологического аппарата «Метеор-1» («Космос-122»), что позволило обеспечить требуемое число проходов в сутки над заданными участками земной поверхности, тем самым добившись улучшения качества их наблюдения [13, 35]. Следует отметить, что несмотря на то, что данный маневр аппарата по своей сути являлся корректирующим, его общая продолжительность была довольно велика, и составила около трех недель, на протяжении которых практически непрерывно попеременно работала пара из двух стационарно-плазменных двигателей, обеспечивающих медленную эволюцию орбиты аппарата под действием имеющего трансверсальное (и обратное ему) направление реактивного ускорения. Таким образом, формально, был осуществлен первый межорбитальный перелет КА с ЭРДУ, между двумя близкими околокруговыми орбитами.

В настоящей диссертационной работе исследуются куда как более сложные пространственные маневры КА с ЭРДУ. В подавляющем большинстве случаев, это длительные по времени многовитковые некомпланарные перелеты между начальной круговой или эллиптической орбитой и конечной - геостационарной (ГСО). Интерес к осуществлению подобных транспортных операций возник достаточно давно (примерно в 70-е гг прошлого столетия), когда появилась идея комбинированного выведения КА (непосредственно выступающего в роли полезной нагрузки (ПН)) на ГСО (или, возможно, другие «высокие» орбиты), которая подразумевала использование в качестве первой (-ых) «ступеней» химический разгонный блок, а в качестве второй – мог выступать и сам КА, использующий ЭРД в качестве маршевых двигателей (довыведение). К настоящему времени, в рамках данной,

и, при том, весьма актуальной идеи (довыведения КА) было реализовано уже достаточно большое количество удачных миссий по доставке КА (ПН) на ГСО. К ним можно отнести, например, полноценную реализацию довыведения ряда КА на основе платформ типа 702SP, 702HP разработанных компанией «Boeing»; КА на основе платформ ЯМАЛ-100, а также аппаратов «Экспресс АМ5», «Экспресс АМ6» и др. В качестве успешной реализации «вынужденного» довыведения - как следствия различных ошибок или отказов на участке выведения химического разгонного блока, можно отметить, например, некоторые аппараты на платформах «Экспресс» и «ЯМАЛ», КА Европейского Космического Агентства «ARTEMIS» и др. Естественно, наиболее сложным с точки зрения решения задачи баллистического проектирования траекторий межорбитального перелета КА в рамках рассматриваемой схемы комбинированного выведения, является именно участок работы ЭРДУ (довыведение), на котором аппарат в течении длительного времени должен активно управляться. Получение надлежащего закона управления, обеспечивающего выполнение терминальных условий выведения, и при этом достаточно эффективного с точки зрения ряда критериев качества (так или иначе характеризующих траекторию аппарата), представляет собой весьма непростую задачу баллистического проектирования траекторий КА, решение которой обычно подразумевает необходимость ее рассмотрения в оптимизационной постановке. Хотя к настоящему времени большинство удачных миссий по довыведению КА с ЭРДУ было реализовано с помощью т.н. схемы Спитцера [95, 96], довольно простой, и, при определенных условиях, являющейся достаточно близкой к оптимальной (стоит отметить, что ряд аппаратов, например, на основе платформ Boeing 702SP/HP, использовали схемы, реализующие «строго оптимальное» выведение), дальнейшее развитие идеи довыведения вместе с все нарастающим повсеместным использованием ЭРД в качестве маршевой двигательной установки КА, рано или поздно приведет к потребности в реализации куда более сложных схем межорбитального перелета. Это, в свою очередь, повлечет за собой необходимость рассмотрения все более сложных постановок задач баллистического проектирования траекторий межорбитального перелета, решение которых, ввиду самой специфики механики космического полета с малой тягой, потребует решения нетривиальных задач оптимизации управляемых динамических систем. Поэтому, основной целью настоящей работы является разработка методики решения и исследования задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом действия возмущений (сложная модель движения аппарата), а также проведение качественного анализа полученных решений.

Перед тем как непосредственно перейти к краткому описанию основных положений и важных теоретических аспектов, предлагаемых и рассматриваемых в настоящей диссертационной работе в качестве основной методики решения ряда возмущенных задач

траекторной оптимизации многовиткового межорбитального перелета КА с ЭРДУ, необходимо отметить ряд базовых (и общеизвестных) подходов, применяемых при решении различных задач механики космического полета с малой тягой [8, 13, 34, 36, 53]. На этом требуется заострить внимание, т.к. во многом, основная идея предлагаемой в работе методики решения и исследования возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, непосредственно проистекает из существа методов оптимизации, являющихся базовыми в рамках рассматриваемой дисциплины. Остановимся на этом подробнее.

Известно, что в подавляющем большинстве случаев решение задачи баллистического проектирования траекторий, описывающих движение центра масс КА (вне зависимости от конкретного типа совершаемого им маневра), так или иначе сводится к необходимости рассмотрения различного рода оптимизационных проблем. Это является следствием как ряда общих определяющих аспектов механики космического полета, связанных, например, с физическими особенностями функционирования реактивного движителя (а, следовательно, и порождаемого им траекторного движения) [13, 35], так и значительной сложности отыскания программ управления аппаратом в целом, т.к. полученные в результате решения задачи баллистического проектирования управления должны отвечать многочисленным требованиям и ограничениям, налагаемым на искомое (требуемое) траекторное движение КА. К тому же, всегда возникает вопрос о некоторых качественных оценках, характеризующих полученное (тем или иным путем) решение траекторной задачи. В качестве последних, вполне естественно может рассматриваться некоторое множество чисел, элементы которого с помощью какого-либо заранее заданного «правила» ставятся в соответствие к множеству допустимых (т.е. удовлетворяющих заданным ограничениям) траекторий. Или же, например, каким-то образом может быть оценена сама принципиальная возможность совершения требуемого маневра (т.е. дана некоторая качественная/вероятностная оценка) и т.д. Таким образом, исходя из приведенных выше (и хорошо известных) общих соображений, кажется вполне адекватным рассмотрение задачи баллистического проектирования межпланетных и межорбитальных траекторий КА в качестве некоторой оптимизационной проблемы. Решение которой и позволяет определить оптимальную с точки зрения заданного критерия качества траекторию движения центра масс КА вместе с соответствующим ей управлением. Таким образом, оптимизационный подход к рассмотрению задач баллистического проектирования траекторий КА является *базовым*, причем с самого начала становления механики космического полета в качестве самостоятельной научной дисциплины: так, наряду с элементами небесной механики, элементы теории экстремальных задач [1, 2, 4, 5, 6, 7, 14, 31, 50, 52] составляют ее общее теоретическое ядро. В этом нетрудно убедиться обратившись к многочисленной литературе по рассматриваемой дисциплине, например, [8, 36]. В свою очередь, механика космического

полета с *малой тягой*, является неотъемлемой частью основной дисциплины и, естественно, базируется на тех же общих теоретических подходах и методах [8, 13, 34, 35, 36, 53].

Рассматриваемые в настоящей работе оптимизационные проблемы относятся к т.н. классу задач оптимизации управляемых динамических систем. В общем случае, с точки зрения теории экстремальных задач, все они формализуются как задачи на условный экстремум. В качестве критерия качества, как правило, рассматривается непрерывный и непрерывно дифференцируемый (по совокупности своих аргументов) функционал (интегральный или терминальный), характеризующий, например, затраты топлива на межорбитальный перелет, минимальное потребное время его осуществления и т.д. В качестве основных формальных ограничений различных типов (равенств и неравенств) обычно рассматриваются *физические* ограничения управления КА, формирующие т.н. область допустимых управлений (режимы функционирования ЭРДУ, углы ориентации КА и др.), а также соответствующие ей ограничения фазовых координат, отвечающие заданной дифференциальной связи, описывающей управляемое движение центра масс аппарата, или же (в некоторых случаях) непосредственно определяющие границу фазового пространства динамической системы (чисто фазовые ограничения). Решением рассматриваемой задачи обычно служит пара вектор-функций, описывающая оптимальное с точки зрения заданного критерия качества управление КА с ЭРДУ и соответствующую ему оптимальную траекторию, а также некоторый ряд прочих параметров траектории или самого аппарата. В целом, подобная формализация является стандартной при рассмотрении различного рода оптимизационных проблем для управляемых динамических систем вообще, и повсеместно применяется при решении задач траекторной оптимизации КА с ЭРДУ [22, 25, 26, 28-30, 42-44, 46-49, 53, 54].

Таким образом, для решения различных оптимизационных проблем при баллистическом проектировании траекторий КА с ЭРДУ требуется применять соответствующий описанному ранее формализму адекватный математический аппарат, использующий базовые элементы теории экстремальных задач. Поэтому основные методы, применяемые при решении оптимизационных проблем баллистического проектирования, можно разделить на два основных направления – *непрямые* и *прямые*. Согласно общей теории (в контексте задач оптимизации динамических систем) [1, 27, 31], непрямые методы используют некоторый набор условий оптимальности, который, что важно, требует своей аналитической записи в явном виде, представляемых, обычно, или в классической «вариационной» форме, или же в виде функциональных уравнений. К первой группе можно отнести принцип максимума Понтрягина [1, 2, 6, 16, 23, 28, 37, 52] и его расширения [14, 37, 38] (наряду с наиболее полным обобщением задачи Лагранжа классического вариационного исчисления – т.н. задачей Блисса [5]), а ко вторым – принцип оптимальности Беллмана,

формализованный в виде функционального уравнения в рамках теории динамического программирования [4]. Применение условий оптимальности соответствующих непрямых методов на практике позволяет свести исходную оптимизационную проблему проектирования траекторий КА с ЭРДУ к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, или же к решению краевой задачи, отвечающей дифференциальному уравнению в частных производных.

К основным преимуществам использования непрямых методов при решении задач траекторной оптимизации КА с ЭРДУ следует отнести следующее. Во-первых, исходя из сущности и формализма метода, оптимальное управление (получаемое в результате решения) всегда описывается некоторой вектор-функцией, принадлежащей к достаточно широкому классу (измеримых существенно ограниченных), что позволяет с легкостью «автоматически» учитывать практически любые ограничения, непосредственно формирующие область допустимых управлений в рассматриваемой задаче. К тому же, сам по себе поиск оптимальных управлений, описываемых функциями такого широкого класса, позволяет в ряде случаев понизить/повысить нижнюю/верхнюю грань значений рассматриваемого целевого функционала (см. принцип расширения [31]). Во-вторых, применение непрямых методов при решении задач оптимизации траекторий КА с ЭРДУ на практике, как правило оказывается менее затратным с точки зрения общего объема потребных вычислений, по сравнению с использованием прямых методов. Это отмечено в многочисленных работах по соответствующей тематике [48, 49, 53, 54]. Так, несмотря на ряд известных сложностей, возникающих при численном решении краевой задачи (например, очень высокая чувствительность используемого численного метода ее решения к выбору начального приближения), к которой редуцируется исходная оптимизационная проблема, применение непрямых методов обеспечивает все же более высокую общую вычислительную производительность. Так, в большинстве случаев, численные методы, используемые для решения краевой задачи, могут обеспечивать скорость сходимости к решению, близкую к квадратичной [3, 41, 50, 58, 82, 87], т.к. обычно для этой цели применяются численные алгоритмы (как непосредственно решения системы нелинейных уравнений, так и минимизации суммы квадратов невязок), построенные на использовании производных старших порядков.

Основной недостаток непрямых методов, напрямую вытекающий из их формализма – необходимость в аналитической записи в *явном виде* надлежащих условий оптимальности при рассмотрении каждой конкретной оптимизационной проблемы. В ряде случаев, это может приводить к значительным сложностям - основное влияние на это непосредственно оказывают как сами свойства рассматриваемой динамической системы, так и формулировка заданного

критерия качества. Покажем эти характерные для непрямых методов оптимизации особенности на примере принципа максимума Понтрягина, так как он является основным инструментом, используемым при решении траекторных задач, рассматриваемых в рамках настоящей диссертационной работы. Естественно, отмеченные в ходе дальнейшего изложения особенности являются общими для всей группы вариационных методов, независимо от конкретного вида и формы представления их условий (задача Лагранжа с дифференциальной связью, задача Бласса [5, 27] и др.). Так, например, ограничения, описывающие область допустимого управления в рассматриваемой оптимизационной проблеме, могут иметь весьма сложный вид, что, в свою очередь, приводит к трудностям получения соответствующих выражений для оптимального управления в явном виде. Или же, в ряде случаев, могут присутствовать ограничения смешанного типа (или чисто фазовые), нерегулярные [2, 14, 37, 38] и/или, например, описываемые набором недифференцируемых функций, что опять же приводит к трудностям получения соответствующих выражений, описывающих (явно) оптимальное управление. В ряде случаев, определенные сложности могут также возникать при аналитической записи условий трансверсальности (при вычислении соответствующих частных производных), что может быть вызвано не только особенностями, связанными, например, с отсутствием непрерывности и дифференцируемости функций по совокупности своих аргументов, определяющих конечной блок задачи, но также и с громоздкостью описываемых их выражений. Также огромное влияние на запись условий оптимальности оказывает дифференциальная связь – т.е. уравнения, описывающие управляемое движение рассматриваемой динамической системы или объекта (движение центра масс КА). Так как набор соответствующих условий (общий для всей рассматриваемой группы вариационных методов) обязательно содержит в себе функциональные множители Лагранжа (т.е. множители, отвечающие ограничению типа равенства в виде дифференциальной связи), в общем случае описываемые вектор-функцией ограниченного изменения, удовлетворяющей т.н. сопряженной (как и любой множитель Лагранжа, данный объект является элементом *сопряженного* пространства к рабочему пространству направлений (вариаций) задачи [1, 2, 11, 16, 27, 37, 38]) системе дифференциальных уравнений. Как известно, правые части сопряженной системы, определяются достаточно просто – посредством дифференцирования по соответствующим компонентам фазового вектора рассматриваемой динамической системы некоторой скалярной функции (линейной и однородной относительно сопряженных переменных), связывающей между собой текущие значения компонент фазовой скорости (управляемой системы) и сопряженные переменные, и представляемой в канонической или лагранжевой форме [1, 2, 11, 27]. Следовательно, в том случае, когда правые части системы дифференциальных уравнений, описывающих фазовое состояние управляемого объекта

весьма сложны и громоздки, аналитическая запись соответствующих правых частей для сопряженной системы может представлять собой весьма непростую задачу. Которая в ряде случаев трудно осуществима даже с использованием современных средств компьютерной алгебры, обеспечивающих проведение потребных аналитических вычислений. Описанный недостаток может весьма остро проявляться для любых динамических систем, управляемое движение которых описывается сложной моделью. Предлагаемая в настоящей работе методика решения частных задач оптимизации многовиткового межорбитального перелета КА с ЭРДУ как раз и позволяет бороться с последними отмеченными недостатками, характерными для непрямых методов вариационной группы, и, по сути, является универсальной. Перед тем, как перейти к формулированию ряда ее основных положений, необходимо также отметить ряд основных достоинств и недостатков, характерных для прямых методов.

Прямые методы хоть и используют в своей основе тот же общий базис теории экстремальных задач, что и непрямые, однако их применение на практике не требует записи необходимых условий оптимальности в явном (аналитическом) виде. В этом и заключается основное преимущество их использования по сравнению с непрямими методами оптимизации, что в ряде случаев оказывается весьма существенным. Однако, использование непрямых методов редуцирует исходную оптимизационную проблему к конечномерной задаче нелинейного программирования очень большой размерности, решение которой на практике определяется с помощью соответствующих численных методов и алгоритмов [3, 50, 71, 87]. При этом очевидно, что потребное количество вычислений в данном случае всегда будет значительно превышать объем, отвечающий использованию непрямых методов. Подобная редукция задач оптимизации управляемых динамических систем с помощью прямых методов непосредственно вытекает из следующей общей (для всех них) базовой идеи – поиска оптимального управления в некотором достаточно узком заранее заданном классе функций, однозначно определяемого посредством некоторой его (управления) параметризации на конечном числе участков разбиения траектории. Подобного рода параметризация имеет свои плюсы: например, позволяет гораздо легче учесть всевозможные ограничения, налагаемые на траекторию или управления. Однако, использование параметрического представления для управления может не обеспечивать достаточно точное определение нижней/верхней грани для рассматриваемого критерия качества (функционала), т.к. в данном случае, точность аппроксимации полученного оптимального решения будет напрямую зависеть не только от выбранной параметризации, но также и от числа отдельных участков разбиения траектории. При этом может происходить «сужение» рабочего пространства задачи, на элементах которого наилучшее значение критерия качества может в

принципе не достигаться. Увеличение же числа разбиений траектории на «отдельные участки управления» позволяет улучшить качество полученного решения (в пределе приблизиться к значению точной нижней/верхней грани), но при этом резко возрастает размерность задачи. Таким образом, прямые методы требуют значительных вычислительных затрат в сравнении с непрямыми методами, но имеют гораздо меньшую чувствительность к выбору начального приближения и, что самое главное, сложность модели, описывающей фазовое состояние управляемой динамической системы практически не оказывает влияния при их использовании на практике. В настоящее время, при решении задач траекторной оптимизации КА с ЭРДУ с помощью прямых методов, как правило, используются следующие соответствующие им методы решения конечномерных задач оптимизации большой размерности: различные модификации градиентных методов [13, 28], последовательное квадратичное программирование (Sequence Quadratic Programming) и дифференциально-динамическое программирование (Differential Dynamical Programming). Модификации последних, например, используются в работах [82, 89, 90, 101].

Как уже было сказано ранее, рассматриваемые в настоящей работе задачи оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ решаются с использованием принципа максимума. При этом предполагается, что модель движения центра масс КА описывается достаточно сложным образом, т.к. исследуется управляемое *возмущенное* движение аппарата. Необходимость учета действия возмущений при баллистическом проектировании траекторий межорбитального перелета обусловлена главным образом следующим фактором. Важную роль здесь играет непосредственно сама специфика движения КА с ЭРДУ в близкой окрестности центра тяготения (в рассматриваемом случае, естественно, Земли). Известно, что реактивное ускорение, приобретаемое аппаратом под действием силы тяги ЭРДУ, обычно составляет порядка $10^{-5} - 10^{-4}$ от величины гравитационного ускорения притягивающего центра [13], что сравнимо по своей величине с ускорениями от прочих действующих на аппарат сил, рассматриваемых в качестве возмущений. Вследствие этого управляемое движение центра масс КА носит медленно изменяющийся, долгопериодический характер. Так, типичные траектории межорбитального перелета КА с ЭРДУ отличаются значительной угловой дальностью и длительностью; все они, как правило, могут рассматриваться в виде медленной и плавной деформации или эволюции (в течении времени перелета) начальной орбиты аппарата в требуемую конечную. При этом очевидно, что характер общего возмущающего воздействия, оказываемого на траекторию движения КА, может существенно меняться на различных этапах данной «эволюции». Так, оставаясь практически неизменным между двумя соседними витками траектории, он может кардинально меняться как по мере эволюции элементов оскулирующей орбиты КА (т.е. при ощутимом изменении значений

фазового вектора аппарата), так и просто за счет непосредственного изменения составляющих компонент общего возмущающего воздействия, в случае зависимости последних от времени. А величина управляющего воздействия, напротив, всегда остается преимущественно постоянной на траектории перелета. Поэтому, действие возмущений может оказывать ощутимое влияние на управляемое движение аппарата, и, следовательно, его учет может быть полезен при решении соответствующих задач баллистического проектирования. Хотя бы потому, что заранее (в начале проектирования номинальной траектории) однозначно ответить на вопрос о влиянии действия возмущений не удастся. Так как оказывается, что в ряде случаев, усложнение модели управляемого движения центра масс КА путем учета влияния последних при баллистическом проектировании номинальной траектории может приводить как положительному результату с точки зрения рассматриваемого критерия качества, так и к отрицательному. Поэтому, качественное рассмотрение траекторных задач оптимизации межорбитального перелета с учетом действия возмущений позволяет оценить их комплексное влияние как на оптимальное управление (и, соответственно, отвечающую ему оптимальную траекторию), так и на значение рассматриваемого критерия качества (функционала), характеризующего перелет. А также определить степень данного влияния, то есть, например, дать некоторую конкретную оценку разницы значений целевого функционала, полученных, соответственно, на решениях возмущенной и невозмущенной задачи, или же как-то оценить отличие в общей структуре отвечающих им оптимальных программ управления углом тангажа, рысканья и т.д. (если, конечно, оно существует). В целом, рассмотрение возмущенных задач позволит ответить на следующий вопрос: следует ли использовать более сложные модели движения КА с ЭРДУ при баллистическом проектировании номинальной траектории межорбитального перелета, и насколько сильно будет отличаться (качественно) полученное в этом случае решение от соответствующего решения невозмущенной задачи?

Основные методические идеи, предлагаемые автором в рамках настоящей диссертационной работы, и должны помочь с ответом на озвученный вопрос. Их использование на практике позволяет решать возмущенные задачи траекторной оптимизации межорбитального перелета с помощью непрямого метода вариационной группы, при этом не сталкиваясь с целым рядом проблем его формализации. Данная методика является по-настоящему универсальной, и позволяет на примере рассмотрения ряда частных задач, отвечающих некоторым конкретным типам межорбитального перелета КА с ЭРДУ, ответить на поставленный вопрос. Суть же основного подхода к решению возмущенных задач траекторной оптимизации (вместе с соответствующим подробным теоретическим обоснованием предлагаемой автором общей методики их решения) подробно описывается в следующих главах и приложении. Здесь же ограничимся лишь кратким ее описанием.

Итак, как уже неоднократно отмечалось ранее, учет влияния действия возмущений при решении рассматриваемых задач траекторной оптимизации межорбитального перелета с помощью непрямого метода (принципа максимума) оказывается весьма непростой задачей: в данном случае мы сталкиваемся с необходимостью записи условий оптимальности в явном аналитическом виде, о чем уже говорилось при освещении ряда основных недостатков, характерных непрямым методам оптимизации. Конкретнее, основную проблему составляет определение правых частей для сопряженной системы дифференциальных уравнений. Так как включение возмущений в модель, описывающую управляемое движение центра масс КА с ЭРДУ, приводит к существенному усложнению правых частей соответствующей системы дифференциальных уравнений. Это вызвано, в первую очередь, тем, что для описания изменения фазового состояния рассматриваемой динамической системы используется классический (для небесной механики) аппарат возмущенного движения, и, следовательно, система дифференциальных уравнений управляемого движения КА записывается в оскулирующих элементах. Правые части данных уравнений оказываются весьма сложны. А дополнительный учет возмущений, в свою очередь, также зависящих от текущего фазового состояния КА и времени, делает их по-настоящему сложными и громоздкими. Запись в явном виде правых частей сопряженной системы становится практически невозможной, т.к. с этим не всегда справляются даже специальные математические пакеты компьютерной алгебры (MAPPLE, Mathematica и т.д.), предназначенные для проведения аналитических вычислений. Очевидный выход из данной ситуации непосредственно вытекает из канонического формализма принципа максимума. Известно, что правые части системы дифференциальных уравнений оптимального движения объекта управления определяются посредством простых канонических соотношений [1, 2, 6, 16, 23, 28, 37, 52], т.е. с помощью вычисления соответствующих частных производных оптимального гамильтониана рассматриваемой задачи по элементам ее расширенного фазового вектора (образованного фазовыми и сопряженными переменными). Таким образом, если отказаться от аналитической записи соответствующих правых частей для системы оптимального движения в явном виде, но *вычислять* их согласно определению (беря при этом необходимые частные производные) с помощью каких-либо методов численного дифференцирования, то при решении задачи на практике достаточно получить всего лишь одну аналитическую запись для оптимального гамильтониана, значительно более простую даже при наличии сложной дифференциальной связи. Последнее, очевидно, также остается справедливым и в случае решения оптимизационной проблемы с помощью условий принципа максимума, записанных в форме Лагранжа [1, 27]. Сама по себе, данная идея отнюдь не нова, и по сути, является универсальной для всех задач оптимизации динамических систем, решаемых с помощью не прямых методов

вариационной группы. Применительно к рассматриваемой в настоящей диссертационной работе тематике решения и исследования *возмущенных* задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, подобная идея впервые *частично* была реализована на практике в работе [93], а в полной мере - в работе [75].

Несмотря на кажущуюся простоту описанного подхода, остро встает вопрос о качестве вычисления соответствующих частных производных оптимального гамильтониана. Здесь все упирается в выбор надлежащего численного метода дифференцирования, не слишком затратного с точки зрения потребного объема вычислений и обеспечивающего приемлемую точность, а также легко «встраиваемого» в общую схему решения задачи. Так, например, в работе [93] для этих целей предлагалось использовать обыкновенные центральные разности, которые оказались вполне способны обеспечить приемлемый результат с точки зрения скорости, потребного объема вычислений и результирующей точности в рамках общей схемы решения задачи, но с использованием метода осреднения (численного). При этом общая ошибка определения правых частей системы уравнений оптимального движения КА с ЭРДУ практически не отражалась на сходимости используемого алгоритма решения краевой задачи, опять же, наиболее вероятно, вследствие осреднения. Но для повышения общей точности и сокращения числа вычислений, ряд частных производных, формирующих выражения правых частей сопряженной системы, были определены аналитически. В работе [75] в качестве основного метода численного дифференцирования использовался метод комплексного шага [84-86], в целом, имеющий значительные преимущества в точности вычислений перед классическими разностными методами, но при этом требующий проведения значительного количества вычислений в комплексной области. Использование метода комплексного шага обеспечивает точность вычисления производных, практически равную относительной точности вычисления функции. Однако, данный метод также имеет ряд существенных особенностей и недостатков, связанных как с самой спецификой проведения машинных вычислений над элементами комплексной плоскости, так и с рядом основополагающих аспектов теории функции комплексного переменного. Основные положения для применения метода комплексного шага на практике изложены в работах [86, 87]. В рамках настоящей диссертационной работы автором с достаточной степенью полноты изложено теоретическое описание данного метода (носящее, скорее, обзорный характер), созданное на основе базовых понятий и элементов теории функции комплексного переменного, а также отмечены и пояснены некоторые его важные особенности и недостатки.

В качестве одной из главных методических идей настоящей диссертационной работы, автором предлагается модификация описанной ранее общей схемы определения правых частей системы дифференциальных уравнений оптимального движения управляемого

объекта, предназначенной для решения и исследования рассматриваемых возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, и использующая в качестве своего основного инструмента численного определения производных методику, построенную на основе элементов теории математического аппарата дуальных чисел [33, 42, 44, 57, 61, 62, 91, 103]. Применение данного аппарата позволяет численно определять значения требуемых производных с относительной точностью, строго равной точности вычисления функции. К тому же, данный метод имеет ряд существенных преимуществ по сравнению с методом комплексного шага (несмотря на их глубокую общность). Данные аспекты рассматриваемого метода, а также его полное теоретическое обоснование вместе с основными элементами алгебраической теории дуальных чисел (и их многомерных расширений) и теории функции дуального переменного, достаточно полно освещены автором в рамках настоящей работы (в главе 2 и Приложении). Изложение ряда теоретических аспектов носит преимущественно обзорный характер, хотя в работе присутствует часть результатов, полученных лично автором. Важно отметить, что методика практического применения аппарата дуальных чисел для вычисления производных функции одной или нескольких переменных описана в работах [90, 102], однако, без какого-либо строгого теоретического обоснования. Таким образом, автор настоящей диссертационной работы попытался закрыть этот вопрос.

В работе подробно описаны предлагаемые автором вычислительные схемы решения рассматриваемых возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, использующие в своей основе различные варианты дуальных чисел, а также общие схемы и подходы к численному решению задач, построенные, по сути, на организации некоторой последовательности, состоящей из конечного числа приближений. Ее элементы образуют цепочку из отдельных решений краевых задач (для системы обыкновенных дифференциальных уравнений) принципа максимума, соответствующих определенной последовательности «вспомогательных» оптимизационных проблем. Также в работе предлагается методика совместного использования аппарата дуальных чисел и метода продолжения по параметру [21, 58, 46, 49, 64], предназначенная для решения краевых задач, которая, по своей сути, также является вполне универсальной.

В качестве основного примера использования предлагаемой в работе методики решения и исследования задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом действия возмущений, рассматривались перелеты с начальной круговой или эллиптической орбиты на конечную геостационарную (ГСО). Полученные результаты подробно описаны и проанализированы в главах 3 и 4. На их основе сделан вывод (естественно, носящий частный характер), о степени влияния действия возмущений на полученных оптимальных решениях (в сравнении с соответствующими невозмущенными решениями), а также общей

целесообразности решения задач баллистического проектирования номинальной траектории межорбитального перелета с помощью предложенной методики. Забегая вперед, необходимо отметить, что последняя (четвертая) глава, хоть и посвящена отдельной и достаточно интересной задаче маневрирования КА с ЭРДУ, связанной с актуальной в настоящее время проблематикой космического мусора, с методической точки зрения полностью соответствует основному предлагаемому материалу диссертационной работы.

Актуальность настоящей диссертационной работы продиктована следующими основными факторами. Во-первых, общим и повсеместным ростом числа использования ЭРД в качестве штатной маршевой или корректирующей двигательной установки при различных видах маневрирования КА в окрестности Земли, что связано как с комплексным развитием и совершенствованием бортовых систем аппаратов в целом, так и с улучшением ряда характеристик самих ЭРДУ. Во-вторых, дальнейшее развитие и оптимизация схемы комбинированного выведения КА (ПН) требует рассмотрения все более сложных задач баллистического проектирования траекторий межорбитального перелета, в особенности на участке довыведения, на котором КА должен длительное время активно управляться. Очевидно, что ввиду самой специфики управляемого движения КА с двигателем малой тяги, необходимо рассматривать задачи проектирования траекторий в постановке задач оптимизации управляемых динамических систем, решение которых, в общем случае, представляется весьма нетривиальным. А методы и подходы, предлагаемые в рамках настоящей работы, позволяют получать решения подобных проблем при значительном усложнении (или уточнении) их постановок, при этом используя для этих целей все тот же классический математический аппарат.

Основной **целью** настоящей диссертационной работы является увеличение эффективности космических транспортных систем при реализации межорбитальных перелетов. Для достижения этой цели проведена разработка и апробация универсальной методики решения задач оптимизации многовиткового межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом влияния действующих возмущений. Методика основана на применении нового математического аппарата. При рассмотрении конкретных типов межорбитального перелета ставится задача выявления степени влияния возмущений на полученное оптимальное решение и оценка возможности его дальнейшего использования при построении номинальной траектории межорбитального перелета.

Методы проведения исследования – расчетно-теоретические. В настоящей работе в качестве основного метода решения рассматриваемых задач оптимизации выступает непрямой метод – принцип максимума Понтрягина. Во многом, его применение является основополагающим, т.к. из его формализма напрямую вытекает основная идея, используемая

автором работы. К тому же в диссертации весьма подробно освещены методы численного дифференцирования, так как они также составляют неотъемлемую часть предлагаемой методики решения возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ. Изложение соответствующей теории носит преимущественно обзорный характер, хотя ряд ее результатов были получены лично автором.

Объектом исследования являются траектории движения центра масс КА с ЭРДУ при межорбитальном перелете в окрестности гравитирующего тела.

Предметом исследования являются математические модели оптимального возмущенного движения КА с ЭРДУ.

Достоверность полученных результатов обоснована точностью и строгостью общей математической формализации рассматриваемых в работе оптимизационных проблем с помощью известных методов, повсеместно использующихся при решении аналогичного типа задач оптимизации межорбитального перелета и широко освещенных в многочисленных работах и книгах по данной тематике. Результаты, полученные в данной работе (по возможности) сравнивались с опубликованными результатами решения аналогичных задач других авторов.

Научная новизна работы заключается:

- в создании универсальной методики решения и исследования задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом действия возмущений, построенной на использовании математического аппарата дуальных чисел и элементов теории функции дуального переменного, и вытекающей из канонического формализма принципа максимума;
- в проведении качественного анализа полученных с помощью этой методики решений возмущенных задач оптимизации конкретного типа межорбитального перелета;
- ряд новых результатов получен автором в рамках рассмотрения ряда теоретических аспектов используемых методов численного дифференцирования, основанных на применении аппарата дуальных чисел. К ним можно отнести:
 - определение условий аналитичности для функции многомерного (т.е. с векторной дуальной частью) дуального переменного (нескольких дуальных переменных) и установление «структуры» аналитической функции многомерного дуального переменного в целом;
 - выявление общего свойства, однозначно определяющего связь действительнзначной функции действительного аргумента и ее «аналитического» продолжения на дуальную плоскость (и ее многомерные расширения), и дающего возможность полноценного

теоретического обоснования применяемым в работе методам численного дифференцирования;

- в работе рассмотрен ряд новых постановок задачи оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, возникающих при исследовании проблемы оптимального маневрирования аппарата (на отдельных этапах его полета) в окрестности ГСО, предназначенного для буксировки на орбиты захоронения более нефункционирующих КА (объектов космического мусора (КМ)).

Также стоит особо отметить, что практическая реализация предлагаемой в работе общей методики решения возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета потребовала от автора написания специального программного обеспечения на языке FORTRAN, с помощью которого производились необходимые вычисления над пространством дуальных чисел, посредством переопределения ряда основных элементарных функций и перегрузки базовых процедур.

Практическая значимость настоящей работы состоит в следующем. Во-первых, разработана и теоретически обоснована методика и общий базовый подход к решению специального класса задач траекторной оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ. Разработанная методика весьма универсальна и может быть широко использована при решении различных задач баллистического проектирования для КА произвольного типа. Во-вторых, разработаны алгоритмы и создан пакет программ, реализующих предложенную в работе методику. Они могут быть использованы при проектировании межорбитальных перелетов КА с двигателями малой тяги.

Выносимые на защиту результаты и положения:

- разработана и теоретически обоснована универсальная методика решения задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, управляемое движение центра масс которого описывается сложной математической моделью, учитывающей влияние различных возмущающих факторов на его траекторию;
- разработана и теоретически обоснована методика совместного использования метода продолжения по параметру и дуальных чисел, позволяющая расширить область применения последнего при численном решении невозмущенных задач межорбитального перелета КА с ЭРДУ;
- результаты качественного анализа полученных оптимальных решений возмущенной задачи при рассмотрении конкретного типа межорбитального перелета КА с ЭРДУ (с начальной круговой или эллиптической орбиты – на ГСО);

- ряд теоретических аспектов, связанных с элементами теории аналитической функции дуального переменного.

Личный вклад и публикации. Все результаты, приведенные в диссертации, получены лично автором. Основные результаты опубликованы в 3 работах автора [42-44], входящих в рецензируемые издания из списка ВАК Минобрнауки России. Полученные в диссертационной работе результаты обсуждались на следующих российских и международных конференциях:

- XIII Международная конференция «Авиация и космонавтика», МАИ, Москва, ноябрь 2014
- XII конференция молодых ученых «Фундаментальные и прикладные исследования» ИКИ РАН, Москва, апрель 2015
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным вопросам теоретической и прикладной механики, Симпозиум Механика, Казань, август 2015
- L научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Калуга, сентябрь 2015
- XIV Международная конференция «Авиация и космонавтика», МАИ, Москва, ноябрь 2015
- 6th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques (ICATT), Darmstadt, март 2016

Также результаты работы неоднократно обсуждались на семинаре «Механика космического полета», проводимого кафедрой 601 «Космические системы и ракетостроение» в МАИ.

Структура и объем работы. Объем работы составляет 283 страницы (основная часть работы - 192 страницы, приложение – 91 страница). Работа содержит 80 рисунков и 3 таблицы.

1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ

1.1 Уравнения движения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой

Известно, что управляемое движение центра масс КА с ЭРДУ в близкой окрестности гравитирующего тела, в силу ряда причин, удобно описывать системой дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах [17, 18, 69]. Определяющим фактором в пользу данного выбора, является малость величины действующего на КА реактивного ускорения (также, как и возмущающего), создаваемого тягой ЭРДУ по сравнению с гравитационным ускорением от притягивающего центра. Действительно, тяга современных ЭРДУ на основе стационарно-плазменного двигателя (СПД) обычно не превышает порога значений в 300 мН, и, как правило, ее величина составляет 40...280 мН (для разных двигателей) [13, 22, 34, 53]. Тяга же ЭРДУ на основе ионных двигателей (использующих электростатический разгон рабочего тела) при схожих значениях потребляемой электрической мощности не будет превышать порога значений в несколько десятков мН. С учетом этого, уровень реактивного ускорения, действующего на КА находящийся в диапазоне рабочих орбит ИСЗ, в среднем составляет величину порядка $(1.5 \cdot 10^{-6} \dots 4 \cdot 10^{-4})g_0$ [13], где $g_0 = 9.80665 \text{ м/с}^2$ – среднее значение гравитационного ускорения Земли на уровне поверхности планеты. Таким образом, траектории управляемого движения КА с ЭРДУ в окрестности Земли при рассмотрении различных задач межорбитального перелета, обладают следующими основными особенностями:

- значительная общая продолжительность маневра (вплоть до нескольких сотен суток);
- большое значение угловой дальности перелета (КА совершает десятки или сотни целых витков относительно гравитирующего центра).

Следовательно, сам процесс межорбитального маневрирования КА в окрестности гравитирующего центра под действием малого по величине реактивного ускорения от силы тяги ЭРДУ, по своей динамике, в целом, схож с соответствующим процессом долговременной эволюции орбиты КА, определяемой действием каких-либо возмущений. Поэтому, кажется вполне естественным, описывать управляемое движение КА с ЭРДУ с позиции его рассмотрения в качестве возмущенного, используя при этом соответствующий математический аппарат небесной механики.

В классической небесной механике возмущенное движение центра масс материального объекта в окрестности гравитирующего центра описывается системой дифференциальных

уравнений в оскулирующих элементах [17, 18]. Они впервые были получены Лагранжем, на основе его общей идеи метода вариации произвольных постоянных [17]. В качестве конкретного примера системы дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах, приведем т.н. уравнения Ньютона [18]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = 2r\tilde{T}, \\ \frac{de}{dt} = \tilde{S} \sin(\nu) + \left[\cos(\nu) + (\cos(\nu) + e) \right] \frac{r}{p} \tilde{T}, \\ \frac{di}{dt} = \frac{r}{p} \cos(u) \tilde{W}, \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{p} \sin(u) \operatorname{cosec}(i) \tilde{W}, \\ \frac{d\omega}{dt} = -\tilde{S} \frac{\cos(\nu)}{e} + \frac{\sin(\nu)}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T} - \frac{r}{p} \sin(u) \cot(i) \tilde{W}, \\ \frac{d\tau}{dt} = \frac{p}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[(e N \sin(\nu) - \cos(\nu)) \tilde{S} + \frac{p}{r} N \tilde{T} \right] \frac{r^2}{p^2}, \end{array} \right. \quad (1.1.1)$$

где $(p, e, i, \Omega, \omega, \tau)^T$ – вектор т.н. кеплеровских элементов орбиты [17, 18]. Здесь p – фокальный параметр орбиты, e – ее эксцентриситет, i – наклонение, Ω – долгота восходящего узла, ω – аргумент перицентра, τ – момент времени прохождения перицентра, ν – истинная аномалия материально тела, движущегося по орбите, $u = \omega + \nu$ – аргумент широты, $r = p(1 + e \cos(\nu))^{-1}$ – уравнение орбиты (выражает расстояние материального тела до центра притяжения в зависимости от текущего значения истинной аномалии). Выражение для N определяется следующим образом:

$$N = 2 \frac{p^2}{r^2} \int_0^\nu \frac{\cos \lambda d\lambda}{(1 + e \cos \lambda)^3}.$$

В правых частях уравнений (1.1.1) $\tilde{S}, \tilde{T}, \tilde{W}$ представляют собой т.н. приведенные компоненты возмущающего ускорения, которые определяются следующим образом:

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T, \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W,$$

где S, T, W – радиальная, трансверсальная и бинормальная компоненты возмущающего ускорения, записанные в орбитальной системе координат [17, 18] (данная система координат является основной используемой в настоящей работе), μ – гравитационный параметр [17, 18] центра притяжения. Связь между значениями истинной аномалии и времени дается следующим выражением (уравнение Кеплера):

$$t - \tau = \sqrt{\frac{p^3}{\mu_0}} \int_0^{\nu} \frac{d\lambda}{(1 + e \cos \lambda)^2}.$$

Форма записи системы дифференциальных уравнений (1.1.1) оказывается достаточно сложной по сравнению с соответствующей ей формой записи дифференциальных уравнений относительного (возмущенного) движения материального тела, например, в прямоугольной системе координат. Однако, уравнения (1.1.1) обладают целым рядом преимуществ по отношению к последним. Так, использование различных видов уравнений в оскулирующих элементах позволяет качественно описывать (численно или аналитически) длительные процессы эволюции орбит под действием возмущений различной природы. Потому что, во-первых, фазовый вектор рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (1.1.1) в общем случае представляет собой ту или иную комбинацию из т.н. классических кеплеровских элементов, что наглядно характеризует изменение именно параметров орбиты материального тела, а не кинематических характеристик его движения. Во-вторых, сама форма уравнений в оскулирующих элементах предоставляет возможность широкого применения асимптотических методов [12] для анализа долговременной эволюции орбиты материального тела. Общая структура правых частей системы дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах (1.1.1) всегда позволяет выделить из ее фазового вектора быстро и медленно-изменяющиеся переменные. А это приводит к возможности рассмотрения различных схем осреднения с последующим уточнением для поиска ее приближенных (точнее, асимптотически стремящихся к точным) решений. В частности, данный прием (осреднение) может быть использован как при аналитическом рассмотрении эволюции орбиты материального тела под действием возмущений, так и при численном моделировании его движения (естественно, с использованием уравнений вида (1.1.1)) [12, 49, 93].

Численное моделирование управляемого движения КА под действием малого (по сравнению с гравитационным) реактивного ускорения, в первую очередь, сводится к решению соответствующей задачи Коши, посредством численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.1.1) для заданных начальных условий. Использование системы в оскулирующих элементах в данном случае, кажется более предпочтительным, чем численное интегрирование уравнений относительного движения КА, записанных, например, в прямоугольной декартовой системе координат. Так как в процессе интегрирования все компоненты фазового вектора последней будут претерпевать многократные короткопериодические изменения по своей амплитуде с сопутствующей им сменой знака. А это сказывается на общей устойчивости и производительности вычислительного процесса [12, 49].

Таким образом, в силу приведенных выше соображений, для описания управляемого движения КА с ЭРДУ в близкой окрестности центра притяжения предлагается использовать дифференциальные уравнения возмущенного движения вида (1.1.1). При этом считаем, что действующее на КА реактивное ускорение от силы тяги ЭРДУ естественно отождествляется с возмущающим. Данный подход к описанию такого движения является по сути общепринятым, и используется в работах [29, 30, 42-44, 46-49, 54, 55, 75, 77, 93-96] и книгах [13, 22, 53].

В ходе всего последующего изложения будем обозначать компоненты реактивного ускорения в правых частях системы уравнений (1.1.1) следующим образом:

$$S_a, T_a, W_a, \quad (1.1.2)$$

где S_a , T_a , и W_a – соответственно радиальная, трансверсальная и бинормальная компоненты вектора реактивного ускорения, записанного в орбитальной системе координат. Наличие прочих действующих на КА сил (тяготение других тел, аэродинамическая сила, сила светового давления и др.), помимо доминирующей гравитационной (ньютоновской) силы и силы тяги ЭРДУ, порождает соответствующие им возмущающие ускорения. Для них будем использовать следующие обозначения:

$$S_\Phi = \sum_{j=1}^m S_\Phi^{(j)}, T_\Phi = \sum_{j=1}^m T_\Phi^{(j)}, W_\Phi = \sum_{j=1}^m W_\Phi^{(j)}, \quad (1.1.3)$$

где $S_\Phi^{(j)}$, $T_\Phi^{(j)}$, $W_\Phi^{(j)}$ – соответственно радиальная, трансверсальная и бинормальная компоненты возмущающего ускорения, приобретаемого КА от j -ой возмущающей силы. Их алгебраические суммы обозначим просто как S_Φ , T_Φ , W_Φ . Таким образом, компоненты суммарного возмущающего ускорения (включая реактивное (1.1.2)), действующего на КА в орбитальной системе координат, определяются как

$$S^\Sigma = S_a + S_\Phi, T^\Sigma = T_a + T_\Phi, W^\Sigma = W_a + W_\Phi.$$

Следует отметить, что система дифференциальных уравнений (1.1.1) имеет ряд особенностей, которые необходимо учитывать при численном моделировании управляемого движения КА. Так, например, при значении эксцентриситета $e=0$, правые части дифференциальных уравнений для ω и τ вырождаются. Следовательно, оказывается невозможным рассмотрение эволюции элементов орбиты КА с течением времени, в процессе которой эксцентриситет становится нулевым, или в случае если начальная орбита круговая. При значении наклона $i=0$ долгота восходящего узла становится неопределенной, а в правых частях соответствующих дифференциальных уравнений для Ω и ω появляются особенности. Таким образом, оказывается невозможным рассмотрение эволюции элементов орбиты КА, в ходе которой наклонение переходит через ноль. Кроме того, для определения связи текущего момента времени с угловым положением КА на оскулирующей орбите,

определяемым истинной аномалией ν , требуется на каждом шаге численного интегрирования решать уравнение Кеплера. Для того чтобы избежать трудностей в процессе численного моделирования, связанных с отмеченными особенностями системы (1.1.1), необходимо каким-то образом перейти к новой эквивалентной ей системе дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах, свободной от них. Это достигается путем выбора новых специальных элементов орбиты, которые задаются в виде некоторой композиции из классических кеплеровых элементов. В ряде случаев это осуществляется сравнительно простыми способами. Так, например, для классических «планетных» задач небесной механики, где рассматривается преимущественно эллиптическое движение, случай малых наклонов удастся реализовать за счет замены переменных i и Ω на $p=\text{tg}(i)\sin(\Omega)$ и $q=\text{tg}(i)\cos(\Omega)$ (эту замену предложил сам Лагранж) для системы дифференциальных уравнений оскулирующих элементов в т.н. переменных Лагранжа [17, 18]. Для случая малых эксцентриситетов также может быть получен свой вариант уравнений, не имеющих особенностей. Это достигается соответствующей заменой элементов e и π на элементы $h=e\cos(\pi)$ и $k=e\sin(\pi)$. Объединяя оба случая, удастся получить систему дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов не имеющую особенностей при нулевом наклоне и эксцентриситете [18]. Однако, и она, в свою очередь, имеет ряд особенностей при значениях наклона равном $(\pi/2)$. Это также может иметь значение при рассмотрении различных задач орбитального маневрирования ИСЗ. Система дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах, свободная от особенностей при значениях наклона $i=0$ и $i=(\pi/2)$ и при нулевом эксцентриситете, была получена в работе [69] посредством цепочки последовательных канонических преобразований применительно к системе уравнений в элементах Лагранжа (не имеющей особенностей при $i=e=0$). Она получила название системы дифференциальных уравнений в *равноденственных элементах*. Связь равноденственных элементов и классических кеплеровских определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} p &= p, \\ e_x &= e \cos(\Omega + \omega), \\ e_y &= e \sin(\Omega + \omega), \\ i_x &= \tan\left(\frac{i}{2}\right) \cos(\Omega), \\ i_y &= \tan\left(\frac{i}{2}\right) \sin(\Omega), \\ l &= \Omega + \omega + \nu. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.4)$$

В выражениях (1.1.4) e_x, e_y, i_x, i_y – «компоненты» вектора эксцентриситета и наклона, l – истинная долгота. Система дифференциальных уравнений возмущенного движения в равноденственных элементах (безр.) определяется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = 2 \frac{p^{3/2}}{b_1} T^\Sigma, \\ \frac{de_x}{dt} = \frac{p^{1/2}}{b_1} \left(((1+b_1) \cos(l) + e_x) T^\Sigma + b_1 \sin(l) S^\Sigma - e_y b_2 W^\Sigma \right), \\ \frac{de_y}{dt} = \frac{p^{1/2}}{b_1} \left(((1+b_1) \sin(l) + e_y) T^\Sigma - b_1 \cos(l) S^\Sigma + e_x b_2 W^\Sigma \right), \\ \frac{di_x}{dt} = \frac{1}{2} \frac{p^{1/2}}{b_1} b_3 \cos(l) W^\Sigma, \\ \frac{di_y}{dt} = \frac{1}{2} \frac{p^{1/2}}{b_1} b_3 \sin(l) W^\Sigma, \\ \frac{dl}{dt} = \frac{b_1^2}{p^{3/2}} + p^{1/2} \frac{b_2}{b_1} W^\Sigma, \end{array} \right. \quad (1.1.5)$$

здесь b_1, b_2 , и b_3 даются следующими выражениями:

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = 1 + e_x \cos(l) + e_y \sin(l), \\ b_2 = i_x \sin(l) - i_y \cos(l), \\ b_3 = 1 + i_x^2 + i_y^2. \end{array} \right\} \quad (1.1.6)$$

Из приведенных выражений (1.1.4) видно, что при значении угла наклона i равном π (максимальном), равноденственные элементы i_x, i_y одновременно принимают значения равные $\pm\infty$ при $\Omega \in [0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$, $k = 0, \dots, 4$; в противном случае, какая либо из компонент вектора наклона вовсе не определена, в то время как другая может принимать значение $\pm\infty$. Таким образом, правые части системы дифференциальных уравнений в равноденственных элементах также имеют особенности, но лишь при значении наклона равном π , которому соответствует довольно экзотический тип орбиты – экваториальная с обратным направлением орбитального движения.

Таким образом, окончательно, для описания управляемого движения центра масс КА с ЭРДУ будем использовать систему дифференциальных уравнений в равноденственных элементах (1.1.5), также как это делается в работах [29, 30, 42-44, 46-49, 54, 55, 75, 77, 93-96]. Для того чтобы замкнуть систему (1.1.5) к ней необходимо присоединить дифференциальное уравнение относительно массы КА. Правая часть данного уравнения будет различаться в зависимости от используемой математической модели функционирования ЭРДУ. В настоящей работе рассматривается две модели функционирования. Первая из них соответствует т.н. нерегулируемому двигателю [13]. В этом случае, величина тяги ЭРД вместе

со скоростью истечения рабочего тела предполагаются постоянными. Двигатель может быть только включен или выключен. Эта модель является наиболее реалистичной. Вторая из них соответствует т.н. идеальному двигателю ограниченной мощности [13]. В этом случае предполагается лишь постоянство реактивной мощности струи ЭРД. Регулирование величины тяги и скорости истечения подчиняется лишь общему ограничению на мощность (при этом полагается, что величины тяги и скорости истечения принимают только неотрицательные значения). Эта модель функционирования будет использоваться преимущественно как вспомогательная при решении ряда задач оптимизации траекторий управляемого движения КА с нерегулируемым двигателем. Дифференциальное уравнение относительно текущей массы КА в случае первой математической модели функционирования ЭРДУ дается следующим выражением:

$$\frac{d}{dt} m^{OT} = -\delta \frac{P}{w}, \quad (1.1.7)$$

где P – фиксированное значение тяги ЭРДУ (Н), w – фиксированная скорость истечения рабочего тела (м/с). Параметр δ (безр.) определяет режим работы нерегулируемого двигателя, т.е. включен он или выключен. Таким образом, δ принимает значения или равные нулю, или единице. Забегая вперед, отметим, что параметр $\delta(t)$ будет рассматриваться в качестве управления. Дифференциальное уравнение (1.1.7) получило индекс OT – т.е. оно отвечает случаю ограниченной тяги. Здесь и в дальнейшем будем придерживаться этого обозначения, характеризующего случай нерегулируемого двигателя, согласно терминологии автора работ [46-49].

Дифференциальное уравнение относительно массы КА для второй математической модели функционирования ЭРДУ определяется следующим образом:

$$\frac{d}{dt} m^{OM} = -\frac{m^2 a^2}{2N_r}, \quad (1.1.8)$$

где m – масса КА (кг), N_r – реактивная мощность струи ЭРД (Вт), a – модуль вектора реактивного ускорения (м/с²). Выражение (1.1.8) может быть получено следующим образом. Реактивная мощность определяется согласно следующему выражению:

$$N_r = \frac{Pw}{2}, \quad (1.1.9)$$

тяга ЭРДУ P в рассматриваемом случае может быть выражена через величину модуля реактивного ускорения a , т.е. $P=ma$. Записав стандартное выражение для массового расхода q , получим

$$\frac{d}{dt} m = -q = -\frac{P}{w} = -\frac{ma}{w},$$

и учитывая выражение (1.1.9) приходим к (1.1.8). Индекс *ОМ* дифференциального уравнения (1.1.8) характеризует случай рассмотрения модели функционирования ЭРДУ как идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности. Забегая вперед, отметим, что в данном случае в качестве управляющего параметра (определяющего массовый расход) фактически рассматривается текущее значение модуля реактивного ускорения $a(t)$, который определяется следующим образом:

$$a = \|a_r, a_n, a_b\|_E, \quad (1.1.10)$$

где a_r , a_n и a_b – радиальная, трансверсальная и бинормальная компоненты реактивного ускорения в орбитальной системе координат.

В случае рассмотрения модели нерегулируемого двигателя компоненты реактивного ускорения в осях орбитальной системы координат определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} S_a^{OT} &= \delta \frac{P}{m} \sin(\vartheta) \cos(\psi), \\ T_a^{OT} &= \delta \frac{P}{m} \cos(\vartheta) \cos(\psi), \\ W_a^{OT} &= \delta \frac{P}{m} \sin(\psi). \end{aligned} \right\} \quad (1.1.11)$$

В свою очередь, они также получают индекс «*ОТ*». В выражениях (1.1.11) ϑ – угол тангажа КА, определяемый как угол между проекцией вектора тяги на мгновенную плоскость орбиты КА и положительным направлением трансверсальной оси T^0 орбитальной СК; ψ – угол рысканья, т.е. угол между вектором тяги КА и мгновенной плоскостью орбиты. Положительное направление угла рысканья отсчитывается в сторону орта вектора площадей. Диапазон его значений составляет $[-90^\circ, 90^\circ]$ градусов. Положительное направление угла тангажа отсчитывается в сторону орта орбитальной системы координат S^0 . Угол тангажа изменяется в диапазоне $[-180^\circ, 180^\circ]$. Заданием пары значений (ϑ, ψ) непосредственно определяется направление вектора реактивного ускорения тяги ЭРДУ в каждый момент времени.

В случае рассмотрения модели идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности, компоненты реактивного ускорения определяются как (согласно введенным обозначениям в (1.1.2))

$$\left. \begin{aligned} S_a^{OM} &= a_r, \\ T_a^{OM} &= a_n, \\ W_a^{OM} &= a_b. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.12)$$

При этом они также наследуют индекс «ОМ», характеризующий математическую модель функционирования ЭРДУ. В данном случае направление вектора реактивного ускорения для любого момента времени непосредственно определяются заданием тройки $(a_r, a_n, a_b)^T$.

Таким образом, система дифференциальных уравнений в равноденственных элементах (1.1.5) совместно с дифференциальным уравнением для массы КА в виде (1.1.7) или (1.1.8) (в зависимости от модели функционирования ЭРДУ), и соотношениями, определяющими компоненты реактивного ускорения ((1.1.11) или (1.1.12) соответственно) и прочих возмущающих ускорений (1.1.3), вместе определяют математическую модель управляемого движения центра масс КА с ЭРДУ.

Фазовый вектор \mathbf{x} системы дифференциальных уравнений управляемого движения КА с ЭРДУ будем обозначать:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^7, \mathbf{x} = \mathbf{x}^{OT} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, l, m^{OT})^T \quad (1.1.13)$$

в случае рассмотрения модели нерегулируемого двигателя, и

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^7, \mathbf{x} = \mathbf{x}^{OM} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, l, m^{OM})^T, \quad (1.1.14)$$

для модели идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности. В приведенных выражениях символом \mathbf{X} обозначено фазовое пространство системы.

Действующие на КА с ЭРДУ возмущающие ускорения (1.1.3), порождаемые силами, отличными от тяги ЭРДУ, подробно будут описаны в ходе последующего изложения. На данном этапе их рассмотрения, просто будем считать, что в общем случае они могут быть определены в следующем виде:

$$S_\Phi = S_\Phi(\mathbf{x}, t), T_\Phi = T_\Phi(\mathbf{x}, t), W_\Phi = W_\Phi(\mathbf{x}, t), \quad (1.1.15)$$

т.е. представлены как непрерывные вместе со своими частными производными по совокупности переменных функции от фазовых координат КА и времени. Таким образом, полагаем, что

$$S_\Phi(\cdot), T_\Phi(\cdot), W_\Phi(\cdot) \in C^1((\mathbf{X} \times \mathbf{R}), \mathbf{R}). \quad (1.1.16)$$

Данное предположение важно, так как оно позволяет качественно охарактеризовать правые части системы дифференциальных уравнений управляемого движения КА с ЭРДУ с точки зрения их непрерывности и дифференцируемости на элементах пространства $\mathbf{X} \times \mathbf{R}$, но в то же время и накладывает ограничения на используемую модель возмущений. Следовательно, если предположение (1.1.16) справедливо, то и сами правые части системы дифференциальных уравнений управляемого движения центра масс КА (1.1.5), (1.1.7) или (1.1.8) также являются непрерывными функциями вместе со своими частными производными (по своим аргументам)

на элементах (\mathbf{x}, t) пространства $\mathbf{X} \times \mathbf{R}$, за исключением лишь случаев вырожденной прямолинейной ($p=0$) и обратно-экваториальной орбит, о чем уже говорилось ранее.

1.2 Уравнения оптимального движения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой

Задача оптимизации траекторий КА с ЭРДУ при выполнении им любого сложного пространственного маневра, к которым, например, можно отнести перелет между двумя произвольно ориентированными орбитами, относится к классу задач оптимизации управляемых динамических систем. Ее решение сводится, таким образом, к отысканию локального (или глобального) минимума (максимума) для наперед заданного функционала, определенного на множестве решений управляемой динамической системы, удовлетворяющим некоторому набору условий [1, 2, 27]. В общем случае, данные условия могут быть как внутренними (с точки зрения динамики самого процесса управления), так и граничными (внешними). К первым принято относить т.н. поточечные ограничения (условия в виде равенств и неравенств) налагаемые на управляемую систему. Они определяют фазовые (т.е. налагаемые только на фазовый вектор системы) и смешанные (т.е. налагаемые на фазовый вектор и управление одновременно) ограничения, или только ограничения на управление. Ко второму типу условий (граничным), относятся ограничения (также в виде равенств и неравенств), формирующие т.н. конечной блок задачи, т.е. терминальные многообразия, которым должны принадлежать концы траектории управляемой динамической системы. Таким образом, рассматривая в качестве управляемой динамической системы КА с ЭРДУ, а в качестве ее решения – траекторию аппарата, удовлетворяющую ряду ограничений (т.е. допустимую), приходим к некоторой постановке задачи оптимального управления [1, 2, 7, 11, 14, 23, 27, 37, 38, 52]. Как известно, ее решение дается принципом максимума Понтрягина [11, 16, 19, 23, 37, 38, 52]. Его использование позволяет осуществить редукцию рассматриваемой оптимизационной проблемы к краевой задаче. Ввиду сложности математической модели, описывающей рассматриваемую управляемую динамическую систему (КА с ЭРДУ), решение соответствующей задачи оптимального управления естественно осуществляется численно.

Для того чтобы рассматривать задачи оптимизации траекторий межорбитального перелета КА с ЭРДУ как соответствующие задаче оптимального управления, необходимо явным образом задать критерии качества и ограничения, предъявляемые к решениям анализируемой динамической системы. Сначала покажем, что рассматриваемая оптимизационная проблема может быть формализована как задача оптимального управления.

Для этого воспользуемся общими положениями теории оптимизации управляемых динамических систем [1, 2, 6, 7, 27, 52].

Итак, предположим, что управляемое движение КА с ЭРДУ осуществляется на некотором временном отрезке $\Delta=[t_0, t_f]$. В качестве *управления* КА с ЭРДУ будем рассматривать (пока) некоторую абстрактную вектор-функцию

$$\mathbf{u}(t): t \in \Delta \rightarrow \mathbf{R}^m, \quad (1.2.1)$$

принимающую значения из множества U пространства \mathbf{R}^m (определяющего ограничения на управление) на рассматриваемом временном интервале. Согласно общей теории задач оптимизации управляемых динамических систем [1, 2, 6, 7, 27, 52]

$$\mathbf{u}(t) \in L_\infty(\Delta, \mathbf{R}^m),$$

т.е. в общем случае, функция $\mathbf{u}(t)$ – измеримая (Лебегова) существенно ограниченная.

В качестве динамической системы (объекта), как уже было сказано выше, будем рассматривать сам КА, фазовое состояние которого в каждый момент времени можно охарактеризовать с помощью некоторой вектор-функции вида

$$\mathbf{x}(t): t \in \Delta = [t_0, t_f] \rightarrow \mathbf{R}^7, \quad (1.2.2)$$

где \mathbf{x} – фазовый вектор системы дифференциальных уравнений управляемого движения КА, определяемый (покомпонентно) согласно выражениям (1.1.13) и (1.1.14). Естественно, соответствующие вектор-функции (1.1.13) и (1.1.14) должны одновременно удовлетворять системе уравнений вида

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbf{R}^7, \end{array} \right\} \quad (1.2.3)$$

(дифференциальная связь) описывающей движение динамической системы или объекта (в нашем случае это система дифференциальных уравнений (1.1.5), (1.1.7) или (1.1.8)) на рассматриваемом отрезке времени Δ , а также некоторым ограничениям типа равенств и неравенств, характеризующих, например, само множество U , или определяющих границы фазового пространства системы \mathbf{X} :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{k}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq \mathbf{0}, \end{array} \right\} \quad (1.2.4)$$

где функции $\mathbf{g}: (\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \in \mathbf{X} \times \mathbf{U} \times \Delta \rightarrow \mathbf{R}^p$, $\mathbf{k}: (\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \in \mathbf{X} \times \mathbf{U} \times \Delta \rightarrow \mathbf{R}^q$ обычно полагаются непрерывными вместе с частными производными по своим аргументам \mathbf{g}_x , \mathbf{g}_u и \mathbf{k}_x , \mathbf{k}_u . Кроме того, говоря об ограничениях, налагаемых на пару вектор-функций (\mathbf{x}, \mathbf{u}) , необходимо отметить, что концы траектории динамической системы, рассматриваемой на отрезке времени

Δ должны принадлежать некоторым начальному и конечному многообразию, которые могут быть определены системой условий типа равенств и неравенств:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}, \mathbf{K}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) \leq \mathbf{0}, \\ \mathbf{G}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) = \mathbf{0}, \mathbf{K}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) \leq \mathbf{0}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.5)$$

Здесь $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_f, \mathbf{K}_0, \mathbf{K}_f$ – непрерывные вектор-функции, такие, что

$$\mathbf{G}_0 \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^7, \mathbf{R}^k), \mathbf{G}_f \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^7, \mathbf{R}^l), \mathbf{K}_0 \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^7, \mathbf{R}^p), \mathbf{K}_f \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^7, \mathbf{R}^q),$$

$\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f)$ – фазовый вектор КА (1.1.13) или (1.1.14) (здесь индексы «ОМ» и «ОТ» опущены, т.к. все приведенные соотношения очевидно справедливы в обоих случаях) в моменты времени t_0 и t_f . Тогда пара функций $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ будет определять допустимую траекторию движения КА с ЭРДУ, если, во-первых, она удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (1.1.5), (1.1.7), (1.1.8) (т.е. дифференциальной связи вида (1.2.3)), а во-вторых, условиям вида (1.2.4) и (1.2.5). Функция $\mathbf{x}(t)$ предполагается абсолютно непрерывной на Δ , т.е. $\mathbf{x}(t) \in AC(\Delta, \mathbf{R}^7)$. Обозначим класс допустимых траекторий КА с ЭРДУ, состоящий из всевозможных пар функций $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ символом Λ . Тогда для любого непрерывного и дифференцируемого (по Фреше) функционала (или, по крайней мере, обладающего выпуклым дифференциалом [37, 38]) вида

$$J = F(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_f, \mathbf{x}(t_f)), \quad (1.2.6)$$

его минимум ищется в классе допустимых траекторий Λ , и оптимальная траектория определяется как

$$(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))^* = \arg \min_{\Lambda} J.$$

Функционалы вида (1.2.6) называются терминальными [1, 2, 7, 11, 14, 23, 27, 37, 38, 52]. Забегая вперед, стоит отметить, что в выражении (1.2.6) функция F в подавляющем большинстве интересующих нас случаев является непрерывной вместе со своими частными производными по совокупности своих аргументов, что значительно упрощает все дальнейшие рассуждения.

В качестве основных критериев оптимальности, предъявляемых к траекториям КА с ЭРДУ при решении различных задач оптимизации многовитковых межорбитальных перелетов (рассматриваемых в рамках настоящей работы), будем использовать следующие терминальные функционалы, минимум которых будем искать в классе Λ :

$$J = -m(t_f), \quad (1.2.7)$$

$$J = t_f - t_0, \quad (1.2.8)$$

$$J = P(t_f). \quad (1.2.9)$$

Минимизации функционала вида (1.2.7) соответствует максимизация массы КА в конечный момент времени, что, в свою очередь, часто эквивалентно минимизации затрат топлива на выполнение требуемого маневра. Моменты времени t_0 и t_f , определяющие границы отрезка времени Δ , на котором рассматривается движение КА с ЭРДУ, в данном случае предполагаются зафиксированными, или, по крайней мере, зафиксирован сам отрезок Δ . Функционал (1.2.7) рассматривается для обеих математических моделей функционирования ЭРДУ, и, как будет показано далее, порождает две различные задачи оптимального управления («ОТ» и «ОМ»).

Минимизация функционала вида (1.2.8), очевидно, отвечает минимизации времени перелета КА с ЭРДУ. Другими словами, следуя общепринятой терминологии задач оптимального управления, функционалу (1.2.8) соответствует т.н. задача быстрогодействия. Моменты времени t_0 и t_f в наиболее общем случае предполагаются заданными, т.к. возможны различные варианты постановки задачи оптимизации межорбитального перелета для рассматриваемого функционала (1.2.8), при которых необходимо обеспечить привязку к некоторому истинному (физическому) моменту времени. Например, в том случае, когда при решении задачи быстрогодействия также необходимо определить и оптимальный момент времени старта (конкретную календарную дату и время) КА с некоторой начальной орбиты, параметры которой известны. В случае же рассмотрения более простых межорбитальных перелетов типа орбита-орбита, орбита-заданная неподвижная точка и т.д., при которых краевые условия не являются функциями времени, или же, когда вовсе отсутствует необходимость привязки к реальному физическому времени (большинство модельных задач), выбор значения момента времени t_0 не оказывает влияния на решение задачи. В данном случае момент времени t_0 может быть выбран произвольным; обычно его полагают равным нулю.

Функционалы (1.2.7) – (1.2.8) являются основными критериями качества для рассматриваемых в настоящей работе задач оптимизации траекторий межорбитальных перелетов КА с ЭРДУ. Помимо них, в работе также рассматривается функционал (1.2.9) которому соответствует своя, особая задача оптимизации. Так, решению соответствующей задачи оптимального управления с функционалом (1.2.9) отвечает определение минимально возможного значения тяги ЭРДУ, потребного для осуществления заданного маневра. Подобная задача впервые была рассмотрена автором работ [25, 26], и получила название «задачи о минимальной тяге». Функционал (1.2.9) также будет рассматриваться только для модели нерегулируемого двигателя. Моменты времени t_0 и t_f в данном случае считаются зафиксированными.

Очевидно, что функционалы (1.2.7) – (1.2.8) непрерывны и дифференцируемы, и учитывая приведенные выше общие соображения совершенно ясно, что соответствующая

каждому из них проблема оптимизации траекторий КА с ЭРДУ может быть формализована как отдельная задача оптимального управления. Кроме того, рассмотрение двух разных математических моделей функционирования ЭРДУ (для задач с функционалом (1.2.7)), в свою очередь, также приводит к двум отдельным задачам оптимального управления.

Далее, непосредственно переходим к записи условий оптимальности для рассматриваемых типов задач траекторной оптимизации, используя принцип максимума Понтрягина. Следуя его общему формализму, получим соответствующие выражения оптимального управления для обеих математических моделей функционирования ЭРДУ, вне зависимости от вида конкретного функционала (1.2.7) – (1.2.9). Это, в свою очередь, возможно вследствие рассмотрения задач траекторной оптимизации, формализованных именно в постановке Майера (что представляется весьма удобным в данном конкретном случае, ввиду наличия различных дифференциальных связей). Здесь, правда, важно отметить следующее. Задача определения минимальной потребной тяги (1.2.9), как уже говорилось выше, рассматривается исключительно в контексте модели нерегулируемого двигателя. Вполне очевидно, что ей будет отвечать тот же вид оптимального управления, что и для соответствующих ОТ-задач с функционалами (1.2.7) и (1.2.8). Однако, по своей сути, задача на минимум тяги представляет собой задачу определения оптимального значения одного из параметров системы дифференциальных уравнений, описывающих движение рассматриваемой динамической системы (КА с ЭРДУ) и не являющегося компонентом ее фазового вектора x (1.1.13). Для ее формализации в качестве «обыкновенной» задачи оптимального управления, как и в работах [25, 26], будем использовать подход, впервые предложенный Болтянским, обоснование которого может быть найдено, например, в книге [6]. Суть этого подхода состоит в искусственном расширении фазового вектора x рассматриваемой системы дифференциальных уравнений управляемого объекта, путем присоединения к нему интересующего нас параметра. Таким образом, приходим к обыкновенной задаче оптимального управления, в которой параметр дифференциальной связи рассматривается уже в качестве фазовой координаты, явно входящей в выражение для целевого функционала (1.2.9). Для того, чтобы избежать путаницы и явно подчеркнуть основные свойства задачи на минимум тяги, условия оптимальности для нее будут выписаны отдельно, после рассмотрения соответствующих условий для задач траекторной оптимизации с функционалами (1.2.7) и (1.2.8) для обеих математических моделей функционирования ЭРДУ.

Итак, начнем с модели нерегулируемого двигателя («ОТ»-задача). Компоненты реактивного ускорения в данном случае определяются согласно выражениям (1.1.11), а к системе дифференциальных уравнений в равноденственных элементах присоединяется

уравнение для массы (1.1.7). В качестве управления (1.2.1) в данном случае будем рассматривать следующую тройку функций:

$$\mathbf{u}^{OT}(t) = (\vartheta(t), \psi(t), \delta(t)). \quad (1.2.10)$$

Тогда множество допустимых управлений определяется как

$$U^{OT} \subset \mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{array}{l} (\vartheta(t), \psi(t), \delta(t)) : \forall t \in \Delta \quad \vartheta(t) \in [-180^\circ, 180^\circ], \\ \psi(t) \in [-90^\circ, 90^\circ], \delta(t) \in [0, 1]. \end{array} \right\} \quad (1.2.11)$$

Стоит отметить, что теперь в качестве множества значений, принимаемых параметром δ , рассматривается не пара точек $\{0, 1\}$, а весь отрезок $[0, 1]$. Это облегчает рассмотрение OT задач оптимального управления с методической точки зрения, т.к. в этом случае все управление может быть представлено в «гладкой» форме, т.е. описываться некоторым набором «функциональных» ограничений [16, 37, 38].

Следуя формализму принципа максимума [11, 14, 16, 37, 38], введем функцию Понтрягина $H^{OT}(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}^{OT}(t), \mathbf{u}^{OT}(t), t)$ следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} H^{OT} = H^{OT}_1 + H_2 + H_3 + \psi_l, \\ H^{OT}_1 = \delta \frac{P}{m} [a_1 \sin(\vartheta) \cos(\psi) + a_2 \cos(\vartheta) \cos(\psi) + a_3 \sin(\psi)] - \psi_m \delta \frac{P}{w}, \\ H_2 = a_1 S_\Phi(\mathbf{x}^{OT}, t) + a_2 T_\Phi(\mathbf{x}^{OT}, t) + a_3 W_\Phi(\mathbf{x}^{OT}, t), \\ H_3 = \psi_l \frac{b_1^2}{p^{3/2}}, \end{array} \right\} \quad (1.2.12)$$

где $\boldsymbol{\psi}(t) = (\boldsymbol{\psi}_x(t), \psi_l(t))$ – вектор функция сопряженных переменных (функциональные множители Лагранжа), $\boldsymbol{\psi}(t) \in BV(\Delta, \mathbf{R}^8)$, $\boldsymbol{\psi}_x(t) = (\psi_p(t), \psi_{ex}(t), \psi_{ey}(t), \psi_{ix}(t), \psi_{iy}(t), \psi_l(t), \psi_m(t))^T$, H^{OT}_1 – часть функции Понтрягина, зависящая только от управления $\mathbf{u}^{OT}(t)$, H_2 – часть, содержащая возмущения, H_3 – часть, пропорциональная мгновенному среднему движению КА. Выражения для a_1, a_2, a_3 определяются следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \sqrt{p} (\psi_{e_x} \sin(l) - \psi_{e_y} \cos(l)), \\ a_2 = \sqrt{\frac{p}{b_1}} (2p \psi_p + \psi_{e_x} ((1+b_1) \cos(l) + e_x) + \psi_{e_y} ((1+b_1) \sin(l) + e_y)), \\ a_3 = \sqrt{\frac{p}{b_1}} \left(b_2 (\psi_l - \psi_{e_x} e_y + \psi_{e_y} e_x) + \frac{1}{2} b_3 (\psi_{i_x} \cos(l) + \psi_{i_y} \sin(l)) \right). \end{array} \right\} \quad (1.2.13)$$

В выражениях (1.2.13) b_1, b_2, b_3 определяются согласно (1.1.6).

Оптимальное управление $\mathbf{u}^{OT}(t)^*$ в задачах с нерегулируемым двигателем для всех трех рассматриваемых функционалов (1.2.7) – (1.2.9) одинаково. Оно определяется исходя из следующего условия, являющегося основным из группы т.н. условий максимума [2, 11, 14, 16, 37, 38]:

$$H^{OT}(\boldsymbol{\psi}(t)^*, \mathbf{x}^{OT}(t)^*, \mathbf{u}^{OT}(t), t) \leq H^{OT}(\boldsymbol{\psi}(t)^*, \mathbf{x}^{OT}(t)^*, \mathbf{u}^{OT}(t)^*, t) \quad \forall \mathbf{u}^{OT}(t) \in U^{OT}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{u}^{OT}(t)^* = (\mathcal{G}^*(t), \psi^*(t), \delta^*(t)) = \arg \max_{\mathbf{u}^{OT} \in U^{OT}} H^{OT}_1(\boldsymbol{\psi}_x(t), \mathbf{x}^{OT}(t), \mathbf{u}^{OT}(t), t) \quad \forall t \in \Delta, \quad (1.2.14)$$

т.е. оптимальные значения для углов тангажа $\mathcal{G}(t)$, рысканья $\psi(t)$, а также параметра $\delta(t)$, определяющего режим работы ЭРД, должны обеспечивать максимум функции Понтрягина H^{OT} , в общем случае, почти всюду на Δ . В явном виде выражения для оптимального управления $\mathbf{u}^{OT}(t)^*$ получаются из решения соответствующей задачи нелинейного программирования, отвечающей условию (1.2.14):

$$V(\mathbf{u}^{OT}) = -H^{OT}_1(\mathbf{u}^{OT}) \rightarrow \min_{\mathbf{u}^{OT} \in U^{OT}} V(\mathbf{u}^{OT}). \quad (1.2.15)$$

Для удобства решения последней, можно представить вектор-функцию управления $\mathbf{u}^{OT}(t)$ (1.2.10) следующим образом. Обозначим

$$u_1(t) = \cos(\mathcal{G}(t)), u_2(t) = \sin(\mathcal{G}(t)), u_3(t) = \cos(\psi(t)), u_4(t) = \sin(\psi(t)), \quad (1.2.16)$$

и, тем самым, осуществим переход к новой вектор-функции управления:

$$\mathbf{u}^{OT}_1(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), \delta(t)), \quad \mathbf{u}^{OT}_1(t) : t \in \Delta \rightarrow \mathbf{R}^5. \quad (1.2.17)$$

Тогда множество допустимых управлений U^{OT}_1 , отвечающее (1.2.17), определяется следующим образом:

$$U^{OT}_1 \subset \mathbf{R}^5 = \left\{ (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), \delta(t)) : \begin{aligned} &u_1(t)^2 + u_2(t)^2 = 1, \\ &u_3(t)^2 + u_4(t)^2 = 1, u_3(t) \geq 0, \delta(t) \in [0, 1]. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.18)$$

Очевидно, что полученное множество (1.2.18) полностью соответствует множеству (1.2.11), записанному с использованием функций (1.2.10). Таким образом, приходим к следующей, эквивалентной (1.2.15), задаче нелинейного программирования со смешанными ограничениями типа равенств и неравенств:

$$V(\mathbf{u}^{OT}_1) = -H^{OT}_1(\mathbf{u}^{OT}_1) \rightarrow \min_{\mathbf{u}^{OT}_1 \in U^{OT}_1} V(\mathbf{u}^{OT}_1),$$

решение которой дается следующими выражениями:

$$\begin{pmatrix} u_1(t)^* \\ u_2(t)^* \\ u_3(t)^* \\ u_4(t)^* \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} a_2/\sqrt{a_1^2+a_2^2} \\ a_1/\sqrt{a_1^2+a_2^2} \\ \sqrt{a_1^2+a_2^2}/\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \\ a_3/\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \end{array} \right\}, \quad \Pi \geq 0, \sqrt{a_1^2+a_2^2} \neq 0; \\ \left. \begin{array}{l} \forall(u_1, u_2): u_1^2+u_2^2=1 \\ \forall(u_3, u_4): u_3 > 0, u_3^2+u_4^2=1 \end{array} \right\}, \quad \Pi < 0, \sqrt{a_1^2+a_2^2} \neq 0; \\ \left. \begin{array}{l} \forall(u_1, u_2): u_1^2+u_2^2=1 \\ u_3=0, u_4=\text{sgn}(a_3) \end{array} \right\}, \quad \Pi > 0, \sqrt{a_1^2+a_2^2}=0, a_3 \neq 0; \\ \left. \begin{array}{l} \forall(u_1, u_2): u_1^2+u_2^2=1 \\ u_3=0, u_4=\pm 1 \end{array} \right\}, \quad \Pi = 0, \sqrt{a_1^2+a_2^2}=0; \\ \left. \begin{array}{l} \forall(u_1, u_2): u_1^2+u_2^2=1 \\ \forall(u_3, u_4): u_3 \geq 0, u_3^2+u_4^2=1 \end{array} \right\}, \quad \Pi < 0, \sqrt{a_1^2+a_2^2}=0. \end{array} \right. \quad (1.2.19)$$

$$\delta(t)^* = \begin{cases} 1, & \Pi > 0; \\ 0, & \Pi < 0; \\ \forall \delta \in [0, 1], & \Pi = 0. \end{cases} \quad (1.2.20)$$

Где $\Pi=\Pi(t)$ – функция переключения, определяемая следующим образом:

$$\Pi(t) = \frac{1}{m} \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} - \frac{\Psi_m}{w}. \quad (1.2.21)$$

Выражения (1.2.19) и (1.2.20), как решение соответствующей задачи нелинейного программирования (1.2.15), были получены с использованием необходимых и достаточных условий минимума. Как видно из выражений (1.2.20), функция (1.2.21) определяет оптимальный режим работы двигателя КА с ЭРДУ при его траекторном движении.

Из полученных выражений (1.2.19), следует, что оптимальная ориентация вектора тяги ЭРДУ определяется вдоль траектории движения КА достаточно сложным образом. Однако, большая часть условий и выражений, входящих в (1.2.19), представляет интерес только лишь в случае рассмотрения т.н. особых управлений [14, 23, 27, 31, 37, 38] и, следовательно, соответствующих им особых экстремалей. В рамках настоящей работы особые управления не рассматриваются. Тогда, в соответствии с введенным ранее представлением для вектор-функции управления в виде выражения (1.2.16), получаем:

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\vartheta)^* = a_2/\sqrt{a_1^2+a_2^2} \\ \sin(\vartheta)^* = a_1/\sqrt{a_1^2+a_2^2} \\ \cos(\psi)^* = \sqrt{a_1^2+a_2^2}/\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \\ \sin(\psi)^* = a_3/\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \end{array} \right\} \quad (1.2.22)$$

Окончательно, будем определять оптимальное управление (в рамках рассматриваемой модели нерегулируемого двигателя ограниченной тяги) посредством выражений (1.2.20), (1.2.21) и (1.2.22). Тогда оптимальный гамильтониан H^{OT*} , согласно выражениям (1.2.12) и (1.2.20) определяется следующим образом:

$$H^{OT*} = H^{OT} \left(\boldsymbol{\psi}(t)^*, \mathbf{x}^{OT}(t)^*, \mathbf{u}^{OT}(t)^*, t \right) = \delta^* P \left[\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}}{m} - \frac{\psi_m}{w} \right] + H_2 + H_3 + \psi_t. \quad (1.2.23)$$

Здесь еще раз стоит отметить, что полученное выражение для оптимального гамильтониана (1.2.23) в рамках модели нерегулируемого двигателя будет использовано в ходе дальнейшего изложения только в контексте рассмотрения задач траекторной оптимизации для функционалов (1.2.7) и (1.2.8).

Теперь перейдем к рассмотрению условий оптимальности принципа максимума применительно ко второй модели функционирования ЭРДУ – двигателю ограниченной мощности (ОМ). В данном случае компоненты реактивного ускорения определяются согласно выражениям (1.1.12), а к системе дифференциальных уравнений в равноденственных элементах присоединяется уравнение для массы (1.1.8). В качестве вектор-функции управления (1.2.1) в данном случае будем рассматривать следующую тройку функций:

$$\mathbf{u}^{OM}(t) = (a_r(t), a_n(t), a_b(t)). \quad (1.2.24)$$

Множество допустимых управлений U в этом случае определяется как

$$U^{OM} \equiv \mathbf{R}^3. \quad (1.2.25)$$

Функция Понтрягина $H^{OM}(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}^{OM}(t), \mathbf{u}^{OM}(t), t)$:

$$\left. \begin{aligned} H^{OM} &= H^{OM}_1 + H_2 + H_3 + \psi_t \\ H^{OM}_1 &= a_1 a_r + a_2 a_n + a_3 a_b - \psi_m \frac{m^2 (a_r^2 + a_n^2 + a_b^2)}{2N_r} \\ H_2 &= a_1 S_\Phi(\mathbf{x}^{OM}, t) + a_2 T_\Phi(\mathbf{x}^{OM}, t) + a_3 W_\Phi(\mathbf{x}^{OM}, t) \\ H_3 &= \psi_t \frac{b_1^2}{p^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.26)$$

Вновь используя условие максимума и следствие из него,

$$\left. \begin{aligned} H^{OM} \left(\boldsymbol{\psi}(t)^*, \mathbf{x}^{OM}(t)^*, \mathbf{u}^{OM}(t), t \right) &\leq H^{OM} \left(\boldsymbol{\psi}(t)^*, \mathbf{x}^{OM}(t)^*, \mathbf{u}^{OM}(t)^*, t \right) \quad \forall \mathbf{u}^{OM}(t) \in U^{OM} \\ \mathbf{u}^{OM}(t)^* &= \arg \max_{\mathbf{u}^{OM} \in U^{OM}} H^{OM}_1 \left(\boldsymbol{\psi}_x(t), \mathbf{x}^{OM}(t), \mathbf{u}^{OM}(t), t \right), \end{aligned} \right\}$$

находим выражение для оптимального управления:

$$\left. \begin{aligned} a_r^* &= a_1 \frac{N_r}{m^2 \psi_m} \\ a_n^* &= a_2 \frac{N_r}{m^2 \psi_m} \\ a_b^* &= a_3 \frac{N_r}{m^2 \psi_m} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.27)$$

Тогда оптимальный гамильтониан H^{OM*} , согласно выражениям (1.2.26) и (1.2.27) определяется следующим образом:

$$H^{OM*} = H^{OM}(\boldsymbol{\psi}(t)^*, \mathbf{x}^{OM}(t)^*, \mathbf{u}^{OM}(t)^*, t) = \frac{1}{2} \frac{N_r (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{m^2 \psi_m} + H_2 + H_3 + \psi_t. \quad (1.2.28)$$

Отметим, что полученное выражение (1.2.28) для оптимального гамильтониана в рамках модели двигателя ограниченной мощности будет использовано в ходе дальнейшего изложения только в контексте рассмотрения задач оптимизации межорбитального перелета для функционала (1.2.7).

Исходя из общей теории принципа максимума, полученные выражения (1.2.23) и (1.2.28) также должны отвечать следующему необходимому условию оптимальности. Так, согласно второму условию из группы условий максимума основной теоремы [2, 11, 14, 37, 38], определенный вдоль оптимальной траектории гамильтониан задачи почти всюду на Δ равен нулю (кроме, может быть, отдельного конечного числа множеств нулевой меры). Следовательно, для всех рассматриваемых нами типов задач оптимизации межорбитального перелета, на соответствующих им экстремалях должны выполняться следующие условия:

$$H^{OT*} \equiv 0, \quad H^{OM*} \equiv 0, \quad \forall t \in \Delta. \quad (1.2.29)$$

Далее, согласно каноническому формализму принципа максимума, полученные в явном виде выражения (1.2.23) и (1.2.28) для оптимальных гамильтонианов ОТ и ОМ задачи, позволяют записать соответствующие им дифференциальные уравнения относительно вектор-функции сопряженных переменных $\boldsymbol{\psi}(t)$. Однако, получить выражения для правых частей сопряженной системы дифференциальных уравнений в явном виде весьма непросто, ввиду громоздкости и сложности соответствующих правых частей исходной системы дифференциальных уравнений управляемого возмущенного движения центра масс КА с ЭРДУ (1.1.5) и (1.1.7) (или (1.1.8)). Забегая вперед, отметим, что рассмотрение данного вопроса, связанного с практическим определением правых частей системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА, является одним из ключевых в рамках настоящей работы. Поэтому, приведем соответствующие выражения для сопряженных уравнений в неявном виде, за исключением лишь одного уравнения относительно переменной, сопряженной к безразмерной массе КА. Оно понадобится для анализа ряда возможных особых

случаев решения в рассматриваемых задачах траекторной оптимизации, а также для уточнения «характера» полученного оптимального управления (1.2.20) – (1.2.22) и (1.2.27) вдоль траектории рассматриваемой динамической системы в зависимости от конкретного вида минимизируемого функционала.

Итак, сопряженные уравнения (в неявном виде) в случае рассмотрения модели нерегулируемого двигателя:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_x}{dt} &= -\frac{\partial H^{OT*}}{\partial \mathbf{x}^{OT}} \\ \frac{d\psi_t}{dt} &= -\frac{\partial H^{OT*}}{\partial t}; \end{aligned} \right\} \quad (1.2.30)$$

уравнение для переменной, сопряженной к массе (в явном виде):

$$\frac{d\psi_m}{dt} = \delta \frac{P}{m^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (1.2.31)$$

Аналогично, сопряженные уравнения для модели идеально регулируемого двигателя ограниченной мощности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_x}{dt} &= -\frac{\partial H^{OM*}}{\partial \mathbf{x}^{OM}} \\ \frac{d\psi_t}{dt} &= -\frac{\partial H^{OM*}}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.32)$$

и, соответственно,

$$\frac{d\psi_m}{dt} = \frac{N_r (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{m^3 \psi_m}. \quad (1.2.33)$$

Стоит отметить, что полученные уравнения (1.2.31) и (1.2.33) относительно сопряженной к массе переменной записаны в предположении, что выражения (1.1.3), описывающие компоненты возмущающих ускорений, тождественно равны нулю или не содержат (в качестве переменной) текущую безразмерную массу КА. Следовательно, полученные уравнения (1.2.31) и (1.2.33) справедливы, во-первых, при рассмотрении задач траекторной оптимизации без учета действия возмущений, а во-вторых, когда с учетом рассматриваемой модели возмущений

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} \equiv 0.$$

Эти два случая, фактически, и являются основными рассматриваемыми в настоящей работе. Однако, несколько забегаая вперед, необходимо особо отметить, что в общем случае при решении возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ выполнение последнего условия все же *не требуется*, т.к. формально, оно может оказывать влияние только на особые решения (анормальный случай, особые экстремали или

тривиальные экстремали) задачи, что будет видно из дальнейшего анализа в рамках текущего раздела настоящей главы. Особые решения не представляют для нас никакого практического интереса, поэтому приведенное ранее условие не уменьшает общности предлагаемой в диссертационной работе методики решения возмущенных задач. Более подробно об используемой модели возмущений также будет сказано в рамках настоящей главы в ходе последующего изложения.

К полученным выражениям для оптимального управления (1.2.20) - (1.2.22), и (1.2.27), оптимального гамильтониана (1.2.23) и (1.2.28) и сопряженной системы (1.2.30) и (1.2.32), согласно основной теореме принципа максимума [2, 11, 14, 37, 38], необходимо добавить условия трансверсальности, неотрицательности и нетривиальности. Для того, чтобы записать эти условия в явном виде, необходимо сформулировать т.н. концевой блок рассматриваемой задачи оптимального управления, т.е. явно задать некоторый набор ограничений типа равенств и неравенств, определяющих терминальные многообразия вида (1.2.5) к которым будут принадлежать концы рассматриваемых траекторий КА с ЭРДУ. Однако, ввиду того, что в рамках настоящей работы рассматриваются различные варианты задач оптимизации многовиткового межорбитального перелета, которые могут существенно отличаться между собой краевыми условиями, на данном этапе рассмотрения представляется удобным определять терминальные многообразия в виде (1.2.5), при этом ограничившись лишь той необходимой степенью детализации их рассмотрения, при которой удастся выявить основные (общие) свойства решений соответствующих функционалам (1.2.7) и (1.2.8) задач оптимального управления.

Итак, составим концевую функцию Лагранжа (терминант), отвечающую рассматриваемым задачам с функционалами (1.2.7) и (1.2.8). Естественно, ее вид никак не зависит от типа используемой дифференциальной связи, и, следовательно, следующие выражения являются общими для обеих моделей функционирования ЭРДУ. Для функционала (1.2.7), терминант определяется как

$$l_m = -\alpha_0 m(t_f) + \lambda_0^T \mathbf{G}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \lambda_f^T \mathbf{G}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \left. \begin{aligned} &+ \alpha_1^T \mathbf{K}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \alpha_2^T \mathbf{K}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.34)$$

а для функционала (1.2.8)

$$l_T = \alpha_0 (t_f - t_0) + \lambda_0^T \mathbf{G}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \lambda_f^T \mathbf{G}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \left. \begin{aligned} &+ \alpha_1^T \mathbf{K}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \alpha_2^T \mathbf{K}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) \end{aligned} \right\}. \quad (1.2.35)$$

В приведенных выражениях (1.2.34) и (1.2.35) числа α_0 и вектора α_1 , α_2 , λ_0 , λ_f есть числовые множители Лагранжа при функционале и соответствующих ограничениях типа равенств и неравенств вида (1.2.5), описывающих терминальные многообразия, которым должны

принадлежать концы оптимальных траекторий. Для числовых множителей Лагранжа, в контексте рассматриваемых в настоящей работе задач оптимального управления, должны выполняться следующие (очевидные) условия принадлежности:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 \in \mathbf{R}^1, \quad \lambda_0 = (\lambda_{0_1}, \lambda_{0_2}, \dots, \lambda_{0_k})^T \in \mathbf{R}^k, \quad \lambda_f = (\lambda_{0_1}, \lambda_{0_2}, \dots, \lambda_{0_l})^T \in \mathbf{R}^l, \\ \mathbf{a}_1 = (\alpha_{1_1}, \alpha_{1_2}, \dots, \alpha_{1_p})^T \in \mathbf{R}^p, \quad \mathbf{a}_2 = (\alpha_{2_1}, \alpha_{2_2}, \dots, \alpha_{2_q})^T \in \mathbf{R}^q, \end{aligned} \right\}$$

где числа $k, l, p, q \in N_+ \setminus \{0\}$ определяют число скалярных равенств и неравенств, описывающих ограничения конечного блока. Здесь сразу стоит отметить, что для рассматриваемых в настоящей работе задач оптимизации многовитковых межорбитальных перелетов в подавляющем большинстве случаев краевые условия вида (1.2.5) записываются весьма просто. Так, например, для случая рассмотрения задачи межорбитального перелета между двумя фиксированными орбитами, параметры которых известны (перелет типа «орбита-орбита»), терминальные многообразия описываются следующей четверткой вектор функций, множество нулей которых, полностью определяет набор краевых условий для системы дифференциальных уравнений (1.1.5) и (1.1.7) (или (1.1.8)):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_0(t_0, \boldsymbol{\beta}(t_0)) = \boldsymbol{\beta}(t_0) - \hat{\boldsymbol{\beta}}_0, \quad \mathbf{G}_f(t_f, \boldsymbol{\beta}(t_f)) = \boldsymbol{\beta}(t_f) - \hat{\boldsymbol{\beta}}_f, \quad \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_f \equiv \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\beta}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) \setminus \{l\}, \quad \boldsymbol{\beta}(t_f) = \mathbf{x}(t_f) \setminus \{l, m\}, \quad \boldsymbol{\beta}(t_0), \hat{\boldsymbol{\beta}}_0 \in \mathbf{R}^6, \quad \boldsymbol{\beta}(t_f), \hat{\boldsymbol{\beta}}_f \in \mathbf{R}^5, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.36)$$

где $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0, \hat{\boldsymbol{\beta}}_f$ - вектора, содержащие значения известных компонентов фазового вектора КА в начальный и конечный моменты времени. При рассмотрении задач траекторной оптимизации с более сложными краевыми условиями, в ходе последующего изложения, их конечной блок будет представлен в явном виде. Однако, можно выделить как минимум одно условие, характеризующее фазовое состояние КА с ЭРДУ, которое является общим для всех рассматриваемых в настоящей работе постановок задач с функционалами (1.2.7) и (1.2.8). Оно состоит в том, что безразмерная масса КА на правом конце траектории межорбитального перелета во всех случаях заранее не задается, и определяется непосредственно при решении соответствующих задач оптимизации. Данное условие, сформулированное пока несколько «размыто» и четко не формализованное, тем не менее способствует определению ряда свойств в рассматриваемых задачах оптимизации межорбитального перелета (для функционалов (1.2.7) и (1.2.8)), касающихся непосредственно характера полученного оптимального управления вдоль траектории перелета, а также ряда следствий из условий оптимальности, необходимых при окончательной формулировке краевой задачи принципа максимума. Для того, чтобы подчеркнуть их, запишем условия трансверсальности в общем виде, но с учетом условия для массы КА на правом конце. В случае рассмотрения функционала (1.2.7) они могут быть записаны следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \psi_\eta(t_0) &= \frac{\partial l_m}{\partial \eta} \Big|_{t_0}, \quad \psi_\eta(t_f) = \frac{\partial l_m}{\partial \eta} \Big|_{t_f}, \quad \eta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y, l\}, \\ \psi_m(t_0) &= \frac{\partial l_m}{\partial m} \Big|_{t_0}, \quad \psi_m(t_f) = -\frac{\partial l_m}{\partial m} \Big|_{t_f} = \alpha_0, \\ \psi_t(t_0) &= \frac{\partial l_m}{\partial t_0}, \quad \psi_t(t_f) = -\frac{\partial l_m}{\partial t_f}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.37)$$

Для функционала (1.2.8) (задача быстродействия):

$$\left. \begin{aligned} \psi_\eta(t_0) &= \frac{\partial l_T}{\partial \eta} \Big|_{t_0}, \quad \psi_\eta(t_f) = \frac{\partial l_T}{\partial \eta} \Big|_{t_f}, \quad \eta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y, l\}, \\ \psi_m(t_0) &= \frac{\partial l_T}{\partial m} \Big|_{t_0}, \quad \psi_m(t_f) = -\frac{\partial l_T}{\partial m} \Big|_{t_f} = 0, \\ \psi_t(t_0) &= -\alpha_0 + \frac{\partial}{\partial t_0} (\lambda_0^T \mathbf{G}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \alpha_1^T \mathbf{K}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0))), \\ \psi_t(t_f) &= -\alpha_0 - \frac{\partial}{\partial t_f} (\lambda_f^T \mathbf{G}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \alpha_2^T \mathbf{K}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f))). \end{aligned} \right\} \quad (1.2.38)$$

Присоединим к ним условия неотрицательности

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &\geq 0, \\ \alpha_{i_j} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ \alpha_{2_j} &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \right\}, \quad (1.2.39)$$

и нетривиальности [2, 14, 16, 23, 27, 37, 38, 52]

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_{i_j} + \sum_{j=1}^q \alpha_{2_j} + \|\lambda_0\|_E + \|\lambda_f\|_E > 0. \quad (1.2.40)$$

К которым, в случае наличия в конечном блоке задачи ограничений типа неравенств должны быть добавлены также условия дополняющей нежесткости в виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^T \mathbf{K}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) &= \mathbf{0}, \\ \alpha_2^T \mathbf{K}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.41)$$

С точки зрения общей теории, условия (1.2.39) - (1.2.41) замыкают систему необходимых условий оптимальности в общей регулярной задаче оптимального управления - согласно основной теореме принципа максимума [2, 14, 16, 23, 27, 37, 38]. В приведенных (в неявном виде) выражениях для условий трансверсальности (1.2.37) и (1.2.38), соответствующих функционалам (1.2.7) и (1.2.8), в явном виде содержатся условия, определяющие значения сопряженной к массе переменной на правом конце оптимальной траектории. Отсюда видно, что при рассмотрении различных постановок задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ для функционала вида (1.2.8) (задача быстродействия), независимо от вида

конкретных краевых условий сопряженная к массе переменная всегда должна быть равна нулю на момент времени окончания перелета. А для задач с функционалом вида (1.2.7) ее значение определяется числовым множителем Лагранжа α_0 , который должен удовлетворять условию неотрицательности (1.2.39), и возможность выбора которого, в свою очередь, обеспечит нормировку сопряженных переменных, что является необходимым для замыкания соответствующей краевой задачи принципа максимума.

Исходя из полученных свойств для сопряженной к массе переменной, можно качественно уточнить характер оптимального управления вида (1.2.20) – (1.2.22) для задач быстрогодействия, рассматриваемых в рамках модели нерегулируемого двигателя ограниченной тяги. Обратимся к выражению (1.2.21), описывающему функцию переключения $\Pi(t)$, характеризующую текущий режим работы ЭРДУ, а также к дифференциальному уравнению для сопряженной к массе переменной (1.2.31). Вполне очевидно, что правая часть последнего может принимать всегда только неотрицательные значения. Следовательно, сопряженная к массе переменная представляет собой монотонно неубывающую на отрезке времени Δ функцию, значение которой на его правом конце всегда равно нулю. Отсюда следует, что сопряженная к массе переменная вдоль оптимального решения или отрицательна всюду на полуинтервале $[t_0, t_f)$, или тождественно равна нулю всюду на Δ . Тогда в первом случае, функция переключения $\Pi(t)$ согласно выражению (1.2.21) может принимать только положительные значения на рассматриваемом отрезке времени Δ . И согласно полученным выражениям для оптимального управления (1.2.20), параметр δ , характеризующий работу ЭРД, всюду вдоль рассматриваемой оптимальной траектории равен единице, т.е. двигатель КА всегда включен. Во втором случае, когда $\psi_m(t)=0$ всюду на Δ , функция переключения может принимать на рассматриваемом отрезке времени только значения равные нулю, согласно выражениям (1.2.21) и (1.2.31). Что приводит в данном случае к необходимости рассмотрения возможности т.н. особых управлений, а это, как уже было оговорено ранее, выходит за рамки настоящей работы. Однако стоит отметить, что сама возможность реализации подобного особого режима управления вдоль всей оптимальной траектории маловероятна, т.к. при этом необходимо, (опять же, согласно выражениям (1.2.21) и (1.2.31)), одновременное выполнение следующей группы условий:

$$\Pi = 0, \quad \dot{\Pi} = 0, \quad \forall t \in \Delta, \quad (1.2.42)$$

где (1.2.42), условия, соответствующие участку особого управления, а также

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \equiv 0, \quad (1.2.43)$$

которое должно выполняться на всем рассматриваемом отрезке времени, т.к. $\dot{\psi}_m \equiv 0$ (вплоть до производных старшего порядка). Из последнего, в свою очередь вытекает, что

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dot{a}_1 = \dot{a}_2 = \dot{a}_3 = \dots \equiv 0. \quad (1.2.44)$$

И тут остается совсем немного вариантов для рассмотрения, т.к. в силу (1.2.43) и согласно выражениям (1.2.44), получаем, что если такая особая экстремаль и возможна, то скорее всего, она окажется тривиальной, т.е. для которой не выполнены условия (1.2.40) и, следовательно, $\|\Psi\|_{BV}=0$ вдоль рассматриваемой экстремали. А такие решения не представляют никакого практического интереса. Таким образом, для любых рассматриваемых в настоящей работе постановок задач траекторной оптимизации на минимизацию времени перелета, результирующие оптимальные траектории КА с ЭРДУ не будут иметь пассивных участков движения.

Продолжая качественное рассмотрение задач траекторной оптимизации для функционала (1.2.8), приведем здесь также общий вид необходимых условий оптимальности для всех вариантов задач быстрогодействия, рассматриваемых в настоящей работе. Используя соответствующее условие максимума (1.2.29) для модели нерегулируемого двигателя совместно с условиями трансверсальности (1.2.38) для сопряженной переменной ψ_t , удастся получить необходимые условия оптимальности для определения оптимальных значений моментов времени t_0 и t_f в общем виде. Для удобства их представления перепишем условие максимума (1.2.29) в следующем виде:

$$H^{OT*} = \underbrace{\delta P \left[\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}}{m} - \frac{\psi_m}{w} \right]}_{H^{OT*}} + H_2 + H_3 + \psi_t = H^{OT*} + \psi_t \equiv 0 \quad \forall t \in \Delta. \quad (1.2.45)$$

Тогда, в соответствии с введенным в выражении (1.2.45) обозначением H^{OT*} , получаем следующие условия оптимальности на границах отрезка времени Δ :

$$\left. \begin{aligned} H^{OT*} - \alpha_0 + \frac{\partial}{\partial t_0} \left(\lambda_0^T \mathbf{G}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \alpha_1^T \mathbf{K}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) \right) \Big|_{t_0} &= 0, \\ H^{OT*} - \alpha_0 - \frac{\partial}{\partial t_f} \left(\lambda_f^T \mathbf{G}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \alpha_2^T \mathbf{K}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) \right) \Big|_{t_f} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.46)$$

Полученные условия (1.2.46), как правило, могут быть существенно упрощены при рассмотрении конкретных постановок задач траекторной оптимизации с функционалом (1.2.8), что будет показано в ходе дальнейшего изложения. Здесь также необходимо принять во внимание следующее. В рамках настоящей работы, при наиболее общем случае рассмотрения задачи оптимизации межорбитального перелета, предполагается, что система дифференциальных уравнений управляемого возмущенного движения КА не является автономной, т.е. ее правые части зависят от времени (согласно выражениям (1.1.3)). Следовательно, правая часть дифференциального уравнения для ψ_t отлична от нуля (1.2.30), и

сопряженная ко времени переменная в общем случае не является константой на рассматриваемом отрезке времени Δ . Значения ψ_t на концах этого отрезка определяются, согласно условиям трансверсальности (1.2.38), с точностью до постоянной α_0 - множителя, при функционале (1.2.8) задачи, выбор которого в соответствии с условием нетривиальности (1.2.40) обеспечивает нормировку сопряженных переменных. Прочие же числовые множители Лагранжа, входящие в выражения (1.2.46), как правило исключаются из рассмотрения с помощью следствий из условий трансверсальности при окончательной редукции задачи оптимального управления к краевой задаче принципа максимума, либо не оказывают влияния на ее решение. Таким образом, сама по себе функция $\psi_t(t)$ может быть полностью исключена из рассмотрения при решении задач траекторной оптимизации для функционала (1.2.8), т.к. она не входит ни в полученные выражения для оптимального управления (1.2.20) – (1.2.22), ни в правые части системы дифференциальных уравнений относительно компоненты вектор-функции ψ_x (1.2.30). При этом используется лишь информация о ее значениях на концах отрезка Δ , определяемых с точностью до постоянной α_0 , формализованная в виде условий (1.2.46). В качестве значения нормирующего множителя, для всех рассматриваемых постановок задач оптимизации межорбитального перелета с функционалом (1.2.8) примем

$$\alpha_0 = 1. \quad (1.2.47)$$

Выбор же $\alpha_0=0$ в качестве значения нормирующего множителя приводит к необходимости рассмотрения случая возможности существования т.н. аномального решения [1, 2, 11, 27, 37], которое для большинства задач в постановке быстрогодействия или не существует вовсе, т.к. сводится к тривиальной экстремали $\|\psi\|_{BV}=0$ (что в рассматриваемом случае ввиду сложности ограничений (1.2.3) – (1.2.4) может быть проверено посредством попытки численного решения задачи), или же, в редких случаях, существует лишь для некоторого особого конечного набора параметров дифференциальной связи (1.2.3) и краевых условий задачи, а потому, не представляет никакого практического интереса. Забегая вперед, стоит также отметить, что нормировка (1.2.47) оказывается достаточно удобной при численном решении краевой задачи, т.к. она обеспечивает практически равное масштабирование для ее неизвестных параметров.

Теперь обратимся к общему качественному рассмотрению задач оптимизации для функционала вида (1.2.7). Начнем со случая модели нерегулируемого двигателя ограниченной тяги, оптимальное управление для которого определяется согласно выражениям (1.2.20) и (1.2.22). Из представленных выше условий трансверсальности (1.2.37) следует, что значение сопряженной к массе переменной на правом конце траектории определяется путем соответствующего задания множителя Лагранжа при функционале задачи α_0 , который, в свою очередь, как уже было сказано выше, должен удовлетворять условию неотрицательности (1.2.39). Более того, выбор значения данного множителя непосредственно определяет

нормировку сопряженных переменных в рассматриваемой задаче для функционала (1.2.7). Поэтому в первую очередь необходимо проверить допустимость той или иной возможной нормировки. Сделать это не представляет особого труда. Итак, в качестве значения нормирующего множителя α_0 , согласно условию неотрицательности, можно выбрать любое положительное число или ноль. Если принять рассматриваемый множитель равным положительной постоянной, то согласно условию трансверсальности (1.2.37), функции переключения (1.2.21) и дифференциального уравнения относительно сопряженной к массе переменной (1.2.31), всюду на оптимальном решении всегда $\psi_m(t)$ или монотонно не убывает на Δ , или в крайнем случае, остается равной самой этой постоянной. При этом, очевидно, что в данном случае на рассматриваемых экстремалих $\|\psi\|_{BV} \neq 0$, т.е. не нарушаются условия нетривиальности (1.2.40). Таким образом, использование в качестве значения нормирующего множителя положительной постоянной возможно. Ее значение может быть задано произвольным положительным числом - это никак не повлияет на решение рассматриваемой задачи ввиду линейности и однородности системы дифференциальных уравнений относительно сопряженных переменных (а также и гамильтониана задачи). Что же касается характера оптимального управления, определяемого в рассматриваемом случае выражениями (1.2.20), (1.2.22), то согласно приведенным рассуждениям, а также выражению (1.2.21), функция переключения $\Pi(t)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, что в свою очередь обеспечивает наличие как пассивных, так и активных участков движения КА вдоль оптимальной траектории межорбитального перелета. Если же принять множитель α_0 равным нулю, то в случае выбора такой нормировки, непосредственно приходим к рассмотрению возможности существования аномального решения данной задачи, т.е. решения, не зависящего от минимизируемого функционала (1.2.7), но удовлетворяющего (если, конечно, оно существует) всем условиям вида (1.2.3) – (1.2.5). В подавляющем большинстве случаев, такие решения не представляют практического интереса, т.к. даже если они существуют, то могут удовлетворить (1.2.3) – (1.2.5) лишь в случае, например, задания какого-то ограниченного набора из очень специфических краевых условий (что известно из теории [2, 14] и может быть без труда продемонстрировано на примерах для более простых задач). В контексте же рассматриваемой задачи, согласно выражению (1.2.31), если аномальные решения и существуют, то на них сопряженная к массе переменная всюду вдоль экстремали отрицательна, за исключением только лишь одной точки, соответствующей правой границе отрезка Δ . Тогда функция переключения (1.2.21) всюду неотрицательна, и, следовательно, возможным аномальным решениям задачи будут соответствовать экстремали, на которых или полностью отсутствуют пассивные участки траектории КА (как и для случая функционала (1.2.8)), или же данные экстремали будут особыми (т.е. отвечающими

некоторому особому управлению), или же попросту будут сводиться к тривиальным $\|\Psi\|_{BV}=0$ (что в рассматриваемом случае можно непосредственно проверить при попытке численного решения задачи). Определение таких аномальных решений представляется весьма сложной задачей и выходит за рамки рассмотрения настоящей работы. Если же при рассмотрении возможности нормировки $\alpha_0=0$ предположить, что $\psi_m(t)=0$ всюду на Δ , то согласно условиям и выражениям (1.2.31), (1.2.42) и (1.2.43), вновь приходим к случаю тривиальной экстремали $\|\Psi\|_{BV}=0$. Таким образом, окончательно, для всех рассматриваемых в настоящей работе постановок ОТ-задач траекторной оптимизации для функционала вида (1.2.7), в качестве значения нормирующего множителя примем, как и в случае задачи быстрогодействия $\alpha_0=1$. Выбор данного значения для нормирующего множителя Лагранжа также обеспечивает удобное масштабирование неизвестных параметров краевой задачи принципа максимума при ее численном решении.

Для задач оптимизации межорбитального перелета с функционалом (1.2.7) при использовании модели идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности оптимальное управление и оптимальный гамильтониан определяются выражениями (1.2.27) и (1.2.28), а условия трансверсальности (1.2.37). Согласно условиям (1.2.37), как и в случае модели нерегулируемого двигателя ограниченной тяги, значение сопряженной к массе переменной на правом конце отрезка Δ также определяется путем задания соответствующего значения нормирующего множителя Лагранжа α_0 при функционале задачи. Покажем, что в данном случае, использовать в качестве нормировки $\alpha_0=0$ нельзя, и, следовательно, аномальное решение не существует. Для этого обратимся сначала к дифференциальным уравнениям относительно массы (1.1.8) и сопряженной к ней переменной (1.2.33) (естественно, предполагая их рассмотрение вдоль оптимального решения задачи). Правые части обоих уравнений содержат одинаковый множитель вида $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$ в равной степени, в котором a_1, a_2, a_3 определяются согласно выражениям (1.2.13). В данные выражения (1.2.13) не входят ни безразмерная масса КА, ни сопряженная к ней переменная. Поэтому, рассматривая отдельно от прочих дифференциальные уравнения относительно m и ψ_m , легко удастся исключить из них множитель $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$, а, следовательно, и другие фазовые и сопряженные им переменные. Для этого достаточно всего лишь перейти к рассмотрению сопряженной к массе переменной ψ_m как функции от текущей безразмерной массы КА (можно и наоборот). Тогда приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно ψ_m :

$$\frac{d\psi_m}{dm} = \left(\frac{d\psi_m}{dt} \right) \cdot \left(\frac{dt}{dm} \right) = \left(\frac{N_r (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{m^3 \psi_m} \right) / \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{N_r (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{m^2 \psi_m^2} \right) = -\frac{\psi_m}{2m}.$$

Решение данного дифференциального уравнения может быть представлено в следующем виде:

$$\psi_m m^2 = const. \quad (1.2.48)$$

Оно представляет собой один из известных первых интегралов для рассматриваемой задачи оптимального управления с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности, полученный впервые Ирвингом [79] и отмеченный также в работах [47, 49]. Будем использовать соотношение (1.2.48) при анализе возможности аномального решения. Итак, предполагая, что масса КА в конечный момент времени всегда представляет собой некоторое конечное положительное число, и при $\alpha_0=0$ сопряженная переменная ψ_m на правом конце отрезка Δ также равна нулю (согласно условиям трансверсальности (1.2.37)), то из выражения (1.2.48) следует, что вдоль полученной экстремали всюду выполняется условие

$$\psi_m m^2 = 0 \quad \forall t \in \Delta. \quad (1.2.49)$$

Последнее оказывается возможным только при

$$\psi_m(t) \equiv 0, \quad (1.2.50)$$

всюду вдоль оптимальной траектории, исходя из «физического» предположения о том, что безразмерная масса КА, изменяясь или оставаясь постоянной при межорбитальном перелете всюду может принимать только конечные положительные значения. Подобного рода экстремаль будет возможна лишь при одновременном выполнении условия (1.2.50) и следствий из него:

$$\dot{\psi}_m = \ddot{\psi}_m = \dots = 0 \quad t \in \Delta,$$

что с учетом (1.2.33) вновь приводит к условиям (1.2.43), из которых (наиболее вероятно) следует, что $\psi_x=0$. Здесь стоит отметить, что согласно выражениям (1.2.27) оптимальное управление в данном случае или вовсе не определено, или не является допустимым (согласно (1.2.25)). Далее, из условия максимума (1.2.29) следует, что всюду на рассматриваемой экстремали $\psi_t=0$. Тогда полученная экстремаль тривиальна, т.е. $\|\psi\|_{BV}=0$. И, следовательно, аномальное решение в рассматриваемой задаче траекторной оптимизации невозможно, а нормировка $\alpha_0=0$ неприменима. Итак, окончательно, в случае рассмотрения задач оптимизации межорбитального перелета для функционала (1.2.7) и модели идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности будем использовать ту же нормировку (1.2.47), что и в случае рассмотрения модели нерегулируемого двигателя ограниченной мощности.

Стоит также отметить, что при рассмотрении задач траекторной оптимизации с функционалом (1.2.7) для обеих применяемых математических моделей функционирования ЭРДУ, дифференциальное уравнение относительно сопряженной ко времени переменной ψ_t , а

также соответствующие ей краевые условия вида (1.2.37), могут быть исключены из рассмотрения при решении краевой задачи принципа максимума. Это следует исходя из тех же общих соображений, что уже были приведены выше для случая различных постановок задач быстрогодействия. Что же касается условий трансверсальности в целом, то полученные в общем виде выражения (1.2.37) и (1.2.38) и следствия из них каждый раз будут представлены в явном виде и подробно проанализированы в ходе последующего изложения, при рассмотрении каждой конкретной постановки задачи траекторной оптимизации межорбитального перелета с функционалами (1.2.7) и (1.2.8), различающихся между собой краевыми условиями вида (1.2.5).

Теперь переходим к рассмотрению задачи оптимизации межорбитального перелета с функционалом (1.2.9). Выше вкратце уже обсуждались некоторые основные особенности, характерные только для этой задачи. Главной из них является следующая: задача на минимум тяги [25, 26] формально представляет собой задачу определения оптимального значения параметра дифференциальной связи, формирующей ограничение вида (1.2.3) в рассматриваемой задаче оптимизации динамической системы (КА). И в качестве целевого функционала данной задачи непосредственно выступает сам рассматриваемый параметр. Для формализации данной задачи в качестве классической регулярной задачи оптимального управления «понтрягинского» типа, будем использовать общий подход, рассмотренный в работах [25, 26], теоретические основы которого могут быть найдены в книгах [2, 5, 6]. Суть данного подхода состоит в искусственном расширении фазового вектора x системы дифференциальных уравнений динамической системы или объекта отвечающей ограничению вида (1.2.3), путем присоединения к нему в качестве $n+1$ -ой компоненты того самого неизвестного параметра, оптимальное значение которого должно определяться в результате решения рассматриваемой задачи оптимизации и входящего, в наиболее общем случае, в ограничения вида (1.2.3) – (1.2.5) и целевой функционал. Таким образом обеспечивается формализация этой задачи как задачи оптимального управления. В рассматриваемом в рамках настоящей работы случае в качестве неизвестного параметра дифференциальной связи, к определению которого сводится соответствующая задача траекторной оптимизации для функционала (1.2.9), очевидно, выступает тяга ЭРДУ.

Итак, следуя изложенному выше подходу, добавим к системе дифференциальных уравнений (1.1.5) и (1.1.7), описывающих управляемое возмущенное движения КА, следующее формальное условие в виде дифференциального уравнения относительно безразмерной тяги ЭРДУ:

$$\frac{dP}{dt} = 0 \quad \forall t \in \Delta. \quad (1.2.51)$$

Данное уравнение (1.2.51), очевидно, отвечает базовому (в рамках настоящей работы) предположению о неизменности значения параметра P на решениях рассматриваемой динамической системы в случае использования модели нерегулируемого двигателя ограниченной тяги. Тогда фазовый вектор новой «расширенной» системы дифференциальных уравнений (1.1.5), (1.1.7) и (1.2.51):

$$\mathbf{x}_1 \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^{7+1}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1^{OT} = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, l, m^{OT}, P)^T. \quad (1.2.52)$$

Теперь вновь можно воспользоваться принципом максимума. Функция Понтрягина рассматриваемой задачи:

$$\left. \begin{aligned} H_P^{OT} &= H_P^{OT_1} + H_2 + H_3 + \psi_t, \\ H_P^{OT_1} &= \delta \frac{P}{m} [a_1 \sin(\vartheta) \cos(\psi) + a_2 \cos(\vartheta) \cos(\psi) + a_3 \sin(\psi)] - \psi_m \delta \frac{P}{w} + \psi_P \frac{dP}{dt}. \end{aligned} \right\} (1.2.53)$$

В приведенном выражении (1.2.53) H_2 и H_3 определяются также, как и в (1.2.12) или (1.2.26). Часть функции Понтрягина $H_P^{OT_1}$, зависящая от управления U^{OT} , содержит слагаемое в виде произведения сопряженной к новой фазовой переменной P функции и правой части уравнения (1.2.51), очевидно, равное нулю. Следовательно, $H_P^{OT_1} = H^{OT_1}$, и оптимальное управление в рассматриваемой задаче также определяется выражениями (1.2.20) – (1.2.22), а оптимальный гамильтониан совпадает с (1.2.23). Таким образом, часть полученных условий оптимальности в задаче с функционалом (1.2.9) полностью совпадает с уже рассмотренными ранее условиями для соответствующих задач с функционалами (1.2.7) и (1.2.8). Однако, не стоит забывать, что фазовый вектор системы дифференциальных уравнений управляемого объекта в рассматриваемом случае определяется выражением (1.2.52). Ему будет отвечать следующая вектор-функция сопряженных переменных:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(t) &= (\Psi_{x_1}(t), \psi_t(t)), \quad \Psi_{x_1}(t) = \{\psi_\beta(t)\}^T, \\ \Psi_1(t) &\in BV(\Delta, \mathbf{R}^8), \quad \beta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y, l, m, P\}, \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Psi_{x_1}}{dt} &= -\frac{\partial H_P^{OT*}}{\partial \mathbf{x}_1^{OT}} \\ \frac{d\psi_t}{dt} &= -\frac{\partial H_P^{OT*}}{\partial t}. \end{aligned} \right\}$$

Дифференциальное уравнение относительно сопряженной к массе переменной в рассматриваемом случае, очевидно, совпадает с (1.2.31). Выпишем дифференциальное уравнение относительно сопряженной к безразмерной тяге переменной в явном виде:

$$\frac{d\psi_P}{dt} = -\delta \left[\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}}{m} - \frac{\psi_m}{w} \right], \quad (1.2.54)$$

оно будет использовано в дальнейшем при проведении качественного анализа рассматриваемой задачи. Стоит отметить, что уравнение (1.2.54) фактически содержит в своей правой части выражение описывающее функцию переключения (1.2.21), и не зависящее от самой сопряженной переменной.

Концевая функция Лагранжа в рассматриваемой задаче записывается следующим, эквивалентным (1.2.34) и (1.2.35) образом:

$$l_P = \alpha_0 P(t_f) + \lambda_0^T \mathbf{G}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \lambda_f^T \mathbf{G}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \left. \begin{aligned} &+ \alpha_1^T \mathbf{K}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)) + \alpha_2^T \mathbf{K}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)) + \\ &+ \alpha_P(-P(t_0)) + \alpha_{P_{\max}}(P(t_0) - P_{\max}), \end{aligned} \right\} \quad (1.2.55)$$

где условия концевого блока также представлены в «разделенном» виде. В приведенном выражении для терминанта (1.2.55) присутствуют физически обоснованные ограничения типа неравенства, фактически налагаемые на неизвестный параметр задачи P , которые определяют область допустимых значений тяги ЭРД в соответствии с рассматриваемой моделью нерегулируемого двигателя:

$$P \in [0, P_{\max}]. \quad (1.2.56)$$

Учет правой границы отрезка (1.2.56) необходим, т.к. величина тяги всегда предполагается конечной. Тогда условия трансверсальности запишутся как

$$\left. \begin{aligned} \psi_\eta(t_0) &= \frac{\partial l_P}{\partial \eta} \Big|_{t_0}, \quad \psi_\eta(t_f) = \frac{\partial l_P}{\partial \eta} \Big|_{t_f}, \quad \eta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y, l\}, \\ \psi_m(t_0) &= \frac{\partial l_P}{\partial m} \Big|_{t_0}, \quad \psi_m(t_f) = -\frac{\partial l_P}{\partial m} \Big|_{t_f} = 0, \\ \psi_P(t_0) &= \frac{\partial l_P}{\partial P} \Big|_{t_0} = -\alpha_P + \alpha_{P_{\max}}, \quad \psi_P(t_f) = -\frac{\partial l_P}{\partial P} \Big|_{t_f} = -\alpha_0, \\ \psi_t(t_0) &= \frac{\partial l_P}{\partial t_0}, \quad \psi_t(t_f) = -\frac{\partial l_P}{\partial t_f}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.57)$$

В соответствии с основной теоремой принципа максимума, условия трансверсальности (1.2.57) также должны быть дополнены условиями неотрицательности, нетривиальности и дополняющей нежесткости. В соответствии с выражениями (1.2.55) и (1.2.56), ранее записанные условия неотрицательности (1.2.39) дополняются двумя условиями

$$\alpha_P \geq 0, \quad \alpha_{P_{\max}} \geq 0, \quad (1.2.58)$$

условия нетривиальности примут вид

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_{1_i} + \sum_{i=1}^q \alpha_{2_j} + \alpha_P + \alpha_{P_{\max}} + \|\lambda_0\|_E + \|\lambda_f\|_E > 0,$$

а к условиям дополняющей нежесткости (1.2.41) должны быть добавлены

$$\left. \begin{aligned} \alpha_P(-P(t_0)) &= 0, \\ \alpha_{P_{\max}}(P(t_0) - P_{\max}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.59)$$

Кроме того, стоит сразу отметить, что задача траекторной оптимизации для функционала (1.2.9) в рамках настоящей работы рассматривается только на фиксированном отрезке времени Δ , поэтому из выражений (1.2.57) можно сразу исключить соответствующие условия на концах для сопряженной ко времени переменной. А в соответствии с уже приведенными ранее рассуждениями для задач траекторной оптимизации с функционалами (1.2.7) и (1.2.8), можно и вовсе исключить из рассмотрения саму функцию $\psi_t(t)$, т.к. она не будет оказывать никакого влияния на решение задачи оптимизации.

Далее, проанализируем качественно характер оптимального управления и ряд основных особенностей рассматриваемой задачи. Как и случае задачи быстрогодействия, из условий (1.2.57) и дифференциального уравнения (1.2.31) следует, что сопряженная к массе переменная всюду на Δ монотонно не убывает и может принимать только неположительные значения. Следовательно, функция переключения $\Pi(t)$, согласно (1.2.21), всюду неотрицательна, и может обращаться в нуль, вообще говоря, или на конечном числе множеств нулевой меры, или же на некоторых непустых подмножествах (содержащих более одного элемента) отрезка Δ . Последнее отвечает случаю или тривиальной экстремали, или же особого управления, связанные с которым вопросы в рамках настоящей работы подробно не рассматриваются. Таким образом, для представляющих основной практический интерес решений (т.е. нетривиальных и не особых) рассматриваемой задачи параметр управления δ всюду на отрезке Δ принимает значение равное единице, кроме, быть может, единственной точки, совпадающей с его правой границей, что возможно, в свою очередь, лишь при весьма специфических краевых условиях.

Теперь обратимся к качественному рассмотрению условия (1.2.56), определяющего область допустимых значений для неизвестного параметра задачи P , а также ограничивающую и область решений рассматриваемой динамической системы в пространстве $\mathbf{X} \times \mathbf{U}^{\text{OT}} \times \Delta$. В соответствии с условиями дополняющей нежесткости (1.2.59), в случае, когда значение безразмерной тяги лежит внутри интервала $(0, P_{\max})$, множители (1.2.58) одновременно принимают значение равное нулю. Тогда в соответствии с условиями трансверсальности (1.2.57) сопряженная переменная $\psi_P(t_0)$ также равна нулю, а на правом конце отрезка Δ в общем случае неположительна. Так как для всех экстремалей рассматриваемой задачи, представляющих практический интерес с точки зрения траекторной оптимизации, полагается, что $\Pi(t) > 0$ всюду на Δ , то сопряженная переменная $\psi_P(t)$ монотонно убывает на рассматриваемом отрезке времени. В этом нетрудно убедиться, т.к. дифференциальное уравнение (1.2.54) может быть записано в виде

$$\frac{d\psi_P}{dt} = -\delta\Pi, \quad (1.2.60)$$

и его правая часть, очевидно, всюду на Δ строго отрицательна. Таким образом, не возникает никаких противоречий с точки зрения поведения сопряженной переменной $\psi_P(t)$ вдоль решения задачи и условиями трансверсальности (1.2.57), которым она должна удовлетворять на обоих концах отрезка времени Δ . Данный случай $P \in (0, P_{\max})$ и представляет практический интерес с точки зрения решения задачи оптимизации межорбитального перелета для функционала (1.2.9), и рассматривается в рамках данной работы в качестве основного.

Случаи, при которых оптимальное значение параметра P может принадлежать границам отрезка (1.2.56), согласно условиям трансверсальности (1.2.57) и дополняющей нежесткости (1.2.59) могут быть рассмотрены в качестве отдельных самостоятельных задач. При этом, качественно поведение решения рассматриваемой задачи оптимального управления не изменяется по сравнению с предыдущим (основным) случаем. Действительно, само решение, в силу формального условия (1.2.59) и ограничения (1.2.56), фактически получается не зависящим от функционала, и при этом очевидно, что сама экстремаль оказывается (в общем случае) нетривиальной, а сопряженные переменные нормируются путем подбора соответствующих постоянных в выражении

$$-\alpha_0 \mp \alpha_\sigma = \int_{\Delta} -\Pi(\tau) d\tau, \quad \sigma = \{P, P_{\max}\},$$

вытекающим из уравнения (1.2.60). Более детальное рассмотрение особенностей «граничного» решения задачи, фактически, не имеет никакого практического смысла в контексте оптимизации межорбитального перелета. Так, случай $P=0$ не представляет интереса и возможен только при очень специфических краевых условиях (пассивное движение), а случай $P=P_{\max}$ также может быть исключен из рассмотрения, т.к. значение P_{\max} на практике всегда может быть выбрано сколь угодно большим, но при этом, естественно, конечным. К тому же, получить оптимальное решение с бесконечно большой величиной тяги, в пределе сводящееся к импульсному, при рассмотрении многовитковых межорбитальных перелетов относительно большой длительности, кажется весьма маловероятным, особенно с учетом принятых в настоящей работе типовых значений параметров ЭРДУ. Подобные вопросы, связанные с рассмотрением предельного случая решения задачи о минимальной тяге и зависимости ее оптимального значения от величины скорости истечения ЭРД подробно рассмотрены в работах [25, 26]. Таким образом, в рамках настоящей работы, случаи, соответствующие «граничному» типу решения, вовсе не рассматривались при практической оптимизации межорбитальных перелетов.

В контексте рассмотрения основного случая, соответствующего интервалу $(0, P_{\max})$, также стоит сказать несколько слов о возможности использования той или иной нормировки. Как и при рассмотрении задач траекторной оптимизации с функционалами (1.2.7) и (1.2.8), в качестве нормирующего множителя в задаче на минимум тяги будем использовать множитель при функционале α_0 . Покажем, что аномальный случай не возможен. Действительно, при $\alpha_0=0$ из условий трансверсальности (1.2.57) следует, что $\psi_P(t_f)=0$ и $\psi_P(t_0)=0$. Выражение в правой части дифференциального уравнения (1.2.54) относительно сопряженной к безразмерной тяге переменной, всегда неположительно, и $\psi_P(t)$, как уже было отмечено выше, в наиболее общем случае, монотонно не возрастает на Δ . Поэтому, условия $\psi_P(t_f)=0$ и $\psi_P(t_0)=0$ будут выполнены только при

$$\psi_P = \dot{\psi}_P = \dots = 0 \quad \forall t \in \Delta.$$

Последнее возможно когда всюду на Δ функция переключения $\Pi < 0$ и, следовательно, $\delta=0$, или же при $\Pi \equiv 0$ и $\forall \delta \in [0,1]$. Из уравнения (1.2.31) следует, что сопряженная к массе переменная монотонно не убывает на рассматриваемом отрезке времени Δ . Отсюда, а также в силу следствия из условий трансверсальности (1.2.57), следует, что $\psi_m(t)$ всюду неположительна на Δ и тогда всегда $\Pi > 0$. Следовательно, случай $\Pi \equiv 0$ возможен лишь при одновременном выполнении

$$\psi_m \equiv 0, \quad \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \equiv 0,$$

всюду на Δ , что, в свою очередь, также приводит к необходимости выполнения условий вида (1.2.44). Из последних следует, по аналогии с ранее рассмотренными постановками задач траекторной оптимизации для функционалов (1.2.7) и (1.2.8), что в данном случае на экстремали $\|\psi\|_{BV}=0$. И тогда из условий трансверсальности (1.2.57) и условия максимума (1.2.29) следует одновременное равенство нулю числовых множителей Лагранжа, что, в свою очередь, противоречит условию нетривиальности (1.2.40). Таким образом, аномальный случай решения невозможен, а в качестве значения нормирующего множителя при функционале задачи примем, как и ранее, $\alpha_0=1$.

В заключении этапа качественного рассмотрения основных особенностей задачи оптимизации межорбитального перелета с функционалом вида (1.2.9) стоит отметить, что на ее решениях всегда выполняется следующее простое соотношение:

$$-\psi_m(t_0)m(t_0) = P^* \alpha_0, \tag{1.2.61}$$

где P^* - оптимальное (минимальное потребное) значение тяги ЭРДУ. Оно может быть получено следующим образом. Продифференцируем по времени произведение $(\psi_m(t)m(t))$, учитывая при этом выражения для правых частей дифференциальных уравнений (1.2.31) и (1.1.7). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi_m m) &= \frac{d\psi_m}{dt} m + \psi_m \frac{dm}{dt} = \left(\delta \frac{P}{m^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \right) m + \psi_m \left(-\delta \frac{P}{w} \right) = \\ &= \delta P \left(\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{m} - \frac{\psi_m}{w} \right) = \delta P \Pi. \end{aligned}$$

Далее, с учетом уравнений (1.2.51) и (1.2.54), продифференцируем по времени выражение $(\psi_P(t)P(t))$:

$$\frac{d}{dt}(\psi_P P) = \frac{d\psi_P}{dt} P + \psi_P \frac{dP}{dt} = -\delta P \Pi.$$

Из последних двух полученных соотношений следует, что вдоль оптимального решения задачи

$$d(\psi_m m) = -P^* d(\psi_P),$$

и, соответственно,

$$\psi_m(t)m(t) - \psi_m(t_0)m(t_0) = -P^*(\psi_P(t) - \psi_P(t_0)). \quad (1.2.62)$$

Отсюда, с учетом следствий их условий трансверсальности (1.2.57) и принятой нормировки сопряженных переменных $\alpha_0=1$, легко получим соотношение (1.2.61).

Выражение (1.2.62) и, соответственно (1.2.61), очевидно, представляет собой один из первых интегралов рассматриваемой задачи оптимального управления. Посредством нормирующего множителя он позволяет определить простую связь между двумя неизвестными параметрами соответствующей краевой задачи принципа максимума - $\psi_m(t_0)$ и P^* , в случае, когда значение начальной безразмерной массы аппарата m_0 задано (основной). С учетом выбранной нормировки, получаем

$$\psi_m(t_0) = -\frac{P^*}{m_0}.$$

Последнее простое соотношение может быть использовано при решении соответствующей краевой задачи принципа максимума с целью понижения ее порядка, или же для численной верификации ее решения. Выражение (1.2.61), в свою очередь, также явно подчеркивает невозможность аномального решения в задаче с функционалом (1.2.9).

В заключении текущего раздела главы, необходимо отметить следующее. В рамках настоящей работы для всех рассматриваемых постановок задач оптимизации межорбитального перелета с функционалами (1.2.7) – (1.2.9) и обеих математических моделей функционирования ЭРДУ, отсутствуют смешанные или чисто фазовые (поточечные) ограничения вида (1.2.4). Следовательно, согласно общей теории принципа максимума [1, 2, 7, 11, 23, 27, 37, 38, 52], в работе рассматриваются исключительно классические регулярные

задачи оптимального управления «понтрягинского» типа, для которых характерны (за исключением случая рассмотрения особых управлений) следующие условия принадлежности:

$$\mathbf{u}(t) \in PC(\Delta, \mathbf{R}^m), \quad \mathbf{x}(t) \in PC^1(\Delta, \mathbf{R}^n), \quad \boldsymbol{\psi}(t) \in PC^1(\Delta, \mathbf{R}^{n+1}).$$

Последние, очевидно, отвечают кусочно-непрерывной вектор-функции управления и, соответственно, кусочно-гладким вектор функциям фазовых и сопряженных переменных.

1.3 Краевые задачи

Как известно, применение основной теоремы принципа максимума позволяет свести решение рассматриваемых в настоящей работе проблем траекторной оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ к решению соответствующих им краевых задач (для системы обыкновенных дифференциальных уравнений) [13, 28-30, 42-44, 46-49, 53, 54, 77, 80, 93-95]. Их неизвестными параметрами в наиболее общем случае являются: $(2n)$ постоянные интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.1.5), (1.1.7) и (1.2.30) (или (1.1.5), (1.1.8) и (1.2.32) соответственно), $(p+q+k+l)$ числовых множителей Лагранжа при соответствующих ограничениях вида (1.2.5), формирующих конечной блок задачи, а также моменты времени t_0 и t_f (плюс к тому в ряде рассматриваемых постановок задач траекторной оптимизации и некоторые промежуточные моменты времени $t_j \in (t_0, t_f)$). Перечисленные неизвестные параметры для каждой рассматриваемой в работе краевой задачи (отвечающей конкретной постановке траекторной задачи оптимизации) определяются с помощью набора краевых условий (1.2.4), условий трансверсальности (1.2.37), (1.2.38), и (1.2.57), условий максимума (1.2.29), (1.2.45) и следствий из них (1.2.46), а также условий дополняющей нежесткости вида (1.2.41). Используя перечисленные условия и различные следствия из них, как правило удается исключить часть числовых множителей Лагранжа из общего числа неизвестных. Например, те из них, которые элементарно могут быть выражены через неизвестные постоянные интегрирования системы дифференциальных уравнений оптимального движения посредством использования условий трансверсальности.

Далее, сформулируем явно краевые задачи для основных и наименее сложных из рассматриваемых в настоящей работе постановок задач оптимизации многовиткового межорбитального перелета. Как уже говорилось ранее, помимо критерия качества они отличаются между собой только краевыми условиями, в общем случае характеризующими конкретный тип перелета. Для их описания представляется удобным использовать классификацию типов межорбитального перелета, принятую в работах [48, 49].

Итак, начнем рассмотрение с *базового* для настоящей работы типа перелета: «орбита-орбита». В данном случае элементы начальной и конечной орбит, между которыми

осуществляется межорбитальный перелет КА предполагаются заданными, и при этом считается, что они остаются неизменными на протяжении всего времени перелета. Вместе с условием, определяющим начальное значение массы КА, они полностью формируют начальное и конечное многообразия, которым должны принадлежать концы оптимальной траектории:

$$(p_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0)^T \cup (p_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f)^T \cup (m(t_0) = m_0) \Rightarrow \mathbf{G}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0)), \mathbf{G}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f)). \quad (1.3.1)$$

Ограничения типа неравенства в конечной блок задачи в рассматриваемом случае не входят и, следовательно, $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_f = \mathbf{0}$. Считаем также, что угловое положение КА на начальной и конечной орбите не фиксировано и должно быть определено в ходе решения задачи. При этом выбор углового положения КА на начальной орбите никак не связан с физическим моментом времени t_0 , и сам момент времени старта в рассматриваемом случае может быть выбран абсолютно произвольно, т.к. это не окажет никакого влияния на решение задачи траекторной оптимизации. При рассмотрении межорбитального перелета предполагается использование безразмерного времени, и удобно положить за начало его отсчета непосредственно сам момент старта t_0 . Тогда согласно приведенным выражениям (1.3.1), получим:

- для функционала (1.2.7) и обеих моделей функционирования ЭРДУ, отрезок Δ фиксирован:

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}(t_f) - \boldsymbol{\beta}_f \\ \psi_l(t_f) \\ \psi_m(t_f) - 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{x} \setminus \{l, m\}, \quad \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^5, \quad (1.3.2)$$

где вектор неизвестных параметров

$$\mathbf{z} = \left(\psi_p, \psi_{e_x}, \psi_{e_y}, \psi_{i_x}, \psi_{i_y}, l, \psi_m \right) \Big|_{t_0=0}^T, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^7,$$

- для функционала (1.2.8) и модели нерегулируемого двигателя, отрезок Δ не фиксирован:

$$\mathbf{f}_T(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}(t_f) - \boldsymbol{\beta}_f \\ \psi_l(t_f) \\ \psi_m(t_f) \\ \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_f} - 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{x} \setminus \{l, m\}, \quad \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^5, \quad (1.3.3)$$

где $\mathbf{z} = \left(\psi_p, \psi_{e_x}, \psi_{e_y}, \psi_{i_x}, \psi_{i_y}, l, \psi_m \right) \Big|_{t_0=0}^T \cup t_f, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^8,$

- для функционала (1.2.9) и модели нерегулируемого двигателя, отрезок Δ фиксирован:

$$\mathbf{f}_p(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}(t_f) - \boldsymbol{\beta}_f \\ \psi_l(t_f) \\ \psi_m(t_f) \\ \psi_p(t_f) - 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{x} \setminus \{l, m\}, \quad \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^5, \quad (1.3.4)$$

$$\text{где } \mathbf{z} = \left(\psi_p, \psi_{e_x}, \psi_{e_y}, \psi_{i_x}, \psi_{i_y}, l, \psi_m, P \right) \Big|_{t_0=0}^T, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^8.$$

Приведенные выражения (1.3.2) – (1.3.4), определяющие в явном виде непрерывные и непрерывно дифференцируемые по своим аргументам вектор-функции невязок \mathbf{f}_m , \mathbf{f}_l , \mathbf{f}_p , получены исходя из краевых условий задачи и следствий условий трансверсальности (1.2.37), (1.2.38), (1.2.57) и максимума (1.2.29). На примере задачи быстрогодействия (1.2.8) видно, что условия оптимальности (1.2.46) для определения моментов времени t_0 и t_f в данном случае существенно упростились, т.к. полагалось, что левая граница отрезка Δ фиксирована и при этом всегда $t_0=0$.

Перелет типа «точка-точка». При рассмотрении данного типа межорбитального перелета, предполагается что угловое положение КА с ЭРДУ на начальной и конечной орбитах заранее известно и зафиксировано. Оно может быть определено, например, путем задания соответствующих значений истинной аномалии – ν_0 и ν_f . При этом предполагается, что для рассматриваемых углов, как и в предыдущем случае вновь отсутствует какая-либо связь с физическим временем. В концевой блок задачи к условиям (1.3.1) присоединяются следующие:

$$\left. \begin{aligned} l(t_0) - (\Omega_0 + \omega_0 + \nu_0) &= 0, \\ \cos(l(t_f) - (\Omega_f + \omega_f + \nu_f)) - 1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.3.5)$$

последнее из которых позволяет удовлетворить требуемому конечному угловому положению аппарата ν_f , в независимости от величины полной угловой дальности перелета, которая заранее неизвестна. В (1.3.5) естественно полагается, что выражения $\Omega_0 + \omega_0 + \nu_0$ и $\Omega_f + \omega_f + \nu_f$, определяющие соответствующие значения истинной долготы на начальной и конечной орбите, масштабируются по модулю 2π , т.е. их величины всегда принадлежат диапазону $[0, 2\pi)$. Подобное масштабирование используется также и при прочих, рассматриваемых в рамках настоящей работы, постановках задач оптимизации межорбитального перелета. Кроме того, в рассматриваемом случае краевые условия задачи снова не содержат ограничений типа неравенства, следовательно, $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_f = \mathbf{0}$. Тогда, вновь используя следствия условий трансверсальности (1.2.37), (1.2.38), (1.2.57) и максимума (1.2.29), (1.2.45), приходим к следующим краевым задачам:

- для функционала (1.2.7) и обеих моделей функционирования ЭРДУ на фиксированном отрезке времени Δ : вектор функция невязок $\mathbf{f}_m(\mathbf{z})$ будет определяться тем же выражением (1.3.2), за исключением одного скалярного равенства - вместо условия $\psi_l(t_f)=0$ должно использоваться второе условие из (1.3.5); вектор неизвестных параметров в рассматриваемом случае:

$$\mathbf{z} = \left(\psi_p, \psi_{e_x}, \psi_{e_y}, \psi_{i_x}, \psi_{i_y}, \psi_l, \psi_m \right) \Big|_{t_0=0}^T, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^7;$$

- для соответствующей (1.2.8) задачи быстрогодействия ситуация аналогична: в выражении (1.3.3) для $\mathbf{f}_l(\mathbf{z})$ скалярное равенство $\psi_l(t_f)=0$ заменяется на второе из (1.3.5); вектор неизвестных параметров краевой задачи определяется как

$$\mathbf{z} = \left(\psi_p, \psi_{e_x}, \psi_{e_y}, \psi_{i_x}, \psi_{i_y}, \psi_l, \psi_m \right) \Big|_{t_0=0}^T \cup t_f, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^8;$$

- для задачи на минимум тяги: аналогично, в выражении (1.3.4) для $\mathbf{f}_p(\mathbf{z})$ скалярное равенство $\psi_l(t_f)=0$ также заменяется на второе из (1.3.5); вектор неизвестных параметров краевой задачи в этом случае:

$$\mathbf{z} = \left(\psi_p, \psi_{e_x}, \psi_{e_y}, \psi_{i_x}, \psi_{i_y}, \psi_l, \psi_m, P \right) \Big|_{t_0=0}^T, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^8.$$

Также стоит отметить, что при решении задач траекторной оптимизации для межорбитальных перелетов типа «точка-точка» вместо второго выражения для истинной долготы из (1.3.5), можно использовать

$$l(t_f) - \left((\Omega_0 + \omega_0 + \nu_0) + 2\pi N_{rev} + (\Omega_f + \omega_f + \nu_f) \right) = 0, \quad (1.3.6)$$

где N_{rev} определяет целое число витков, совершаемое аппаратом за полное время перелета $t_f - t_0$, и, в свою очередь, может быть найдено из решения соответствующей задачи «орбита-орбита»:

$$N_{rev} = \text{floor} \left(\frac{l(t_f)^* - l(t_0)^*}{2\pi} \right).$$

В данном случае, однако, следует помнить о том, что полученная на этапе рассмотрения перелета «орбита-орбита» оценка полной угловой дальности может оказаться отличной от ее «оптимального» значения для перелета типа «точка-точка» на целое число витков, т.к. данная «альтернативная» постановка задачи уже будет отвечать межорбитальному перелету «точка-точка» с заранее известной и фиксированной величиной угловой дальности. Вектор-функции невязок, в рассматриваемом случае, также определяются выражениями (1.3.2) – (1.3.4), в которых условие $\psi_l(t_f)=0$ заменяется на (1.3.6).

Также, помимо уже описанных выше двух основных базовых постановок, в настоящей работе рассматриваются задачи оптимизации межорбитального перелета с краевыми условиями «смешанного» типа: «точка-орбита» или «орбита-точка». Отвечающие данным постановкам выражения вида (1.3.2) – (1.3.4), описывающие вектор-функцию невязок краевой задачи, элементарно получаются с помощью «комбинирования» уже приведенных условий (1.3.1) и выражений (1.3.5), (1.3.6). Поэтому, приводить их здесь в явном виде не имеет особого смысла.

Краевые задачи принципа максимума, отвечающие более сложным постановкам задач траекторной оптимизации с функционалами (1.2.7) – (1.2.9), будут по отдельности сформулированы в явном виде в ходе дальнейшего изложения (глава 4), только после их окончательной формализации в качестве задач оптимального управления, ввиду более сложного набора условий, образующих концевой блок, и как следствие этого, необходимости рассмотрения нескольких возможных случаев их решения. При этом, для их решения будут использоваться (в качестве вспомогательных) краевые задачи вида (1.3.2) – (1.3.4), отвечающие достаточно простым рассматриваемым в работе базовым типам межорбитального перелета.

1.4 Используемая модель возмущений

До настоящего момента в рамках текущей главы диссертационной работы речь велась, фактически, только лишь о самой возможности учета действия различных возмущений при решении задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ. Радиальная, трансверсальная и бинормальная компоненты, действующего на КА возмущающего ускорения, в орбитальной СК были представлены (неявно) выражениями (1.1.15), в виде соответствующих скалярных функций векторного аргумента $(\mathbf{x}, t)^T$. При этом, было сделано важное для всего дальнейшего изложения предположение (1.1.16) о непрерывности вместе с частными производными по своим аргументам функций (1.1.15) всюду на соответствующих элементах пространства $\mathbf{X} \times \Delta$. Забегая вперед, стоит отметить, что предъявляемые к рассматриваемым функциям (1.1.15) требования непосредственно связаны с предлагаемой в настоящей работе общей методикой численного решения задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом действия возмущений при использовании *непрямого* метода для их решения, о чем подробно будет сказано далее. В данном же разделе будет непосредственно сформирована используемая в работе модель возмущений, влияние которой будет учитываться именно на оптимальное управляемое траекторное движение КА.

Теперь явно определим правые части выражений (1.1.15), представляющие собой алгебраические суммы от соответствующих компонент j -ых возмущающих ускорений, приобретаемых аппаратом. Для этого сначала необходимо обозначить основные возмущающие силы (j -ые), действующие на КА, которые учитываются в рамках настоящей работы. Итак, в качестве основных возмущающих факторов, влияющих на траекторию КА, будем рассматривать следующие:

- возмущения, связанные с нецентральностью гравитационного поля Земли;
- возмущения, вызванные притяжением Луны и Солнца.

Влияние аэродинамических сил на траекторное движение КА, связанное с его прохождением верхних участков земной атмосферы не учитывается, т.к. большая часть рассматриваемых в работе примеров межорбитальных перелетов осуществляется между начальной эллиптической (или, в редких случаях, круговой) орбитой с достаточно большим эксцентриситетом и высотой перигея (не менее 600 км), и геостационарной орбитой. Поэтому, общее среднее время прохождения КА участков траектории в районе перицентра орбиты, где аэродинамические возмущения могут оказывать значительное влияние на его движение, достаточно мало по сравнению с полным временем, затрачиваемым на перелет. К тому же, для наиболее полного учета влияния аэродинамических возмущений, необходимо располагать достаточно полной «геометрической» моделью аппарата (для определения соответствующих сил и моментов), и при этом также учитывать его движение относительно центра масс. Что уже явно выходит за рамки принятой в работе модели, описывающей управляемое движение КА с ЭРДУ. Влияние сил светового давления солнечного электромагнитного излучения также не учитывается ввиду отсутствия «геометрической» модели КА и т.д. Таким образом, всюду, в рамках настоящей диссертационной работы, ограничимся только учетом влияния на траекторное движение КА возмущений от нецентральности гравитационного поля Земли, и притяжения Луны и Солнца.

Далее, определим соответствующие выражения для компонент возмущающих ускорений КА, вызванных влиянием нецентральности гравитационного поля Земли. Кратко приведем общий стандартный алгоритм их вычисления [18]. Силовая функция, определяющая «возмущающую» часть гравитационного потенциала Земли, определяется следующим выражением:

$$U_P = \frac{\mu}{r} \cdot \left[\sum_{n=2}^N c_{n0} \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_n^0 + \sum_{n=2}^M \left(\frac{R_e}{r} \right)^n \sum_{m=1}^n (c_{nm} C_m + d_{nm} S_m) P_n^m \right] \quad (1.4.1)$$

где R_e – экваториальный радиус Земли, c_{n0} – коэффициенты при зональных гармониках, c_{nm} и d_{nm} – ненормированные коэффициенты при тессеральных и секториальных гармониках. Выражение вида

$$P_n^m = d^m P_n(\sin \varphi) / d(\sin \varphi)^m$$

есть m -я производная полинома Лежандра $P_n(\sin \varphi)$, $C_m = \cos^m \varphi \cos m\lambda$, $S_m = \cos^m \varphi \sin m\lambda$, φ – широта, λ – долгота, N , M – соответственно порядок и степень для используемой модели гравитационного поля. Тогда компоненты вектора возмущающего ускорения, вызванного нецентральной гравитационного поля Земли, определяются как соответствующие частные производные силовой функции (1.4.1):

$$a_x = \frac{\partial U_P}{\partial x}, \quad a_y = \frac{\partial U_P}{\partial y}, \quad a_z = \frac{\partial U_P}{\partial z}, \quad (1.4.2)$$

где x , y , z – известные компоненты радиус-вектора КА в связанной с Землей (вращающейся) гринвичской системе координат ITRS [98]. Для вычисления частных производных (1.4.2) в работе используется алгоритм Каннингэма [74]. Коэффициенты разложения для геопотенциала (1.4.1) и соответствующие согласованные значения гравитационного параметра и экваториального радиуса берутся из модели гравитационного поля Земли EGM-96, созданной NASA Goddard Space Flight Center (GSFC), совместно с the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) и the Ohio State University в 1996 г.

Далее, для определения соответствующих компонент возмущающих ускорений от нецентральной гравитационного поля Земли (1.4.2) в осях орбитальной системы координат, необходимо осуществить следующую цепочку переходов:

- переход из вращающейся гринвичской системы координат ITRS в геоцентрическую геоэкваториальную (невращающуюся) ICRS [98],
- переход из ICRS в равноденственную систему координат [98],
- переход из равноденственной системы координат в орбитальную,

(при этом кажется вполне очевидным, что для определения компонент x , y , z радиус вектора КА в каждый момент времени t необходимо осуществить приведенную цепочку переходов в противоположном направлении, т.е. из орбитальной системы координат в ITRS). Для осуществления подобных переходов между системами координат также необходимо выполнять соответствующие преобразования времени, посредством которых определяются элементы переходных матриц. Так, например, зная положения КА в орбитальной системе координат в какой-то текущий момент t по всемирному координатному времени (UTC), для определения соответствующих гринвичских координат КА необходимо осуществить переход к земному времени (ТТ) [97] и т.д. При программной реализации решения для осуществления всех потребных преобразований координат и времени (в работе рассматриваются их определения согласно принятым Международным астрономическим союзом (IAU)) была

использована библиотека соответствующих вычислительных процедур международного астрономического союза IAU SOFA (Standards of Fundamental Astronomy) [98].

Вектор возмущающего ускорения КА \mathbf{a}_{pert} , вызванного влиянием притяжения Луны и Солнца в геоинерциальной геоэкваториальной системе координат (ICRS) вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{a}_{pert} = \sum_{j=1}^2 \mu_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right), \quad (1.4.3)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор КА, \mathbf{r}_j – радиус-вектор, определяющий положение j -ого небесного тела относительно Земли (в нашем случае Солнце и Луна) на некоторый текущий момент времени, μ_j – гравитационный параметр j -ого небесного тела. Для определения координат векторов \mathbf{r}_j на некоторый текущий момент времени используется эфемеридное обеспечение JPL DE421 [97]. При вычислении компонент вектора \mathbf{a}_{pert} в орбитальной системе координат также используется описанная выше цепочка переходов между системами координат и соответствующие преобразования времен. Для этого также применяются вычислительные процедуры библиотеки IAU SOFA.

Полученные выражения для возмущающих ускорений (1.4.2) и (1.4.3), после их окончательного представления в осях орбитальной СК в виде (1.1.3), само собой, не будут являться непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми по своим аргументам функциями всюду на элементах пространства $\mathbf{X} \times \Delta$, т.е. не будут удовлетворять ранее высказанному предположению. Однако, т.к. в настоящей работе рассматриваются задачи оптимизации межорбитального перелета только между круговыми или эллиптическими орбитами, расположенными в относительно близкой окрестности Земли, а управляемое возмущенное движение КА всегда предполагается медленно-эволюционирующим эллиптического типа, то данное предположение, очевидно, может быть ослаблено. Действительно, для практической реализации, предлагаемой в работе вычислительной схемы решения задач траекторной оптимизации с помощью непрямого метода, речь о которой пойдет далее, вполне достаточно чтобы непрерывность и непрерывная дифференцируемость для функций (1.1.15) обеспечивалась вдоль рассматриваемых траекторий КА, т.е. только в некоторой ограниченной области пространства $\mathbf{X} \times \Delta$, характерной для эллиптического движения. Последнее, очевидно, справедливо в рамках принятой модели возмущений, определяемой выражениями (1.4.2) и (1.4.3).

2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕЛЁТА КА С ЭРДУ ПОСТРОЕННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

2.1 Методы численного дифференцирования

В данном разделе текущей главы диссертационной работы в качестве небольшого обзора кратко приводятся основные элементы из теории методов численного дифференцирования функций (на примере рассмотрения действительнзначной скалярной функции одного аргумента). Обозначен ряд основных особенностей рассматриваемых методов, отмечены их достоинства и недостатки. Большая часть излагаемой теории может быть найдена в книгах [3, 68, 92, 87, 88] и работах [84-86, 88, 91, 103], однако, материалы, связанные с обоснованием метода комплексного шага [84-86], принадлежат автору работы.

Как известно, основу для численного дифференцирования функций составляют конечно-разностные методы, хорошо зарекомендовавшие себя в первую очередь с точки зрения простоты их построения и применения, так как для их полного определения достаточно использовать Тейлоровское разложение интересующей нас функции в ряд. Общим теоретическим базисом для данной группы методов, как известно, выступает обобщённое понятие производной по направлению, при вычислениях на практике, в большинстве случаев рассматриваемой исключительно в сильном смысле (и отвечающее, соответственно, сильному дифференциалу).

Итак, дав аргументу рассматриваемой скалярной функции $f(x)$ положительное приращение h в точке x и разложив ее (в окрестности этой точки) в ряд Тейлора по степеням этого приращения до членов второго порядка малости включительно, легко получить выражение, определяющее значение производной в данной точке (т.н. прямые или правые разности):

$$f'(x) = h^{-1}(f(x+h) - f(x)) + O(h). \quad (2.1.1)$$

Как видно из приведенного выражения (2.1.1), величина $O(h)$ определяет порядок ошибки усечения, вызванной конечной аппроксимацией бесконечного процесса (сумма остаточных членов ряда Тейлора). Видно, что для прямых разностей, порядок данной ошибки не меньше порядка рассматриваемого шага h . Вполне очевидно, что, выбирая h как можно меньшим, мы снижаем величину ошибки усечения. Однако, при действительно малых значениях величины шага h , в выражении (2.1.1) непосредственно получим разность двух близких величин. И при

этом проявится другой источник ошибки вычисления производной – т.н. ошибка округления, связанная с разностью двух близких чисел (характерная для всех разностных методов вообще). Природа данной ошибки состоит в том, что при проведении вычислений с одинаковой относительной точностью мы всегда имеем представление любой величины конечным числом разрядов. Таким образом, общая ошибка (абсолютная) вычисления производной (2.1.1) складывается из ошибки усечения и ошибки округления, и величина приращения h должна выбираться так, чтобы обеспечить ее минимум.

Очевидно, что при непрерывном уменьшении величины шага h ошибка округления, вызванная разностью двух близких чисел, будет монотонно возрастать, а затем может стать и вовсе доминирующей над ошибкой усечения ($O(h)$). Отсюда следует, что для эффективного использования конечноразностных методов требуется искать некий «компромисс» между этими двумя ошибками при выборе величины шага h . С другой стороны, на основе разностных методов возможны и иные аппроксимации производной (с использованием все того же Тейлоровского разложения), несколько улучшающие ситуацию с точки зрения порядка упомянутых ошибок, но не снимающие до конца проблему обеспечения точности и оптимального выбора шага. Так, например, для варианта центральных разностей, величина производной определяется следующим образом:

$$f'(x) = (2h)^{-1} [f(x+h) - f(x-h)] + O(h^2). \quad (2.1.2)$$

Данное выражение для производной (2.1.2) элементарно получается при рассмотрении разности двух выражений, представляющих собой Тейлоровское разложение рассматриваемой функции в окрестности точки x по степеням приращения h и $-h$ соответственно (или как некоторая комбинация (разность) из соответствующих выражений для производной через прямые и обратные разности). В приведенном выражении (2.1.2) ошибка усечения уже имеет порядок не меньший, чем h^2 , и, следовательно, убывает на порядок быстрее по сравнению с прямыми разностями при уменьшении величины шага. Благодаря этому удастся улучшить соотношение между двумя ошибками, и тем самым повысить точность вычисления производных.

Другой путь повышения точности вычисления производных состоит в том, чтобы использовать такие их аппроксимации, при которых удастся или вовсе избавиться от вышеупомянутых ошибок, или снизить их взаимное влияние друг на друга до незначительного. Так, метод комплексного шага [84-86] дает следующее выражение для определения значения производной функции в точке:

$$f'(x) = h^{-1} [\operatorname{Im}(f(x+ih))] + O(h^2). \quad (2.1.3)$$

Практически во всех работах [84-86], посвященных применению метода комплексного шага для численного дифференцирования, выражение для производной в виде (2.1.3) получается следующим образом. Действительному аргументу x произвольной скалярной действительнзначной функции f сообщается чисто мнимое приращение, и далее, полученное таким образом некоторое продолжение функции f на комплексную плоскость разлагается в ряд Тейлора, но уже в окрестности точки именно комплексной плоскости $(x,0)$, и по степеням приращения $(0+ih)$. При этом, нигде явно не говорится о возможности такого условного продолжения, ни о требованиях, предъявляемых как к исходной функции $f(x)$, так и ее продолжения на комплексной плоскости. При этом само ее разложение в ряд Тейлора обычно представляется в виде

$$f(x+ih) = f(x) + ih \frac{f'(x)}{1!} - h^2 \frac{f''(x)}{2!} - ih^3 \frac{f'''(x)}{3!} + \dots, \quad (2.1.4)$$

т.е. в виде «обычного» степенного ряда с шагом (ih) . Далее, из полученного выражения (2.1.4), выделяется мнимая часть, откуда легко получается выражение для производной (2.1.3).

Рассмотренный подход, хоть и позволяет получить точное выражение для производной, все же не является полностью математически строгим и обоснованным. Как уже было отмечено выше, правильнее было бы рассматривать Тейлоровское разложение непосредственно для продолжения исходной действительнзначной функции действительного аргумента на комплексную область:

$$f(x) \rightarrow f_C(z), \quad w = f_C(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad f_C : z \in \bar{\mathbb{C}} \rightarrow w \in \bar{\mathbb{C}}. \quad (2.1.5)$$

Но при этом, необходимо обозначить, как строится это продолжение f_C . Более того, для того, чтобы оно было разложимо в ряд Тейлора, сама функция комплексного переменного f_C должна быть аналитической в комплексном смысле, т.е. голоморфной (C -дифференцируемой) всюду в некоторой области, которой принадлежит и точка $(x,0)$ [33, 57]. Тогда, согласно определению ряда Тейлора аналитической функции комплексного переменного [15, 33, 57]

$$f_C(z + \Delta z) = f_C(z) + \frac{f'_C(z)}{1!} \Delta z + \frac{f''_C(z)}{2!} (\Delta z)^2 + \dots, \quad (2.1.6)$$

положив при этом

$$z = x + i \cdot 0, \quad \Delta z = 0 + i \cdot h, \quad (2.1.7)$$

и рассмотрев мнимую часть выражения (2.1.6), действительно удается получить исходное выражение для производной (2.1.3). Но при этом необходимо помнить следующее. Выражение (2.1.6) включает в себя комплексные производные от аналитической функции f_C , которые сами по себе также должны быть голоморфными в рассматриваемой области. Все они определяются посредством явного задания пары действительнзначных функций от действительных аргументов $u(x,y)$ и $v(x,y)$, которые должны удовлетворять прямому следствию условия C -

дифференцируемости – уравнениям Коши-Римана [15, 57]. Благодаря алгебраическим свойствам комплексных чисел (гомоморфность рассматриваемых алгебр), определяемых основными бинарными операциями их сложения и умножения, оказывается, что построение аналитического продолжения функции на комплексную область эквивалентно формальной замене действительного аргумента на комплексный (например, для функции синуса):

$$f(x) = \sin(x) \rightarrow f_C(z) = \sin(z),$$

и при этом, всегда должна существовать пара функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, определяющих f_C , в свою очередь удовлетворяющих уравнению Лапласа, а также условиям вида:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= u(x, y) \Big|_{y=0}, \\ f'(x) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=0}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^n} \Big|_{y=0}, \\ v(x, y) \Big|_{y=0} &= \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial^2 y} \Big|_{y=0} = \dots = \frac{\partial^{2n} v(x, y)}{\partial^{2n} y} \Big|_{y=0} \equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.8)$$

Последние и обеспечивает равенство выражения (2.1.6) с учетом (2.1.8) и окончательного выражения для производной (2.1.3).

Выражение для производной (2.1.3) также можно получить следующим, более простым образом, не рассматривая непосредственно Тейлоровское разложение вида (2.1.6), но, как и ранее, используя известные свойства аналитической функции комплексного переменного. Мнимой части аналитического продолжения функции $f(x)$ на комплексную область (с чисто мнимым приращением аргумента), очевидно, отвечает следующая действительнзначная функция v :

$$\operatorname{Im} f_C(z + \Delta z) = \operatorname{Im} f_C((x + i \cdot 0) + (0 + ih)) = v(x, h), \quad (2.1.9)$$

которая, в свою очередь, может быть представлена обычным рядом Тейлора по степеням h :

$$v(x, h) = v(x, 0) + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y=0} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 v(x, y)}{\partial y^3} \Big|_{y=0} h^3 + \dots \quad (2.1.10)$$

Полученное выражение (2.1.10) можно переписать следующим образом, учитывая при этом следствия уравнений Коши-Римана и условия (2.1.8):

$$v(x, h) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=0} h + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 v(x, y)}{\partial y^3} \Big|_{y=0} h^3 + \dots = f'(x)h + O(h^3).$$

То есть

$$\operatorname{Im} f_C((x + i \cdot 0) + (0 + ih)) = f'(x)h + O(h^3).$$

Последнее равенство, исходя из озвученных ранее алгебраических свойств комплексных и чисел, и свойств (2.1.8) «аналитического» продолжения, можно представить в окончательном виде

$$\operatorname{Im} f(x + ih) = f'(x)h + O(h^3),$$

из которого и следует формула для вычисления производной (2.1.3).

В заключении описания теоретического обоснования метода комплексного шага, интересно отметить следующее. Как видно из приведенных выше рассуждений, сам метод основывается исключительно на теории и свойствах аналитической функции комплексного переменного. А, как известно, само понятие аналитичности функции комплексного переменного базируется непосредственно на понятии комплексной дифференцируемости (С-дифференцируемость). Таким образом, для метода комплексного шага, как и для обычных конечно-разностных методов численного дифференцирования, вновь основополагающим является само обобщенное понятие производной.

Из формулы (2.1.3) видно, что ошибка усечения при использовании метода комплексного шага имеет тот же порядок, что и для центральных разностей. Однако, в отличие от разностных методов, мы можем добиться ее значительного уменьшения полагая величину шага сколь угодно малой. При этом, ввиду отсутствия какой-либо разности в выражении (2.1.3), ошибка округления при рассмотрении разности двух близких чисел практически для любых функций не проявляется [85, 86, 103]. Тем самым, положив величину шага достаточно малой, мы можем добиться относительной точности вычисления производной равной относительной точности вычисления функции $f(x)$. На рисунке 2.1.1 приведено сравнение относительной ошибки вычисления производной функции $f(x)=\operatorname{tg}(x)$ с помощью центральных разностей и метода комплексного шага, в зависимости от величины шага h . Видно, что при уменьшении величины шага относительная ошибка вычисления производной ε при использовании центральных разностей (синяя линия на рисунке) сначала преимущественно монотонно убывает. Это происходит ровно до тех пор, пока величина ошибки усечения, значение которой быстро ($\sim h^2$) уменьшается (по мере уменьшения величины шага h), превалирует над величиной возрастающей ошибки округления. При этом соответствующая величина полной относительной ошибки вычисления производной ε достигает некоторого минимума. Затем, начинает превалировать составляющая от ошибки округления при разности двух близких чисел в выражении (2.1.2), что приводит к быстрому немонотонному росту полной относительной ошибки ε при дальнейшем уменьшении величины шага. При использовании же метода комплексного шага (красная линия на рисунке), относительная ошибка ε монотонно убывает ($\sim h^2$) вместе с величиной шага h , т.к. определяется только

ошибкой усечения, и в итоге достигает значений, соответствующих относительной точности проводимых вычислений.

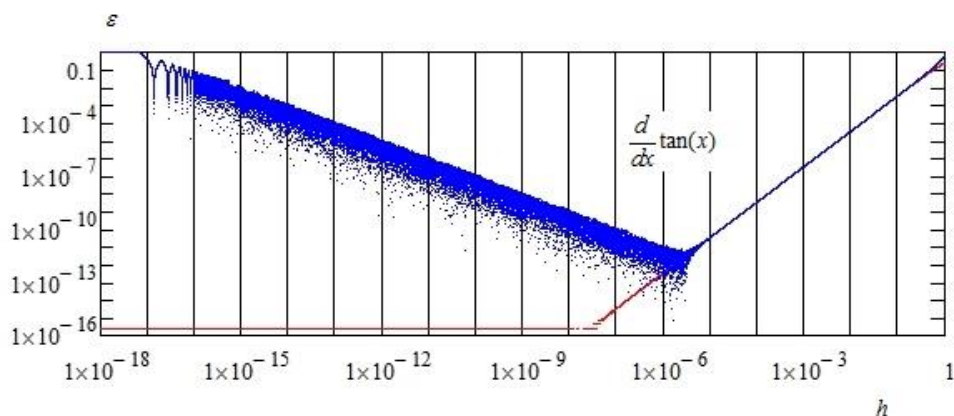


Рисунок 2.1.1 Сравнение относительной ошибки вычисления производной функции $\text{tg}(x)$ с помощью центральных разностей (синяя линия) и метода комплексного шага (красная линия) от величины шага h .

Рассмотренный пример ярко подчеркивает основные преимущества метода комплексного шага по сравнению с любыми возможными вариантами разностных методов. Ведь при его использовании для повышения точности вычисления производной необходимо всего лишь выбирать шаг как можно более меньший, учитывая при этом, естественные ограничения, связанные напрямую с общей относительной точностью вычислений при расчетах на практике, определяемой, в свою очередь, выбранным типом представления чисел и внутренними процедурами (выход соответствующих значений ε на «полку», рисунок 2.1.1).

Однако, к сожалению, не для всех функций удается добиться той же картины при использовании метода комплексного шага, как для рассмотренного только что примера. Так как в ряде случаев вновь становится возможным проявление ошибки округления, связанной, на сей раз, непосредственно не с самой спецификой метода, а, как выясняется, с внутренними процедурами, применяемыми для вычисления аналитического продолжения исходной функции $f(x)$ на комплексную плоскость. В работах [85, 86] приведены примеры функций, отвечающих данному случаю, однако, без какого-либо теоретического обоснования. Однако отмечено, что основополагающим фактором при проявлении данной ошибки также является необходимость использования для обеспечения надлежащей точности вычислений при использовании метода комплексного шага достаточно малой величины h . Природу проявления данной ошибки при вычислениях производной по формуле (2.1.3) покажем рассматривая конкретный пример.

Итак, вычислим производную функции $f(x)=\text{arctg}(x)$ с использованием центральных разностей (2.1.2) и формулы (2.1.3). Проявление ошибки округления в данном случае может быть проиллюстрировано на рисунке 2.1.2, где синяя линия соответствует центральным

разностям, красная – методу комплексного шага. Как видно из приведенного рисунка, поведение относительной ошибки как функции длины шага в рассматриваемом случае одинаково и для метода комплексного шага и для центральных разностей. При этом использование центральных разностей в данном случае позволяет достичь даже лучшего результата. Почему же это происходит?

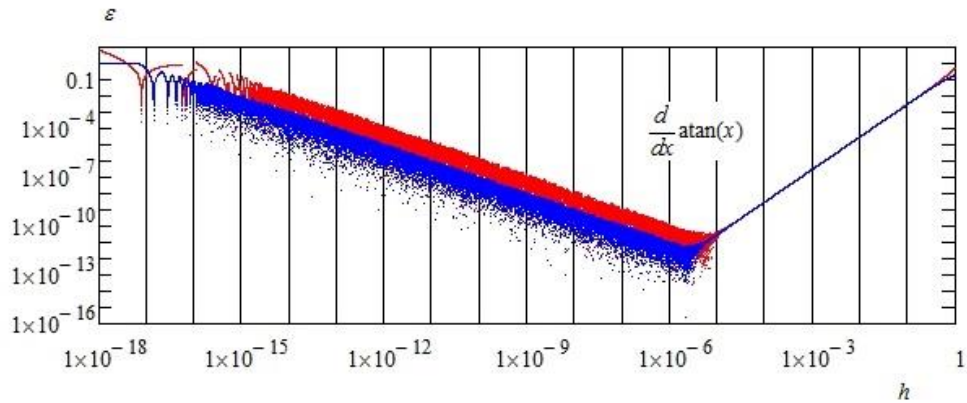


Рисунок 2.1.2 Сравнение относительной ошибки вычисления производной функции $\arctg(x)$ с помощью центральных разностей (синяя линия) и методом комплексного (красная линия) шага от величины шага h .

Это происходит вследствие того, что при уменьшении величины шага h мнимые части выражения (2.1.3) будут включать в себя (при их вычислительной аппроксимации соответствующими рядами) элементы определенной структуры, как раз и содержащие разность двух близких чисел, благодаря которым и проявляется ошибка округления. Проиллюстрируем это, вычисляя по формуле (2.1.3) производную от функции $f(x)=\arctg(x)$. Ее аналитическое продолжение на комплексную плоскость f_C в общем случае может быть представлено следующим образом:

$$f_C(z) = \arctg(z) = -\frac{1}{2}i \ln\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right), \quad (2.1.11)$$

или

$$f_C(z) = \arctg(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{-2x}{x^2 + y^2 - 1}\right) - \frac{1}{2}i \ln\left(\sqrt{\frac{(x^2 + y^2 - 1)^2 + 4x^2}{(x^2 + y^2 + 2y + 1)^2}}\right).$$

Тогда в соответствии с формулой для производной (2.1.3) и выражением (2.1.11)

$$\operatorname{Im}(f_C(x + ih)) = v(x, h) = -\frac{1}{2} \ln\left(\sqrt{\frac{(x^2 + h^2 - 1)^2 + 4x^2}{(x^2 + h^2 + 2h + 1)^2}}\right), \quad (2.1.12)$$

и при этом очевидно, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\frac{(x^2 + h^2 - 1)^2 + 4x^2}{(x^2 + h^2 + 2h + 1)^2}} = 1.$$

Таким образом видно, при малой величине шага h значение выражения (2.1.12) стремится к нулю. Выражение же под знаком натурального логарифма в (2.1.12) в данном случае может быть представлено в виде соответствующего ряда Тейлора (по степеням h), и тогда можно переписать его в виде

$$\operatorname{Im}(f_C(x + ih)) = v(x, h) \cong -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1} h + o(h) \right), \quad h \rightarrow 0. \quad (2.1.13)$$

При проведении вычислений на ЭВМ, как известно, используется численная аппроксимация рассматриваемой аналитической функции комплексного переменного (2.1.11), сводящаяся к некоторому сходящемуся (внутри некоторой области комплексной плоскости с центром в точке $(x, 0)$) ряду по степеням приращения $(0 + ih)$. Исходя из алгебраических свойств комплексных чисел, мнимая часть этого ряда, очевидно, будет соответствовать численной аппроксимации (рядом) действительной функции $v(x, h)$ (2.1.12), которую при малых h можно определить выражением (2.1.13). При этом, для вычисления функции $\ln(\eta)$ на ЭВМ используется разложение, которое (в общем виде) может быть представлено как

$$\ln(\eta) = \sum_{n=0}^N C_n(\eta, n) (1 - \eta)^n. \quad (2.1.14)$$

Тогда члены соответствующего ряда, аппроксимирующего правую часть выражения (2.1.14), при малых значениях h будут включать в себя множители, которые, согласно (2.1.13), могут быть записаны в следующем виде:

$$\left(1 - \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1} h + o(h) \right) \right)^n, \quad h \rightarrow 0,$$

при вычислении которых и проявляется ошибка округления, вызванная разностью двух близких по величине чисел. Как видно из приведенных рассуждений, природа данной ошибки основывается как на некоторых свойствах представления аналитической функции комплексного переменного в виде (2.1.5), так и на особенностях вычислений для ряда внутренних процедур ЭВМ.

Таким образом, при всех своих достоинствах, в ряде случаев метод комплексного шага все же оказывается зависимым достаточно сложным образом от выбора величины шага h , потребного для обеспечения требуемой точности при вычислении производной функции $f(x)$. Кроме того, очевидно, что при его использовании необходимо проводить все потребные вычисления в комплексной области. Последнее приводит к общему росту числа элементарных операций и, как следствие, повышению затрат вычислительных ресурсов. К тому же, в

некоторых случаях аналитически продолжить функцию $f(x)$ на некоторую (необходимую в процессе вычислений) область комплексной плоскости вовсе не удается, или же могут возникать сложности, например, связанные с многозначностью продолжения f_C или же его особыми точками. К этому следует также добавить то, что при малых значениях величины шага h , мнимая часть выражения (2.1.3) всегда значительно меньше его действительной части (на порядки), что при проведении вычислений на практике также может приводить к ухудшению общей вычислительной устойчивости и работоспособности некоторых алгоритмов (например, численного интегрирования), совместно с которыми возможно использовать метод комплексного шага. Подробнее об этом будет сказано в ходе дальнейшего изложения.

Итак, прекрасно видно, что метод комплексного шага все же продолжает зависеть от выбора величины шага h , хоть и в куда меньшей степени по сравнению с классическими разностными методами. Идеальным вариантом метода численного дифференцирования функции, был бы тот, для которого зависимость относительной ошибки вычисления производной от величины шага всегда повторяла бы зависимость, общий вид которой (для случая метода комплексного шага) приведен на рисунке 1 (красная линия). Т.е. была бы преимущественно монотонно невозрастающей функцией, быстро выходящей на некоторую асимптоту, со скоростью пропорциональной ($\sim h^n$), где $n \in \mathbb{N}$, и $n > 2$, что позволяло бы выбирать значения шага h не слишком малыми, и тем самым, избежать ряда возникающих при этом трудностей. Сравнительно недавно, был предложен новый метод, использование которого полностью снимает всякую зависимость ошибки вычисления требуемой производной от величины шага. Более того, данный метод позволяет вычислять производную функции в точке с относительной точностью, равной общей относительной точности проводимых вычислений, так как ошибка усечения при его использовании всегда тождественно равна нулю, что будет показано далее. Данный метод численного дифференцирования функции основывается на использовании ряда алгебраических свойств т.н. *дуальных чисел*, представляющих собой одну из канонических систем самых общих комплексных чисел [57]. Сам метод, судя по всему, впервые предложен в работе [91], и освещен там лишь в минимально необходимой для понимания степени. При этом основные теоретические вопросы, связанные с алгеброй дуальных чисел и их многомерных расширений, а также связанные с построением аналитического продолжения действительзначной функции действительного аргумента $f(x)$ на дуальную плоскость, нигде в подобных работах и вовсе не затрагиваются. Последнее оказывается критически важным, т.к. для строго обоснования метода численного дифференцирования необходимо использовать теорию

функции дуального переменного, которая в полной мере в литературе нигде не изложена, а некоторые сведения из которой присутствуют лишь в работах [91, 103].

Кратко приведем здесь понятие дуального числа. Итак, упорядоченная пара действительных чисел

$$\langle x, x' \rangle, \quad x, x' \in \mathbf{R},$$

представимая в соответствии с определением своих базовых алгебраических операций (сложения и умножения) в виде

$$x^d = x + \varepsilon x', \quad (2.1.15)$$

называется дуальным числом [61, 62, 65, 66, 73, 91, 99, 100, 103]. Как и для обыкновенных комплексных чисел, в выражении (2.1.15) x – действительная часть числа, x' – дуальная (т.е. мнимая) часть, ε – нильпотентный элемент рассматриваемой алгебры, некоторая точка, принадлежащая дуальной плоскости D . Для последнего характерно следующее, важное для всего дальнейшего изложения свойство:

$$\varepsilon \neq \mathbf{0}, \quad \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 = 0, \quad \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \dots = (\varepsilon^2) \cdot \varepsilon \cdot \dots = 0. \quad (2.1.16)$$

Более подробно, основные свойства алгебры дуальных чисел и их многомерных расширений, а также элементы теории функции дуального переменного, будут рассмотрены в приложении настоящей диссертационной работы. Добавим здесь лишь следующее: для дуальных чисел, как и для обычных комплексных, выполняются те же основные алгебраические правила умножения на действительный скаляр и раскрытия скобок. Сложение и умножение двух дуальных чисел производится аналогично комплексным (говоря упрощенно), но с учетом условия (2.1.16). Так, основные бинарные операции для дуальных чисел можно определить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1^d + x_2^d &= (x_1 + \varepsilon x_1') + (x_2 + \varepsilon x_2') = (x_1 + x_2) + \varepsilon (x_1' + x_2'), \\ x_1^d \cdot x_2^d &= (x_1 + \varepsilon x_1') \cdot (x_2 + \varepsilon x_2') = x_1 x_2 + \varepsilon (x_1 x_2' + x_2 x_1'). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.17)$$

Также кратко приведем понятие многомерного дуального числа, или дуального числа с векторной дуальной частью [91, 99, 100, 103]. Данный вариант дуального числа (расширение) оказывается возможным использовать для построения численного алгоритма определения частных производных от скалярной функции нескольких переменных. Это также впервые показано, судя по всему, в работе [91]. Итак, многомерным дуальным числом будем называть число следующего вида:

$$x^d = x \cdot 1 + \varepsilon_1 x' + \varepsilon_2 x'' + \dots + \varepsilon_n x'^{\dots}, \quad (2.1.18)$$

где, как и ранее, x – действительная часть числа, а x', x'', \dots – компоненты векторной дуальной части числа, ε_i – соответствующие нильпотентные элементы, для которых справедливо

$$\varepsilon_i \neq 0, \quad \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0 \quad \forall i, j \in 1 \dots n. \quad (2.1.19)$$

Их основные алгебраические свойства полностью повторяют соответствующие для обыкновенных дуальных чисел, и, вместе с элементами теории аналитической функции дуального переменного могут быть найдены в Приложении настоящей диссертационной работы. Основные бинарные операции для многомерных дуальных чисел (2.1.18):

$$\left. \begin{aligned} x_1^d + x_2^d &= (x_1 + \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_1'' + \dots + \varepsilon_n x_1^{(n)}) + (x_2 + \varepsilon_1 x_2' + \varepsilon_2 x_2'' + \dots + \varepsilon_n x_2^{(n)}) = \\ &= x_1 + x_2 + \varepsilon_1 (x_1' + x_2') + \varepsilon_2 (x_1'' + x_2'') + \dots + \varepsilon_n (x_1^{(n)} + x_2^{(n)}), \\ x_1^d \cdot x_2^d &= (x_1 + \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_1'' + \dots + \varepsilon_n x_1^{(n)}) \cdot (x_2 + \varepsilon_1 x_2' + \varepsilon_2 x_2'' + \dots + \varepsilon_n x_2^{(n)}) = \\ &= x_1 x_2 + \varepsilon_1 (x_1 x_2' + x_2 x_1') + \varepsilon_2 (x_1 x_2'' + x_2 x_1'') + \dots + \varepsilon_n (x_1 x_2^{(n)} + x_2 x_1^{(n)}). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.20)$$

Теперь можно привести достаточно простое для понимания, но математически не очень строгое (и полное) качественное обоснование метода численного дифференцирования, основанного на применении алгебры дуальных чисел. Для этого воспользуемся тем же путем, что и в случае первичного рассмотрения метода комплексного шага (2.1.3), и по аналогии с работой [103]. Итак, дадим аргументу x некоторой непрерывной и непрерывно дифференцируемой (как минимум, один раз) в окрестности этой точки функции $f(x)$ чисто дуальное приращение εh , и запишем ее в виде тейлоровского разложения по степеням этого приращения:

$$f(x + \varepsilon h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \varepsilon h + \frac{f''(x)}{2!} (\varepsilon h)^2 + \dots \quad (2.1.21)$$

Очевидно, что в силу условия (2.1.16), полученное выражение (2.1.21) усекается до

$$f(x + \varepsilon h) = f(x) + \varepsilon f'(x) h,$$

и взяв от которого дуальную часть, легко получить следующее выражение для производной:

$$f'(x) = h^{-1} \text{Dp}(f(x + \varepsilon h)), \quad (2.1.22)$$

представленное в работе [91, 103]. При этом, полученное выражение (2.1.22) вовсе не имеет слагаемого, характеризующего ошибку усечения, также, как и разностного выражения по типу (2.1.2). Что же касается величины шага h , то в данном случае ее можно выбирать произвольной, и удобнее всего просто везде положить $h=1$. Таким образом, окончательно приходим к следующему простому выражению для производной:

$$f'(x) = \text{Dp}(f(x + \varepsilon \cdot 1)). \quad (2.1.23)$$

Естественно, при использовании формулы (2.1.23) (или (2.1.22)) для вычисления производной, как и в случае метода комплексного шага, возникает вопрос о возможности продолжения функции $f(x)$ на плоскость дуального переменного D

$$f(x) \rightarrow f_D(x^d),$$

о свойствах такого продолжения и общих требованиях, предъявляемых к нему. Дать ответы на озвученные вопросы возможно только исходя из положений теории аналитической функции дуального переменного, основные элементы которой представлены в приложении настоящей диссертационной работы, и ряд результатов которой принадлежит автору. Используя теорию аналитической функции дуального переменного удастся элементарно обосновать применяемый в работе метод численного дифференцирования и его многомерные варианты. В свою очередь, сам метод численного дифференцирования (2.1.23), как и для случая комплексных чисел, вновь опирается исключительно на понятие производной. Как будет показано в приложении, основополагающим для него фактором является структура аналитической функции дуального переменного, где понятие аналитичности проявляется в том же смысле, что и для функции комплексного переменного – т.е. оно основывается на дифференцируемости функции $f_D(x^d)$ в дуальном смысле (D -дифференцируемость), и тех условиях, которым компоненты функции $f_D(x^d)$ должны отвечать.

В заключении данного раздела приведем достаточно простое и краткое обоснование методики численного определения частных производных скалярной функции нескольких аргументов с помощью использования многомерного варианта дуальных чисел (2.1.18). В данном случае также следуем простому и наглядному пути, предложенному в работе [103]. Итак, в качестве примера рассмотрим действительнзначную скалярную функцию двух действительных переменных $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Далее, рассмотрим ее продолжение на многомерную дуальную плоскость

$$f(x_1, x_2) \rightarrow f_D(x_1^d, x_2^d) = x_1^d \cdot x_2^d = (x_1 + \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_1'') \cdot (x_2 + \varepsilon_1 x_2' + \varepsilon_2 x_2''),$$

которое, с учетом (2.1.19), можно переписать следующим образом:

$$f_D(x_1^d, x_2^d) = x_1 x_2 + \varepsilon_1 (x_1 x_2' + x_2 x_1') + \varepsilon_2 (x_1 x_2'' + x_2 x_1''). \quad (2.1.24)$$

Тогда, если в полученном выражении (2.1.24) положить соответствующие компоненты дуальной части

$$x_1'' = x_2'' = 0,$$

то его можно представить в следующем виде:

$$f_D(x_1^d, x_2^d) = x_1 x_2 + \varepsilon_1 x_1' x_2 + \varepsilon_2 x_2' x_1 = x_1 x_2 + \varepsilon_1 x_1' \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \varepsilon_2 x_2' \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}. \quad (2.1.25)$$

Рассматривая дуальную часть от полученного представления (2.1.25), видно, что выражение при каждой ее отдельной компоненте (соответствующего элемента базиса) ε_i содержит действительное значение частной производной функции $f(x_1, x_2)$. Отсюда следует, что для численного определения частных производных функции $f(x_1, x_2)$ с использованием дуальных

чисел с векторной дуальной частью, достаточно вычислить значение ее аналитического продолжения на дуальную плоскость $f_D(x^d_1, x^d_2)$, положив при этом

$$x^d_1 = x_1 + \varepsilon_1 \cdot 1 + \varepsilon_2 \cdot 0, \quad x^d_2 = x_2 + \varepsilon_1 \cdot 0 + \varepsilon_2 \cdot 1,$$

т.е. принять соответствующие элементы дуальной части при искомым производных равными единице и обнулив все остальные. Более строгое обоснование представленной методики вычисления частных производных, базирующееся на основе структуры аналитической функции многомерного дуального переменного, как уже было сказано ранее, представлено в Приложении настоящей диссертационной работы.

Таким образом, методы численного дифференцирования функций, основанные на применении математического аппарата дуальных чисел, в отличие от разностных методов и метода комплексного шага:

- обеспечивают относительную точность вычисления производных равную относительной точности вычисления функции;
- их результат не зависит от величины шага дифференцирования h , т.е. полностью снимаются вопросы относительно его выбора;
- в отличие от метода комплексного шага порядки действительной и мнимой (дуальной) частей совпадают.

Естественно, как и в случае применения метода комплексного шага, для использования методик численного дифференцирования функций, основанных на математическом аппарате дуальных чисел, необходимо проводить все вычисления над элементами дуальной плоскости (или над вариантами ее многомерных расширений). Для этого необходимо программно реализовать новый тип чисел (дуальных), определить все необходимые алгебраические и элементарные операции над ними, а также построить дуальное представление для основного набора из необходимых при проведении вычислений элементарных функций. В качестве примера известной программной реализации подобного модуля можно привести [103]. Для всех вычислений над пространством дуальных чисел, осуществленных в рамках данной работы, автор использовал собственную реализацию программного модуля на языке FORTRAN, содержащего описание типа, алгебраических и элементарных операций и необходимого набора функций

Здесь еще стоит отметить следующее. Если сравнить число элементарных операций, необходимых при вычислении суммы двух комплексных чисел и суммы двух дуальных (2.1.17) соответственно, то оно, очевидно совпадает. Однако, рассматривая операцию умножения, оказывается, что для дуальных чисел, согласно (2.1.17), при вычислении их произведения требуется на две элементарные операции (сложение и умножение

действительных чисел) меньше, чем для комплексных, умножение которых определяется следующим известным образом [15, 57, 61]:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Так как операции сложения и умножения являются базовыми (через них определяются все прочие), то использование дуальных чисел вида (2.1.15) для численного определения производных, очевидно, обеспечивает также некоторое преимущество и с точки зрения вычислительных затрат по сравнению с методом комплексного шага (по числу необходимых элементарных операций).

Для дуальных чисел с векторной дуальной частью (2.1.18), число элементарных операций, необходимое при вычислении их суммы и произведения (2.1.20), непосредственно зависит от размерности n векторной дуальной части числа. Так, для определения суммы требуется $(1+n)$ элементарная операция, а для произведения - $(1+3n)$. Однако, несмотря на возрастание потребного числа элементарных операций прямо пропорционально размерности дуальной части, применять аппарат многомерных дуальных чисел вида (2.1.20) при численном дифференцировании оказывается выгоднее. Покажем это на уже рассмотренном выше простом примере вычисления частных производных функции двух переменных $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Размерность векторной дуальной части, как следует из описания метода, определяется числом неизвестных производных. В данном случае $n=2$. Тогда, как видно из (2.1.24), и как это следует из приведенных ранее рассуждений, для вычисления производных в данном случае требуется 7 элементарных операций. Плюс к тому, сразу же определяется и значение самой функции $f(x_1, x_2)$. При использовании метода комплексного шага для определения частных производных, приходится дважды (по отдельности) вычислять произведение пары комплексных чисел, что потребует в сумме проведения 12 элементарных операций, к тому же при этом не вычисляется действительное значение функции $f(x_1, x_2)$.

Основной вывод приведенного в разделе анализа – использование аппарата дуальных чисел для численного дифференцирования более эффективно, чем использование комплексных чисел. Оно в общем случае позволяет повысить точность нахождения производных по сравнению с конечно-разностными методами.

2.2 Применение математического аппарата дуальных чисел при решении возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ

Теперь акцентируем внимание на основной идее применения математического аппарата дуальных чисел при решении задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, рассматриваемой в рамках данной диссертационной работы.

Рассмотрим первый возможный вариант применения дуальных чисел к решению задач траекторной оптимизации, который позволяет существенно расширить степень сложности используемой для описания движения центра масс КА с ЭРДУ математической модели. В разделе 1.2 первой главы была получена системы дифференциальных уравнений оптимального управляемого возмущенного движения КА с ЭРДУ, записанная в *неявном* виде, основные составляющие элементы которой определяются соответствующими выражениями (1.1.5), (1.1.7), (1.2.20) – (1.2.22), (1.2.30) (и, соответственно, (1.1.5), (1.1.8), (1.2.27), (1.2.32)). Причиной отсутствия представления в *явном* виде для рассматриваемой системы уравнений оптимального *возмущенного* движения является сложность аналитического определения правых частей соответствующих дифференциальных уравнений для сопряженной системы (1.2.30), (1.2.32). Так, выражения для правых частей системы дифференциальных уравнений управляемого движения КА [42-44, 48, 49, 54, 78], записанные в равноденственных элементах, сами по себе весьма громоздки, что приводит к довольно сложному выражению для соответствующего гамильтониана задачи, и, как следствие этого, трудностям определения его частных производных по компонентам фазового вектора системы \mathbf{x} , необходимых для формирования правых частей сопряженных уравнений. Ситуация здесь существенно ухудшается ввиду необходимости учета возмущений, действующих на КА при его траекторном движении. Это происходит вследствие того, что возмущающие ускорения, согласно выражениям (1.1.15), в наиболее общем случае являются функциями, зависящими от фазового вектора \mathbf{x} и времени t . Поэтому аналитическое определение частных производных оптимального гамильтониана (1.2.23), (1.2.28) по компонентам фазового вектора рассматриваемой динамической системы, становится весьма трудоемкой задачей. В особенности, когда сама математическая модель, описывающая возмущения (1.1.15), достаточно сложна. Последнее легко видеть на примере возмущений от нецентральной гравитационного поля Земли, точный алгоритм расчета которых приведен в разделе 1.4. При этом, как показывает практика, использование в данном случае математических пакетов компьютерной алгебры типа MAPLE для аналитического вычисления необходимых частных производных, не приводит к положительному результату. Естественным выходом из данной ситуации является применение методов численного дифференцирования для определения соответствующих частных производных, необходимых для формирования правых частей системы сопряженных уравнений. Для этой цели и предлагается использование аппарата дуальных чисел.

Перед тем, как непосредственно перейти к описанию первого предлагаемого варианта применения математического аппарата дуальных чисел к решению задач траекторной оптимизации, остановимся подробнее на вопросе о том, насколько вообще необходимо

учитывать возмущения при формировании правых частей сопряженной системы уравнений оптимального движения КА, и на что это в итоге влияет. Основопологающим фактором здесь является то, что выражения для оптимального управления (1.2.20) – (1.2.22) или (1.2.27), в силу формализма принципа максимума, естественно содержат в себе как фазовые, так и сопряженные переменные. Так, например, если рассматривать управляемое движение КА с учетом действия возмущений, но использовать при решении соответствующей задачи оптимального управления выражения для правых частей сопряженной системы, отвечающие невозмущенной задаче (с тем же оптимальным управлением вида (1.2.20) – (1.2.22) или (1.2.27)), как это делается в ряде работ, например [49], то, очевидно, не будут выполнены все необходимые условия оптимальности принципа максимума, и, следовательно, полученные решения (в случае, если они существуют) в лучшем случае следует рассматривать только как квазиоптимальные. Причина этого в том, что в данном случае будет проявляться полное несоответствие полученного вдоль квазиоптимального решения динамической системы (КА) управления вида (1.2.20) – (1.2.22) (или (1.2.27)) и фактически рассматриваемой дифференциальной связи. Таким образом, для полноценного решения задачи траекторной оптимизации, и, как следствие, оценки влияния действия возмущений на результирующее управление вдоль полученной оптимальной траектории перелета и целевого функционала задачи, все же кажется вполне оправданным, не ослаблять требования к выполнению необходимых условий оптимальности принципа максимума. А для этого необходимо точно определять правые части уравнений сопряженной системы, каким-то образом определяя нужные производные.

Итак, в соответствии с уже приведенными выше общими соображениями, для формирования правых частей системы дифференциальных уравнений оптимального управляемого *возмущенного* движения КА с ЭРДУ, будем следовать следующему, вполне очевидному подходу, вытекающему непосредственно из канонического формализма принципа максимума. Согласно которому, искомые правые части определяются через оптимальный гамильтониан задачи следующим образом [1, 2, 11, 23, 27, 37, 38, 52]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \boldsymbol{\psi}}, \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} &= -\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

Тогда, зная выражение для оптимального гамильтониана \mathbf{H}^* , для вычисления соответствующих правых частей в уравнениях (2.2.1) достаточно воспользоваться каким-либо методом численного дифференцирования. Данный подход также рассматривается в работах [75, 93]. Теперь остается открытым вопрос о том, какой численный метод дифференцирования

использовать. Ведь от точности вычисления требуемых производных будет напрямую зависеть качество моделирования, а также его различные аспекты, связанные, например, с вычислительной устойчивостью, сходимостью применяемых численных методов и т.д. Так, использование какого-либо из вариантов разностных методов, например, центральных разностей, как в работе [93], в данном случае представляется не слишком удовлетворительным, ввиду сложности выбора оптимального значения шага метода, обеспечивающего разумный компромисс между величиной ошибки усечения и ошибки округления для обеспечения требуемой точности вычисления производных. При этом, для определения значений правых частей в (2.2.1), требуется значительное количество вычислений оптимального гамильтониана задачи – $4 \cdot n$, где n – размерность фазового вектора x . В работе [75] впервые было предложено для этой цели использовать метод комплексного шага, основные достоинства и недостатки которого были отмечены в предыдущем разделе. С его помощью, при малых величинах шага h удается обеспечивать очень высокую относительную точность вычисления правых частей уравнений (2.2.1). Однако, при этом приходится выполнять значительное число вычислений в комплексной области, весьма затратных по количеству элементарных операций. К тому же, как было показано ранее, точность вычисления производных методом комплексного шага, также, как и для разностных методов, в ряде случаев может сложным образом зависеть от величины шага h . При использовании метода комплексного шага для определения значений правых частей системы дифференциальных уравнений (2.2.1), необходимо, на каждом шаге в процессе ее численного интегрирования, $2 \cdot n$ вычислений представления для оптимального гамильтониана в комплексной области.

Таким образом, наилучшим вариантом метода численного дифференцирования для определения правых частей системы дифференциальных уравнений оптимального управляемого *возмущенного* движения КА с ЭРДУ, в силу приведенных рассуждений (из текущего и предыдущего разделов настоящей главы), без всякого сомнения является метод, основанный на свойствах алгебры дуальных чисел. Далее, подробно опишем общий принцип использования данного метода при решении рассматриваемых в работе типов задач оптимизации межорбитального перелета (в контексте первого возможного варианта его применения).

Итак, для определения значений правых частей системы (2.2.1) необходимо вычислить все частные производные от одной скалярной функции $2 \cdot n$ аргументов \mathbb{H}^* с помощью дуальных чисел. Согласно материалу предыдущего раздела, для этого наиболее удобно использовать числа вида (2.2.18) (многомерный вариант дуального числа). При этом, размерность векторной дуальной части, также следует положить равной $2 \cdot n$, в соответствии с

общим количеством производных, подлежащих определению. Далее, используя программный модуль, описывающий набор основных алгебраических операций и элементарных функций для чисел вида (2.2.18), необходимо вычислить дуальное представление для оптимального гамильтониана H^* . В результате, получим аналитическую функцию нескольких многомерных дуальных переменных, основные свойства и особенности структуры которой подробно описаны в приложении настоящей диссертационной работы. Приведем здесь кратко лишь общее определение для данной аналитической функции. Итак, функцией m многомерных дуальных переменных с размерностью векторной дуальной части равной n будем называть следующую:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^d &= (x^d_1, x^d_2, \dots, x^d_m), \mathbf{x}^d \in M \subset \mathbf{D}^m, \\ u(\cdot), v_i(\cdot) &: M \rightarrow \mathbf{D}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \omega = f_{\mathbf{D}}(\mathbf{x}^d) &= u \left(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_m, \underbrace{x'_1, x''_1, \dots, x'_1, \dots, x'_1}_{n}, \underbrace{x'_2, x''_2, \dots, x'_2, \dots, x'_2}_{n}, \dots, \underbrace{x'_m, x''_m, \dots, x'_m}_{n}}_m \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \left(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_m, \underbrace{x'_1, x''_1, \dots, x'_1, \dots, x'_1}_{n}, \underbrace{x'_2, x''_2, \dots, x'_2, \dots, x'_2}_{n}, \dots, \underbrace{x'_m, x''_m, \dots, x'_m}_{n}}_m \right). \end{aligned} \right\}$$

Где \mathbf{x}^d – векторный многомерный дуальный аргумент, \mathbf{D}^m – m -мерное пространство дуальных чисел вида (2.1.18), M – некоторая область пространства \mathbf{D}^m , на которой определены действительнзначные функции действительных аргументов u и v_i , которые предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам на соответствующих значениях элементов из этой области. В Приложении автором работы также получено выражение для аналитической (\mathbf{D}^m -дифференцируемой в рассматриваемой области), или голоморфной функции нескольких многомерных дуальных переменных. Ее общая структура описывается следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned}
f_D(\mathbf{x}^d) &= u(x_1, x_2, \dots, x_m) + \varepsilon_1 \left(\sum_{i=1}^m x_i' \frac{\partial u}{\partial x_i} + w_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \right) + \\
&\quad + \varepsilon_2 \left(\sum_{i=1}^m x_i'' \frac{\partial u}{\partial x_i} + w_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \right) + \dots \\
&\quad \dots + \varepsilon_n \left(\sum_{i=1}^m x_i^{(n)} \frac{\partial u}{\partial x_i} + w_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \right), \\
w_1(x_1, x_2, \dots, x_m) &= \sum_{j=1}^k c_j' \frac{\partial u}{\partial c_j}, \quad w_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^k c_j'' \frac{\partial u}{\partial c_j}, \dots, \\
w_n(x_1, x_2, \dots, x_m) &= \sum_{j=1}^k c_j^{(n)} \frac{\partial u}{\partial c_j}.
\end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

В Приложении показано, что для построения дуального представления $f_D(\mathbf{x}^d)$ для скалярной действительнзначной функции векторного действительного аргумента $f(\mathbf{x})$, достаточно всего лишь положить

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = u(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad c_j' = c_j'' = \dots = 0, \quad (2.2.3)$$

где c_j' и т.п. – компоненты дуальной части k действительных постоянных, входящих в функцию u . Таким образом, проводя вычисления над элементами m -мерного пространства многомерных дуальных чисел, с использованием специального программного модуля, соответствующее дуальное представление (аналитическое) для любой функции $f(\mathbf{x})$ будет всегда иметь вид (2.2.2), и при этом оказывается справедливым (2.2.3). Правая часть выражения (2.2.2) явно содержит частные производные, значения которых удается легко получить на практике, просто приняв следующее дуальное представление для вектора $(x_1, x_2, \dots, x_m)^T$:

$$\mathbf{x}^d = \{x_i^d\}, \quad x_i^d = x_i + \varepsilon_i \cdot 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.2.4)$$

Тогда, проводя всего лишь одно вычисление дуального представления $f_D(\mathbf{x}^d)$ для функции $f(\mathbf{x})$, для аргументов (2.2.4), удается сразу же определить и само значение функции $f(\mathbf{x})$, и значение всех ее соответствующих частных производных. Для этого необходимо, согласно (2.2.2) и (2.2.3), всего лишь выделить действительную и дуальную (покомпонентно) части полученного выражения. Таким образом, особые алгебраические свойства чисел вида (2.1.18) приводят к интересной структуре аналитической функции дуального переменного, чем и обосновывается суть соответствующего метода численного дифференцирования. Следовательно, для того чтобы определить *точные* значения правых частей системы дифференциальных уравнений (2.2.1), достаточно всего лишь один раз (!) вычислить дуальное представление оптимального гамильтониана, для рассматриваемых в работе типов задач траекторной оптимизации дающегося выражениями (1.2.23), (1.2.28):

$$H^*(\mathbf{x}, \Psi) \rightarrow H^*_D(\mathbf{x}^d, \Psi^d). \quad (2.2.5)$$

Здесь стоит отметить, что в выражение H^* в качестве аргумента в общем случае естественно входит текущее время t , т.к. при учете возмущений система уравнений движения КА с ЭРДУ становится неавтономной. Но т.к. вычисление частной производной по времени не требуется при решении рассматриваемых задач оптимального управления, при вычислении дуального представления гамильтониана (на каждом шаге численного интегрирования), текущее время t рассматривается как многомерная дуальная постоянная с нулевой дуальной частью (как и прочие константы, входящие в H^*). Согласно приведенному выше алгоритму определения частных производных, значение функции H^*_D должно вычисляться для следующих значений ее векторных дуальных переменных:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^d &= \{x^d_i\}, & x^d_i &= x_i + \varepsilon_i \cdot 1, \\ \Psi^d &= \{\psi^d_i\}, & \psi^d_i &= \psi_i + \varepsilon_i \cdot 1, \\ (\mathbf{x}, \Psi) &\in \mathbf{R}^{2n}, & i &= 1, \dots, 2n. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.6)$$

В выражениях (2.2.6) обозначение n – уже вновь соответствует размерности фазового вектора \mathbf{x} (1.1.13) или (1.1.14) системы дифференциальных уравнений движения КА. И рассматривая по отдельности действительную и дуальную (покомпонентно) части от вычисленного значения функции H^*_D , определяем значения искомым правых частей системы дифференциальных уравнений (2.2.1).

Естественно, при решении рассматриваемого в работе типа задач оптимизации межорбитального перелета, необходимо на каждом шаге численного интегрирования системы дифференциальных уравнений оптимального возмущенного движения КА вычислять дуальное представление для оптимального гамильтониана, в который также входят выражения для компонент возмущающих ускорений, которые определяются по алгоритму, приведенному в разделе 1.4. Вычислять их также необходимо в дуальном представлении, что в итоге не приводит к каким-либо особым сложностям. При этом для них вдоль рассматриваемых траекторий движения КА всюду справедливо предположение (1.1.16) (здесь стоит отметить, что дуальное представление функции наследует все основные свойства и особенности своего действительного прообраза, что будет показано в Приложении).

В заключении текущего раздела, стоит отметить следующее. Конечно, проведение вычислений, необходимых для определения с помощью предложенной методики правых частей системы дифференциальных уравнений (2.2.1), над элементами m -мерного пространства многомерных дуальных чисел, требует немалых вычислительных затрат. Тем не менее, они оказываются меньшими, чем, например, при использовании метода комплексного шага (как это было показано на простом примере в предыдущем разделе). К тому же,

применение дуальных чисел обеспечивает также одновременное с определением производных вычисление значения самой функции (в рассматриваемом случае – оптимального гамильтониана), которое может быть использовано при решении задачи оптимального управления. При этом правые части системы определяются с относительной точностью вычисления дуального представления H^*_D , которая естественно соотносится с общей относительной точностью проведения вычислений. Компоненты дуальной части для рассматриваемого дуального представления оптимального гамильтониана при вычислениях всегда имеют тот же порядок, что и его действительная часть, в отличие от метода комплексного шага. Последнее положительно сказывается на общей вычислительной устойчивости применяемых при решении рассматриваемых задач оптимального управления алгоритмах.

В данном разделе описан только первый вариант применения математического аппарата дуальных чисел при решении задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ. Как будет показано на конкретных примерах в третьей главе настоящей диссертационной работы, предложенная методика позволяет достаточно эффективно решать задачи траекторной оптимизации для функционалов (1.2.7) – (1.2.9), в рамках принятой модели действующих на КА возмущений. При этом, сама рассматриваемая общая методика решения подобных задач является весьма универсальной по отношению к принимаемым во внимание возмущениям, учет воздействия которых на траекторию аппарата необходим. Так, общее количество возмущающих факторов, действующих на КА, легко можно расширить при наличии соответствующих математических моделей (по сравнению с учитываемыми в рамках работы). Например, может быть добавлен учет отключения/падения мощности ЭРДУ в тени Земли (для любой принятой модели тени), учет светового давления или воздействия земной атмосферы. Для этого всего лишь необходимо добавить соответствующие компоненты возмущающих ускорений в выражение для оптимального гамильтониана задачи. При этом основным требованием, предъявляемым к этим компонентам, по-прежнему остается их непрерывность и непрерывная дифференцируемость по крайней мере вдоль рассматриваемых траекторий межорбитального перелета.

Второй вариант применения аппарата дуальных чисел при решении задач оптимизации межорбитального перелета непосредственно связан с численным методом решения соответствующих им краевых задач принципа максимума (например, вида (1.3.2) – (1.3.4)). Данный вариант будет представлен в ходе дальнейшего изложения, после полного описания численного метода.

2.3 Метод продолжения по параметру

Как известно, формализм принципа максимума Понтрягина сводит поиск экстремали оптимизационной проблемы к решению соответствующей краевой задачи, эквивалентной некоторой системе нелинейных трансцендентных уравнений следующего вида:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n. \quad (2.3.1)$$

Зачастую, численное решение системы (2.3.1) является одним из самых сложных этапов при рассмотрении той или иной задачи оптимизации [41, 45]. Это связано с различными факторами, среди которых особенно выделяется следующий: проблема выбора начального приближения для решения системы уравнений (2.3.1) вкуче с, как правило, ее малой областью сходимости. Последнее является особенно характерным для задач оптимального управления в которых правые части системы дифференциальных уравнений, описывающих оптимальный процесс, представляют собой кусочно-непрерывные вектор-функции. Помимо этого, наличие кусочно-непрерывного управления на экстремали приводит к образованию скачков в элементах матрицы чувствительности (якобиане) системы (2.3.1), что заведомо осложняет численное решение любыми методами, предъявляющими строгие требования к непрерывности производных и точности их вычисления. При этом сама функция $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ не является гладкой.

Метод продолжения по параметру [58, 64] по сравнению с обычными методами первого порядка имеет ряд преимуществ, основным из которых является присущая ему глобальная сходимость при выполнении ряда предположений [64]. Основным среди данных предположений является существование гладкой функции, называемой функцией гомотопии:

$$\left. \begin{aligned} h(\mathbf{z}, \tau) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n, \\ h \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n), \\ \det \frac{\partial h}{\partial \mathbf{z}} \neq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.2)$$

отвечающей следующим условиям:

$$h(\mathbf{z}, 0) = \mathbf{g}(\mathbf{z}), \quad h(\mathbf{z}, 1) = \mathbf{f}(\mathbf{z}).$$

При этом подразумевается, что корни функции $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ известны. Перемещаясь от корня $h(\mathbf{z}, 0) = 0$ вдоль кривой продолжения $h(\mathbf{z}, \tau) = 0$ приходим к искомому корню системы (2.3.1). Таким образом, функция гомотопии (2.3.2) служит непрерывной деформации функции $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ в исходную функцию $\mathbf{f}(\mathbf{z})$, при непрерывном изменении параметра продолжения от значения $\tau = 0$ до значения $\tau = 1$.

В качестве функции гомотопии h рассматривается т.н. гомотопия Ньютона:

$$h(\mathbf{z}, \tau) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) - (1 - \tau) \mathbf{f}(\mathbf{z}_0),$$

здесь $\mathbf{z}_0 \in \mathbf{R}^n$ удовлетворяет соотношению $h(\mathbf{z}_0, 0) = 0$. Очевидно, что при рассмотрении гомотопии Ньютона требуется выполнение условия

$$\det \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right] \neq 0.$$

Далее, пусть вектор-функция $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau)$, такая, что $\mathbf{z} \in C^1([0, 1])$, и $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ - есть решение уравнения $h(\mathbf{z}(\tau), \tau) = 0$. Тогда, дифференцируя по τ последнее выражение, приходим к следующей задаче Коши:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}(\tau)} \right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{z}_0), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (2.3.3)$$

Проинтегрировав уравнение сформулированной задачи Коши (2.3.3), получим решение исходной системы уравнений (2.3.1): $\mathbf{z}(1) = \mathbf{z}^*$. Будем называть эту задачу Коши (2.3.3) – *внешней* (здесь и далее по ходу изложения всюду полагается, что *внутренняя* задача Коши определяется соотношениями вида (1.2.3) – (1.2.5)).

Из определения функции гомотопии (2.3.2) следует, что для непрерывного и устойчивого процесса продолжения правая часть дифференциального уравнения в выражении (2.3.3) должна быть как минимум непрерывна (также это следует из условий теоремы существования неявной функции [58], [64]). Это зачастую не выполняется, вследствие наличия скачков в элементах матрицы чувствительности, характерных для многих задач оптимального управления в которых управляемый процесс описывается дифференциальными уравнениями с кусочно-непрерывными правыми частями. Это, в свою очередь, накладывает дополнительное ограничение на гладкость функции $\mathbf{f}(\mathbf{z})$. В данном случае, (а он является наиболее распространенным в задачах оптимального управления) следуя подходу, описанному в работах [21, 46-49], необходимо вводить регуляризатор в правые части дифференциальных уравнений, описывающих оптимальный процесс, обеспечивающий их непрерывность и гладкость. Однако при этом, правые части системы дифференциальных уравнений могут иметь достаточно большую константу Липшица - их производные могут резко изменять свои значения на достаточно малом интервале. Это приводит к увеличению вычислительных затрат при решении внутренней задачи Коши и вносит дополнительную вычислительную неустойчивость во внешнее интегрирование системы (2.3.3). Поэтому целесообразно некоторым образом параметризовать систему дифференциальных уравнений внутренней задачи Коши, обеспечив ее непрерывную деформацию от какой-либо более простой первоначальной системы к требуемой. В ряде случаев по тем же причинам удобно вводить подобную параметризацию и для краевых условий. Это достигается путем введения

параметра продолжения в правые части системы дифференциальных уравнений внутренней задачи Коши. Таким образом, всегда можно представить внутреннюю задачу Коши в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t, \tau), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (2.3.4)$$

Здесь \mathbf{x} – фазовый вектор системы дифференциальных уравнений (2.3.4), $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t, \tau) \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$. Вводя параметр продолжения τ в краевые условия, определяющие систему (2.3.1), получим, например, следующее их представление:

$$\mathbf{G}_0(t_0, \mathbf{x}(t_0), \tau) = 0 \quad \vee \quad \mathbf{G}_f(t_f, \mathbf{x}(t_f), \tau) = 0.$$

Таким образом, система (2.3.1) теперь явным образом зависит от параметра продолжения, и представима в виде $\mathbf{f}(\mathbf{z}(\tau), \tau) = 0$. В этом случае внешняя задача Коши формулируется следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}(\tau)} \right)^{-1} \left(\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} \right), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (2.3.5)$$

Описанный подход успешно используется в работах [46-49]. Он позволяет обеспечить непрерывную гомотопию между вспомогательной (как правило, более простой) и основной задачей - отвечающей системе (2.3.1) (здесь в качестве конкретного примера можно привести «непрерывную гомотопию между «ОМ» и «ОТ» задачей», описанную в работах [46-49]). При этом предполагается, что решение вспомогательной известно. Следовательно, $\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = 0$, и тогда выражение (2.3.5) можно переписать в виде:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}(\tau)} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} \right). \quad (2.3.6)$$

Полученное выражение также будет соответствовать и случаю продолжения рассматриваемой задачи оптимального управления по краевым условиям или каким-либо иным ее параметрам.

Следует отметить, что даже при высокой точности вычисления производных, в силу ряда причин, например, при прохождении точек бифуркации, или нахождения вне области притяжения решения краевой задачи, матрица чувствительности системы (2.3.1) может становиться плохо обусловленной или вовсе вырождаться. Это может приводить к трудностям при вычислении правых частей дифференциального уравнения внешней задачи Коши, а для этого, как известно, требуется решить следующую систему линейных уравнений:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\chi} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right), \quad \mathbf{b} = - \left(\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau} \right). \quad (2.3.7)$$

Для этих целей можно использовать псевдообращение матрицы \mathbf{A} , определяемое следующим образом [2, 3]:

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T,$$

вектор $\boldsymbol{\chi}$, в свою очередь, определится как псевдорешение системы (2.3.7):

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}. \quad (2.3.8)$$

Псевдорешение (2.3.8) может быть определено как вектор, модуль которого определяет минимальное расстояние между концами векторов $\mathbf{A}\boldsymbol{\chi}$ и \mathbf{b} . Оно отвечает решению следующей задачи:

$$\min_{\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{R}^n} \|\mathbf{A}\boldsymbol{\chi} - \mathbf{b}\|, \quad (2.3.9)$$

и может быть найдено с помощью метода наименьших квадратов. Матрица \mathbf{A}^+ называется матрицей Мура-Пенроуза. Очевидно, что если матрица \mathbf{A} - вырождена, то обратная $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ не существует. Однако, непосредственное вычисление матрицы \mathbf{A}^+ для определения псевдорешения с точки зрения требуемых вычислений оказывается менее затратным, чем применение для этой цели метода наименьших квадратов, то есть решение задачи (2.3.7).

Для вычисления матрицы \mathbf{A}^+ можно пользоваться подходом, изложенным в [2]. Он основан на применении сингулярного разложения – одного из видов полного ортогонального разложения матрицы. Тогда матрица \mathbf{A} может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{K}\mathbf{V}^T,$$

где \mathbf{U} , \mathbf{V} - ортогональные матрицы, состоящие из левых и правых сингулярных векторов матрицы \mathbf{A} (собственных векторов матриц $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ соответственно), \mathbf{K} - диагональная матрица, элементы которой – сингулярные числа матрицы \mathbf{A} (квадратные корни из собственных значений матриц $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ или $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$). Тогда матрица обратная к \mathbf{A} представима в виде:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{U}^T,$$

где \mathbf{K}^{-1} - диагональная матрица, обратная к \mathbf{K} , с элементами:

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{cases} 1/k_{i,j}, & i = j, k_{i,j} \in \mathbf{K}, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

В случае вырожденности матрицы \mathbf{A} часть собственных значений матрицы $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ (или $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$) принимает значения равные нулю. Тогда матрица \mathbf{K}^{-1} не существует, так как часть элементов на главной диагонали матрицы \mathbf{K} обнуляются. Вместо нее можно рассматривать матрицу \mathbf{K}^+ - псевдообращение матрицы \mathbf{K} , удовлетворяющее условию Мура-Пенроуза, другими словами, удовлетворяющее (2.3.9). Тогда, матрица \mathbf{K}^+ определяется следующим образом:

$$\mathbf{K}^+ = \begin{cases} 1/k_{i,j}, & i = j, k_{i,j} \neq 0, \\ 0, & i = j, k_{i,j} = 0. \end{cases}$$

Тогда псевдообращение матрицы \mathbf{A} можно представить в виде:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{K}^+\mathbf{U}^T,$$

и тем самым, в соответствии с (2.3.8) определить псевдорешение системы (2.3.7).

Стоит также отметить, что в работе метод продолжения применялся совместно с использованием корректора нуля для функции гомотопии (2.3.2), как и в [21, 49]. В качестве корректора использовался обычный метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений.

2.4 Совместное использование метода продолжения и дуальных чисел

Перейдем теперь к описанию второго варианта применения математического аппарата дуальных чисел при решении задач оптимизации межорбитального перелета, рассматриваемого в данной работе. Итак, дуальные числа вида (2.1.15) или (2.1.18) предлагается использовать для определения требуемых производных при решении краевых задач принципа максимума методом продолжения. Кроме того, подобная методика, оказывается также может быть использована при численном решении краевых задач для произвольной управляемой динамической системы вида (1.2.1) – (1.2.5) любыми методами, использующими информацию о производных только первого порядка. Подобное обобщение кажется вполне очевидным, исходя из общего принципа построения численных методов первого порядка [3, 50, 87], предназначенных как для решения систем нелинейных уравнений, так и решения задач безусловной оптимизации. Т.к. метод продолжения рассматривается в рамках настоящей работы в качестве базового при решении задач оптимизации межорбитального перелета, то предлагаемая методика определения производных естественно демонстрируется на его примере. Однако стоит отметить, что в силу ряда причин, которые будут явно обозначены далее, практическое применение описываемой в настоящем разделе методики будет показано в третьей главе диссертационной работы только на примере решения невозмущенных задач траекторной оптимизации.

В предыдущем разделе было дано достаточно подробное описание метода продолжения, а также сформулированы основные варианты внешней задачи Коши (2.3.4), (2.3.5) (или (2.3.6)). Для каждого из них характерно следующее: в правые части соответствующих систем дифференциальных уравнений (2.3.5), (3.4.5), (или (2.3.6)) метода продолжения входит т.н. матрица чувствительности нелинейной системы (2.3.1), составленная из частных производных вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ по ее неизвестным параметрам (соответствующим компонентам вектора \mathbf{z}):

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z}(\tau), \tau)}{\partial \mathbf{z}(\tau)}, \quad (2.4.1)$$

а также ее частные производные по параметру продолжения τ вида

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z}(\tau), \tau)}{\partial \tau}. \quad (2.4.2)$$

Т.к. в рамках данной диссертационной работы применение аппарата дуальных чисел при решении задач траекторной оптимизации рассматривается исключительно в контексте вычисления производных, их совместное использование с методом продолжения, очевидно, сводится к численному определению (2.4.1) и (2.4.2). И как уже было отмечено выше, в случае применения любого другого метода первого порядка для решения системы (2.3.1), производные вида (2.4.1) можно определять аналогичным образом.

Как правило, точность вычисления производных вида (2.4.1) и (2.4.2) может оказывать сильное влияние на сходимость метода продолжения даже в случаях отсутствия каких-либо нарушений основополагающих условий теоремы о неявной функции [58, 64], или же ветвления решения (т.е. прохождения точек бифуркации). Это следует из того, что в пространстве неизвестных параметров нелинейной системы вида (2.3.1), гладкая кривая продолжения может иметь локальные участки, обладающие значительной (переменной) кривизной. Подобные примеры легко могут найдены в книге [58]. Поэтому, ошибка определения производных (2.4.1) и (2.4.2), и как следствие этого, общая ошибка вычисления правых частей дифференциальных уравнений внешней задачи Коши, приводит к быстрому сходу с нулевого уровня оператора $h(\mathbf{z}(\tau), \tau) = \mathbf{0}$.

Итак, следуя методике вычисления производных с использованием дуальных чисел вида (2.1.15) или (2.1.18), изложенной в разделе 2.1, вполне очевидно, что для определения (2.4.1) и (2.4.2) необходимо вычислить дуальное представление для вектор-функции невязок краевой задачи $\mathbf{f}(\mathbf{z})$. Сделать это можно двумя путями. Первому из них отвечает применение дуальных чисел вида (2.1.15). В этом случае, требуется вычислить следующее дуальное представление вектор-функции (2.3.1):

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{f}_D(\mathbf{z}^d), \quad \mathbf{f}_D : \mathbf{z}^d \in D^n \rightarrow \boldsymbol{\omega} \in D^n, \quad z_i^d = z_i + \varepsilon z_i', \quad i = 1..n. \quad (2.4.3)$$

Далее, приведем краткое описание скалярных функций $f_D^{(i)}(\mathbf{z}^d)$, определяющих соответствующие компоненты (2.4.3), применительно к рассматриваемому случаю. Их общее представление и аналитическая структура подробно описаны и обоснованы в приложении диссертационной работы. Итак, в качестве скалярных функций n дуальных переменных $f_D^{(i)}(\mathbf{z}^d)$ будем рассматривать следующие:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u_i(\mathbf{z}^d), \quad v_i = v_i(\mathbf{z}^d), \quad \mathbf{z}^d = (z_1^d, z_2^d, \dots, z_n^d) \in M \subset D^n, \\ u_i, v_i &: M \subset D^n \rightarrow \mathbf{R}, \\ f_D^{(i)}(\mathbf{z}^d) &= u_i(\mathbf{z}^d) + \varepsilon v_i(\mathbf{z}^d) = \omega_i, \\ u_i &= u_i(z_1, z_2, \dots, z_n, z_1', z_2', \dots, z_n'), \quad v_i = v_i(z_1, z_2, \dots, z_n, z_1', z_2', \dots, z_n'). \end{aligned} \right\}$$

Их общая аналитическая структура (отвечающая условию D^n -дифференцируемости) дается следующим выражением:

$$f_D^{(i)}(\mathbf{z}^d) = u_i(z_1, z_2, \dots, z_n) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n z_i' \frac{\partial u(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_i} + w_i(z_1, z_2, \dots, z_n) \right),$$

при этом, согласно свойствам дуального представления (см. Приложение):

$$u_i(\mathbf{z}) \equiv f_i(\mathbf{z}), \quad w_i = 0.$$

Тогда окончательно получим:

$$f_D^{(i)}(\mathbf{z}^d) = f_i(z_1, z_2, \dots, z_n) + \varepsilon \sum_{i=1}^n z_i' \frac{\partial f_i(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_i}, \quad (2.4.4)$$

где $f_i(\mathbf{z})$ – соответствующие компоненты вектор-функции (2.4.3). Таким образом, проводя все необходимые вычисления над элементами пространства D^n , дуальное представление вектор-функции невязок краевой задачи $\mathbf{f}_D(\mathbf{z}^d)$ определяется выражениями (2.4.4). Из последних следует, что для вычисления производных вида

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z})}{\partial z_j}, \quad j = 1 \dots n, \quad (2.4.5)$$

из n векторов которых формируется матрица (2.4.1), необходимо осуществить также n вычислений вектор функции невязок краевой задачи в дуальном представлении $\mathbf{f}_D(\mathbf{z}^d)$, положив при этом:

$$\forall j = 1, \dots, n \quad z_i^d = \begin{cases} z_i + \varepsilon \cdot 1, & i = j, \\ z_i + \varepsilon \cdot 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Каждый раз выделяя дуальную часть которой, получим искомые значения производных (2.4.5). Вектор (2.4.2) определяется абсолютно аналогичным образом (если это требуется при решении внешней задачи Коши), при этом, естественно, увеличивается на единицу (на параметр продолжения τ) число независимых переменных \mathbf{f}_D . Необходимое количество вычислений вектор-функции невязок краевой задачи в дуальном представлении (2.4.3) также возрастает, и становится равным $n+1$.

Теперь опишем второй подход к определению дуального представления для вектор-функции (2.3.1), и, как следствие этого, несколько другой алгоритм вычисления элементов матрицы (2.4.1). В этом случае используем многомерный вариант дуального числа вида (2.1.18). Ему отвечает следующее дуальное представление:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{f}_D(\mathbf{z}^d), \quad \mathbf{f}_D : \mathbf{z}^d \in \mathbf{D}^n \rightarrow \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{D}^n, \quad z_i^d = z_i + \underbrace{\varepsilon_1 z_i' + \varepsilon_2 z_i'' + \dots + \varepsilon_n z_i'''}_n, \quad i = 1..n. \quad (2.4.6)$$

Вектор-функция невязок краевой задачи $\mathbf{f}_D(\mathbf{z}^d)$ в рассматриваемом случае определяется посредством n скалярных функций векторного многомерного дуального переменного $f_D^{(i)}(\mathbf{z}^d)$. Последние, согласно свойствам структуры аналитической функции вида (2.2.2) (см. Приложение) и условиям (2.2.3), определяются следующим образом:

$$f_D^{(i)}(\mathbf{z}^d) = f_i(z_1, z_2, \dots, z_n) + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^n z_j' \frac{\partial f_i}{\partial z_j} + \varepsilon_2 \sum_{j=1}^n z_j'' \frac{\partial f_i}{\partial z_j} + \dots + \varepsilon_n \sum_{j=1}^n z_j''' \frac{\partial f_i}{\partial z_j}, \quad (2.4.7)$$

где $f_i(\mathbf{z})$ – соответствующие компоненты вектор-функции (2.4.6). Тогда, для того чтобы определить элементы вида (2.4.5), формирующие матрицу чувствительности (2.4.1), необходимо всего лишь один раз вычислить дуальное представление $\mathbf{f}_D(\mathbf{z}^d)$ на элементах пространства \mathbf{D}^n , положив при этом (как и ранее в разделе 2.2):

$$z_i^d = z_i + \varepsilon_i \cdot 1, \quad i = 1..n.$$

И разбирая покомпонентно (ε_i) векторную дуальную часть полученного таким образом представления $\mathbf{f}_D(\mathbf{z}^d)$, получим искомые элементы матрицы (2.4.1). Это может быть элементарно проверено непосредственно подстановкой:

$$f_D^{(i)}(\mathbf{z}^d) = f_i(z_1, z_2, \dots, z_n) + \varepsilon_1 \frac{\partial f_i}{\partial z_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_i}{\partial z_2} + \dots + \varepsilon_n \frac{\partial f_i}{\partial z_n}, \quad i = 1..n. \quad (2.4.8)$$

Полученные при вычислениях значения выражений (2.4.8) полностью определяют вектор $\mathbf{f}_D(\mathbf{z}^d)$, разбирая покомпонентно дуальную часть которого получаем n векторов вида (2.4.5), каждый из которых представляет собой отдельный столбец матрицы чувствительности (2.4.1). В случае, если при решении задачи Коши необходимо также определять вектор производных вида (2.4.2), рассматривается следующее дуальное представление:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{z}, \tau) \rightarrow \mathbf{f}_D(\mathbf{z}^d, \tau^d), \quad \mathbf{f}_D : (\mathbf{z}^d, \tau^d) \in \mathbf{D}^{n+1} \rightarrow \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{D}^n, \quad z_i^d = z_i + \underbrace{\varepsilon_1 z_i' + \varepsilon_2 z_i'' + \dots + \varepsilon_{n+1} z_i'''}_{n+1}, \\ i = 1..n, \quad \tau^d = \tau + \underbrace{\varepsilon_1 \tau' + \varepsilon_2 \tau'' + \dots + \varepsilon_{n+1} \tau'''}_{n+1}. \end{aligned} \right\} (2.4.9)$$

Что фактически соответствует рассмотрению функции вида (2.4.6) от $n+1$ многомерной дуальной переменной. Элементы матрицы чувствительности (2.4.1) и вектор производных (2.4.2) в данном случае также определяются за одно вычисление дуального представления (2.4.9) описанным выше способом.

Таким образом, с помощью дуальных чисел вида (2.1.15) или (2.1.18) удастся определять элементы (2.4.1) и (2.4.2) с относительной точностью, равной общей точности проводимых вычислений. Следовательно, в отличие от разностных методов и (правда, в значительно меньшей степени) метода комплексного шага, на точность решения внешней

задачи Коши определяющее влияние будет оказывать только точность используемого метода численного интегрирования.

Однако реализовать на практике предлагаемую в данном разделе идею оказывается не так-то просто. Основной проблемой, возникающей при использовании дуальных чисел совместно с методом продолжения, является, непосредственно, сама *необходимость вычисления* дуального представления (2.4.3) или (2.4.6) для вектор-функции невязок краевой задачи. Так как для этого, очевидно, требуется численное интегрирование системы дифференциальных уравнений оптимального управляемого движения КА с ЭРДУ над элементами пространства D^n или D^n соответственно. Последнее представляет собой весьма непростую задачу, теоретические аспекты которой в рамках данной работы практически не освещаются, и, очевидно, требуют дальнейшего детального исследования. Поэтому, для выхода из создавшейся ситуации предлагается воспользоваться известным из теории дифференциальных уравнений методом. Однако, перед тем как привести его краткое описание, стоит отметить, что отдельные вопросы, связанные с нахождением первообразной функции дуального переменного все же кратко освещены в приложении. Это позволяет высказать здесь некоторые соображения касательно возможного подхода к решению дифференциальных уравнений, полностью определенных над элементами соответствующих пространств дуальных чисел. Так, опираясь на определение *дуальной производной* аналитической функции дуального переменного $f_D(x^d)$, вычисление которой (производной) фактически сводится к \mathbf{R} -дифференцированию по действительной части дуального аргумента составляющих $f_D(x^d)$ компонент u и v , кажется вполне логичным, что и нахождение первообразной $F_D(x^d)$ от $f_D(x^d)$ сводится к соответствующему « \mathbf{R} -интегрированию»:

$$F_D(x^d) = \int f_D(x^d, c^d) dx^d = \int \left(u(x, c) + \varepsilon \left(x' \frac{\partial u(x, c)}{\partial x} + c' \frac{\partial u(x, c)}{\partial c} \right) \right) dx + C^d. \quad (2.4.10)$$

Т.е., говоря другими словами, к простому интегрированию обеих частей исходной аналитической функции $f_D(x^d)$ по действительной части от ее дуального аргумента. Справедливость данного предположения можно показать на простом примере. Найдем первообразную от аналитической функции

$$f_D(x^d) = (x^d)^2,$$

используя соотношение (2.4.10). Получим:

$$F_D(x^d) = \int (x^d)^2 dx^d = \int (x^2 + \varepsilon x' 2x) dx = \frac{x^3}{3} + \varepsilon x' x^2 + C^d = \frac{1}{3} (x^d)^3 + C^d.$$

Следовательно, используя (2.4.10) всегда удастся решить и соответствующее дифференциальное уравнение (с дуальной независимой переменной) тем или иным образом

сводящееся к интегрированию в квадратурах. Таким образом, кажется вполне возможным, что и для произвольных типов дифференциальных уравнений, полностью определенных над D , интегрирование последних по независимой дуальной переменной сводится к « \mathbf{R} -интегрированию» только от ее действительной части. И, вероятно, для их решения можно воспользоваться известными из теории дифференциальных уравнений аналитическими или численными методами, незначительно переопределив их. Безусловно, данный вопрос требует дальнейшего детального исследования, но, как уже было сказано ранее, это выходит за рамки настоящей диссертационной работы.

Теперь непосредственно перейдем к описанию методики численного интегрирования, которой необходимо воспользоваться для определения дуального представления вектор-функции невязок краевой задачи, не требующей при своей практической реализации каких-то особых «вычислительных конструкций», методов и процедур. Начнем с того, что в качестве независимой переменной системы дифференциальных уравнений, описывающих оптимальное управляемое движение КА, рассматривается безразмерное время t . Последнее также может входить (в явном виде) в выражение для оптимального гамильтониана H^* , и, следовательно, в правые части системы (2.2.1). В процессе решения рассматриваемых в данной работе задач оптимального управления *нигде* не вычисляются производные по t (впрочем, это и не требуется). Поэтому, в соответствии с описанием общей методики вычисления производных с помощью дуальных чисел, мнимая (дуальная) часть образа независимой переменной t^d всегда будет равна нулю. И согласно общим алгебраическим свойствам дуальных чисел (умножение на скаляр), независимая переменная t может просто рассматриваться в качестве действительного скаляра как при численном интегрировании, так и при вычислении дуального представления правых частей системы (2.2.1). Поэтому интегральная кривая системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА в пространстве дуальных чисел будет представлять собой некоторый непрерывный и гладкий путь вида

$$\gamma_C : t \in [t_0, t_f] \rightarrow (\mathbf{x}^d, \Psi^d) \in D^{2N},$$

определенный на соответствующих значениях действительного параметра t из Δ . Тогда, руководствуясь приведенными выше соображениями, окончательно получаем следующее дуальное представление для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений вида (2.2.1):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x}^d(t) = \left(\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \boldsymbol{\Psi}} \right)^d = \mathbf{f}_D^{(x)}(\mathbf{x}^d(t), \boldsymbol{\Psi}^d(t), t), \\ \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}^d(t) = \left(-\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^d = \mathbf{f}_D^{(\psi)}(\mathbf{x}^d(t), \boldsymbol{\Psi}^d(t), t), \end{cases} \quad (2.4.11)$$

где под $\mathbf{f}_D^{(x)}$, $\mathbf{f}_D^{(\psi)}$ обозначены вектор функции от $2N$ дуальных переменных (и одной действительной - t), определяющие соответствующие правые части дуального представления (2.2.1). Полученная система дифференциальных уравнений (2.4.11) может быть численно проинтегрирована на основе классического аналитического подхода, изложенного в многочисленных работах по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, например, в книге [51]. Кратко, данный подход позволяет свести решение системы из N комплексных дифференциальных уравнений первого порядка с действительной независимой переменной, траектория фазового вектора которой представляет собой гладкий путь на комплексной плоскости, к решению эквивалентной ей системы из $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Соответствующая теорема о единственности и существовании решения для комплексного дифференциального уравнения (или системы уравнений) с действительной независимой переменной может быть найдена в книгах [51, 56, 60]. Оказывается, что данный подход может быть использован и для решения системы (2.4.11). Это следует из того, что дуальные числа вместе с их многомерными расширениями представляют собой одну из канонических систем среди т.н. самых общих комплексных чисел [33, 57] (наряду с обыкновенными комплексными и двойными числами), и обладают одинаковыми алгебраическими свойствами по операциям сложения и умножения (образуют кольцо). Поэтому для всех типов комплексных чисел (и некоторых их расширений) всегда оказывается возможным представление числа в типичном виде (2.1.15) (или (2.1.18)), т.е. в виде следующей суммы:

$$Z = \langle x, y \rangle = \langle x, 0 \rangle + \underbrace{\langle 0, 1 \rangle}_{\sigma} \times \langle x, y \rangle,$$

где под σ обозначен нильпотентный или идемпотентный элемент соответствующей алгебры. Тогда систему дифференциальных уравнений (2.4.11) можно переписать следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{d}{dt} x_1(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} x_1'(t) = f_1^{(x)}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t), t) + \\
\quad + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^N x_i'(t) \frac{\partial f_1^{(x)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi_i'(t) \frac{\partial f_1^{(x)}}{\partial \psi_i} \right), \\
\dots, \\
\frac{d}{dt} x_N(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} x_N'(t) = f_N^{(x)}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t), t) + \\
\quad + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^N x_i'(t) \frac{\partial f_N^{(x)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi_i'(t) \frac{\partial f_N^{(x)}}{\partial \psi_i} \right), \\
\frac{d}{dt} \psi_1(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \psi_1'(t) = f_1^{(\psi)}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t), t) + \\
\quad + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^N x_i'(t) \frac{\partial f_1^{(\psi)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi_i'(t) \frac{\partial f_1^{(\psi)}}{\partial \psi_i} \right), \\
\dots, \\
\frac{d}{dt} \psi_N(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \psi_N'(t) = f_N^{(\psi)}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t), t) + \\
\quad + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^N x_i'(t) \frac{\partial f_N^{(\psi)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi_i'(t) \frac{\partial f_N^{(\psi)}}{\partial \psi_i} \right),
\end{array} \right. \quad (2.4.12)$$

при использовании дуальных чисел вида (2.1.15), или

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{d}{dt} x_1(t) + \underbrace{\varepsilon_1 \frac{d}{dt} x_1'(t) + \dots + \varepsilon_n \frac{d}{dt} x_1^{(n)}(t)}_n = f_1^{(x)}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t), t) + \\
\quad + \varepsilon_1 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N x_i'(t) \frac{\partial f_1^{(x)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi_i'(t) \frac{\partial f_1^{(x)}}{\partial \psi_i} \right) + \dots + \varepsilon_n \left(\sum_{i=1}^N x_i^{(n)}(t) \frac{\partial f_1^{(x)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi_i^{(n)}(t) \frac{\partial f_1^{(x)}}{\partial \psi_i} \right)}_n, \\
\dots, \\
\frac{d}{dt} x_N(t) + \varepsilon_1 \frac{d}{dt} x_N'(t) + \dots + \varepsilon_n \frac{d}{dt} x_N^{(n)}(t) = f_N^{(x)}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t), t) + \\
\quad + \varepsilon_1 \left(\sum_{i=1}^N x_i'(t) \frac{\partial f_N^{(x)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi_i'(t) \frac{\partial f_N^{(x)}}{\partial \psi_i} \right) + \dots + \varepsilon_n \left(\sum_{i=1}^N x_i^{(n)}(t) \frac{\partial f_N^{(x)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi_i^{(n)}(t) \frac{\partial f_N^{(x)}}{\partial \psi_i} \right), \\
\frac{d}{dt} \psi_1(t) + \varepsilon_1 \frac{d}{dt} \psi_1'(t) + \dots + \varepsilon_n \frac{d}{dt} \psi_1^{(n)}(t) = f_1^{(\psi)}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t), t) + \\
\quad + \varepsilon_1 \left(\sum_{i=1}^N x_i'(t) \frac{\partial f_1^{(\psi)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi_i'(t) \frac{\partial f_1^{(\psi)}}{\partial \psi_i} \right) + \dots + \varepsilon_n \left(\sum_{i=1}^N x_i^{(n)}(t) \frac{\partial f_1^{(\psi)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi_i^{(n)}(t) \frac{\partial f_1^{(\psi)}}{\partial \psi_i} \right), \\
\dots, \\
\frac{d}{dt} \psi_N(t) + \varepsilon_1 \frac{d}{dt} \psi_N'(t) + \dots + \varepsilon_n \frac{d}{dt} \psi_N^{(n)}(t) = f_N^{(\psi)}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t), t) + \\
\quad + \varepsilon_1 \left(\sum_{i=1}^N x_i'(t) \frac{\partial f_N^{(\psi)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi_i'(t) \frac{\partial f_N^{(\psi)}}{\partial \psi_i} \right) + \dots + \varepsilon_n \left(\sum_{i=1}^N x_i^{(n)}(t) \frac{\partial f_N^{(\psi)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi_i^{(n)}(t) \frac{\partial f_N^{(\psi)}}{\partial \psi_i} \right),
\end{array} \right. \quad (2.4.13)$$

при использовании чисел вида (2.1.18). В выражениях (2.4.13) число n соответствует количеству неизвестных параметров краевой задачи (2.3.1), $2N$ – размерность системы (2.2.11). Далее, следуя основной идее аналитического подхода для интегрирования системы комплексных дифференциальных уравнений с действительной независимой переменной [51], сведем полученные системы (2.4.12) и (2.4.13) к эквивалентным им системам дифференциальных уравнений, определенных над элементами пространства действительных чисел. Для этого всего лишь необходимо выделить из полученных выражений (2.4.12) и (2.4.13) действительную и дуальную (мнимую) части. И комбинируя соответствующие друг другу элементы левых и правых частей от полученных таким путем выражений, приходим к следующим эквивалентным системам дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} x_j(t) = f_j^{(x)}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t), t), \\ \dots, \\ \frac{d}{dt} \psi_j(t) = f_j^{(\psi)}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t), t) + \\ \dots, \\ \frac{d}{dt} x'_j(t) = \sum_{i=1}^N x'_i(t) \frac{\partial f_j^{(x)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi'_i(t) \frac{\partial f_j^{(x)}}{\partial \psi_i}, \\ \dots, \\ \frac{d}{dt} \psi'_j(t) = \sum_{i=1}^N x'_i(t) \frac{\partial f_j^{(\psi)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi'_i(t) \frac{\partial f_j^{(\psi)}}{\partial \psi_i}, \\ \dots \end{array} \right\}_N \quad (2.4.14)$$

и (в этом случае векторная дуальная часть рассматривается покомпонентно)

$$\left. \begin{array}{l}
\left. \begin{array}{l}
\frac{d}{dt} x_j(t) = f_j^{(x)}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t), t), \\
\dots, \\
\frac{d}{dt} \psi_j(t) = f_j^{(\psi)}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t), t) + \\
\dots,
\end{array} \right\} N \\
\left. \begin{array}{l}
\frac{d}{dt} x'_j(t) = \sum_{i=1}^N x'_i(t) \frac{\partial f_j^{(x)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi'_i(t) \frac{\partial f_j^{(x)}}{\partial \psi_i}, \\
\dots, \\
\frac{d}{dt} x''_j(t) = \sum_{i=1}^N x''_i(t) \frac{\partial f_j^{(x)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi''_i(t) \frac{\partial f_j^{(x)}}{\partial \psi_i}, \\
\dots, \\
\frac{d}{dt} \psi'_j(t) = \sum_{i=1}^N x'_i(t) \frac{\partial f_j^{(\psi)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi'_i(t) \frac{\partial f_j^{(\psi)}}{\partial \psi_i}, \\
\dots, \\
\frac{d}{dt} \psi''_j(t) = \sum_{i=1}^N x''_i(t) \frac{\partial f_j^{(\psi)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \psi''_i(t) \frac{\partial f_j^{(\psi)}}{\partial \psi_i}, \\
\dots
\end{array} \right\} n \left. \right\} N
\end{array} \right. \quad (2.4.15)$$

В полученных выражениях (2.4.14) и (2.4.15) $j=1, \dots, N$. Таким образом, вместо численного интегрирования на D системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА (2.4.11), необходимого для определения соответствующего дуального представления вектор-функции невязок краевой задачи (2.4.3) или (2.4.6), достаточно просто проинтегрировать систему (2.4.14) или (2.4.15) (в зависимости от используемого вида дуального числа) над пространством действительных чисел. При этом размерность эквивалентной (2.4.11) системы при использовании чисел вида (2.2.15) всегда составляет $2 \cdot (2N)$, а для чисел вида (2.2.18) она непосредственно зависит от количества неизвестных параметров краевой задачи n , подлежащих определению, и составляет $2N \cdot (n+1)$. Также здесь необходимо отметить следующее. Вполне очевидно, что на каждом шаге численного интегрирования эквивалентных систем (2.4.14) или (2.4.15) для определения правых частей последних необходимо вычислить в дуальном представлении правые части исходной системы (2.4.11), и рассмотреть действительную и мнимую (покомпонентно, в случае использования чисел вида (2.2.18)) составляющие от полученных выражений. Поэтому в процессе численного интегрирования, на каждом следующем шаге приходится вновь покомпонентно «собирать» дуальное представление фазового вектора системы (2.4.11).

Таким образом, с помощью рассмотренной методики интегрирования системы дифференциальных уравнений (2.4.11) путем ее сведения к эквивалентной вида (2.4.14) или

(2.4.15), достаточно просто удастся вычислять дуальное представление для вектор-функции невязок краевой задачи, одновременно с этим определяя требуемые для решения внешней задачи Коши производные (2.4.1).

В заключении текущего раздела, стоит обратить внимание на некоторые интересные свойства эквивалентных систем вида (2.4.14) и (2.4.15). Отчетливо видно, что правые части входящих в них дифференциальных уравнений относительно *дуальных* компонент фазового вектора $(\mathbf{x}^d, \boldsymbol{\psi}^d)$ *линейны и однородны*, а коэффициенты при них представляют собой частные производные, взятые по его *действительным* компонентам от соответствующих правых частей дифференциальных уравнений исходной системы уравнений оптимального движения КА (2.2.1). Последнее непосредственно вытекает из самой структуры аналитической функции дуального переменного (см. Приложение). Поэтому нетрудно догадаться, что дифференциальные уравнения относительно дуальных компонент фазового вектора $(\mathbf{x}^d, \boldsymbol{\psi}^d)$ образуют систему уравнений в вариациях для исходной системы. А так как вектор неизвестных параметров краевой задачи \mathbf{z} всегда содержит ее постоянные интегрирования, то вычисление с помощью предложенной методики дуального представления вектор-функции невязок (2.4.3) или (2.4.6) оказывается эквивалентно вычислению частных производных компонент фазового вектора рассматриваемой системы по ее начальным параметрам. Последнее, как известно, осуществляется посредством интегрирования системы уравнений в вариациях [56]. Данную эквивалентность можно легко показать. Действительно, матрица чувствительности (2.4.1) в общем случае будет содержать в себе элементы вида

$$\left. \frac{\partial \beta_j(t)}{\partial z_i} \right|_{t_f}, \quad (2.4.16)$$

где $\beta_j(t)$ – какая-либо из $2N$ компонент фазового вектора $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi})$ системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА, а z_i – компонента вектора неизвестных параметров краевой задачи (содержащего постоянные интегрирования системы и ряд ее прочих параметров). Решение системы (2.2.1), очевидно, может быть представлено в виде

$$\beta_j = \beta_j(t, \mathbf{z}).$$

И на основе теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения (системы уравнений) от параметра (а также ее варианта – теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий) и ее следствий [56, 60], легко удастся получить соответствующие выражения для производных (2.4.16):

$$\left. \begin{aligned} \beta_j(t, \mathbf{z}) - \beta_j(t_0) &= \int_{t_0}^t f^j(\boldsymbol{\beta}(s, \mathbf{z}), s) ds \Rightarrow \\ \frac{\partial \beta_j(t, \mathbf{z})}{\partial z_i} - \frac{\partial \beta_j(t_0)}{\partial z_i} &= \frac{\partial}{\partial z_i} \int_{t_0}^t f^j(\boldsymbol{\beta}(s, \mathbf{z}), s) ds = \int_{t_0}^t \frac{\partial f^j}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}(s, \mathbf{z})}{\partial z_i} ds. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.17)$$

Продифференцировав последние выражения по независимой переменной t , приходим к следующей системе дифференциальных уравнений - уравнений в вариациях для исходной системы (2.2.1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \beta_j(t, \mathbf{z})}{\partial z_i} \right) &= \frac{\partial f^j}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\beta}(t, \mathbf{z})}{\partial z_i} \right), \\ \left(\frac{\partial \beta_j(t, \mathbf{z})}{\partial z_i} \right) \Big|_{t_0} &= \begin{cases} 1, & \beta_j(t_0, \mathbf{z}) = z_i, \\ 0, & \beta_j(t_0, \mathbf{z}) \neq z_i. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.18)$$

Численно проинтегрировав которую на отрезке Δ (совместно с исходной системой (2.2.1)), можно получить искомые значения элементов матрицы чувствительности (2.4.1). Сравнивая полученные выражения (2.4.18) с дифференциальными уравнениями относительно дуальных компонент фазового вектора $(\mathbf{x}^d, \boldsymbol{\psi}^d)$, входящими в систему уравнений (2.4.14) или (2.4.15), не трудно сделать вывод о том, что они полностью эквивалентны по своей структуре. Полагая же при этом, что

$$x'_j(t) = \left(\frac{\partial \beta_j(t, \mathbf{z})}{\partial z_i} \right),$$

при использовании чисел вида (2.2.15), или

$$x'_j(t) = \left(\frac{\partial \beta_j(t, \mathbf{z})}{\partial z_1} \right), \quad x''_j(t) = \left(\frac{\partial \beta_j(t, \mathbf{z})}{\partial z_2} \right), \quad \dots, \quad x'_{j \dots}(t) = \left(\frac{\partial \beta_j(t, \mathbf{z})}{\partial z_n} \right),$$

для чисел вида (2.2.18), соответствующие дифференциальные уравнения, очевидно, полностью совпадают. И всегда будут иметь одинаковое решение, т.к. начальные условия для системы уравнений в вариациях (2.4.18) полностью согласованы с начальными условиями для эквивалентных систем (2.4.14) или (2.4.15), что напрямую следует из предлагаемой в работе методики определения требуемых производных при вычислении дуального представления вектор-функции невязок краевой задачи в виде (2.4.3) или (2.4.6). Таким образом, показано, что при интегрировании системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА в дуальном представлении (2.4.11), путем сведения ее к эквивалентной системе вида (2.4.14) или (2.4.15), автоматически формируется система уравнений в вариациях. Т.е. для этого не требуется аналитическая запись ее правых частей (часто очень громоздких). Достаточно всего лишь на каждом шаге в процессе численного интегрирования выделять из правых частей дуального представления системы (2.4.11) действительную и дуальную (покомпонентно)

части, и соответствующим образом их комбинировать. Кроме того, показано, что предложенный метод численного определения производных, входящих в (2.4.1) и (2.4.2), посредством вычисления дуального представления для вектор-функции невязок краевой задачи (2.4.3) или (2.4.6), качественно приводит к точно такому же результату, что и описанный выше аналитический подход, основанный на вычислении частных производных решения системы (2.2.1) по ее неизвестным начальным параметрам. Что еще раз подтверждает общую справедливость предлагаемой методики численного дифференцирования функции невязок с помощью дуальных чисел.

Также следует отметить, что для вычисления матрицы чувствительности (2.4.1) и производных вида (2.4.2), при использовании дуального представления для вектор-функции невязок краевой задачи в виде (2.4.3), требуется n или, соответственно, $(n+1)$ численное интегрирование эквивалентной системы дифференциальных уравнений (2.4.14). А при использовании дуального представления (2.4.6) (или (2.4.9)) требуется всего лишь один раз численно проинтегрировать эквивалентную систему (2.4.15). Конечно, последний вариант кажется предпочтительнее, т.к. использование дуальных чисел с многомерной дуальной частью (2.2.18) позволяет сократить общее число элементарных операций, о чем уже говорилось выше. Однако при этом нужно помнить о том, что необходимо численно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений первого порядка (2.4.15), состоящую из $2N \cdot (n+1)$ (или $2N \cdot (n+2)$) уравнений. Против n (или $(n+1)$) интегрирований системы (2.4.14) гораздо меньшей размерности $2 \cdot (2N)$ при использовании чисел вида (2.2.15). Приведем конкретные примеры. Для краевых задач (1.3.2) – (1.3.4), отвечающих базовым типам межорбитального перелета КА с ЭРДУ, вектор неизвестных параметров, как правило, имеет размерность n равную семи или восьми. Положим $n=7$. Размерность N фазового вектора \mathbf{x} (1.1.13) системы дифференциальных уравнений, описывающих движение центра масс КА с ЭРДУ, для всех типов задач перелета за исключением любых постановок с функционалом (1.2.7), равняется семи. Тогда для определения элементов матрицы чувствительности (2.4.1), при использовании дуальных чисел вида (2.2.15) необходимо семь раз численно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (2.4.14), содержащую $2 \cdot (2 \cdot 7) = 28$ уравнений. А при использовании многомерных дуальных чисел вида (2.2.18), необходимо один раз проинтегрировать систему (2.4.15), содержащую уже $2 \cdot 7 \cdot (7+1) = 112$ уравнений. В итоге, при практической реализации на ЭВМ предлагаемой методики численного определения производных (2.4.5) и (2.4.2) оказалось, что одно численное интегрирование системы большей размерности (2.4.15) может занимать столько же времени, что и n численных интегрирований системы (2.4.14) (естественно, при использовании одного и того же численного метода интегрирования). Поэтому, при вычислении элементов матрицы чувствительности (2.4.1) и

производных (2.4.2) в процессе численного интегрирования внешней задачи Коши (2.3.4) - (2.3.6), можно равно использовать как дуальное представление для вектор-функции невязок краевой задачи вида (2.4.3), так и дуальное представление вида (2.4.6).

Для вычисления элементов (2.4.1) или (2.4.2) с достаточной точностью, также можно использовать метод комплексного шага, как это делается в ряде работ [25, 26, 46, 49]. В этом случае, для вычисления комплексного представления вектор-функции невязок краевой задачи необходимо или воспользоваться соответствующим алгоритмом численного интегрирования в комплексной области, или использовать аналогичный аналитический подход сведения системы комплексных дифференциальных уравнений к эквивалентной (определенной уже над элементами пространства действительных чисел), описанный в книге [51]. При использовании метода комплексного шага для определения матрицы чувствительности также потребуется n раз численно проинтегрировать систему размерности $2N$ в комплексной области, или же эквивалентную ей систему размерности $2 \cdot (2N)$ на элементах пространства действительных чисел. При этом в обоих случаях будут проявляться отмеченные ранее недостатки метода комплексного шага. Так, при малых значениях h порядки действительной и мнимой составляющей комплексного представления правых частей системы дифференциальных уравнений оптимального движения (2.2.1) могут существенно отличаться, что может приводить к вычислительной неустойчивости численного интегрирования. Очевидно, что при использовании дуальных чисел такой проблемы не возникает.

При практической реализации рассматриваемой методики совместного использования математического аппарата дуальных чисел и метода продолжения при решении задач оптимизации межорбитального перелета, следует помнить о том, что необходимо вычислять дуальное представление правых частей системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА с ЭРДУ (2.4.11), для чего необходима их аналитическая запись в явном виде (что практически теряет смысл с учетом принятой модели возмущений). Поэтому, в рамках диссертационной работы, такой вариант применения дуальных чисел используется только при решении невозмущенных задач, а также для построения ряда качественных зависимостей на основе полученных решений с помощью метода продолжения.

2.5 Прочие методы, применяемые в работе

2.5.1 Численное осреднение

Метод *осреднения* [12], представляющий собой хорошо известный базис асимптотических методов нелинейной (и небесной механики), используется в работе для

повышения устойчивости численного интегрирования системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА, а также для общего сокращения потребных вычислительных затрат. В силу канонического формализма принципа максимума, предполагается *численное* осреднение по времени оптимального гамильтониана для рассматриваемой ОТ или ОМ задачи. Осреднение оптимального гамильтониана H^* по времени осуществляется по следующей схеме, как и в работах [42, 44, 48, 49, 93]:

$$\tilde{H}^* = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} H^* \frac{dt}{dl} dl.$$

Здесь $n=(1-e_x^2-e_y^2/p)^{3/2}$ – среднее движение (безр.) на текущей оскулирующей орбите КА; выражение (dt/dl) – определяется согласно дифференциальному уравнению относительно истинной долготы (1.1.5).

Численное осреднение оптимального гамильтониана осуществляется наиболее простым способом с помощью метода трапеции с использованием однородной сетки с фиксированным числом узлов (360). Согласно описанию данного метода [3], квадратура S определяется следующим выражением:

$$S = h \left[\sum_2^{N-1} f(x_i) + \frac{f(x_1) + f(x_N)}{2} \right],$$

где h – величина фиксированного шага метода, f – подынтегральное выражение, N – число узлов. При этом выражение для оптимального гамильтониана, согласно общей предлагаемой в работе методике, вычисляется в дуальном представлении.

Правые части системы дифференциальных уравнений управляемого движения КА после осреднения не зависят от истинной долготы l , следовательно, соответствующее ей дифференциальное уравнение системы (1.1.5) можно исключить из рассмотрения. В рамках настоящей работы метод осреднения применяется при решении вспомогательных задач оптимизации межорбитального перелета для функционалов (1.2.7) – (1.2.9) и обеих моделей функционирования ЭРДУ.

2.5.2 Методы численного интегрирования

В рассматриваемой диссертационной работе в качестве основного метода численного интегрирования системы дифференциальных уравнений первого порядка используется метод Рунге-Кутты порядка 7(8) с адаптивным выбором длины шага, реализованный в варианте алгоритма, предложенного Дорманом и Принсом (DOPRI853) [56]. Численное интегрирование с помощью данного метода осуществляется как для системы дифференциальных уравнений

оптимального движения КА с ЭРДУ (2.2.1), так и для системы вида (2.3.4), (2.3.6), при решении внешней задачи Коши в рамках метода продолжения.

2.5.3 Методы решения систем нелинейных уравнений

Для численного решения краевых задач принципа максимума, помимо метода продолжения, в ряде случаев также используется гибридный алгоритм, представляющий собой удачный вариант сочетания квазиньютоновского метода безусловной оптимизации (с использованием *BFGS*-аппроксимации гессиана), и метода собачьей лапы (*DOGLEG*) [50, 87]. Таким образом, гибридный алгоритм сводит решение системы нелинейных уравнений вида (2.3.1) к поиску минимума скалярной функции $\varphi(\mathbf{z})$, представляющей собой сумму квадратов невязок исходной системы:

$$\varphi(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{z})^T \mathbf{f}(\mathbf{z}),$$

при этом очевидно, что $\forall \mathbf{z}$ всюду $\varphi(\mathbf{z}) \geq 0$, $\varphi(\mathbf{z}^*) = 0$, где \mathbf{z}^* - решение нелинейной системы (2.3.1), и следовательно, $\mathbf{z}^* = \operatorname{argmin} \varphi(\mathbf{z})$. Метод собачьей лапы, как известно, определяет величину и направление следующего шага посредством минимизации линейной аппроксимации рассматриваемой функции $\varphi(\mathbf{z})$ внутри некоторой ограниченной области (доверительного интервала), размер которой может меняться по ходу алгоритма исходя из оценки точности построения аппроксимации [87]. Его сочетание с квазиньютоновским методом повышает стабильность последнего с точки зрения выбора длины шага, и при этом обеспечивается достаточно высокая скорость сходимости к решению.

В рассматриваемой диссертационной работе при проведении практических вычислений использовалась программная реализация гибридного алгоритма *hybrd.f*, написанная на языке FORTRAN. Полное теоретическое описание алгоритма может быть найдено в работе [71].

3 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕЛЕТА КА С ЭРДУ

3.1 Применение аппарата дуальных чисел совместно с методом продолжения (на примере невозмущенных задач)

В данном разделе диссертационной работы приводятся некоторые примеры решения *невозмущенных* задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ для функционалов (1.2.7) – (1.2.9), полученные с помощью совместного использования метода продолжения и дуальных чисел, согласно общей методике, изложенной в разделе 2.4. Соответствующие им краевые задачи принципа максимума отвечают базовым типам межорбитального перелета: «орбита-орбита», «точка-точка», «орбита-точка» и т.д. (см. раздел 1.3), и определяются в явном виде выражениями (1.3.2) – (1.3.4). Далее, кратко опишем предлагаемую в работе схему решения последних (методом продолжения). Согласно основной идеи раздела 2.4, для каждой из рассматриваемых вектор-функций вида (1.3.2) – (1.3.4) в процессе численного интегрирования внешней задачи Коши (в вариантах (2.3.3), (2.3.5), (2.3.6)) вычислялось соответствующее дуальное представление (2.4.3) или (2.4.6) (в зависимости от применяемого типа дуального числа). Для этого на каждом шаге внутреннего интегрирования вычислялось соответствующее дуальное представление правых частей системы дифференциальных уравнений оптимального управляемого движения КА (2.4.11) (для этого, очевидно, необходима их аналитическая запись), а затем осуществлялся переход к эквивалентной ей системе вида (2.4.14) или (2.4.15). После завершения внутреннего интегрирования, непосредственно при вычислении дуального представления (2.4.3) или (2.4.6), «автоматически» определялись необходимые производные вида (2.4.1) – (2.4.2), входящие в правые части системы дифференциальных уравнений внешней задачи Коши (2.3.3), (2.3.5), (2.3.6). Численное интегрирование которой, согласно формализму метода продолжения, и приводит к решению краевой задачи. Кроме того, на основе полученных таким способом решений соответствующих краевых задач межорбитального перелета вида (1.3.2) – (1.3.4), с помощью рассматриваемой здесь методики также осуществлялся и их качественный анализ, о чем подробно будет сказано далее.

Теперь опишем общую применяемую для всех рассматриваемых в настоящем разделе типов задач траекторной оптимизации схему решения, как правило, состоящую из двух этапов. Кратко, ее можно описать следующим образом. На первом этапе определяется

решение некоторой эквивалентной вспомогательной задачи, которое затем используется на втором этапе как начальное приближение при решении основной задачи. В качестве такой вспомогательной задачи, для всех рассматриваемых функционалов вида (1.2.7) – (1.2.9), как и в работах [48, 49], предлагается использовать ее (основной задачи) *осредненный* вариант. Для последнего характерно следующее: в процессе решения на каждом шаге численного интегрирования правые части системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА численно осредняются по времени, согласно схеме, описанной в разделе 2.5 (только в данном случае осредняется не гамильтониан (!)). И в соответствии с методикой, рассматриваемой в данном разделе, численное осреднение правых частей уравнений оптимального движения также необходимо проводить над элементами пространства дуальных чисел, что на практике без особого труда реализуется с помощью все того же метода трапеции. Чтобы не останавливаться подробно на особенностях осредненных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, стоит отметить, что последние для различных вариантов их постановок (правда без учета действующих возмущений) широко исследованы в работах [29, 30, 48, 49, 54, 77, 79]. Таким образом, для решения невозмущенных задач оптимизации межорбитального перелета с функционалами вида (1.2.7) – (1.2.9), в качестве начального приближения используются решения соответствующих им осредненных задач (т.е. как решение вспомогательной задачи первого этапа). Здесь важно отметить следующее. Решение осредненной задачи по понятным причинам всегда соответствует только одному типу межорбитального перелета - «орбита-орбита» [48, 49]. Поэтому, в ряде случаев оказывается целесообразным рассмотрение еще одного (промежуточного) этапа решения основной задачи. Так, например, при решении задачи быстрогодействия для межорбитального перелета КА с ЭРДУ типа «точка-точка» (на основе соответствующего решения осредненной задачи), иногда, как показывает практика, сначала стоит решить неосредненную задачу «орбита-орбита», и только потом, используя полученный результат в качестве начального приближения к основной задаче, переходить к ее решению.

Важно отметить, что описанная схема решения (с использованием численного осреднения) невозмущенных задач оптимизации межорбитального перелета применяется повсеместно при рассмотрении их базовых постановок с функционалами вида (1.2.7) – (1.2.9) для обеих математических моделей функционирования ЭРДУ. Исключение здесь составляют только задачи траекторной оптимизации с функционалом (1.2.7), отвечающим максимизации конечной массы аппарата (т.е., в рамках принятой модели КА - минимизации топлива, затрачиваемого на перелет) при рассмотрении модели нерегулируемого двигателя ограниченной тяги (1.1.7) (ОТ-задача с функционалом (1.2.7)). Для их решения в качестве начального приближения предлагается использовать полученное ранее решение

соответствующей задачи для модели идеально-регулируемого двигателя ограниченной мощности. Следовательно, общая схема решения таких задач всегда (в независимости от конкретного вида краевых условий и различного рода ограничений) выглядит следующим образом:

- сначала решается эквивалентная осредненная задача для функционала (1.2.7) и ОМ-модели функционирования ЭРДУ;
- далее, полученное на предыдущем этапе решение используется в качестве начального приближения для решение соответствующей неосредненной ОМ-задачи;
- и, наконец, полученное решение неосредненной ОМ-задачи используется уже в качестве начального приближения для решения основной задачи (ОТ-задачи с функционалом (1.2.7)).

Естественно, при использовании данной схемы предполагается, что полное время $t_f - t_0$, затрачиваемое на перелет, задано и остается неизменным на каждом этапе решения. При этом очевидно, что сам отрезок Δ (а не его величина), в общем случае может быть не зафиксирован. Описанный подход к решению невозмущенных ОТ-задач межорбитального перелета с функционалом вида (1.2.7) использует общую идею выбора начального приближения, изложенную в работах [48, 49, 79], и которая обычно применяется при решении соответствующих ОТ-задач траекторной оптимизации межпланетного перелета. Как показывает практика, основанный на ней подход оказывается весьма эффективен при рассмотрении задач оптимизации многовиткового межорбитального перелета КА. И он, что очевидно, может быть использован при решении соответствующей рассматриваемой постановке краевой задачи принципа максимума не только с помощью метода продолжения, но и любого другого численного метода решения систем нелинейных уравнений. Здесь также важно отметить, что практическая реализация описанного подхода к решению рассматриваемого типа задач при использовании метода продолжения (естественно, в рамках предлагаемой в настоящем разделе методики его совместного применения с дуальными числами) может быть независимо проведена двумя различными путями, каждому из которых будет отвечать своя отдельная постановка внешней задачи Коши. Остановимся на этом подробнее. Первый путь подразумевает использование базового варианта метода продолжения, на основе построения обычной ньютоновской гомотопии, которому соответствует внешняя задача Коши вида (2.3.3). В данном случае, найденное решение неосредненной ОМ-задачи непосредственно используется в качестве начального приближения. Второй путь подразумевает построение непрерывной гомотопии между вспомогательной (ОМ) и основной (ОТ) задачей. Тем самым обеспечивается непрерывное

продолжение известного решения вспомогательной задачи в искомое. При этом рассматриваемый процесс продолжения непосредственно обеспечивается за счет простой параметризации системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА с ЭРДУ, а не, например, краевых условий рассматриваемой задачи. Данная параметризация обеспечивает непрерывную трансформацию дифференциальной связи с отвечающей ей сопряженной системой уравнений ОМ-задачи в дифференциальную связь (с отвечающей ей сопряженной системой) ОТ-задачи. Подробное описание данного подхода может быть найдено в работах [46-49]. Данная идея оказалась весьма удачной и нашла широкое применение при решении соответствующих задач оптимизации межпланетного перелета.

Далее, приведем аналогичный вариант рассматриваемой параметризации [49] для системы дифференциальных уравнений вида (2.2.1), используемой в настоящей работе для описания оптимального движения центра масс КА с ЭРДУ (без учета действия возмущений). Тогда, согласно принятым ранее обозначениям, система дифференциальных уравнений оптимального движения КА, обеспечивающая непрерывную гомотопию между ОМ и ОТ-задачей, запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (1-\tau) \frac{\partial \mathbf{H}^{OM*}}{\partial \Psi} + \tau \frac{\partial \mathbf{H}^{OT*}}{\partial \Psi}, \\ \dot{\Psi} &= -(1-\tau) \frac{\partial \mathbf{H}^{OM*}}{\partial \mathbf{x}} - \tau \frac{\partial \mathbf{H}^{OT*}}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

Данному варианту метода продолжения, очевидно, будет соответствовать внешняя задача Коши вида (2.3.6). Забегая вперед, следует отметить, что в рамках данной диссертационной работы при решении ОТ-задач с функционалом (1.2.7) на основе известного решения ОМ-задачи использовались оба рассмотренных варианта метода продолжения. При этом они показали примерно одинаковую и достаточно высокую эффективность. Здесь также важно отметить следующее. Согласно полученным выражениям для оптимального управления (1.2.20) – (1.2.22) (при использовании модели нерегулируемого двигателя ограниченной тяги), правые части системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА представляют собой кусочно-непрерывные функции, определенные на элементах пространства $\Psi \times \mathbf{X} \times \Delta$. Поэтому, для организации процесса непрерывного и гладкого продолжения при решении ОТ-задачи межорбитального перелета с функционалом (1.2.7) (на основе ранее полученного решения ОМ-задачи) с помощью любого из рассмотренных вариантов метода продолжения, необходимо использовать сглаживание правых частей системы дифференциальных уравнений. В противном случае, как это показано в работах [46-49], возникнут проблемы, связанные с определением производных, входящих в (2.4.1) и (2.4.2). Поэтому в данной диссертационной работе, при рассмотрении различных постановок

ОТ-задач межорбитального перелета с функционалом (1.2.7), применялось сглаживание для управляющего параметра δ (1.1.7), характеризующего текущий режим работы ЭРДУ вдоль оптимального решения. Для этого использовалось то же выражение, что и в работах [46-49]:

$$\delta(\Pi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Pi}{|\Pi| + \varepsilon} + 1 \right), \quad (3.1.2)$$

где Π – функция переключения (1.2.21), ε – малый регуляризирующий параметр, $\varepsilon = 10^{-5} \dots 10^{-8}$. Вполне очевидно, что при малых значениях параметра ε функция (3.1.2) близка к кусочно-постоянной (релейной), а ее значения прекрасно согласуются с (1.2.11). Важно отметить следующее: гладкая аппроксимация (3.1.2) управления δ используется в работе *всюду* при рассмотрении различных постановок ОТ-задач межорбитального перелета с функционалом (1.2.7), независимо от численного метода, применяемого для решения соответствующей краевой задачи (например, можно использовать метод, описанный в разделе 2.5.3). К тому же, использование гладкой аппроксимации вида (3.1.2) также позволяет повысить устойчивость численного интегрирования системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА.

Согласно приведенной общей схеме решения неосредненных задач оптимизации межорбитального перелета без учета влияния возмущений, каждый раз данный процесс (поиск решения) начинается с рассмотрения соответствующей осредненной задачи. Краевая задача, отвечающая осредненному варианту для основной задачи траекторной оптимизации с функционалами (1.2.7) – (1.2.9), решается с помощью базового варианта метода продолжения, которому соответствует внешняя задача Коши вида (2.3.3).

Метод продолжения также может быть использован (в рамках предлагаемой в работе методики применения аппарата дуальных чисел) и для проведения некоторого качественного анализа рассматриваемых задач оптимизации межорбитального перелета. Это удастся сделать путем организации непрерывного (и гладкого) продолжения полученного решения задачи по каким-либо ее собственным характерным параметрам. Так, например, можно построить качественную зависимость, описывающую изменение величины целевого функционала задачи от какого-либо внутреннего параметра ее дифференциальной связи. Или, например, за счет соответствующей параметризации краевых условий задачи оценить влияние их непрерывного изменения на полученное значение критерия качества. Подобным образом как правило и организуется процесс непрерывного продолжения полученного ранее решения, обеспечивающий его требуемую (с точки зрения качественного анализа) трансформацию. В данном случае применяется вариант метода продолжения, которому соответствует внешняя задача Коши вида (2.3.6).

Далее, приведем примеры решения и некоторый качественный анализ для невозмущенной задачи оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ между эллиптической орбитой и ГСО, полученные с помощью метода продолжения в рамках предлагаемой методики его совместного применения с дуальными числами, подробно описанной в Приложении. Тем самым, на примере полученных результатов, будет показана работоспособность данной методики.

Итак, рассмотрим перелет между эллиптической орбитой и ГСО. Пусть начальная орбита имеет следующие параметры: фокальный параметр $p=20000$ км, эксцентриситет $e=0.75$, наклонение $i=25$ градусов. Долгота восходящего узла и аргумент перицентра полагаются равными нулю. Значение истинной аномалии, определяющее положение КА на орбите в момент времени t_0 фиксировано и составляет 200 градусов. Параметры КА с ЭРДУ следующие: начальная масса составляет 1320 кг, тяга ЭРД – 0.4 Н, удельный импульс – 1500 с. Угловая дальность перелета не ограничивается.

Начнем рассмотрение данного перелета с решения задачи быстродействия, для того, чтобы определить минимально возможное время (здесь и далее, чтобы избежать недоразумения, термин «минимально возможное время» в общем случае все же следует рассматривать как некоторое локально минимальное (строго) значение времени перелета, что объясняется известной многоэкстремальностью, характерной для рассматриваемого типа задач), за которое он может быть осуществлен при принятых характеристиках КА с ЭРДУ и параметрах начальной орбиты. Согласно общей схемы решения задач, ранее описанной в разделе, начинаем с решения соответствующей осредненной задачи. Краевая задача в данном случае была решена с помощью базового варианта метода продолжения, которому отвечает внешняя задача Коши вида (2.3.3). Полученное в результате решения значение оптимального времени перелета составило 72.774518 суток, конечная масса аппарата - 1149.697642 кг. Далее, на основе полученного решения (используя его в качестве начального приближения), аналогичным образом была решена уже неосредненная задача быстродействия. Значение оптимального времени перелета в данном случае составило - 73.325733 суток, конечная масса КА - 1147.723968 кг. Таким образом, осуществить рассматриваемый перелет при принятых характеристиках КА с ЭРДУ за меньшее время невозможно. Решение неосредненной задачи быстродействия (на примере рассматриваемого перелета), полученное с помощью предлагаемой в работе методики, может также без особого труда (в рамках все той же общей рассматриваемой схемы решения краевой задачи методом продолжения) быть получено и при использовании (для определения необходимых производных) разностных методов, или же, например, метода комплексного шага. Последнее объясняется как относительной простотой рассматриваемого примера межорбитального перелета, так и «гладкостью» задачи на

быстродействие в целом. Для разобранного примера эффективность использования дуальных чисел оказывается, ожидаемо, немногим лучше, чем для метода комплексного шага – т.к. число шагов интегрирования внешней задачи Коши метода продолжения сокращается, а общая скорость вычислений возрастает, вследствие главных аспектов и особенностей предлагаемой методики, подробно описанных во 2-ой главе настоящей работы.

Здесь очень важно отметить следующее. Полученное описанным образом решение неосредненной задачи быстродействия (на основе соответствующего решения осредненной) в общем случае представляет собой только локальный минимум, и ни в коем случае не претендует на глобальную оптимальность. Для выявления глобального минимума каждый раз требуется проведение дальнейшего исследования, по сути сводящееся к варьированию угловой дальности, что для типовой задачи быстродействия (перелет типа «орбита - орбита») уже было неоднократно сделано ранее, например, в работе [49]. При этом общее характерное свойство решений задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ – многоэкстремальность – хорошо известно и наиболее подробно описано именно на примере решения задачи быстродействия. В целом, основные свойства, а также, непосредственно, сами решения задач быстродействия межорбитального перелета КА с ЭРДУ достаточно хорошо исследованы, подтверждением чему служит большое количество работ по данной тематике [48, 49, 79]. Поэтому, не будем останавливаться на этом подробно.

Теперь переходим к рассмотрению данного перелета с точки зрения решения ОТ-задачи траекторной оптимизации с функционалом (1.2.7). Исходя из полученной ранее оценки для минимального значения времени осуществления перелета, примем его (время перелета) теперь равным 90 суткам. Согласно предлагаемому в данном разделе подходу к решению ОТ-задачи межорбитального перелета с функционалом (1.2.7), начинаем с рассмотрения соответствующей осредненной ОМ-задачи. Полученное в результате решения последней значение безразмерной конечной массы аппарата (целевого функционала) составляет 0.902472, что соответствует 1191.263040 кг. Далее, переходим к рассмотрению неосредненной ОМ-задачи. Значение безразмерной конечной массы КА в данном случае составило 0.902268, что соответствует 1190.993760 кг. Полная угловая дальность перелета на оптимальном решении - 457.189294 радиан, или 72.764 витка. В обоих случаях, краевые задачи решались с помощью базового варианта метода продолжения, которому отвечает внешняя задача Коши вида (2.3.3). Наконец, полученное решение неосредненной ОМ-задачи использовалось в качестве начального приближения к решению основной – ОТ-задачи с функционалом (1.2.7). Для решения последней использовалось построение численной гомотопии между ОМ и ОТ-задачей. Для этого рассматривалась параметризация системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА в виде (3.1.1). Тем самым, решение краевой задачи сводилось к

численному интегрированию внешней задачи Коши вида (2.3.6) при $\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)=\mathbf{0}$. На полученном оптимальном решении рассматриваемой задачи значение безразмерной конечной массы КА составило ≈ 0.88850 , что соответствует 1173.018 кг. Угловая дальность перелета составила порядка 73.2 витка (459.93 радиана). Таким образом, с помощью предлагаемой в работе методики применения дуальных чисел совместно с методом продолжения, удается получить искомое решение ОТ-задачи с функционалом (1.2.7). При решении рассматриваемой задачи с помощью метода продолжения критически важной оказывается точность вычисления производных (вследствие очень высокой чувствительности задачи к изменению начальных значений для элементов сопряженной системы), формирующих вектор (2.4.2) и матрицу чувствительности (2.4.1), которые определяют правые части системы дифференциальных уравнений внешней задачи Коши. Как было подробно ранее описано в разделе 2.4, использование дуальных чисел позволяет определять элементы (2.4.5) и (2.4.2) с относительной точностью, равной относительной точности численного интегрирования системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА. Повышая которую, удается добиться хорошей сходимости к решению рассматриваемой краевой задачи. При этом также необходимо обеспечить достаточно высокую точность численного интегрирования и для внешней задачи Коши, чтобы в процессе продолжения (на каждом шаге) минимизировать ошибку вычисления элементов матрицы чувствительности, связанную с ошибкой определения начальных параметров внутреннего интегрирования. Применение конечно-разностных методов численного дифференцирования или даже метода комплексного шага для определения необходимых производных вместо использования дуальных чисел при решении данной задачи методом продолжения не приводит к положительному результату, т.к. в этом случае решение не удастся получить в принципе (для рассматриваемого примера перелета).

На рисунке 3.1.1 (схематично) приведены зависимости, описывающие эволюцию ряда элементов орбиты и поведение некоторых сопряженных переменных в течении времени перелета для полученного оптимального решения задачи. На рисунке 3.1.1 также приведено изображение оптимальной траектории межорбитального перелета в геоцентрической экваториальной системе координат, на котором красным цветом показаны активные участки движения аппарата. Стоит отметить, что полученные зависимости, описывающие оптимальное поведение элементов орбиты в течении времени перелета, в целом оказываются достаточно близки соответствующим зависимостям, полученным для рассмотренной ранее задачи быстрого действия (здесь не приводятся, данные зависимости подробно будут описаны в ходе дальнейшего изложения, или же, например, могут быть найдены в работе [49]). В обоих случаях изменение большой полуоси орбиты в течении межорбитального перелета немонотонно, в отличие от эксцентриситета и наклона; все они содержат участки

постоянства, отвечающие пассивному движению КА. Оптимальная программа изменения угла тангажа имеет достаточно простую структуру – состоит из двух участков, различающихся между собой амплитудой колебаний. Угол рысканья изменяется более сложным образом, его среднее значение вдоль траектории перелета отлично от нуля, а амплитуда колебаний изменяется немонотонно. Также на рисунке показана зависимость изменения сопряженной к истинной долготе переменной (т.е. быстрой переменной) от времени перелета – она имеет весьма сложный характер, сильно немонотонный и со значительными фазовыми сдвигами, в целом схожий с соответствующей зависимостью для задачи быстрогодействия. Более подробно, представленные зависимости будут представлены в ходе дальнейшего изложения, на примерах решения уже возмущенных задач.

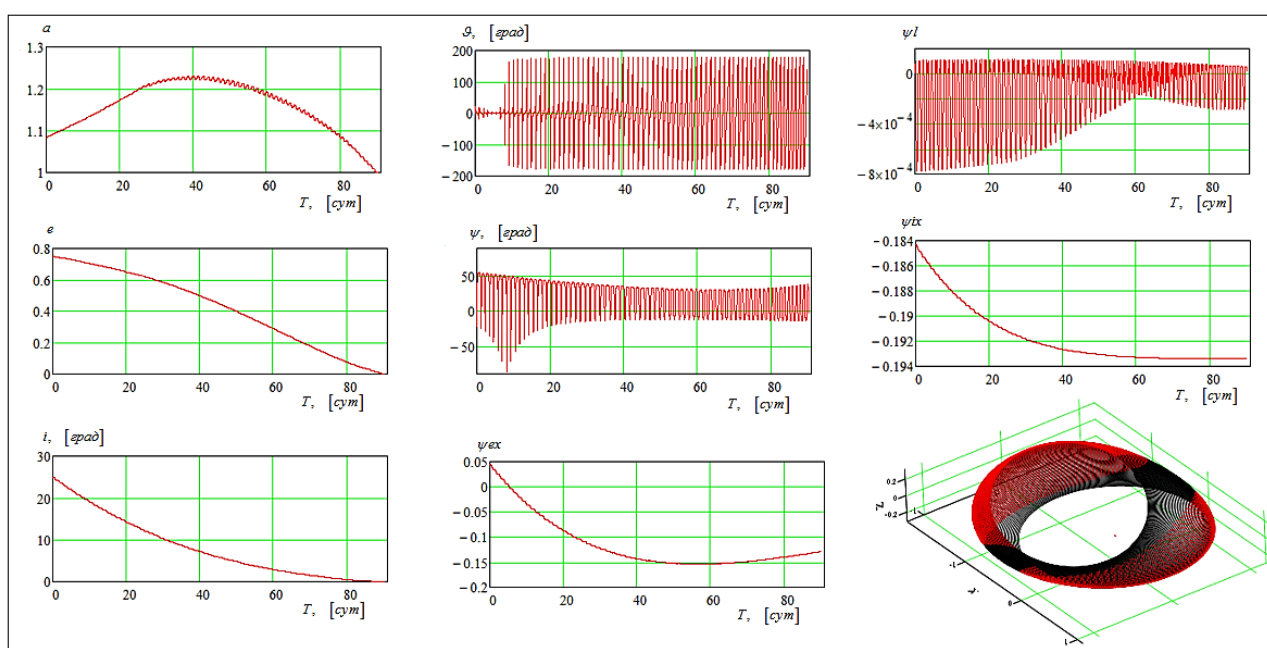


Рисунок 3.1.1 Пример решения невозмущенной ОТ-задачи с функционалом (1.2.7). Приведены зависимости, описывающие изменение ряда элементов орбиты КА (большой полуоси, эксцентриситета и наклона), сопряженных к ним переменных, а также оптимальных программ управления по каналам рысканья и тангажа в течении времени межорбитального перелета. Показана оптимальная траектория перелета в геоцентрической геоэкваatorialной СК; на ней красным цветом отмечены активные участки движения КА с ЭРДУ.

Далее, перейдем к описанию результатов качественного анализа рассматриваемой ОТ-задачи с функционалом (1.2.7), полученных на основе найденного оптимального решения, которое теперь будем рассматривать в качестве «опорного». С целью построения ряда зависимостей, описывающих поведение целевого функционала (1.2.7) при изменении некоторых характерных параметров данной задачи, было организовано соответствующее продолжение «опорного» решения. Стоит отметить, что часть из приводимых далее результатов может быть найдена в работе автора [44].

Первоначально, в качестве такого «характерного параметра» задачи было выбрано конечное значение истинной долготы $l(t_f)$. Тем самым, полученное решение рассматриваемой ОТ-задачи с функционалом (1.2.7) («опорное») фактически было продолжено по угловой дальности перелета, начиная от известного «опорного» значения истинной долготы l_f^0 в 463.51 радиана. Продолжение решения было реализовано следующим образом: в краевой задаче вида (1.3.2) условие трансверсальности $\psi(t_f)=0$ заменялось условием

$$l(t_f) - (l_f^0 \pm 2\pi N_{rev} \tau) = 0, \quad (3.1.3)$$

определяющим значение истинной долготы $l(t_f)$ в зависимости от текущего значения параметра τ . В приведенном выражении (3.1.3) N_{rev} - число целых витков, на которое может изменяться полная угловая дальность перелета в процессе рассматриваемого продолжения. Данное условие (3.1.3), очевидно, и обеспечивает необходимую (для осуществления продолжения по угловой дальности) параметризацию исходной краевой задачи в виде

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{z}) = \mathbf{f}_m(\mathbf{z}(\tau), \tau)|_{\tau=1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}^*, \quad \mathbf{f}_m(\mathbf{z}^*, 0) = \mathbf{0}, \quad \tau \in [0, 1], \quad (3.1.4)$$

где \mathbf{z}^* - ее «опорное» решение. Тогда, в процессе решения задачи (3.1.4) посредством численного интегрирования внешней задачи Коши вида (2.3.6) (в данном случае вектор-функция (3.1.4) может непосредственно рассматривается в качестве функции гомотопии) и удается продолжить исходное решение ОТ-задачи с функционалом (1.2.7) по угловой дальности перелета (на заранее заданное количество целых витков). При этом вполне очевидно, что в рассматриваемом случае каждому шагу метода продолжения фактически отвечает решение отдельной краевой задачи для перелета типа «точка-точка», соответствующее текущему (по τ) конечному значению истинной долготы, равному

$$l(t_f, \tau) = l_f^0 \pm 2\pi N_{rev} \tau.$$

Таким образом, полученное ранее решение ОТ-задачи с функционалом (1.2.7) было продолжено по величине полной угловой дальности перелета: на семь витков в сторону ее увеличения и на два витка в сторону уменьшения, считая от «опорного» значения истинной долготы l_f^0 . Основным результатом рассмотренного продолжения является зависимость, представленная на рисунке 3.1.2. Она позволяет качественно охарактеризовать изменение оптимального значения целевого функционала задачи (безразмерной конечной массы КА), при непрерывном увеличении или уменьшении полной угловой дальности для рассматриваемого межорбитального перелета типа «точка-орбита».

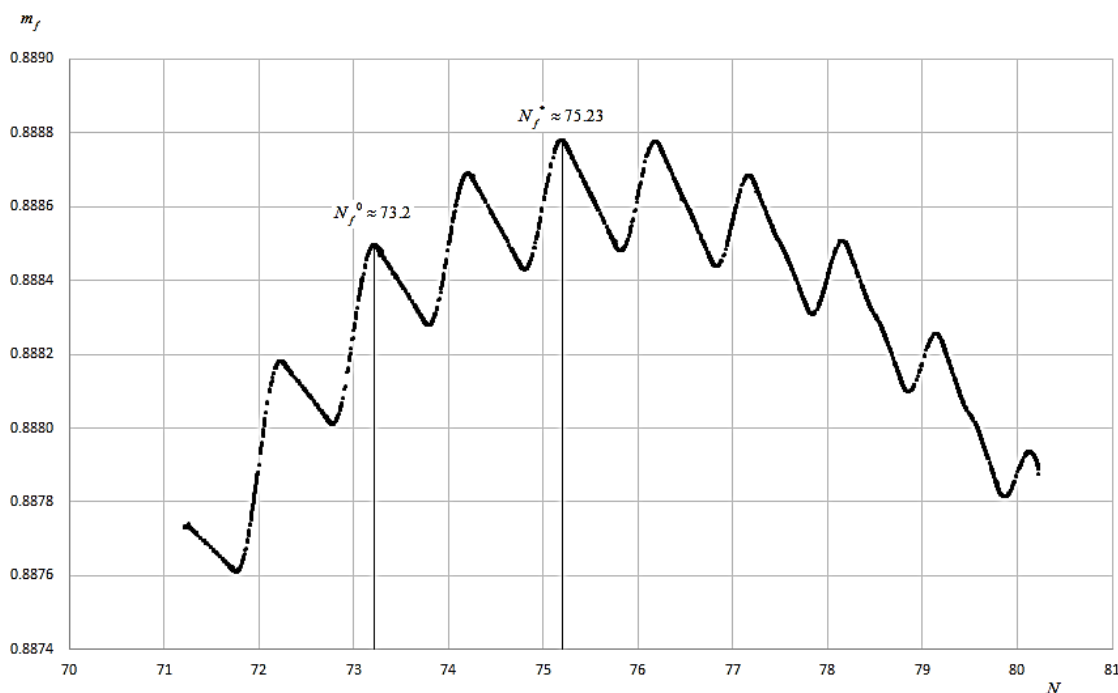


Рисунок 3.1.2 Зависимость конечной массы КА (безр.) от полной угловой дальности перелета N , выраженной в целых витках. На рисунке отмечено: оптимальное значение угловой дальности N_f^0 (в целых витках), соответствующее полученному «опорному» решению; глобально-оптимальное значение угловой дальности – N_f^* .

Из рисунка 3.1.2 следует, что зависимость функционала (1.2.7) от угловой дальности перелета существенно немонотонна и имеет, среди множества локально экстремальных значений (один минимум и один максимум в пределах каждого витка) один ярко-выраженный глобальный максимум. Этот максимум в рассматриваемом случае достигается при увеличении полной угловой дальности перелета чуть больше чем на два витка. Так, ее глобально-оптимальное значение составляет ≈ 75.23 витка. Величина целевого функционала задачи при этом ≈ 0.8888 . На рисунке 3.1.2 отдельно отмечено оптимальное значение угловой дальности, соответствующее «опорному» решению рассматриваемой ОТ-задачи оптимизации межорбитального перелета типа «точка-орбита» - N_f^0 , а также положение глобального максимума функционала - N_f^* . Методически, построение данной зависимости (на основе найденного «опорного» решения рассматриваемой ОТ-задачи оптимизации межорбитального перелета), позволяет определить наилучшее, с точки зрения величины целевого функционала (1.2.7), значение угловой дальности, и выбрать соответствующую ему экстремаль. Кроме того, здесь можно сделать следующий вывод – оценка угловой дальности, полученная исходя из решения осредненной задачи не является глобально-оптимальной. Т.е., как и для задач быстрогодействия (показано в работе [49]), использование в качестве начального приближения полученное решение осредненной задачи (вспомогательной), не позволяет получить в рамках используемой схемы глобально-оптимальное решение.

Представленная на рисунке 3.1.2 зависимость ярко подчеркивает существенную многоэкстремальность задач оптимизации многовиткового межорбитального перелета КА с ЭРДУ, которая, в свою очередь, ощутимо усложняет процессы поиска их решения и последующего качественного анализа. Так, на разобранный примере отчетливо видно, что рассматриваемая ОТ-задача оптимизации межорбитального перелета типа «точка-орбита» насчитывает по меньшей мере десять различных решений (экстремалей), отличающихся между собой по величине угловой дальности перелета приблизительно на виток. При этом, наибольшая разница в значениях целевого функционала (безразмерной конечной массы КА) между экстремалами рассмотренного примера перелета составляет величину порядка 0.001, что для принятых параметров КА соответствует всего лишь 1.386 кг. Очевидно, что разница невелика (для рассмотренного частного примера). Здесь, однако, стоит привести следующее, вполне естественное предположение о том, что при увеличении времени перелета количество экстремалей рассматриваемой задачи (с различной угловой дальностью) будет увеличиваться, и, согласно общему характеру приведенной на рисунке 3.1.2 зависимости, разница в значении целевого функционала между наилучшим и наихудшим решением также будет возрастать. Вполне вероятно, что для некоторых задач межорбитального перелета она может стать достаточно ощутимой. И построение продолжения по угловой дальности для найденного «опорного» решения окажется целесообразно, с целью проверки его качества, при проектировании траектории межорбитального перелета. Стоит также отметить, что подобная зависимость, описывающая изменение величины целевого функционала по угловой дальности перелета, впервые была построена в работе [49], но для существенно более простой задачи в постановке быстрогодействия.

Помимо реализации продолжения полученного «опорного» решения рассматриваемой ОТ-задачи по угловой дальности перелета, было также рассмотрено соответствующее продолжение по ряду параметров начальной эллиптической орбиты, с целью оценки их влияния на значения целевого функционала. Для этого использовалась достаточно простая параметризация краевых условий задачи на левом конце оптимальной траектории межорбитального перелета. Само продолжение «опорного» решения по параметрам начальной эллиптической орбиты непосредственно осуществлялось абсолютно аналогичным предыдущему рассмотренному варианту образом. Т.е. за счет соответствующей параметризации вновь рассматривалась задача вида (3.1.4), а сам процесс продолжения формально сводился к численному интегрированию задачи Коши вида (2.3.6). Стоит особо отметить, что и для всех прочих (рассматриваемых в настоящем разделе) вариантов продолжения «опорного» решения задачи, процесс его реализации всегда одинаков.

В качестве примеров практической реализации продолжения «опорного» решения рассматриваемой задачи по параметрам начальной эллиптической орбиты, приведем зависимости, описывающие изменение оптимального значения целевого функционала (1.2.7) от ее наклона i_0 и радиуса перицентра $r_{\pi 0}$ (безр.). Для рассматриваемых случаев была использована следующая простая параметризация краевых условий задачи:

$$\left. \begin{aligned} i_x(\tau)|_{i_0} &= \tan\left(\frac{i_0(\tau)}{2}\right)\cos(\Omega_0), \\ i_y(\tau)|_{i_0} &= \tan\left(\frac{i_0(\tau)}{2}\right)\sin(\Omega_0), \\ i_0(\tau) &= i_{0\max}\tau + i_{0\min}(1-\tau), \quad \tau \in [0,1], \end{aligned} \right\} \quad (3.1.5)$$

для случая изменения наклона начальной орбиты, и

$$\left. \begin{aligned} p(\tau)|_{i_0} &= r_{\pi 0}(\tau)(1 + e_0(\tau)), \\ e_x(\tau)|_{i_0} &= e_0(\tau)\cos(\Omega_0 + \omega_0), \\ e_y(\tau)|_{i_0} &= e_0(\tau)\sin(\Omega_0 + \omega_0), \\ e_0(\tau) &= \frac{r_{\alpha}^* - r_{\pi 0}(\tau)}{r_{\alpha}^* - r_{\pi 0}(\tau)}, \\ r_{\pi 0}(\tau) &= r_{\pi 0\max}\tau + (1-\tau)r_{\pi 0\min}, \quad \tau \in [0,1]. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.6)$$

для случая изменения ее радиуса перицентра. В приведенных выражениях (3.1.5) и (3.1.6) значения $i_{0\max}$, $i_{0\min}$ и $r_{\pi 0\max}$, $r_{\pi 0\min}$ определяют границы изменения рассматриваемых параметров начальной орбиты. Прочие параметры, такие как Ω_0 , ω_0 и r_{α}^* (безразмерный радиус апогея) - фиксированы, их значения всегда соответствуют «опорному» решению. Очевидно, что значение любой из двух границ $i_{0\max}$, $i_{0\min}$ (или $r_{\pi 0\max}$, $r_{\pi 0\min}$) при реализации рассматриваемого продолжения обязательно должно совпадать с соответствующим значением параметра начальной орбиты i_0 (или $r_{\pi 0}$) на «опорном» решении.

На рисунке 3.1.3 представлена зависимость величины безразмерной конечной массы КА от наклона начальной эллиптической орбиты i_0 . В данном примере в процессе продолжения наклонение изменялось в диапазоне от $i_{0\min}=25$ градусов (что соответствует «опорному» решению) до $i_{0\max}=0$ градусов. Как видно из приведенного рисунка, значение целевого функционала задачи монотонно возрастает при уменьшении значения i_0 , достигая при этом ожидаемого максимума, соответствующего компланарному перелету. Прочие параметры начальной орбиты (помимо наклона) в данном случае фиксированы и само собой соответствуют рассматриваемому «опорному» решению. Угловая дальность перелета в

данном случае не фиксировалась – в процессе продолжения каждый раз предполагалась локально-оптимальной.

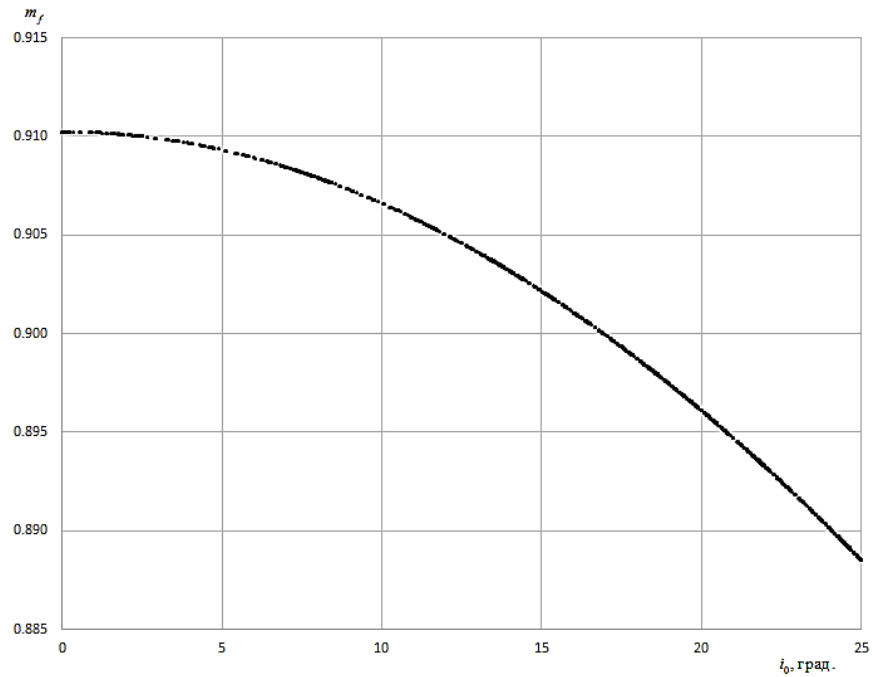


Рисунок 3.1.3 Зависимость безразмерной конечной массы КА от наклона начальной орбиты i_0 , [град.]

На рисунке 3.1.4 представлена зависимость безразмерной конечной массы КА от безразмерного (отнесенного к радиусу ГСО) значения радиуса перицентра начальной эллиптической орбиты $r_{\pi 0}$.

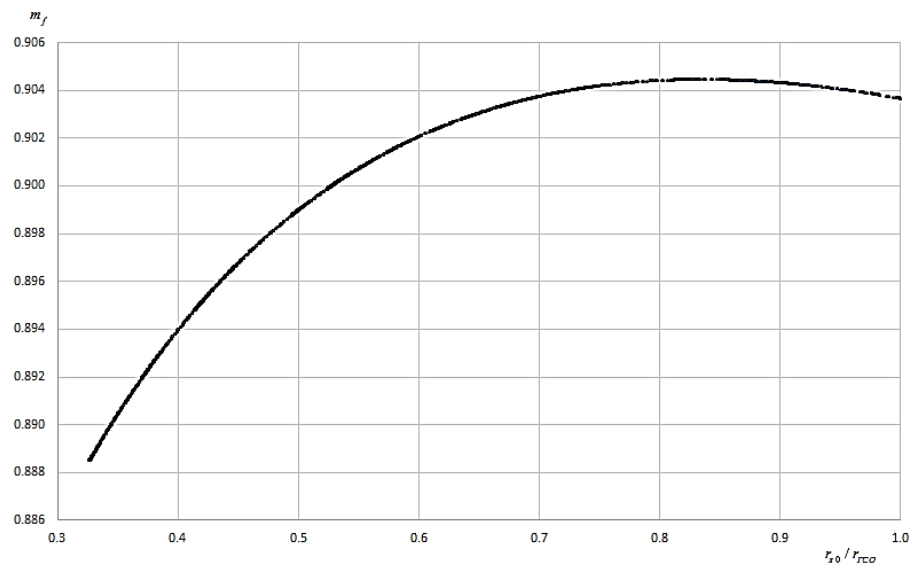


Рисунок 3.1.4 Зависимость безразмерной конечной массы КА от радиуса перицентра начальной орбиты $r_{\pi 0}$ [безр.], отнесенного к радиусу ГСО

В данном примере значение $r_{\pi 0}$ изменялось в диапазоне от $r_{\pi 0 \min}=0.322$ (что соответствует опорному решению) до $r_{\pi 0 \max}=1$ (соответствует радиусу ГСО). Прочие параметры начальной эллиптической орбиты фиксированы и отвечают опорному решению. Как видно из приведенного рисунка 3.1.4, полученная в результате рассматриваемого продолжения зависимость немонотонна. Так, значение целевого функционала задачи сначала монотонно возрастает с увеличением радиуса перицентра начальной эллиптической орбиты, достигая при этом ярко выраженного максимума, а затем начинает убывать. Максимум величины безразмерной конечной массы КА приходится на значение $r_{\pi 0} \approx 0.83$. Наличие данного максимума, вероятно, связано с монотонным увеличением большой полуоси начальной эллиптической орбиты по мере роста радиуса перицентра, при практически неизменной полной угловой дальности перелета (т.к. время перелета фиксировано и составляет 90 суток), что приводит к соответствующей перестройке структуры оптимального управления.

Далее, рассмотрим пример реализации продолжения «опорного» решения рассматриваемой ОТ-задачи с функционалом (1.2.7) по некоторым параметрам КА. В качестве примера, рассмотрим продолжение по величине тяги ЭРДУ. Данный вариант продолжения, очевидно, требует параметризации дифференциальной связи рассматриваемой динамической системы. Фактическая реализация такого продолжения, как уже было сказано ранее, осуществляется аналогично предыдущим рассмотренным вариантам.

В данном случае использовалась следующая простая параметризация для тяги ЭРДУ:

$$P(\tau) = (1 - \tau)P_{\min} + \tau P_{\max}, \quad (3.1.7)$$

где значения P_{\min} и P_{\max} определяют границы ее изменения. Для сведения рассматриваемой краевой задачи к виду (3.1.4), выражение (3.1.7) просто подставляется в систему дифференциальных уравнений оптимального движения КА. Как и ранее, при реализации рассматриваемого варианта продолжения значение одной из границ P_{\min} или P_{\max} всегда должно совпадать с соответствующим значением тяги ЭРДУ на опорном «решении».

На рисунке 3.1.5 представлена зависимость безразмерной конечной массы КА от величины тяги ЭРДУ P , Н, полученная при практической реализации рассматриваемого варианта продолжения для «опорного» решения задачи оптимизации межорбитального перелета. В данном примере в процессе продолжения величина тяги изменялась от значения $P_{\min}=0.4$ Н, до $P_{\max}=0.78$ Н. Как видно из рисунка 3.1.5, безразмерная конечная масса КА всюду монотонно возрастает (со снижением интенсивности) при увеличении тяги на рассматриваемом диапазоне изменения последней. При дальнейшем увеличении тяги ЭРДУ вплоть до бесконечности, конечная масса аппарата будет асимптотически стремиться (при этом все также монотонно возрастая) к некоторому своему предельному (максимальному)

значению, определяемому соответствующим решением рассматриваемой задачи межорбитального перелета в импульсной постановке.

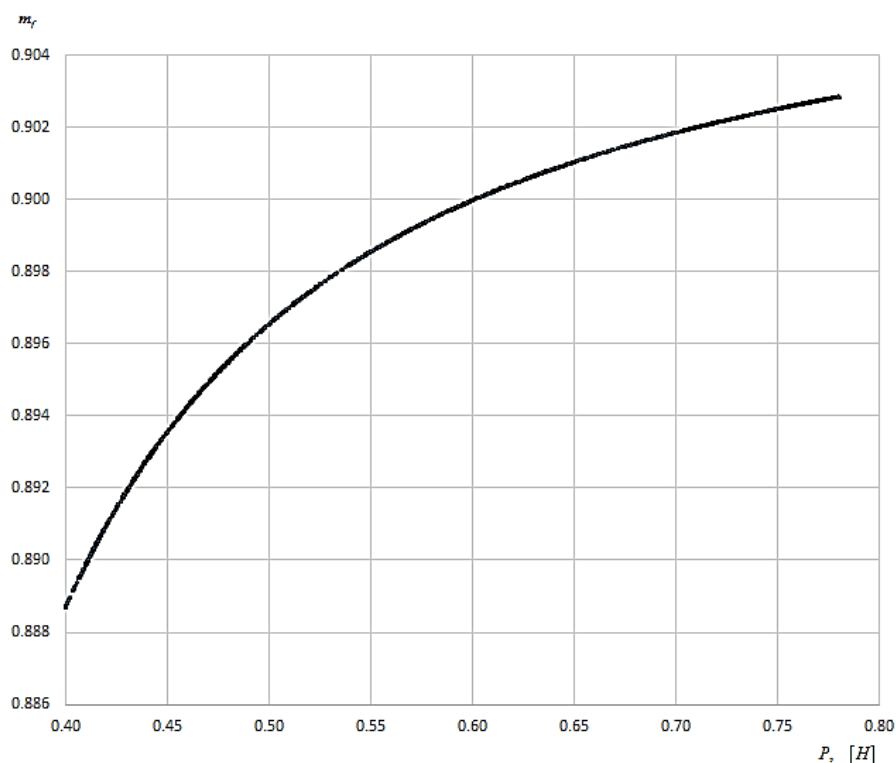


Рисунок 3.1.5 Зависимость безразмерной конечной массы КА от величины тяги ЭРДУ [Н]

В заключении текущего раздела третьей главы рассмотрим еще один вариант продолжения «опорного» решения рассматриваемой ОТ-задачи траекторной оптимизации с функционалом (1.2.7). Для всех разобранных ранее примеров различных вариантов продолжения решения, время перелета с начальной эллиптической орбиты на ГСО фиксировалось и составляло 90 суток. Теперь же попробуем оценить влияние длительности перелета на решение рассматриваемой ОТ-задачи оптимизации. Для этого необходимо построить процесс продолжения по времени перелета таким образом, чтобы избежать проблем, связанных с определением соответствующих производных в рамках предлагаемой в работе методики. Оказывается, это можно сделать за счет специальной (и при этом очень простой) параметризации дифференциальной связи рассматриваемой динамической системы. Суть такой параметризации заключается в следующем. Рассмотрим элементарное дифференциальное уравнение относительно текущего безразмерного времени следующего вида

$$\frac{dt}{dv} = T, \quad (3.1.8)$$

независимой переменной в котором является некоторый новый параметр v , а в правой части содержится (в качестве постоянной) заданное безразмерное время перелета T . Решение данного уравнения, очевидно, дается следующим выражением:

$$t(v) - t_0 = T(v - v_0).$$

Тогда полагая, что переменная v всегда принимает значения лежащие в диапазоне от 0 до 1, и при этом выполняется условие $t(0) = t_0 = 0$, получим следующее простое выражение:

$$t(v) = T \cdot v, \quad v \in [0, 1]. \quad (3.1.9)$$

Последнее однозначно устанавливает связь между текущим безразмерным временем и значением параметра (новой независимой переменной) v .

Для реализации продолжения «опорного» решения по времени перелета T , последнее, очевидно, должно быть представлено в виде выражения, содержащего в явном виде параметр продолжения τ :

$$T(\tau) = (1 - \tau)T_{\min} + \tau T_{\max}, \quad (3.1.10)$$

где T_{\min} , T_{\max} – значения, определяющие соответствующие границы диапазона изменения величины T .

Наконец, используя выражения (3.1.8), (3.1.9) и (3.1.10) удастся представить систему дифференциальных уравнений оптимального движения КА следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dv} = T(\tau) \frac{\partial H^*}{\partial \Psi}, \\ \frac{d\Psi}{dv} = -T(\tau) \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{x}}. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Система (3.1.11) записана относительно новой независимой переменной v , которая всегда изменяется на одном и том же фиксированном отрезке $[0, 1]$. Решение полученной системы (3.1.11) полностью эквивалентно исходной, и никаких изменений в постановке краевой задачи не требуется. К тому же, время перелета теперь является обычным параметром, входящим в правые части системы (3.1.11), и поэтому не требуется вычисление соответствующей производной по времени вида

$$\frac{\partial \mathbf{f}_m(\mathbf{z})}{\partial T}.$$

Таким образом, простейшая замена независимой переменной (времени) для системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА позволяет без каких-либо дополнительных трудностей продолжить по длительности перелета «опорное» решение рассматриваемой ОТ-задачи с функционалом (1.2.7), при этом не выходя за рамки предлагаемой в работе методики применения дуальных чисел совместно с методом продолжения.

На рисунке 3.1.6 представлена зависимость безразмерной конечной массы КА от длительности перелета (в сутках), полученная в результате практической реализации

описанного продолжения. Видно, что общий характер зависимости остается преимущественно постоянным на всем рассматриваемом интервале времени перелета. Так, конечная масса аппарата возрастает с увеличением длительности перелета, асимптотически устремляясь к некоторому своему предельному (максимальному) значению, соответствующему, наиболее вероятно, оптимальному решению рассматриваемой задачи в импульсной постановке. При этом явно проявляется некоторая локальная немонотонность, связанная с достаточно резким изменением оптимального значения текущей угловой дальности перелета при увеличении его длительности. Стоит отметить, для повышения устойчивости рассматриваемого процесса продолжения «опорного» решения использовался, как и работах [25, 26, 46-49], специальный корректор, постоянно отслеживающий нулевой уровень функции гомотопии и реализованный на основе простого метода Ньютона.

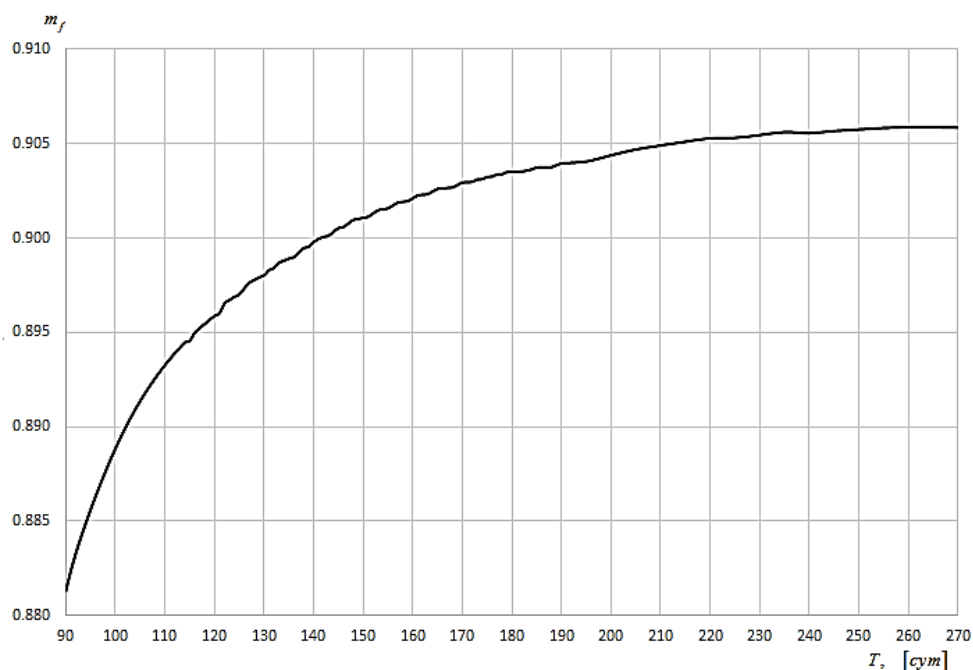


Рисунок 3.1.6 Зависимость безразмерной конечной массы КА от длительности перелета [сут.]

На рисунке 3.1.7 приведена зависимость, описывающая изменение оптимальной величины полной угловой дальности перелета (в целых витках) от его длительности. Видно, что при увеличении времени перелета угловая дальность увеличивается по закону, близкому к линейному. При этом интересно отметить, что в рассматриваемом случае угловой коэффициент рассматриваемой «прямой» практически равен единице: трехкратное увеличение продолжительности перелета приводит к эквивалентному увеличению его дальности. Проявления локальной немонотонности на представленной зависимости следует отнести как к работе корректора, так и «забросам» на близкие (по угловой дальности) соседние экстремали в процессе продолжения.

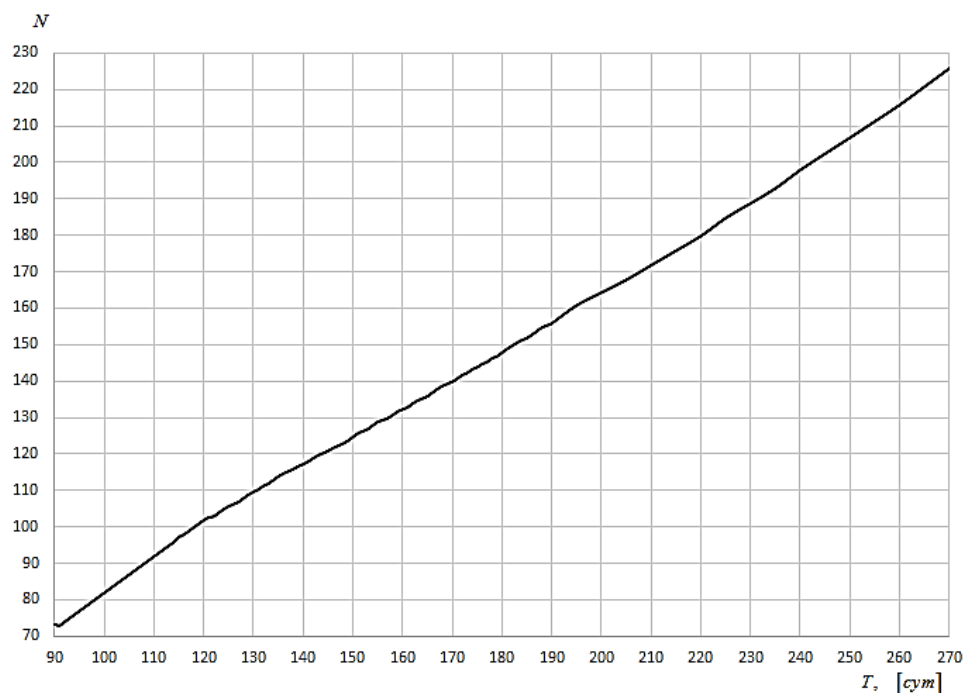


Рисунок 3.1.7 Зависимость полной угловой дальности (в полных витках) от длительности перелета [сут.]

В данном разделе были приведены и проанализированы результаты решения ряда невозмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, полученные с помощью предлагаемой в работе методики совместного использования метода продолжения и дуальных чисел. Приведенные зависимости, качественно характеризующие поведение решения для рассмотренной в качестве примера ОТ-задачи оптимизации межорбитального перелета с функционалом (1.2.7), подтверждают эффективность предлагаемой методики, т.к. получить их ранее (при использовании прочих методов численного определения производных, описанных в разделе 2.1) не удавалось.

3.2 Применение аппарата дуальных чисел для анализа возмущенного движения

В данном разделе третьей главы диссертационной работы описываются результаты, полученные при решении задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом влияния возмущений, согласно общей методике, описание которой дается в разделе 2.2. Большая часть из приведенных решений соответствует многовитковому межорбитальному перелету КА между начальной круговой или эллиптической орбитой и ГСО. Рассматриваемые для функционалов (1.2.7) – (1.2.9) задачи траекторной оптимизации отвечают перелетам типа «орбита-орбита» или «точка-орбита».

3.2.1 Качественный анализ на примере решения осредненной задачи на минимум тяги

В данном подразделе приводятся численные результаты решения осредненной задачи определения минимального потребного значения тяги для реализации многовиткового межорбитального перелета КА с ЭРДУ за заданное время с учетом влияния возмущений (т.е. задача траекторной оптимизации для функционала вида (1.2.9) на фиксированном отрезке времени Δ). В рамках данной задачи были рассмотрены перелеты между двумя некомпланарными круговыми орбитами, из которых начальная – предполагалась произвольно ориентированной в окрестности Земли, а конечная орбита – ГСО. Начальная круговая орбита полностью определялась следующими своими параметрами – высотой h_0 и наклоном i_0 . Значение высоты начальной круговой орбиты изменялось в следующем диапазоне: от $h_{0min}=3630$ км до $h_{0max}=35793$ км (что соответствует высоте ГСО), а ее наклонение i_0 - от 0 до 70 градусов. Без потери общности рассмотрения, для всех анализируемых решений долгота восходящего узла начальной орбиты принималась равной 0 градусов. Рассматриваемый диапазон фиксированного времени перелета – от 90 до 250 суток. При расчетах принимались следующие параметры КА с ЭРДУ: начальная масса КА $m_0=1320$ кг, величина удельного импульса – $I_{y0}=1500$ с.

При рассмотрении данной задачи траекторной оптимизации многовиткового межорбитального перелета КА с ЭРДУ использовалась упрощенная (по сравнению с основной, описываемой в разделе 1.4) модель возмущений. Во многом, это было сделано для обеспечения возможности проведения качественного анализа как можно большего количества решений, т.к. процесс получения каждого из них оказывается весьма трудоемким с точки зрения необходимого количества вычислений и поэтому требует немалого времени. Известно, что среди всех возмущающих факторов различной природы, действующих на КА в окрестности Земли, наибольший вклад в эволюцию его траекторного движения вносят возмущения от нецентральной гравитационного поля Земли и лунно-солнечные возмущения, учет которых требует достаточно большого количества вычислений (с использованием соответствующего эфемеридного обеспечения). Поэтому, было принято решение отказаться от учета влияния последних, и в качестве основного (и единственного) возмущающего фактора рассматривалось возмущающее ускорение от нецентральной гравитационного поля Земли (геопотенциал 4x4).

Решение соответствующей рассматриваемой постановке краевой задачи принципа максимума, в явном виде описываемой вектор-функцией невязок (1.3.4), каждый раз

осуществлялось с помощью метода продолжения (численно интегрировалась внешняя задача Коши вида (2.3.3)).

Далее, приведены соответствующие рассматриваемой задаче оптимизации межорбитального перелета результаты полученных решений в виде ряда зависимостей и изолиний построенных на плоскости параметров, характеризующих положение начальной орбиты в пространстве, и которые также могут быть найдены в работе автора [42].

На рисунках 3.2.1 и 3.2.2 приведены изолинии значений минимальной тяги P , и конечной массы КА m_f , кг при перелетах с низкой круговой орбиты на ГСО. Изолинии даны на плоскости следующих параметров, характеризующих рассматриваемый перелет: длительность перелета (сутки) – наклонение начальной орбиты (градусы). Радиус начальной орбиты – фиксирован, при расчетах он принимался равным 10000 км.

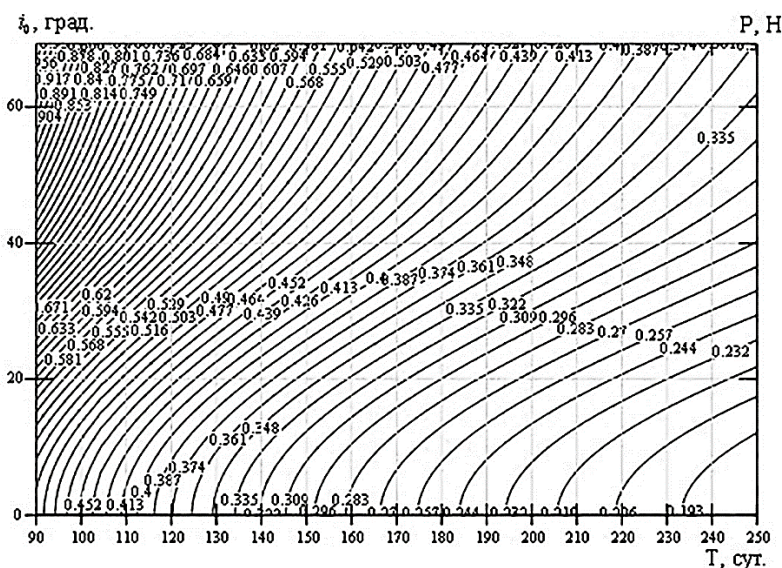


Рисунок 3.2.2 Изолинии конечной массы КА m_f , кг при перелете с начальной круговой орбиты радиусом 10000 км на ГСО. Построены на плоскости следующих параметров: длительность перелета T , [сут.] и наклонение начальной орбиты – i_0 [град.]

Следует отметить, что результаты, представленные на рисунках 3.2.1, 3.2.2 и всех последующих (кроме тех, на которых это оговорено особо), соответствуют определенному типу решения осредненной возмущенной задачи на минимум тяги, для которого характерно немонотонное изменение эксцентриситета (его величина значительно возрастает). Для другого типа решения характерно следующее: величина эксцентриситета вдоль траектории перелета КА всегда сохраняет около нулевое значение. Таким образом, в рассматриваемой задаче о минимальной тяге присутствует известное ветвление решений, аналогичное задаче о минимуме времени перелета. Последнее подчеркивает «общность и двойственность» между задачей на минимум тяги и задачей оптимального быстрогодействия. Будем классифицировать различные экстремали задачи на минимум тяги по аналогии с известной классификацией решений задачи оптимального по быстродействию межорбитального перелета между некомпланарными круговыми орбитами [48, 49]. Следуя этой классификации, экстремаль для которой характерно значительное возрастание эксцентриситета, будем называть E-решением задачи, а экстремаль, на которой эксцентриситет всегда принимает малые значения – C-решением. Приведенные ниже результаты соответствуют E-решению задачи.

Как видно из рисунка 3.2.1, значения минимальной тяги в рассматриваемом диапазоне изменения времени перелета и наклонения имеют один явно выраженный максимум и один явно выраженный минимум. Область минимума достаточно широкая; ей отвечают перелеты продолжительностью 230-250 суток с круговых орбит, наклонение которых не превышает 10-15 градусов. При увеличении наклонения начальной орбиты и уменьшении длительности перелета величина минимальной тяги достаточно резко возрастает. Сначала, значения минимальной тяги возрастают преимущественно в направлении увеличения наклонения, а затем – и в направлении уменьшения длительности перелета, достигая максимума при наибольшем из рассматриваемых значений наклонения начальной орбиты и минимальном значении продолжительности перелета. На рисунках 3.2.3 и 3.2.4 показаны соответствующие сечения построенных изолиний для минимальной тяги: рисунок 3.2.3 соответствует сечению в направлении оси, определяющей наклонение начальной орбиты, рисунок 3.2.4 – в направлении оси, определяющей длительность перелета.

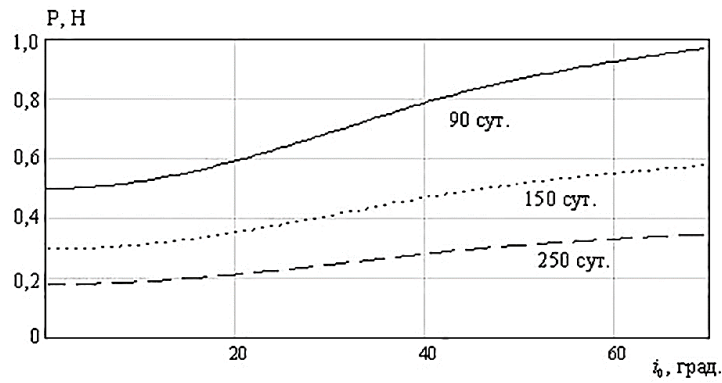


Рисунок 3.2.3 Зависимость величины минимальной тяги P , [Н] от наклона i_0 , [град.] начальной круговой орбиты радиуса 10000 км для трех значений времени перелета

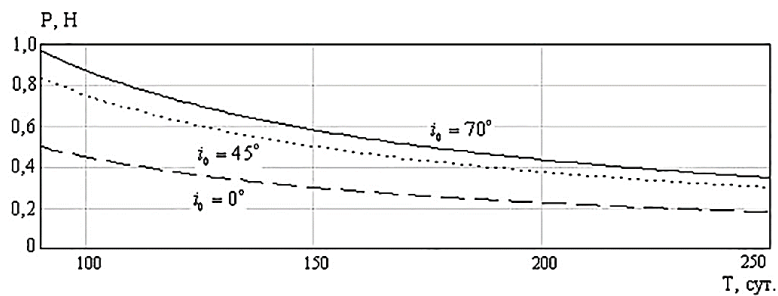


Рисунок 3.2.4 Зависимость минимальной тяги P , [Н] от времени перелета T , [сут.] с круговой орбиты на ГСО для трех разных значений наклона i_0 [град.]

Из рисунка 3.2.3 следует, что значение минимальной тяги монотонно возрастает при увеличении наклона, ее производная всюду положительна, но изменяется немонотонно. Общий характер зависимости остается неизменным для различных значений длительности перелета. Из рисунка 3.2.4 следует, что при уменьшении времени перелета значение минимальной тяги монотонно возрастает независимо от величины наклона, при этом ее производная также монотонно возрастает.

Как видно из рисунка 3.2.3, направления возрастания величины конечной массы КА почти всюду совпадают с направлением убывания наклона начальной орбиты. Это также отчетливо видно и на рисунках 3.2.5, 3.2.6, где показаны соответствующие сечения рассматриваемых изолиний. Из рисунка 3.2.5 следует, что конечная масса КА монотонно убывает с увеличением наклона, и производная данной зависимости всюду неположительна (изменяется немонотонно). Для разных значений продолжительности времени перелета общий характер зависимости минимальной тяги от наклона и сама зависимость практически не изменяются. Это следует из рисунка 3.2.6 - для различных значений наклона начальной орбиты изменение длительности перелета КА практически не влияет на величину его конечной массы.

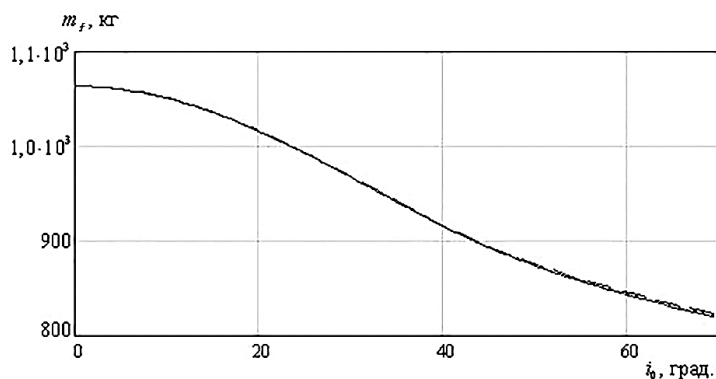


Рисунок 3.2.5 Зависимость конечной массы КА m_f , [кг] от наклона начальной орбиты i_0 , [град.] для трех значений времени перелета

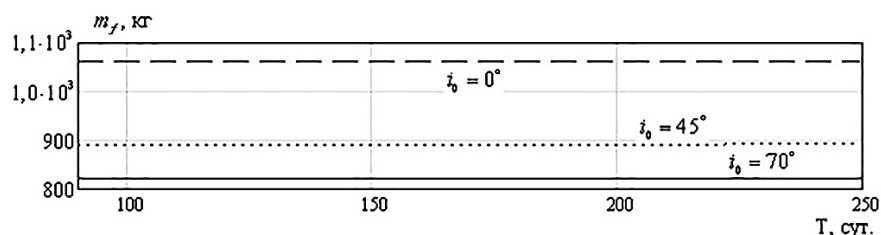


Рисунок 3.2.6 Зависимость конечной массы КА m_f , [кг] от времени перелета T , [сут.] с круговой орбиты на ГСО для трех разных значений наклона i_0

Далее, оценим влияние изменения радиуса (высоты) начальной орбиты на решение рассматриваемой задачи минимизации тяги. Как видно из рисунка 3.2.7, значение минимальной тяги монотонно убывает при увеличении радиуса начальной орбиты, а характер зависимости остается неизменным для различных значений наклона. Зависимости, представленные на рисунке 3.2.7 отвечают времени перелета равному 150 суток.

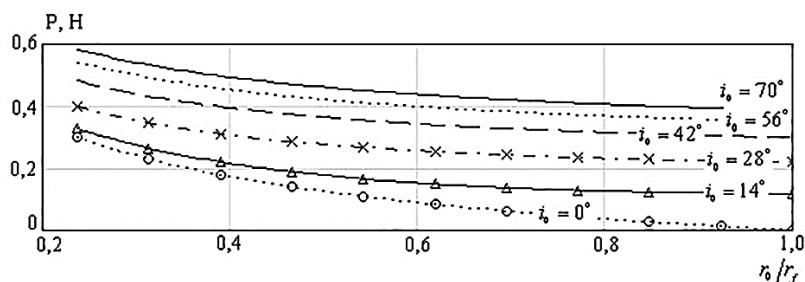


Рисунок 3.2.7 Зависимость минимальной тяги P , [Н] от безразмерного радиуса начальной круговой орбиты (отнесенного к радиусу ГСО) для различных значений наклона i_0 , [град.]. Продолжительность перелета – 150 суток

На рисунке 3.2.8 представлена зависимость конечной массы КА от радиуса начальной орбиты для фиксированной продолжительности перелета в 150 суток. Очевидно, что с ростом радиуса начальной орбиты, конечная масса КА увеличивается. Видно, что характер зависимости не изменяется при различных значениях наклона.

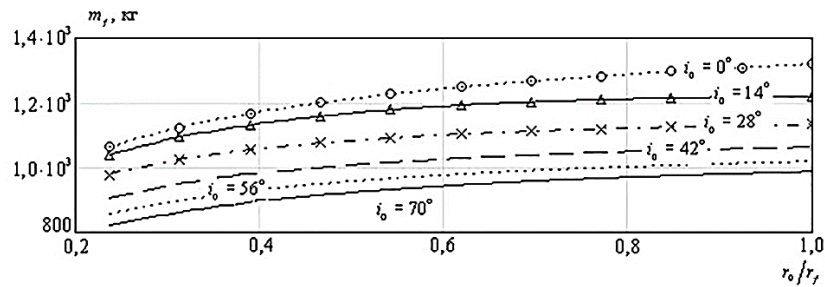


Рисунок 3.2.8 Зависимость конечной массы КА P, H от безразмерного радиуса начальной круговой орбиты (отнесенного к радиусу ГСО) для различных значений наклона i_0 , [град.]. Продолжительность перелета – 150 суток

На рисунке 3.2.9 приведена зависимость величины минимальной тяги от радиуса начальной орбиты при фиксированном значении наклона 70 градусов для различных длительностей перелета. Видно, что зависимость монотонно убывает с ростом радиуса начальной орбиты. Для разных значений времени перелета общий характер зависимости также остается неизменным.

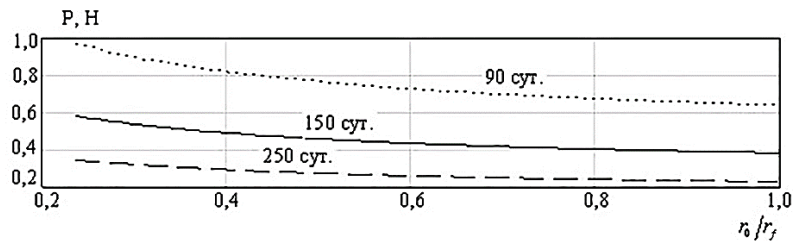


Рисунок 3.2.9 Зависимость значения минимальной тяги P , [Н], от безразмерного радиуса начальной круговой орбиты (отнесенного к радиусу ГСО) для различных значений времени перелета. Наклонение начальной орбиты зафиксировано и составляет 70 градусов

На рисунках 3.2.10, 3.2.11 показано ветвление решений рассматриваемой задачи при переходе некоторого критического значения наклона начальной круговой орбиты. Сплошная линия соответствует С-решению, пунктирная – Е-решению. Из рисунка 3.2.10 следует, что при постоянном значении радиуса начальной орбиты изменение продолжительности перелета практически не оказывает влияние на величину критического наклона, равного, в данном случае ≈ 41.3 градуса. Напротив, при изменении величины радиуса начальной орбиты при фиксированном времени перелета, точка бифуркации решения по наклону смещается в сторону уменьшения своей величины. Для случая, представленного на рисунке 3.2.11, величина критического наклона становится равной ≈ 38.6 градусам.

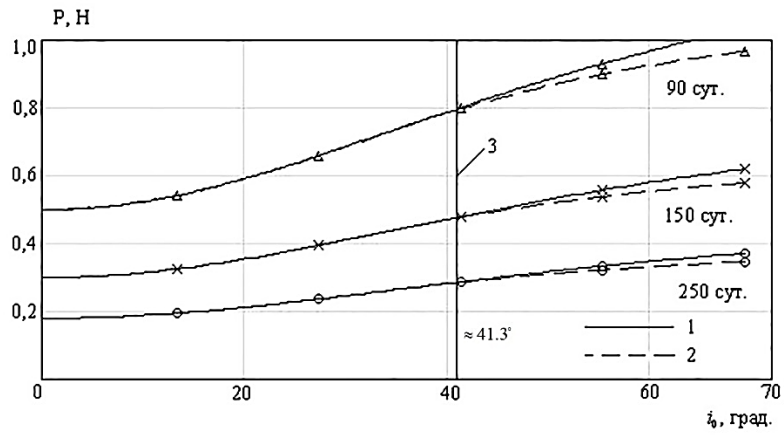


Рисунок 3.2.10 Ветвление решений задачи (бифуркация) для трех различных значений времени перелета: 1 – С-решение; 2 – Е-решение задачи; 3 – определяет положение точки бифуркации на оси i_0 . Радиус начальной орбиты 0.237

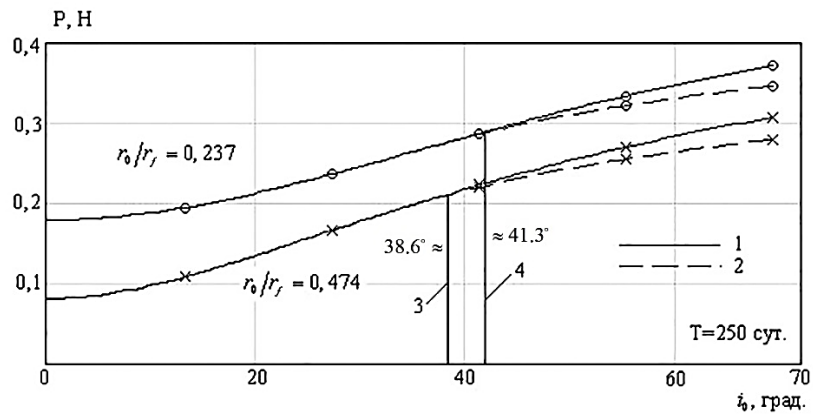


Рисунок 3.2.11 Смещение положения точки бифуркации при двух разных значениях радиусов начальной круговой орбиты: 1 – С-решение, 2 – Е-решение задачи; 3, 4 – определяют положения точек бифуркации на оси, характеризующей наклонение начальной орбиты

На рисунке 3.2.12 представлена зависимость, характеризующая разность значений минимальной тяги:

$$\Delta P = P_{\text{возм}} - P_{\text{невозм}},$$

соответствующих решениям с учетом действия возмущений и без, как функции наклонения начальной орбиты. Зависимость приводится для трех различных длительностей перелета КА при фиксированном радиусе начальной орбиты.

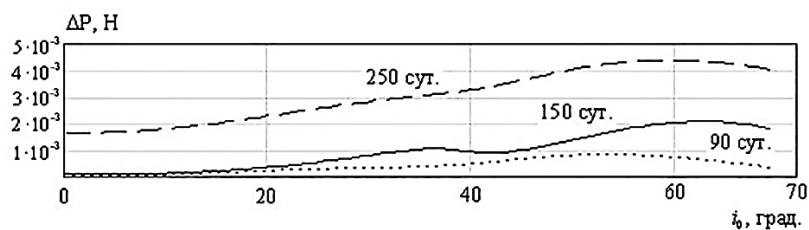


Рисунок 3.2.12 Зависимость разности значений минимальной тяги ΔP , [Н] (для трех различных значений времени перелета) полученная при решении рассматриваемой задачи без учета влияния возмущений, и с учетом, от наклона начальной орбиты i_0 , [град.]

Из рисунка 3.2.12 следует, что разность между значениями минимальной тяги для двух анализируемых решений (с учетом возмущений и без) зависит от наклона начальной орбиты и от продолжительности перелета. Зависимость ΔP от наклона немонотонна и имеет при не очень больших временах перелета два ярко выраженных максимума. Изменение времени перелета сдвигает положения этих максимумов. Интересно, что для всех рассмотренных случаев знак рассматриваемой разности ΔP оказывается положительным. То есть учет возмущений увеличивает требуемую для перелета минимальную тягу. Следует отметить, что этот результат справедлив для рассматриваемых характеристик орбит в рамках принятой модели возмущенного движения.

На рисунке 3.2.13 показана зависимость разности значений относительных конечных масс КА:

$$\Delta \mu_f = \mu_{f \text{ невозм}} - \mu_{f \text{ возм}},$$

вычисленная в рамках моделей невозмущенного и возмущенного движения КА с ЭРДУ, как функция наклона начальной орбиты для нескольких времен перелета. Представленные зависимости немонотонны. Но самое интересное, что положительный знак рассматриваемой разности при всех рассмотренных значениях времени перелета и наклоне. Учет возмущения приводит в рассматриваемом случае к уменьшению массы КА, выводимого на конечную орбиту.

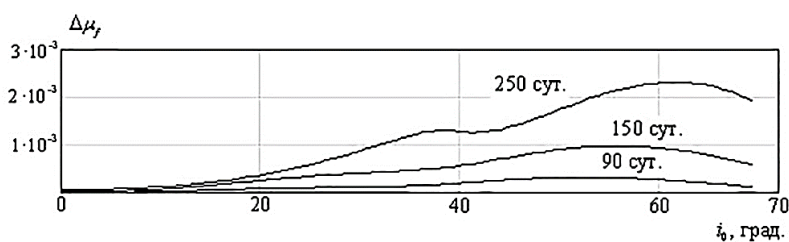


Рисунок 3.2.13 Зависимость разности значений относительных конечных масс КА $\Delta \mu_f$ (для трех различных значений времени перелета), полученная при решении задачи без учета действующих на КА возмущений и учитывая их, от наклона начальной орбиты i_0 , [град.]. Безразмерный радиус начальной орбиты 0.237

Из зависимости разности между значениями минимальной тяги двух анализируемых решений от радиуса начальной орбиты на рисунке 3.2.14 видно, что величина разности убывает с ростом радиуса начальной орбиты. Это достаточно естественно, так как возмущающие ускорения уменьшаются с удалением от Земли (для рассматриваемой модели возмущения).

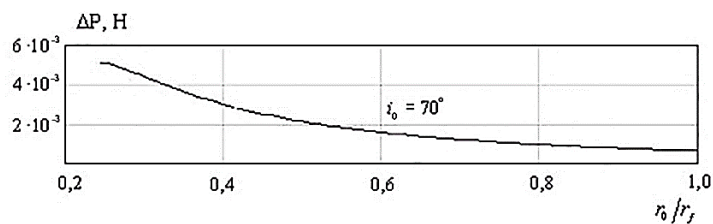


Рисунок 3.2.14 Зависимость разности абсолютных значений минимальной тяги ΔP , Н, полученная при решении задачи с учетом действующих на КА возмущений и не учитывая их, от радиуса начальной орбиты. Время перелета фиксировано и составляет 150 суток. Безразмерный радиус начальной орбиты 0.237

Как видно из приведенных зависимостей на рисунках 3.2.12 - 3.2.14, разница между проанализированными решениями (возмущенным и невозмущенным) для осредненной задачи на минимум тяги оказывается совсем невелика. Для значения целевого функционала она составляет десятые доли процента, т.е. всего лишь несколько миллиньютонов. Таким образом, решение осредненной задачи минимума тяги с учетом возмущений от нецентральности гравитационного поля Земли при перелетах с низких круговых орбит на ГСО оказывается весьма близким к решению соответствующей задачи без учета возмущений, и всегда оказывается чуть хуже последнего.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что учет влияния возмущений (в рамках принятой в настоящем разделе модели) в рассматриваемой осредненной задаче на минимум тяги не приводит к существенной разнице в значениях целевого функционала. Из представленных рисунков видно, что для рассмотренной здесь (на примере перелета между некомпланарными круговыми орбитами) задачи траекторной оптимизации, относительная разница в значении целевого функционала при учете действия возмущений, выраженная в процентах, не превосходит величины 0.6%. Конечно же, данный вывод сделан при использовании весьма упрощенной модели возмущений при решении осредненной задачи минимизации тяги, однако, забегая вперед, стоит отметить, что в ходе дальнейшего изложения, при рассмотрении решений уже неосредненных возмущенных задач межорбитального перелета КА на ГСО для различных постановок, будет получен аналогичный результат.

3.2.2 Неосредненные задачи

В данном подразделе приводятся примеры и описываются результаты соответствующих решений, полученных с помощью использования методики раздела 1.7 для неосредненных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом действия возмущений. Рассматриваются преимущественно перелеты следующих типов: «орбита-

орбита» и «точка-орбита», осуществляемые между начальной эллиптической орбитой (параметры которой известны) и ГСО. Общий подход к решению данных задач в целом аналогичен ранее описанному в разделе 3.1 - он также основывается на использовании решений ряда эквивалентных вспомогательных задач. В качестве вспомогательных задач снова выступают их осредненные варианты (естественно, с учетом вида рассматриваемого функционала и модели функционирования ЭРДУ). Общая схема решения неосредненных возмущенных задач может быть описана следующим образом:

- на первом этапе ищется решение некоторой вспомогательной (эквивалентной) задачи, фактически представляющей собой (как и в разделе 3.1) осредненный вариант основной, при этом действие возмущений на КА не учитывается;
- на втором этапе ранее полученное решение используется в качестве начального приближения к решению осредненного варианта основной задачи, но уже с учетом действующих возмущений (в рамках принятой модели);
- наконец, полученное на втором этапе решение осредненной возмущенной задачи уже непосредственно используется в качестве начального приближения к решению основной (т.е. неосредненной возмущенной задачи для функционалов вида (1.2.7) – (1.2.9)).

Практическая реализация данной схемы фактически сводится к построению цепочки из решений вспомогательных задач, каждое из которых, в свою очередь, выступает в качестве начального приближения для следующего. В целом, предложенная схема может быть использована для любых постановок задач межорбитального перелета и обеих рассматриваемых в рамках настоящей работы моделей функционирования ЭРДУ. При этом, при решении возмущенных ОТ-задач с функционалом (1.2.7), цепочка вспомогательных задач для них будет строиться на основе эквивалентных им ОМ-задач (опять же, исходя из общего подхода, описанного в разделе 3.1).

На основе полученных таким способом решений возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ удастся провести их некоторый качественный анализ - посредством простого сравнения с решениями соответствующих им невозмущенных задач. Поэтому, для удобства проведения дальнейшего исследования, можно ввести следующую величину, характеризующую относительную разницу значения целевого функционала задачи, полученную при ее решении с учетом и без учета действия возмущений, выраженную в процентах:

$$\Delta J_r = \frac{|J - J_{pert}|}{J} \cdot 100\%.$$

Где J – значение целевого функционала вида (1.2.7) – (1.2.9) полученное при решении невозмущенной задачи, а J_{pert} – с учетом влияния возмущений.

Далее, приводятся конкретные примеры решения возмущенных задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ в различных постановках. Начнем рассмотрение с решения ОТ-задачи с функционалом (1.2.7) для перелета типа «точка-орбита». В рассматриваемом случае параметры начальной (эллиптической) орбиты КА предполагались следующими: высота перигея – 5000 км, высота апогея – 80000 км, наклонение – 25 градусов. Аргумент перицентра и долгота восходящего узла приняты равными нулю. Истинная аномалия точки, характеризующей положение КА на начальной орбите – 200 градусов. Начальная масса аппарата составляет 2500 кг. Параметры ЭРД: тяга – 0.56 Н, удельный импульс – 1640 с. Продолжительность перелета на ГСО принята равной 120 суткам. Рассматривается геопотенциал 40×40. Дата старта соответствует 26 декабря 2015 года 1 час 32 минуты UTC.

Решение данной задачи было получено согласно общей схемы с помощью следующей цепочки вспомогательных задач: сначала решалась осредненная ОМ-задача для функционала (1.2.7) без учета действия возмущений, затем – осредненная ОМ-задача уже с учетом возмущений (в рамках представленной выше модели). Далее определялось решение неосредненной ОМ-задачи также с учетом действия возмущений. Последнее и использовалось в качестве начального приближения к решению рассматриваемой нами возмущенной ОТ-задачи для функционала (1.2.7) (основной). Не останавливаясь подробно на описании соответствующих решений ОМ-задач, стоит, однако, отметить полученные в рамках описанной цепочки значения целевого функционала (безр.). Решение невозмущенной осредненной ОМ-задачи определяет следующее оптимальное значение безразмерной конечной массы аппарата: 0.920079. Соответствующее решение с учетом действия возмущений дает: 0.919503. И, наконец, решению неосредненной возмущенной ОМ-задачи соответствует значение целевого функционала 0.919767. Решение неосредненной ОМ-задачи без учета влияния возмущений на траекторию межорбитального перелета (не входящей в рассматриваемую цепочку), определяет безразмерную конечную массу КА в 0.920366. Сравнивая значения целевого функционала, полученные при решении рассматриваемых ОМ-задач с учетом и без учета действия возмущений, не составляет никакого труда определить соответствующие им значения ΔJ_r . Так, для осредненной ОМ-задачи относительная разница в значении целевого функционала, выраженная в процентах, составляет 0.025331%. Для неосредненной 0.064989%.

Полученное решение невозмущенной ОТ-задачи определяет следующее оптимальное значение для безразмерной конечной массы аппарата: 0.895401. Соответствующее значение с

учетом действия возмущений (в рамках принятой модели): 0.894936. Таким образом, разница в значении целевого функционала (безр.) рассматриваемой ОТ-задачи при учете и без учета действия возмущений составляет всего лишь 4.652798×10^{-4} , или 1.163199 кг (в соответствии с принятым значением начальной массы КА в 2500 кг). Следовательно, соответствующая величина ΔJ_r для рассматриваемого примера составляет $5.196331 \times 10^{-2}\%$.

На рисунках 3.2.15 - 3.2.20 представлены основные зависимости, характеризующие полученное решение ОТ-задачи с учетом влияния возмущений. На каждом из них в целях сравнения приведено соответствующее невозмущенное решение. Всюду красная линия соответствует возмущенному решению, синяя – невозмущенному.

На рисунке 3.2.16 представлена зависимость изменения большой полуоси КА от времени. Укрупненный фрагмент данной зависимости на интервале от 18 до 20 суток приведен на рисунке 3.216. В обоих случаях большая полуось изменяется немонотонно; при этом явно видно расхождение двух зависимостей, достигающее максимума при значении длительности перелета порядка 50 суток. На рисунке 3.2.16 явно видно проявление действия возмущений от нецентральности гравитационного поля Земли на пассивном участке возмущенной траектории КА при прохождении района перигея орбит.

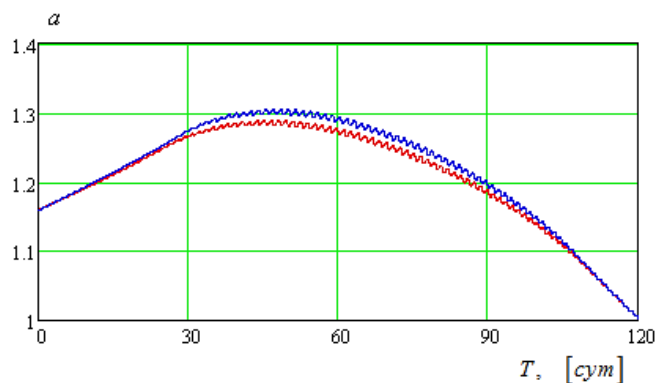


Рисунок 3.2.15 Эволюция большой полуоси орбиты КА [безр.] при межорбитальном перелете

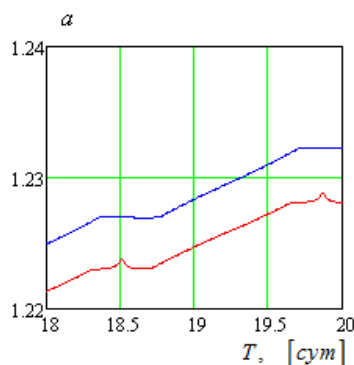


Рисунок 3.2.16 Эволюция большой полуоси орбиты КА [безр.] на интервале от 18 до 20 суток

На рисунках 3.2.17 и 3.2.18 приведены зависимости изменения долготы восходящего узла и аргумента перицентра орбиты КА от времени перелета. Явно виден вклад нецентральности гравитационного поля Земли в эволюцию этих элементов.

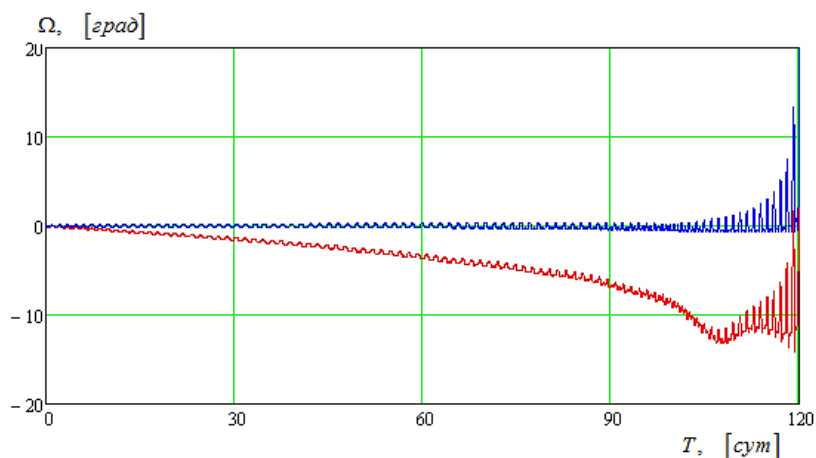


Рисунок 3.2.17 Эволюция долготы восходящего узла КА [град.] при межорбитальном перелете

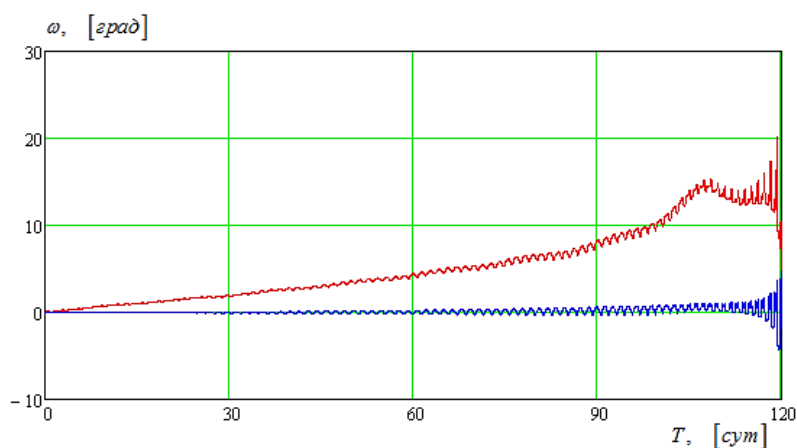


Рисунок 3.2.18 Эволюция аргумента перицентра КА [град.] при межорбитальном перелете

На рисунках 3.2.19 - 3.2.22 приведены полученные оптимальные программы управления КА по рысканью и тангажу. Укрупненные фрагменты данных зависимостей на интервале времени перелета от 35 до 38 суток приведены на рисунках 3.2.20 и 3.2.22. Видно, что изменение углов рысканья и тангажа для возмущенного движения опережает по фазе соответствующее изменение для невозмущенного; при этом, сам характер зависимостей в целом повторяется. Для функции переключения тяги ЭРДУ ситуация оказывается аналогичной. Фрагмент данной зависимости на интервале времени перелета от 38 до 50 суток представлен на рисунке 3.2.23.

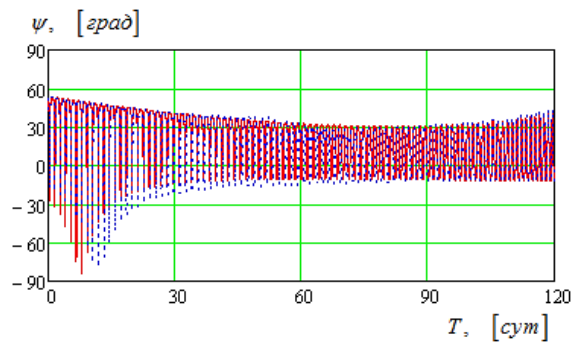


Рисунок 3.2.19 Зависимость изменения угла рысканья [град.] от времени перелета [сут.]

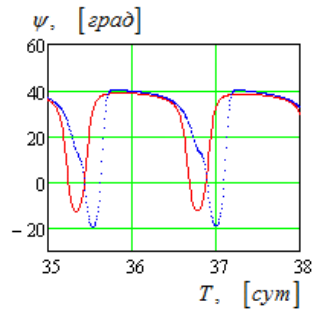


Рисунок 3.2.20 Зависимость изменения угла рысканья [град.] от времени перелета [сут.] на интервале от 35 до 38 суток

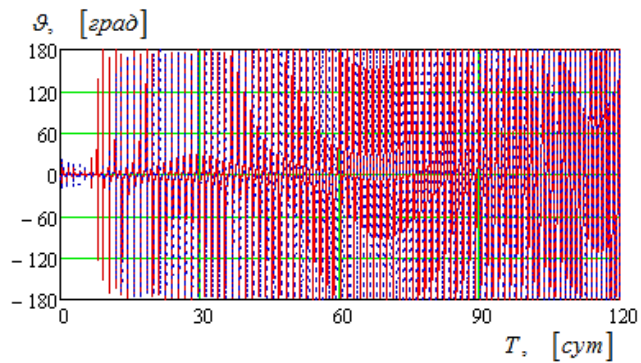


Рисунок 3.2.21 Зависимость изменения угла тангажа [град.] от времени перелета [сут.]

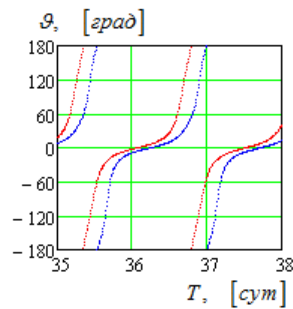


Рисунок 3.2.22 Зависимость изменения угла тангажа [град.] от времени перелета [сут.] на интервале от 35 до 38 суток

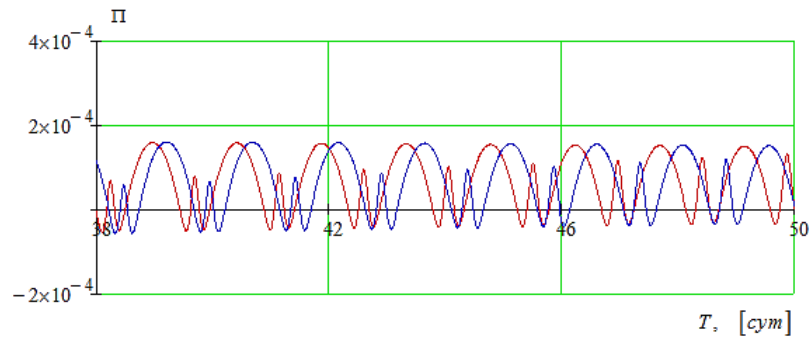


Рисунок 3.2.23 Зависимость функции переключения тяги ЭРДУ [безр.] от времени перелета [сут.] на интервале от 35 до 50 суток

Таким образом, проведенный анализ показал, что для достаточно непродолжительного межорбитального перелета учет возмущений не приводит к существенным изменениям в структуре оптимального управления, в характере изменения фазовых переменных, в траектории оптимального перелета. Отчетливо видно, что разница в значении целевого функционала для возмущенного и невозмущенного решения мала и практически не проявляется.

Далее, рассмотрим в качестве примера полученные возмущенные решения, отвечающие различным постановкам задачи траекторной оптимизации КА с ЭРДУ для следующего межорбитального перелета: требуется перевести аппарат с начальной высокоэллиптической орбиты с большим наклонением на ГСО. Параметры начальной орбиты следующие: радиус перигея составляет 6595 км, радиус апогея – 34171 км (эксцентриситет равен 0.67645), наклонение - 63 градуса. Аргумент перицентра и долготу восходящего узла начальной орбиты полагаем равными нулю. Угловое положение КА на начальной и конечной орбитах не фиксируется, т.е. рассматривается перелет типа «орбита-орбита». Сам КА имеет следующие характеристики: начальная масса составляет 2500 кг, в качестве ЭРД используется два двигателя СПД-140 с тягой 0.29 Н и удельным импульсом 1770 с. В качестве даты старта КА примем, как и в предыдущем примере, 26 декабря 2015 года 1 час 32 минуты UTC.

Начнем рассмотрение с анализа полученного решения для возмущенной ОТ-задачи с функционалом (1.2.8) (быстродействие). Согласно общей схеме решения невозмущенных задач, для ее решения использовалась следующая цепочка: сначала определялось решение невозмущенной осредненной ОТ-задачи с функционалом (1.2.8), далее – решение соответствующей осредненной задачи уже с учетом действия возмущений. Наконец, последнее решение использовалось в качестве начального приближения для решения основной – неосредненной ОТ-задачи быстродействия с учетом действия возмущений. Также с целью сравнения результатов использовалось решение невозмущенной неосредненной задачи быстродействия. На данных этапах (в рамках рассматриваемой цепочки

вспомогательных решений) были получены соответствующие значения целевого функционала задачи. Так, решению осредненной задачи быстродействия без учета влияния возмущений отвечает минимальное время перелета равное 181.789345 суткам. Решение осредненной задачи с учетом действия возмущений определяет длительность перелета в 182.291648 суток. Наконец, решению возмущенной неосредненной задачи быстродействия соответствует минимальное значение времени перелета равное 182.436941 суткам. А решению соответствующей задачи без учета действия возмущений - 182.007317 суткам. Следовательно, разница в значении целевого функционала для соответствующих решений (возмущенного и невозмущенного) рассматриваемой задачи траекторной оптимизации составляет: для осредненных задач – 0.502303 суток, для неосредненных (основной случай) – 0.429624 суток. Им отвечают следующие значения ΔJ : 0.276310% и 0.236040% соответственно.

Далее, на рисунках 3.2.24 – 3.2.30 приведены типовые зависимости, описывающие оптимальное управление и соответствующее изменение фазового вектора (элементы орбиты) КА с ЭРДУ, полученные в результате решения рассматриваемой неосредненной возмущенной задачи межорбитального перелета для функционала (1.2.8). Как и ранее, на каждом рисунке с целью сравнения приведена зависимость, отвечающая решению задачи без учета влияния возмущений. Красной линией на рисунках 3.2.24 - 3.2.30 обозначены зависимости, описывающие решение невозмущенной задачи, синей – возмущенной. Данное цветовое обозначение будет также использоваться и в ходе всего дальнейшего изложения.

На рисунках 3.2.24 и 3.2.25 изображены оптимальные программы для углов рысканья и тангажа. Видно, что для рассматриваемой задачи быстродействия при учете влияния возмущений существенных изменений в структуре оптимального управления не происходит. Разница проявляется в основном только из-за присутствия выраженного фазового сдвига по оси времени. Также присутствуют относительно небольшие изменения в амплитуде «колебаний» углов, не превышающие 10 градусов. Зависимость изменения самой величины амплитуды «колебаний» в течении времени перелета остается неизменной в обоих случаях.

На рисунках 3.2.26 – 3.2.30 приводятся зависимости, описывающие эволюцию элементов орбиты КА с ЭРДУ при межорбитальном перелете. Влияние возмущений на оптимальную траекторию аппарата отчетливо проявляется в виде достаточно ощутимой разницы между текущими значениями оскулирующих элементов орбиты.

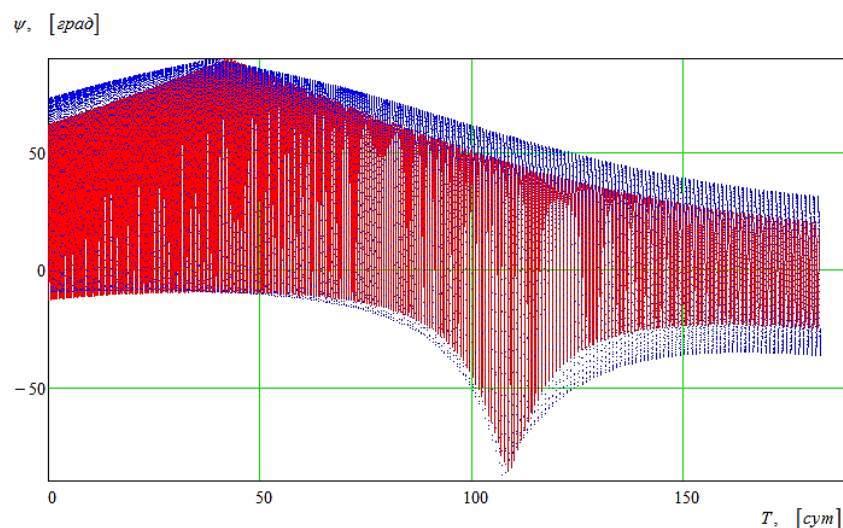


Рисунок 3.2.24 Зависимость изменения угла рысканья [град.] от времени перелета [сут.]

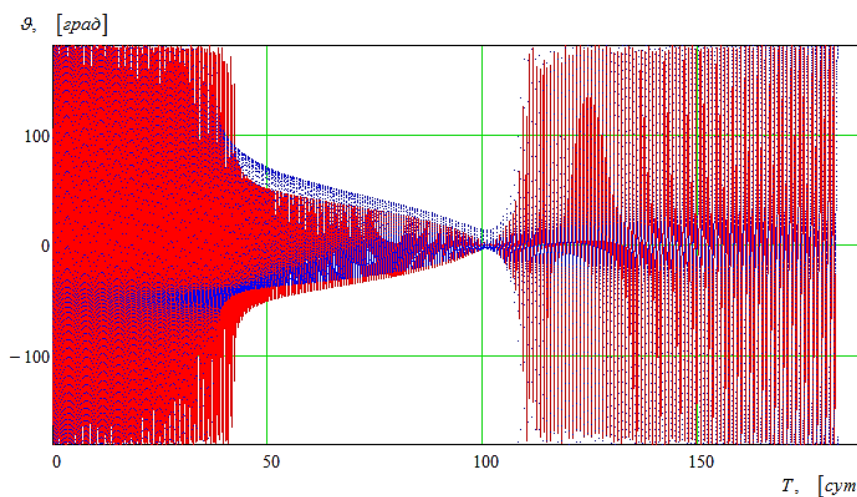


Рисунок 3.2.25 Зависимость изменения угла тангажа [град.] от времени перелета [сут.]

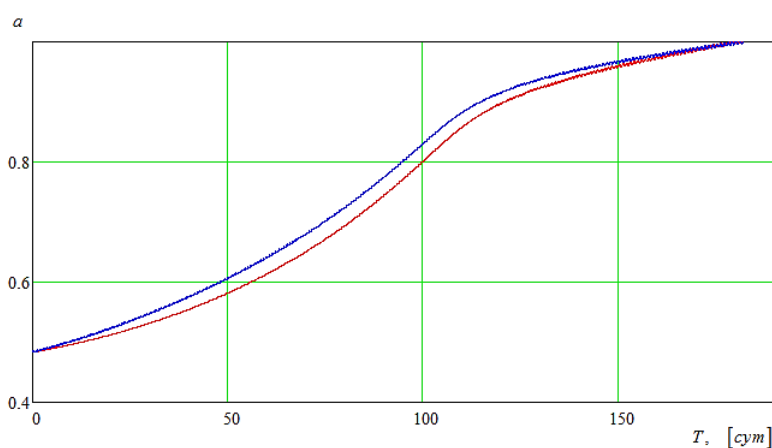


Рисунок 3.2.26 Эволюция большой полуоси орбиты КА [безр.] при межорбитальном перелете

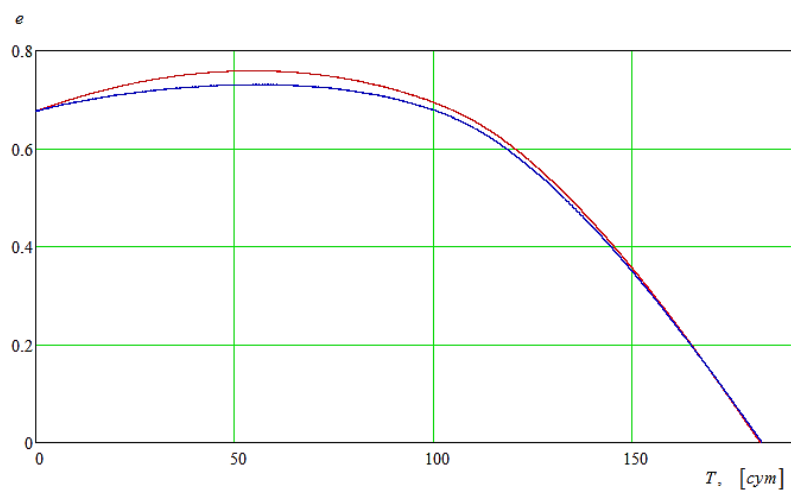


Рисунок 3.2.27 Зависимость изменения эксцентриситета орбиты КА от времени перелета [сут.]

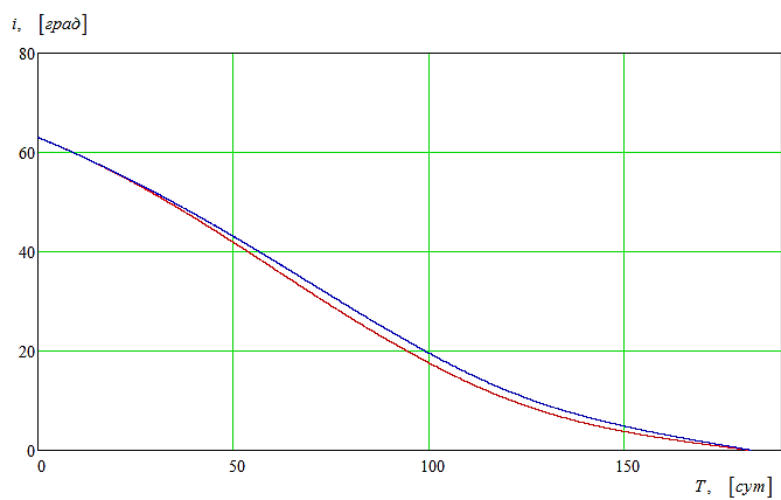


Рисунок 3.2.28 Зависимость изменения наклонения орбиты КА [град.] от времени перелета [сут.]

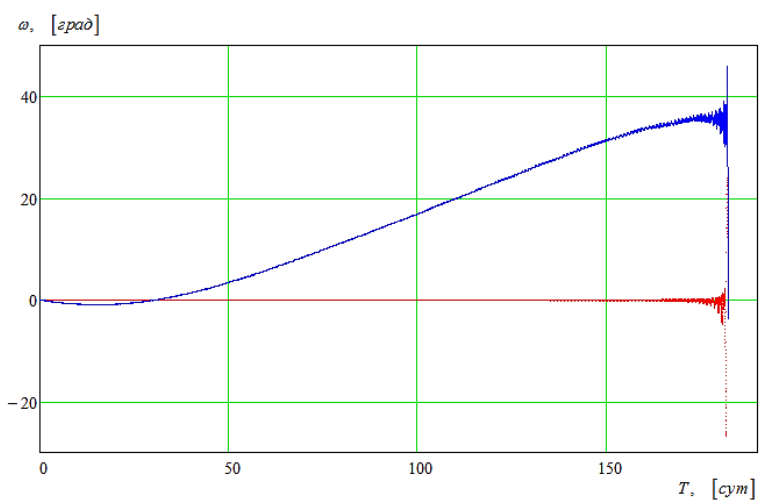


Рисунок 3.2.29 Зависимость изменения аргумента перицентра орбиты КА [град.] от времени перелета [сут.]

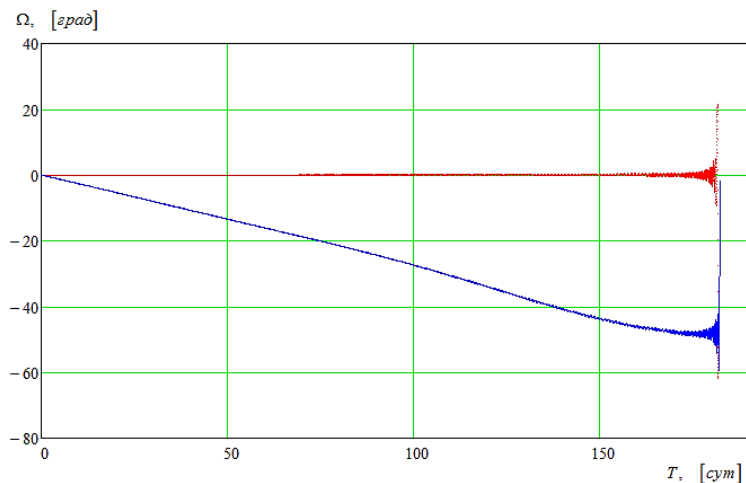


Рисунок 3.2.30 Зависимость изменения долготы восходящего узла орбиты КА [град.] от времени перелета [сут.]

В заключении рассмотрения полученного решения для возмущенной задачи быстродействия необходимо отметить, что, несмотря на присутствие видимых изменений в оптимальном управлении и фазовой траектории КА, разница в значении целевого функционала по сравнению с соответствующим значением для невозмущенной задачи мала.

Далее, рассмотрим в качестве примера возмущенную задачу траекторной оптимизации КА с ЭРДУ, соответствующую рассматриваемому перелету с ВЭО на ГСО, но для функционала (1.2.7). Параметры начальной орбиты и характеристики КА с ЭРДУ, а также дата старта и тип перелета остаются неизменными. Время перелета задано и составляет 250 суток. Общий подход к решению рассматриваемой возмущенной неосредненной ОТ-задачи для функционала (1.2.7) был подробно описан ранее в данном разделе. Приведем основные результаты полученных решений, соответствующие цепочке вспомогательных задач. Решение осредненной ОМ-задачи без учета действия возмущений определяет значение целевого функционала равным 0.855654. Решение соответствующей задачи с учетом возмущений – 0.854784. Решение неосредненной возмущенной ОМ-задачи определяет безразмерную конечную массу аппарата равной 0.853929. Значение массы для неосредненной ОМ-задачи без учета возмущений (не входящей в цепочку) составляет 0.856208. Наконец, решение неосредненной возмущенной ОТ-задачи для функционала (1.2.7) (основная) дает 0.821188. А решение соответствующей задачи без учета влияния возмущений – 0.824259. Разница в значении целевого функционала (с учетом и без учета действия возмущений) для осредненных ОМ-задач составляет 0.000871, для неосредненных ОМ-задач – 0.002278, и для основных ОТ-задач – 0.003071 (т.е. 7.678204 кг). Им отвечают следующие значения ΔJ_r : 0.101734%, 0.266080% и 0.372611% соответственно.

На рисунках 3.2.31 – 3.2.39 приведены типовые зависимости, описывающие оптимальное управление и соответствующее изменение фазового вектора КА с ЭРДУ,

полученные в результате решения рассматриваемой неосредненной возмущенной задачи межорбитального перелета для функционала (1.2.7). Оптимальные программы для углов рысканья и тангажа, а также функция переключения приведены на рисунках 3.2.31 – 3.2.34. Видно, что общая структура оптимального управления углом рысканья остается в целом неизменной на возмущенном и невозмущенном решениях. Здесь вновь проявляются фазовый сдвиг колебаний по оси времени и небольшие изменения в их амплитуде. Но для оптимальной программы угла тангажа, соответствующей решению возмущенной задачи, отчетливо видно, что структура управления достаточно сильно поменялась на начальном этапе перелета – приблизительно до 50 суток. После этого, программы угла тангажа для возмущенного и невозмущенного решения задачи вновь практически совпадают. Что же касается функции переключения, определяющей режим работы двигателя по траектории межорбитального перелета, то как и в случае угла рысканья, разница между полученными решениями в данном случае проявляется только в виде незначительного фазового сдвига и локальных изменений амплитуды ее «колебаний». Фазовый сдвиг отчетливо виден на рисунке 3.2.34, представляющем собой укрупненный фрагмент приведенной зависимости для функции переключения.

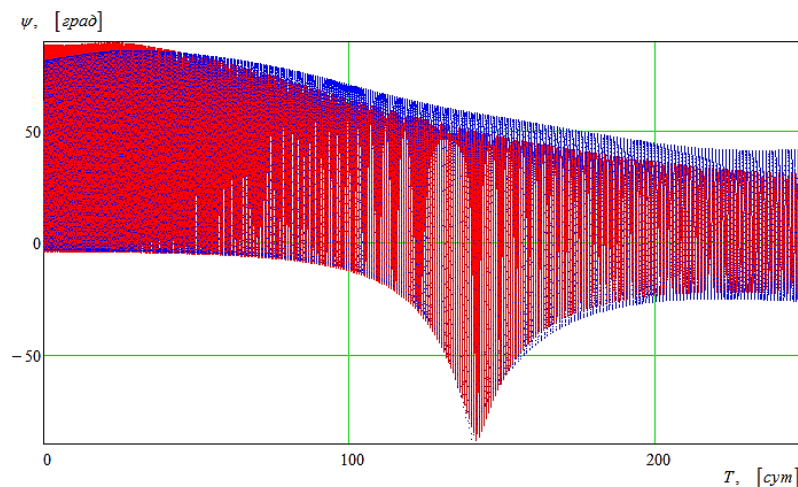


Рисунок 3.2.31 Зависимость изменения угла рысканья [град.] от времени перелета [сут.]

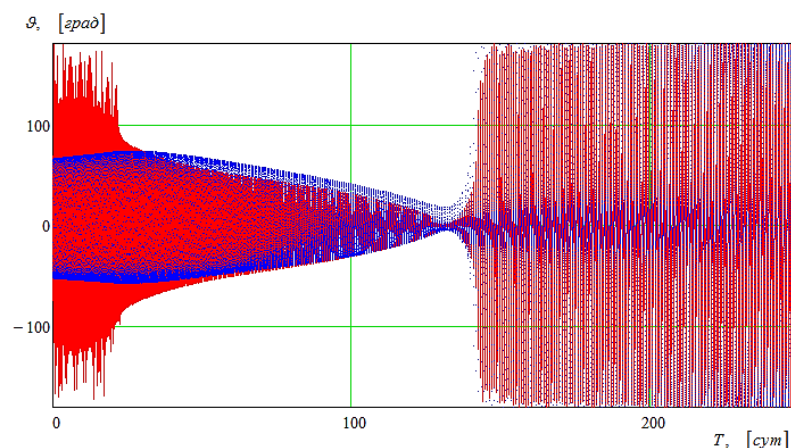


Рисунок 3.2.32 Зависимость изменения угла тангажа [град.] от времени перелета [сут.]

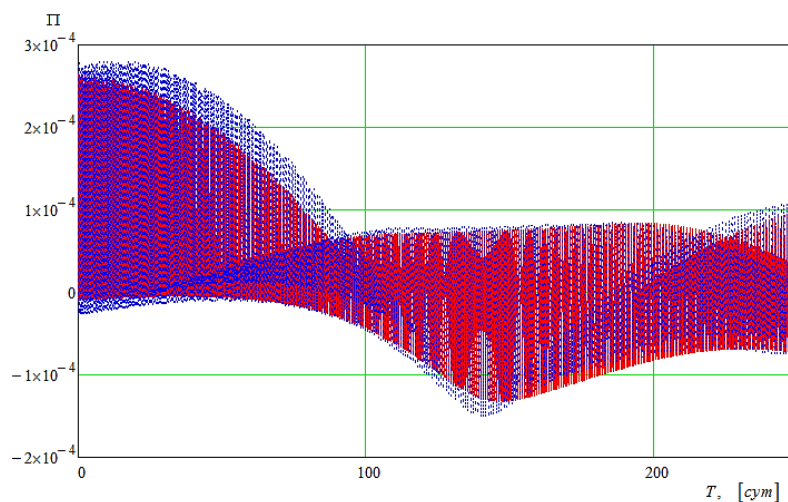


Рисунок 3.2.33 Функция переключения тяги ЭРДУ КА [безр.] от времени перелета [сут.]

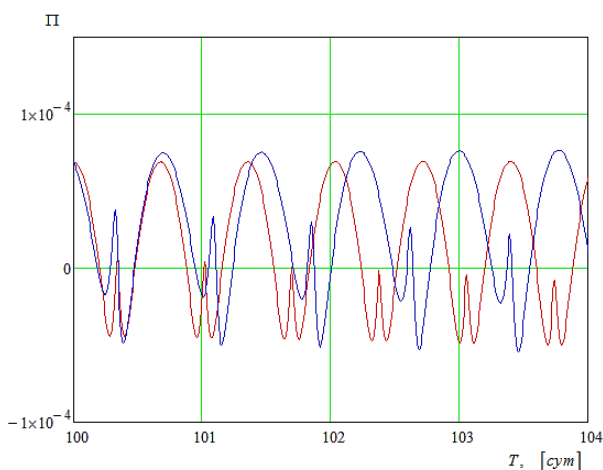


Рисунок 3.2.34 Функция переключения тяги ЭРДУ КА [безр.] от времени перелета [сут.] на интервале от 100 до 104 суток

На рисунках 3.2.35 – 3.2.39 показана эволюция элементов орбиты КА с ЭРДУ при межорбитальном перелете, отвечающая возмущенной и невозмущенной ОТ-задаче с функционалом (1.2.7). В целом, полученные зависимости качественно повторяют уже рассмотренные ранее.

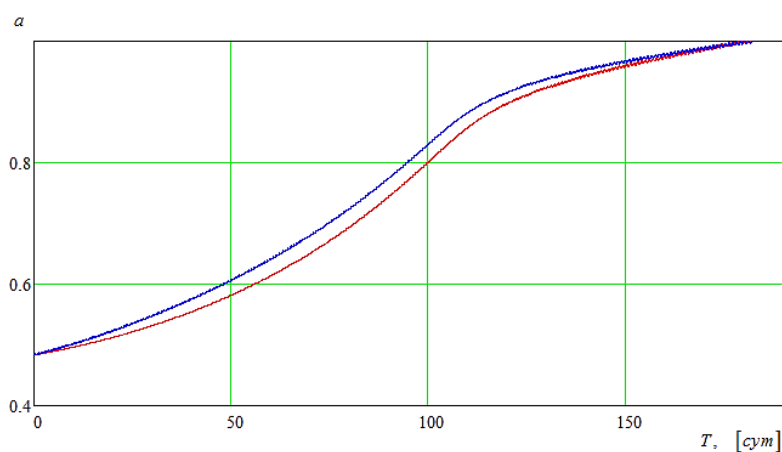


Рисунок 3.2.35 Зависимость изменения большой полуоси орбиты КА [безр.] от времени перелета [сут.]

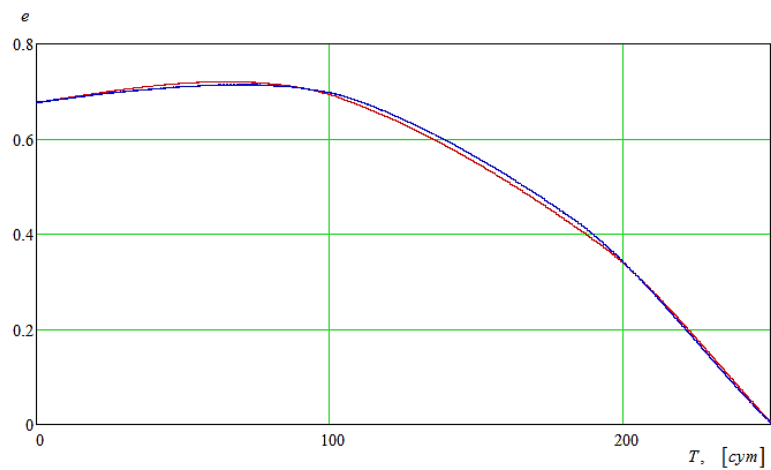


Рисунок 3.2.36 Зависимость изменения эксцентриситета орбиты КА от времени перелета [сут.]

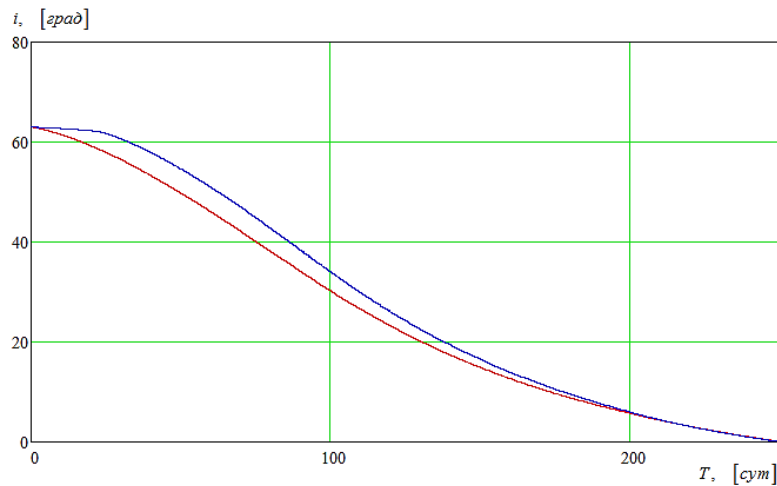


Рисунок 3.2.37 Зависимость изменения наклона орбиты КА [град.] от времени перелета [сут.]

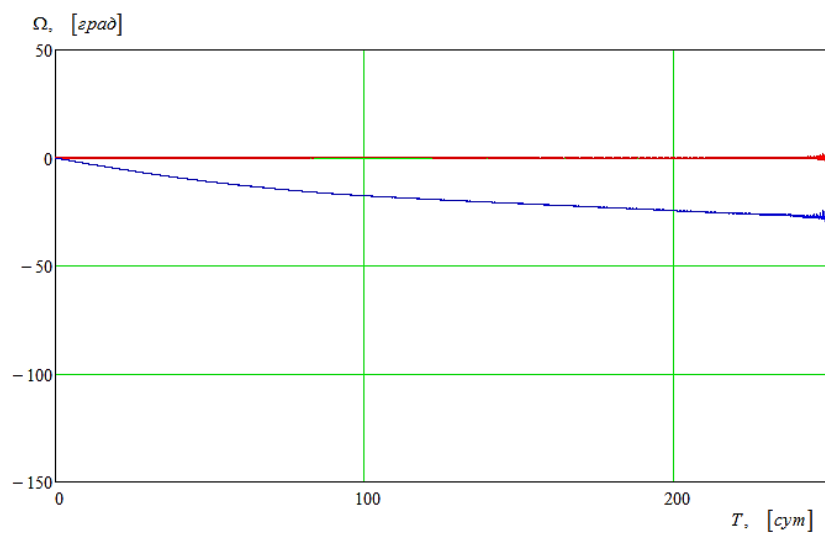


Рисунок 3.2.38 Зависимость изменения долготы восходящего узла орбиты КА [град.] от времени перелета [сут.]

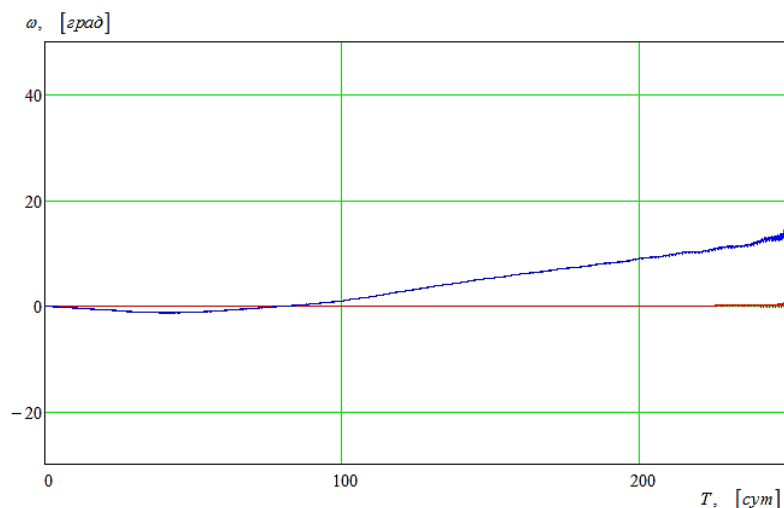


Рисунок 3.2.39 Зависимость изменения аргумента перицентра орбиты КА [град.] от времени перелета [сут.]

Стоит особо отметить, что и для данного примера решения задачи траекторной оптимизации, несмотря на довольно значительное время перелета, разница в величине целевого функционала для возмущенной и невозмущенной задачи снова оказалась мала.

В качестве последнего примера решения возмущенной задачи межорбитального перелета, рассмотрим геоцентрический участок траектории перелета к Луне КА SMART-1 [94]. Этот пример интересен тем, что межорбитальный перелет в данном случае осуществляется между двумя некомпланарными эллиптическими орбитами, при довольно значительном удалении КА от Земли. Итак, решалась следующая возмущенная ОТ-задача траекторной оптимизации с функционалом (1.2.7). Параметры начальной эллиптической орбиты: радиус перигея - 20000 км, радиус апогея - 58068 км, наклонение - 6.655 град., долгота восходящего узла - 244.21 град., аргумент перигея - 200.23 град. Параметры конечной эллиптической орбиты: радиус апогея - 219400 км, наклонение 5.49 град., долгота восходящего узла - 0.25 град., аргумент перигея - 79.66 град. Радиус перигея конечной орбиты заранее не задается. Начальная масса КА составляет 325.966 кг. Полное время перелета фиксировано и равно 284 суткам. Параметры ЭРДУ КА: тяга 45.82 мН, скорость истечения 14674 м/с [94]. Стоит отметить, что в данном случае рассматривается перелет типа «орбита-орбита», который не является «базовым» в контексте, используемом в рамках данной работы (см. главу 1).

Решение данной задачи осуществлялось согласно общей схемы, подробно описанной (неоднократно) ранее в настоящем разделе. Приведем основные полученные результаты. Не останавливаясь на промежуточных решениях вспомогательных задач, формирующих цепочку, перейдем сразу к результатам решения основной ОТ-задачи оптимизации с функционалом (1.2.7). Значение конечной безразмерной массы аппарата при решении возмущенной задачи составляет 0.929518. Соответствующее значение для решения без учета

влияния действия возмущений – 0.930885. Таким образом, разница в значении целевого функционала составляет 0.001367, что соответствует 0.445493 кг. Относительная разница величины целевого функционала ΔJ_f в данном случае 0.146810%. Также стоит отметить, что в работе [94] приведено значение конечной массы аппарата, полученной в результате решения рассматриваемой задачи. Она составляет 303.9 кг. А значение конечной массы КА, полученное в рамках данной диссертационной работы – 303.44 кг.

На рисунках 3.2.40 – 3.2.48 приведены зависимости, описывающие оптимальное управление и изменение фазового вектора КА с ЭРДУ (выраженное через кеплеровы элементы орбиты) при осуществлении перелета, полученные при решении возмущенной и невозмущенной ОТ-задачи с функционалом (1.2.7). Видно, что общая структура оптимального управления снова не претерпевает существенных изменений, за исключением только одного достаточно продолжительного по времени участка программы угла тангажа. Отчетливо проявляется фазовый сдвиг.

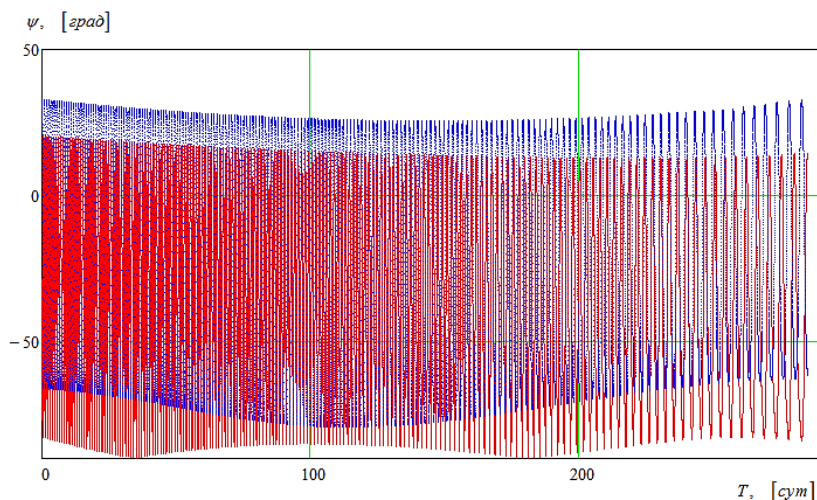


Рисунок 3.2.40 Зависимость изменения угла рысканья [град.] от времени перелета [сут.]

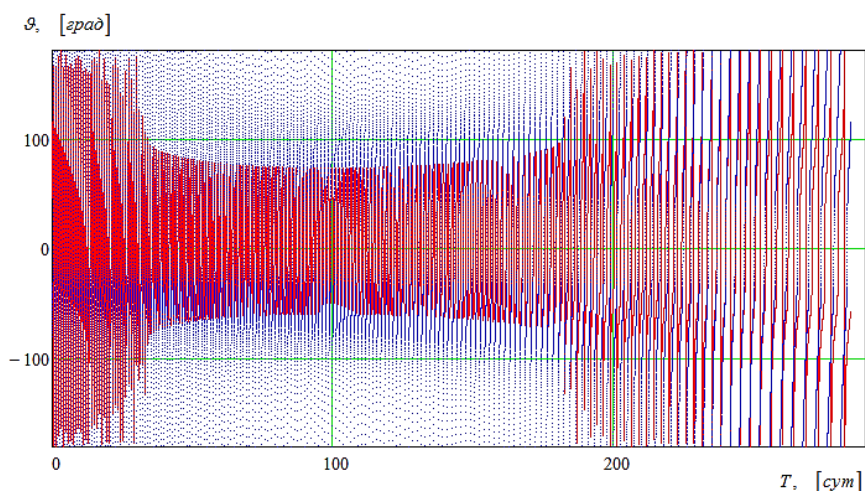


Рисунок 3.2.41 Зависимость изменения угла тангажа [град.] от времени перелета [сут.]

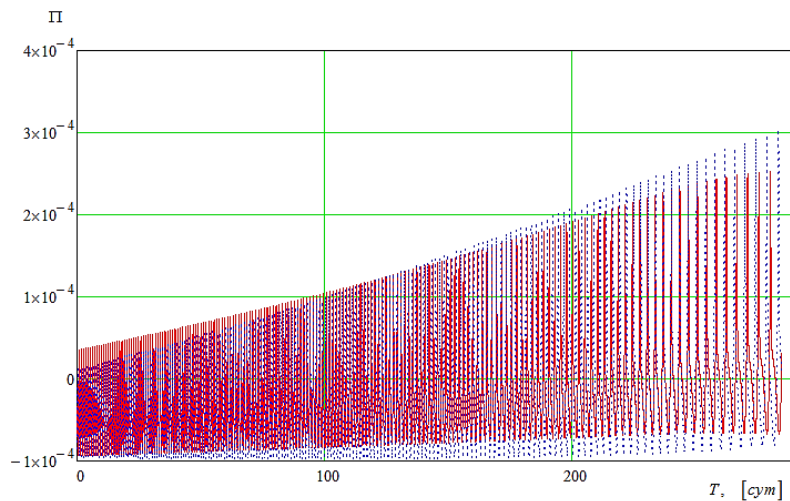


Рисунок 3.2.42 Функция переключения тяги ЭРДУ КА [безр.] от времени перелета [сут.]

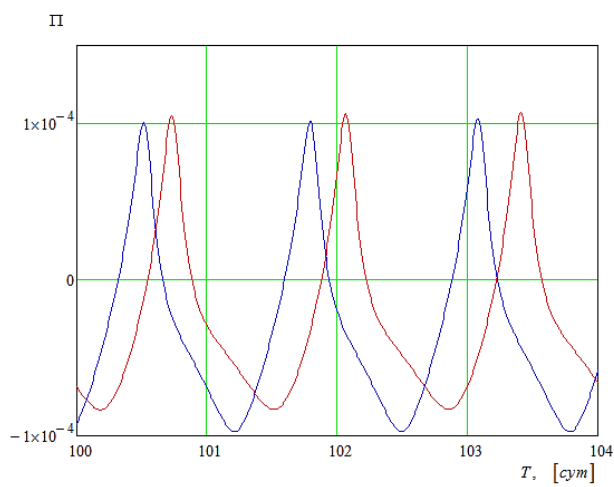


Рисунок 3.2.43 Функция переключения тяги ЭРДУ КА [безр.] от времени перелета [сут.] на интервале от 100 до 104 суток

На рисунках 3.2.44 – 3.2.48 показана эволюция элементов орбиты КА при осуществлении межорбитального перелета. Влияние притяжения Луны и Солнца отчетливо проявляется на примере построенных зависимостей для углов наклонения, долготы восходящего узла и аргумента перигея, изображенных на рисунках 3.2.45 – 3.2.48.

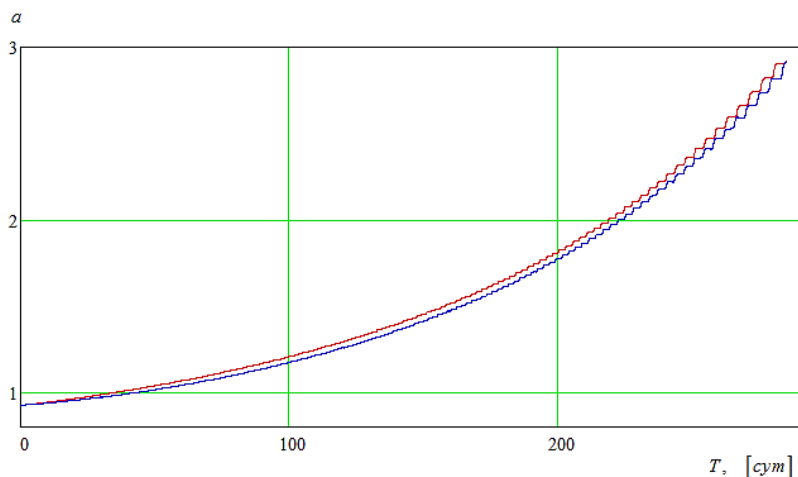


Рисунок 3.2.44 Зависимость изменения большой полуоси орбиты КА [безр.] от времени перелета [сут.]

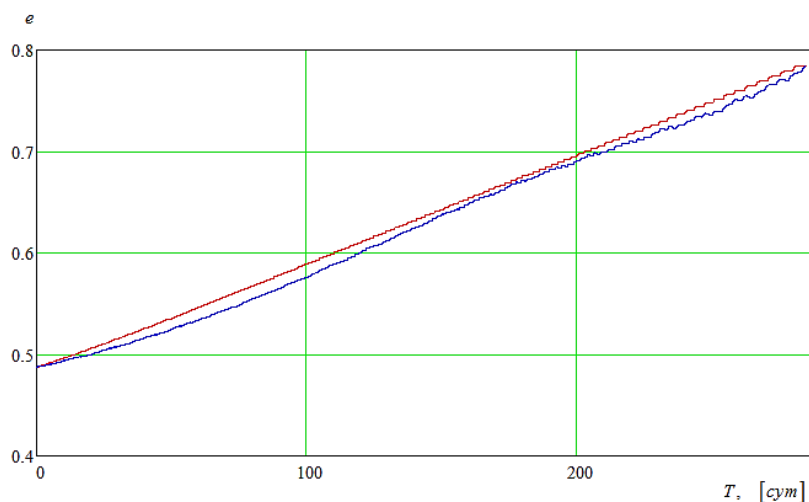


Рисунок 3.2.45 Зависимость изменения эксцентриситета орбиты КА от времени перелета [сут.]

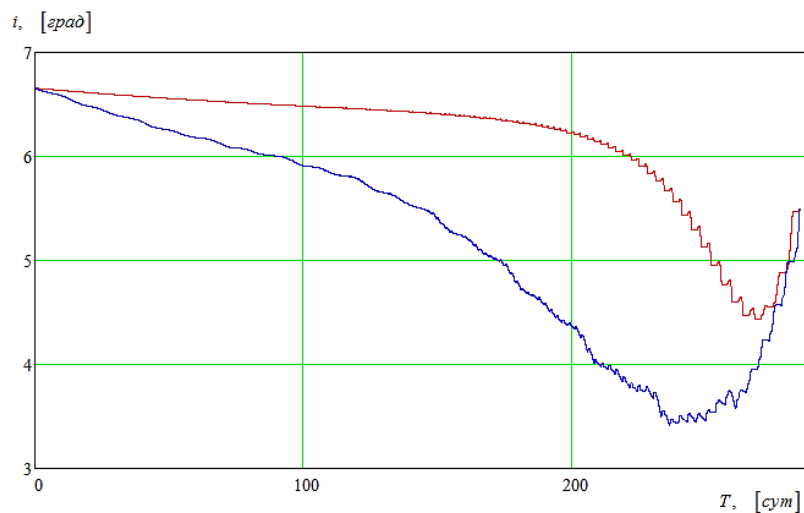


Рисунок 3.2.46 Зависимость изменения наклона орбиты КА [град.] от времени перелета [сут.]

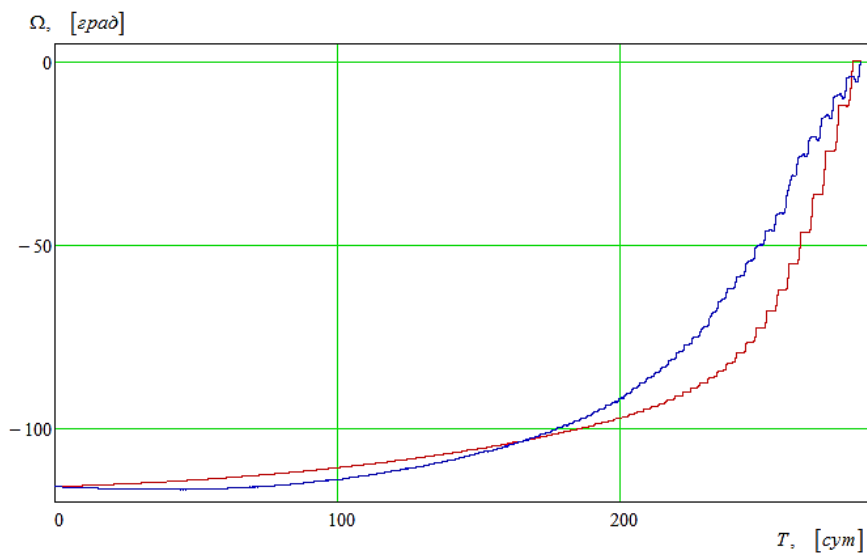


Рисунок 3.2.47 Зависимость изменения долготы восходящего узла орбиты КА [град.] от времени перелета [сут.]

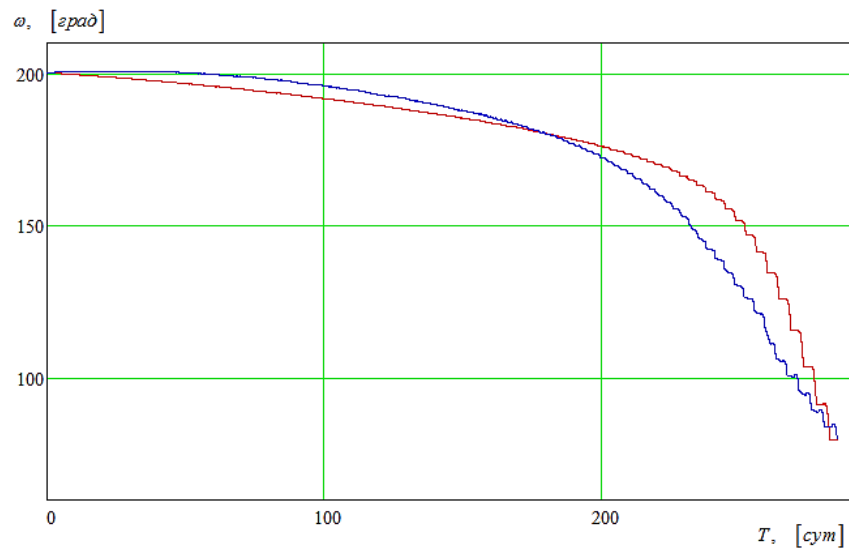


Рисунок 3.2.48 Зависимость изменения аргумента перицентра орбиты КА [град.] от времени перелета [сут.]

На рисунке 3.2.49 приведена геоцентрическая траектория КА, соответствующая невозмущенной задаче, а на рисунке 3.2.50 - возмущенной. Красным цветом показаны активные участки траектории перелета. Отчетливо видно, что при учете влияния возмущений существенной разницы в структуре расположения пассивных и активных участков вдоль траектории не наблюдается.

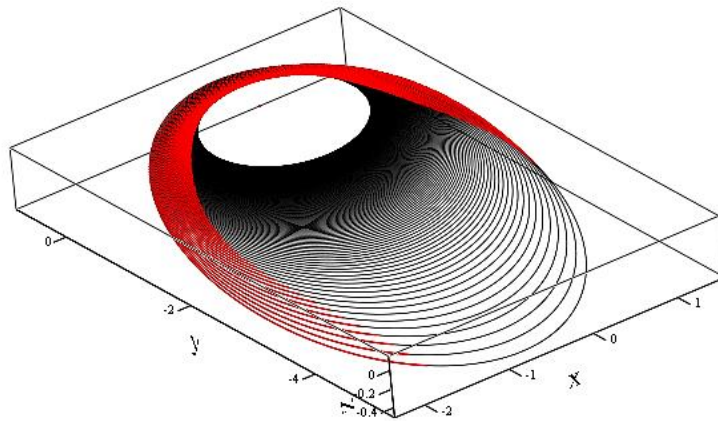


Рисунок 3.2.49 Геоцентрическая траектория перелета КА SMART-1 без учета влияния возмущений

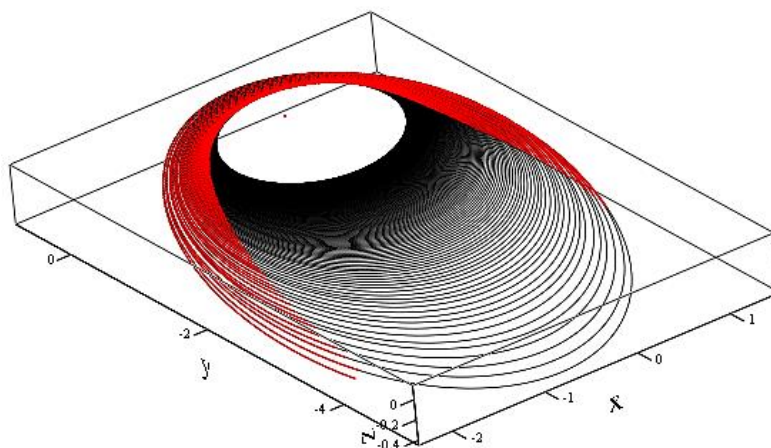


Рисунок 3.2.50 Геоцентрическая траектория перелета КА SMART-1 с учетом влияния возмущений

В заключении данного раздела, на основе полученных результатов для ряда рассмотренных конкретных примеров задач траекторной оптимизации, можно сделать следующий вывод. Учет влияния возмущений при решении задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ практически не сказывается на значении целевого функционала. Действительно, для всех полученных результатов данного раздела характерно то, что относительная разница значения целевого функционала ΔJ_r при решении соответствующих возмущенных и невозмущенных задач не превышает 0.5%. При этом структура оптимального управления вдоль траектории в некоторых случаях может довольно существенно различаться. Конечно же, озвученный вывод оказывается справедлив исключительно для рассмотренного в данном разделе конкретного типа межорбитального перелета – между начальной эллиптической обитой, линия апсид которой всегда принадлежит плоскости экватора, и ГСО. При этом кажется интересным то, что и для рассмотренного примера траектории КА SMART-1, отвечающего перелету между двумя некомпланарными эллиптическими орбитами, результат оказывается таким же. Причем для всех полученных результатов в разделе 3.2, значение целевого функционала на возмущенном решении всегда оказывается чуть хуже, чем на невозмущенном.

4 ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ВСТРЕЧИ В ПРОБЛЕМЕ УВОДА МУСОРА ИЗ РАЙОНА ГСО

4.1 Постановка задачи встречи

Задача поиска оптимального (с точки зрения заданного критерия качества) межорбитального маневрирования КА с ЭРДУ, необходимого для обеспечения его встречи (рандеву) с некоторым заранее выбранным каталогизированным объектом (параметры движения которого известны), представляющим собой нефункционирующий более КА или же его крупный фрагмент, последнее время представляется весьма актуальной. В частности, появляется все больше работ, посвященных решению задачи увода космического мусора (КМ) из окрестности ГСО на орбиту захоронения. Например, в работах [67, 81] рассматривается весьма перспективный с точки зрения практической реализации вариант буксировки выбранного объекта КМ под действием пучка квазинейтральной плазмы (реактивной струи), исходящего из специального дополнительного ЭРД, установленного на сервисном КА (т.н. ионной пушки). Тем не менее, первоначально должна рассматриваться именно задача обеспечения рандеву сервисного КА (буксировщика) и выбранного объекта. Данная задача представляется достаточно интересной с точки зрения ее рассмотрения как задачи оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ. Так как в данном случае необходимо обеспечивать привязку к некоторым реальным физическим моментам времени, характеризующим, например, начало движение КА или же момент времени его встречи с выбранным каталогизированным объектом. При этом также предполагается учет влияния действия возмущений. Последнее, естественно, снова предполагает использование предлагаемой в рамках настоящей диссертационной работы методике, описанной в разделе 2.2. Следовательно, приходим к некоторой новой и более сложной, по сравнению с рассмотренными ранее, постановке задачи оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ с учетом влияния возмущений. Основной подход к ее решению в целом повторяет общую схему, ранее описанную в разделах 3.1 и 3.2 третьей главы.

Переходим к формулировке задачи. Предполагается, что на некоторый опорный момент времени T_0 сервисный КА пассивно движется по орбите, расположенной в близкой окрестности ГСО. Параметры данной орбиты (орбиты ожидания) на опорный момент времени известны. Требуется осуществить оптимальный с точки зрения функционалов (1.2.7) и (1.2.8) межорбитальный перелет с базовой орбиты ожидания КА к заранее выбранному каталогизированному объекту КМ, параметры движения которого также известны на некоторый момент времени.

Перед тем, как непосредственно перейти к записи краевых условий для рассматриваемой задачи оптимального управления, необходимо сделать следующее замечание. Определяя в первой главе общую постановку рассматриваемой оптимизационной проблемы и записав в явном виде целевые функционалы (1.2.7) и (1.2.8), мы определяли параметры t_0 и t_f как некоторые абстрактные *моменты времени* (старта и встречи), что естественно согласуется с общей математической формализацией задачи оптимального управления с подвижными концами. Фактически же, «моментам времени» t_0 и t_f в данном случае должны соответствовать конкретные календарные даты и конкретные времена (UTC). В ходе дальнейшего изложения продолжим использовать понятие «момента времени» применительно к ряду ключевых параметров задачи, но при этом, будем подразумевать что ему соответствует некоторая календарная дата.

Итак, начальная базовая орбита, на которой КА с ЭРДУ находится в «режиме ожидания» и с которой происходит его старт в момент времени t_0 , определяется стандартным набором из шести орбитальных элементов

$$(p_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, \nu_0)^T, \quad (4.1.1)$$

значения которых предполагаются известными на некоторый *опорный* момент времени T_0 . Предполагается, что момент времени T_0 является задаваемым параметром; его выбор фактически определяет нижнюю границу для момента времени старта сервисного КА. Рассматриваемый параметр T_0 , фактически представляет собой юлианскую дату, т.е. определяется некоторой конкретной календарной датой и временем (UTC), для которой и предполагается известным набор элементов вида (4.1.1).

Момент времени старта t_0 для рассматриваемой задачи оптимального управления с функционалами (1.2.7) и (1.2.8) предполагается заданным, т.е. является одним из неизвестных параметров оптимизационной проблемы. Фактически, рассматриваемый параметр также представляет собой юлианскую дату, т.е. определяется некоторой конкретной календарной датой и временем (UTC), характеризующей начало движения КА с ЭРДУ по траектории межорбитального перелета. Очевидно, что на параметр t_0 накладывается следующее ограничение

$$T_0 - t_0 \leq 0, \quad (4.1.2)$$

определяющее невозможность выбора даты и времени старта КА с опорной орбиты раньше T_0 . Параметру, характеризующему момент времени встречи сервисного КА с КМ – t_f , также соответствует некоторая конкретная юлианская дата. В случае рассмотрения функционала (), данный параметр определяется согласно выражению

$$t_f = t_0 + T_f, \quad (4.1.3)$$

где T_f – заданное фиксированное время перелета. В случае же рассмотрения функционала (1.2.8) (задача быстрогодействия) t_f также является неизвестным параметром оптимизационной проблемы.

Элементы орбиты выбранного объекта-цели, т.е. космического мусора, определяют граничные условия рассматриваемой задачи на правом конце. В наиболее общем случае, все они являются функциями времени, т.к. на рассматриваемый объект действуют различные возмущения. Однако, предполагая относительно малые длительности перелетов КА с базовой орбиты до объекта-цели, действием возмущений на КМ можно пренебречь, и рассматривать его орбитальное движение как кеплеровское (забегая вперед, отметим, что данное упрощение модели движения КМ будет использоваться только при решении вспомогательной задачи, что будет показано в ходе дальнейшего изложения). Итак, пусть элементы орбиты КМ известны на какой-то момент времени (конкретная дата и конкретное время (UTC)), в общем случае не совпадающий с T_0 . В качестве такого момента времени удобно рассматривать момент пересечения с ГСО (опасно близкого сближения) для выбранного конкретного объекта-цели. Данную информацию можно найти в соответствующих каталогах. Будем обозначать момент пересечения (определяемый конкретной датой и конкретным временем (UTC)) T_{int} . Предполагается, что данный параметр удовлетворяет следующему условию:

$$T_{int} - T_0 \leq 0,$$

т.е. опорная дата и время всегда выбираются следующими позднее за известными датой и временем пересечения для выбранного объекта ГСО. Таким образом, считаем, что элементы орбиты выбранного объекта-цели (КМ)

$$(p_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f, \nu_f)^T, \quad (4.1.4)$$

определены на момент T_{int} .

Для определения положения КА с ЭРДУ на начальной базовой орбите (4.1.1) в момент времени старта t_0 (исходя из предположения, что его движение до момента старта невозмущенное), достаточно решить уравнение Кеплера. Это можно сделать, так как истинная и, соответственно, эксцентрическая аномалии КА известны на опорный момент времени T_0 . Аналогичным образом определяется и положение объекта-цели (КМ) в момент времени t_f . Следовательно, элементы орбиты КА на момент времени старта можно представить следующим образом:

$$(p_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, \nu_0(t_0))^T, \quad (4.1.5)$$

а на момент встречи

$$(p_f, e_f, i_f, \Omega_f, \omega_f, \nu_f(t_f))^T. \quad (4.1.6)$$

В случае же учета действия возмущений на всех этапах движения КА с ЭРДУ и объекта-цели КМ, соответствующие элементы орбиты на момент времени старта и встречи:

$$\left(p_0(t_0), e_0(t_0), i_0(t_0), \Omega_0(t_0), \omega_0(t_0), \nu_0(t_0) \right)^T, \quad (4.1.7)$$

и

$$\left(p_f(t_f), e_f(t_f), i_f(t_f), \Omega_f(t_f), \omega_f(t_f), \nu_f(t_f) \right)^T. \quad (4.1.8)$$

При этом очевидно, что для определения значений элементов орбиты на моменты времени t_0 и t_f в выражениях (4.1.7) и (4.1.8) необходимо численное интегрирование уравнений возмущенного движения для КА и КМ от соответствующих опорных дат T_0 и T_{int} .

Из выражений (4.1.5) – (4.1.8) следует, что как минимум часть краевых условий рассматриваемой задачи оптимального управления являются функциями от t_0 и t_f . Поэтому, следуя известной терминологии задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, рассматриваемые в настоящем разделе межорбитальные перелеты можно отнести к типу «движущаяся точка» - «движущаяся точка».

Перейдем теперь непосредственно к формированию конечного блока рассматриваемой оптимизационной проблемы и записи условий трансверсальности. Выражения (4.1.5) – (4.1.8), вместе с задаваемым значением начальной массы КА m_0 , определяют посредством выражений вида (1.2.5) фазовый вектор \mathbf{x} (1.1.13) системы дифференциальных уравнений управляемого возмущенного движения КА в момент времени старта t_0 и встречи t_f :

$$\begin{aligned} (p, e, i, \Omega, \omega, \nu) \Big|_{t_0} \cup m_0 &\Rightarrow \mathbf{x}(t_0) = (p, e_x e_y, i_x, i_y, l, m) \Big|_{t_0}, \\ (p, e, i, \Omega, \omega, \nu) \Big|_{t_f} &\Rightarrow \mathbf{x}(t_f) \setminus m = (p, e_x e_y, i_x, i_y, l) \Big|_{t_f}. \end{aligned}$$

Далее, следуя формализму принципа максимума, введем конечные функции Лагранжа задачи в виде (1.2.34) и (1.2.35), отвечающие функционалам (1.2.7) и (1.2.8) при рассмотрении модели нерегулируемого двигателя ограниченной тяги (ОТ-задача). В качестве основного, будем рассматривать сначала случай, при котором краевые условия соответствующих задач оптимального управления определяются посредством выражений (4.1.5) и (4.1.6). Итак, для функционала (1.2.7) конечная функция Лагранжа определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} l_m = & -\alpha_0 m(t_f) + \lambda_p^0 (p(t_0) - p_0) + \lambda_{e_x}^0 (e_x(t_0) - e_{x0}) + \lambda_{e_y}^0 (e_y(t_0) - e_{y0}) + \\ & + \lambda_{i_x}^0 (i_x(t_0) - i_{x0}) + \lambda_{i_y}^0 (i_y(t_0) - i_{y0}) + \lambda_l^0 (l(t_0) - l_0(t_0)) + \lambda_m^0 (m(t_0) - m_0) + \\ & + \lambda_p^f (p(t_f) - p_f) + \lambda_{e_x}^f (e_x(t_f) - e_{xf}) + \lambda_{e_y}^f (e_y(t_f) - e_{yf}) + \lambda_{i_x}^f (i_x(t_f) - i_{xf}) + \\ & + \lambda_{i_y}^f (i_y(t_f) - i_{yf}) + \lambda_l^f (\cos(l(t_f) - l_f(t_f)) - 1) + \alpha_1 (T_0 - t_0) + \lambda_t (t_f - t_0 - T_f), \end{aligned} \right\} \quad (4.1.9)$$

где α_i и λ_j – числовые множители Лагранжа (действительные числа), стоящие при ограничениях типа равенств и неравенств, определяющие краевые условия рассматриваемой

задачи. Для обеспечения встречи КА и КМ, на правом конце траектории перелета, очевидно, должно выполняться следующее условие

$$\cos(l(t_f) - l_f(t_f)) - 1 = 0. \quad (4.1.10)$$

Его выполнение обеспечивает одинаковое угловое положение КА и КМ на орбите космического мусора в момент встречи; при этом, полная угловая дальность перелета КА может на целое число витков отличаться от угловой дальности КМ, пройденной им за время своего орбитального движения к моменту времени t_f .

Для функционала (1.2.8) терминант рассматриваемой задачи оптимального управления определяется следующим выражением:

$$\left. \begin{aligned} l_T = & \alpha_0(t_f - t_0) + \lambda_p^0(p(t_0) - p_0) + \lambda_{e_x}^0(e_x(t_0) - e_{x0}) + \lambda_{e_y}^0(e_y(t_0) - e_{y0}) + \\ & + \lambda_{i_x}^0(i_x(t_0) - i_{x0}) + \lambda_{i_y}^0(i_y(t_0) - i_{y0}) + \lambda_l^0(l(t_0) - l_0(t_0)) + \lambda_m^0(m(t_0) - m_0) + \\ & + \lambda_p^f(p(t_f) - p_f) + \lambda_{e_x}^f(e_x(t_f) - e_{xf}) + \lambda_{e_y}^f(e_y(t_f) - e_{yf}) + \lambda_{i_x}^f(i_x(t_f) - i_{xf}) + \\ & + \lambda_{i_y}^f(i_y(t_f) - i_{yf}) + \lambda_l^f(\cos(l(t_f) - l_f(t_f)) - 1) + \alpha_1(T_0 - t_0), \end{aligned} \right\} \quad (4.1.11)$$

Согласно основной теореме теории принципа максимума (для регулярных систем), множители Лагранжа α_i и λ_j , входящие в выражения (4.1.10) и (4.1.11), должны удовлетворять ряду условий, ранее уже оговоренных в первой главе настоящей работы. Это условия принадлежности (раздел 1.2), неотрицательности (1.2.39), нетривиальности (1.2.40) и дополняющей нежесткости (1.2.41). В рамках данного раздела в первую очередь представляют интерес (с точки зрения получения необходимых условий оптимальности для рассматриваемой задачи) только три последних условия – неотрицательности, нетривиальности и дополняющей нежесткости. Приведем их (применительно к конкретной рассматриваемой задаче). Условия неотрицательности:

$$\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0. \quad (4.1.12)$$

Условие нетривиальности:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \sum_j |\lambda_j^0| + \sum_j |\lambda_j^f| + |\lambda_l| > 0. \quad (4.1.13)$$

Условие дополняющей нежесткости:

$$\alpha_1(T_0 - t_0) = 0. \quad (4.1.14)$$

Далее, запишем условия трансверсальности. В первой главе они даются практически в общем виде, с учетом только лишь конкретного вида целевого функционала (1.2.7) – (1.2.8). Поэтому кажется целесообразным привести их здесь в явном виде применительно к рассматриваемой задаче оптимального управления. Сначала определим их для функционала (1.2.7), отвечающему минимуму расходуемого на перелет топлива. В соответствии с (4.1.9) получим:

$$\left. \begin{aligned}
\psi_\beta(t_0) &= \frac{\partial l_m}{\partial \beta} \Big|_{t_0} = \lambda_\beta^0, \quad \psi_\beta(t_f) = -\frac{\partial l_m}{\partial \beta} \Big|_{t_f} = -\lambda_\beta^f, \quad \beta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y\}, \\
\psi_l(t_0) &= \frac{\partial l_m}{\partial l} \Big|_{t_0} = \lambda_l^0, \quad \psi_l(t_f) = -\frac{\partial l_m}{\partial l} \Big|_{t_f} = \lambda_l^f \sin(l(t_f) - l_f(t_f)), \\
\psi_m(t_0) &= \frac{\partial l_m}{\partial m} \Big|_{t_0} = \lambda_m^0, \quad \psi_m(t_f) = -\frac{\partial l_m}{\partial m} \Big|_{t_f} = \alpha_0, \\
\psi_t(t_0) &= \frac{\partial l_m}{\partial t} \Big|_{t_0} = -\lambda_t^0 \frac{dl_0}{dt} \Big|_{t_0} - \alpha_1 - \lambda_t, \quad \psi_t(t_f) = \frac{\partial l_m}{\partial t} \Big|_{t_f} = -\lambda_t^f \sin(l(t_f) - l(t_f)) \frac{dl_f}{dt} \Big|_{t_f} - \lambda_t.
\end{aligned} \right\} (4.1.15)$$

Далее, исключим (где возможно) в выражениях (4.1.15) множители Лагранжа. Для этого воспользуемся условием максимума:

$$\tilde{H}^{OT*} = \left[\underbrace{H_1^{OT*} + H_2^* + H_3^*}_{H^{OT*}} \right] + \psi_t = H^{OT*} + \psi_t \equiv 0 \quad \forall t \in \Delta = [t_0, t_f], \quad (4.1.16)$$

и условиями (4.1.12) и (4.1.14). Из условия дополняющей нежесткости (4.1.14) следует, что при выполнении строго неравенства (4.1.2), множитель $\alpha_1=0$. Тогда из условий трансверсальности (4.1.15) и условия максимума (4.1.16) следует (учитывая полученное в (4.1.15) выражение для $\psi_l(t_f)$):

$$\left. \begin{aligned}
H^{OT*} \Big|_{t_0} - \psi_l \frac{dl_0}{dt} \Big|_{t_0} - \lambda_t &= 0 \\
H^{OT*} \Big|_{t_f} - \psi_l \frac{dl_f}{dt} \Big|_{t_f} - \lambda_t &= 0.
\end{aligned} \right\} (4.1.17)$$

Исключая из полученных выражений (4.1.17) множитель λ_t , окончательно получим

$$H^{OT*} \Big|_{t_f} - \psi_l \frac{dl_f}{dt} \Big|_{t_f} - H^{OT*} \Big|_{t_0} + \psi_l \frac{dl_0}{dt} \Big|_{t_0} = 0, \quad t_f = t_0 + T_f. \quad (4.1.18)$$

Условие (4.1.18) есть условие оптимальности для выбора момента времени старта t_0 , которое должно выполняться в случае выполнения строго неравенства (4.1.2). В противном случае, если оптимальное решение находится на границе допустимого неравенства (4.1.2), т.е. оптимальное значение даты старта совпадает с опорным моментом времени T_0 , множитель Лагранжа α_1 теперь может быть положительным действительным числом, в соответствии с условиями (4.1.12) и (4.1.14). В этом случае, необходимо проверить следующее условие (следствие из условий (4.1.12) и (4.1.16)):

$$H^{OT*} \Big|_{t_0+T_f} - \psi_l \frac{dl_f}{dt} \Big|_{t_0+T_f} - H^{OT*} \Big|_{t_0} + \psi_l \frac{dl_0}{dt} \Big|_{t_0} = \alpha_1 > 0, \quad t_0 = T_0. \quad (4.1.19)$$

Таким образом, исходя из условий (4.1.18) и (4.1.19) получаем, вообще говоря, две разные задачи оптимизации, которые на практике *могут* быть решены по отдельности. Им,

естественно, соответствуют и различные краевые задачи. Так, в первом случае неизвестными параметрами краевой задачи являются:

$$\mathbf{z} = (\psi_\beta(t_0), \psi_l(t_0), \psi_m(t_0), t_0)^T, \quad \beta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y\}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^8, \quad (4.1.20)$$

в предположении, что оптимальное время старта t_0 находится внутри ограничения (4.1.2). Если же предполагается, что оптимальный момент старта принадлежит границе неравенства (4.1.2) (дата старта совпадает с опорной), то в этом случае вектор неизвестных параметров краевой задачи определен следующим образом:

$$\mathbf{z} = (\psi_\beta(t_0), \psi_l(t_0), \psi_m(t_0))^T, \quad \beta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y\}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^7, \quad (4.1.21)$$

и условие (4.1.19) необходимо использовать как проверочное. Поэтому, целесообразно начинать решение задачи оптимизации межорбитального перелета для функционала (1.2.7) положив $t_0=T_0$, и решать краевую задачу для (4.1.21). Если же на полученном решении условие (4.1.19) не выполняется, то нужно переходить к решению краевой задачи относительно (4.1.20). Ее решение и соответствует основному интересующему нас случаю (строгое неравенство (!)), т.к. предполагается, что в виду общей периодичности движения КА и КМ (на сравнительно коротких временных интервалах), оптимальное решение внутри допустимой области неравенства (4.1.2) всегда будет существовать. «Граничный» же случай решения следует рассматривать в качестве вспомогательного (как предельный). При этом естественно полагается, что в обоих случаях, решения могут быть неединственными (ввиду известной многоэкстремальности рассматриваемых задач оптимизации межорбитального перелета).

Далее, повторяя цепочку предыдущих рассуждений, определим необходимые условия оптимальности для задачи с функционалом (1.2.8). Используя выражения для терминанта (4.1.11), получим следующие условия трансверсальности:

$$\left. \begin{aligned} \psi_\beta(t_0) &= \frac{\partial l_T}{\partial \beta} \Big|_{t_0} = \lambda_\beta^0, \quad \psi_\beta(t_f) = -\frac{\partial l_T}{\partial \beta} \Big|_{t_f} = -\lambda_\beta^f, \quad \beta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y\}, \\ \psi_l(t_0) &= \frac{\partial l_T}{\partial l} \Big|_{t_0} = \lambda_l^0, \quad \psi_l(t_f) = -\frac{\partial l_T}{\partial l} \Big|_{t_f} = \lambda_l^f \sin(l(t_f) - l_f(t_f)), \\ \psi_m(t_0) &= \frac{\partial l_T}{\partial m} \Big|_{t_0} = \lambda_m^0, \quad \psi_m(t_f) = -\frac{\partial l_T}{\partial m} \Big|_{t_f} = 0, \\ \psi_t(t_0) &= \frac{\partial l_T}{\partial t} \Big|_{t_0} = -\alpha_0 - \lambda_l^0 \frac{dl_0}{dt} \Big|_{t_0} - \alpha_1, \quad \psi_t(t_f) = \frac{\partial l_T}{\partial t} \Big|_{t_f} = -\alpha_0 - \lambda_l^f \sin(l(t_f) - l_f(t_f)) \frac{dl_f}{dt} \Big|_{t_f}. \end{aligned} \right\} (4.1.22)$$

Применяя условие максимума (4.1.16) и условия (4.1.22) получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_0} - \psi_l \frac{dl_0}{dt} \Big|_{t_0} - \alpha_0 - \alpha_1 &= 0 \\ \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_f} - \psi_l \frac{dl_f}{dt} \Big|_{t_f} - \alpha_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.23)$$

Используя условия неотрицательности (4.1.12) и условие дополняющей нежесткости (4.1.14), вновь приходим к рассмотрению двух случаев. Основным для нас опять же является случай выполнения строгого неравенства (4.1.2) (т.к. при рассмотрении проблемы увода мусора на практике, в большинстве случаев, мы вряд ли будем так жестко ограничены временными рамками решения проблемы (ввиду общей периодичности движения КА и КМ), поэтому можно считать, что оптимальная дата начала маневра стыковки не лежит на границе неравенства (4.1.2)). Тогда множитель $\alpha_1=0$, и условия (4.1.23) переходят в следующие условия оптимальности, используемые для определения оптимальных значений времени старта и встречи:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_0} - \psi_l \frac{dl_0}{dt} \Big|_{t_0} - \alpha_0 &= 0 \\ \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_f} - \psi_l \frac{dl_f}{dt} \Big|_{t_f} - \alpha_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.24)$$

В данном случае ($\alpha_1=0$) вектор неизвестных параметров краевой задачи:

$$\mathbf{z} = (\psi_\beta(t_0), \psi_l(t_0), \psi_m(t_0), t_0, t_f)^T, \quad \beta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y\}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^9. \quad (4.1.25)$$

В случае нахождения оптимального момента старта на границе неравенства (4.1.2), $\alpha_1>0$, $t_0=T_0$, а условия (4.1.24) переходят в следующее условие оптимальности для нахождения момента встречи (отвечающей минимуму времени перелета):

$$\mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_f} - \psi_l \frac{dl_f}{dt} \Big|_{t_f} - \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_0} + \psi_l \frac{dl_0}{dt} \Big|_{t_0} = \alpha_1 > 0, \quad t_0 = T_0, \quad (4.1.26)$$

в котором множитель $\alpha_1>0$ может выбираться произвольно и играет роль нормирующего неизвестные множители Лагранжа задачи коэффициента. В данном случае, вектор неизвестных параметров краевой задачи:

$$\mathbf{z} = (\psi_\beta(t_0), \psi_l(t_0), \psi_m(t_0), t_f)^T, \quad \beta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y\}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^8. \quad (4.1.27)$$

Как и в случае рассмотрения задачи оптимизации для функционала (1.2.7), здесь для нас представляет основной интерес решение задачи, отвечающей (4.1.25). Задачу, отвечающую (4.1.27) следует рассматривать в качестве вспомогательной.

В случае учета влияния действия возмущений на всех этапах движения КА (т.е. включая этап его движения до момента старта) и КМ, полученные условия (4.1.18) и (4.1.19), а также (4.1.25) и (4.1.26) переопределяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_f} - \sum \psi_\gamma \frac{d\gamma_f(t)}{dt} \Big|_{t_f} - \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_0} + \sum \psi_\gamma \frac{d\gamma_0(t)}{dt} \Big|_{t_0} = 0, \\ & \gamma = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y, l\}, \quad t_f = t_0 + T_{t_f}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.28)$$

и

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_f} - \sum \psi_\gamma \frac{d\gamma_f(t)}{dt} \Big|_{t_f} - \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_0} + \sum \psi_\gamma \frac{d\gamma_0(t)}{dt} \Big|_{t_0} = \alpha_1 > 0, \\ & \gamma = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y, l\}, \quad t_0 = T_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.29)$$

а также

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_0} - \sum \psi_\gamma \frac{d\gamma_0(t)}{dt} \Big|_{t_0} - \alpha_0 = 0, \\ & \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_f} - \sum \psi_\gamma \frac{d\gamma_f(t)}{dt} \Big|_{t_f} - \alpha_0 = 0, \\ & \gamma = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y, l\}, \quad \alpha_0 \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.30)$$

и, соответственно,

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_f} - \sum \psi_\gamma \frac{d\gamma_f(t)}{dt} \Big|_{t_f} - \mathbf{H}^{OT*} \Big|_{t_0} + \sum \psi_\gamma \frac{d\gamma_0(t)}{dt} \Big|_{t_0} = \alpha_1 > 0, \\ & t_0 = T_0, \quad \gamma = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y, l\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.31)$$

Изменение вида (4.1.28) – (4.1.31) происходит вследствие того, что теперь краевые условия задачи оптимального управления определяются выражениями (4.1.7) и (4.1.8), т.е. являются функциями от моментов времени t_0 и t_f . При этом сама форма полученных условий оптимальности качественно не изменилась.

Также стоит отметить, что с методической точки зрения неплохо еще рассмотреть следующие задачи. Для функционала (1.2.7): будем осуществлять межорбитальный перелет для встречи с КМ за фиксированное время T_f из некоторой точки начальной базовой орбиты, определяемой произвольно задаваемым (фиксированным) моментом времени t_0 . Данная задача относится к типу задачи перелета между двумя неподвижными точками за фиксированное время. При этом условие (4.1.18) и, соответственно, (4.1.28), становится для нас неважным, так как мы снимаем ограничение на момент времени старта. Краевая задача в этом случае соответствует (4.1.21). Для функционала (1.2.8): будем осуществлять

межорбитальный перелет КА для встречи с КМ за минимальное время, стартуя из некоторой точки начальной базовой орбиты, определяемой произвольно задаваемым моментом времени t_0 . Эту задачу можно отнести к типу задачи межорбитального перелета между фиксированной точкой и движущейся. В данном случае условием оптимальности, обеспечивающим наилучший момент встречи t_f является условие вида (4.1.26), или, соответственно (4.1.31). Краевая задача в этом случае соответствует (4.1.27). В обоих случаях использовалось вполне естественное предположение о неизменности краевых условий для вышеописанных задач. Будем использовать их в качестве вспомогательных.

Общая методика решения вышеописанных задач траекторной оптимизации, о которой будет подробно рассказано в ходе дальнейшего изложения, подразумевает рассмотрение еще одного ряда вспомогательных задач, решения которых можно использовать в качестве начального приближения. Речь ведется о задачах оптимизации для функционалов (1.2.7) и (1.2.8), в которых рассматриваются перелеты типа «орбита – орбита». При этом нас вовсе не интересует угловое положение КА на его начальной и конечной орбите, следовательно, выбор соответствующих значений истинной долготы никак не связан с моментами времени t_0 и t_f . В краевые условия рассматриваемых задач не входит истинная долгота; при этом элементы начальной базовой орбиты, а также элементы орбиты КМ предполагаются неизменными. Момент старта t_0 в этом случае может выбираться произвольно, т.к. это никак не повлияет на решение задачи, а момент времени t_f формально будет определен или за счет задания полного времени перелета T_f , или в результате решения соответствующей задачи быстрогодействия. Все это приводит к значительному упрощению условий оптимальности. Так, например, для рассматриваемой задачи быстрогодействия условие (4.1.26) вырождаются в следующие:

$$H^{OT*} \Big|_t = \alpha_0 \geq 0, \quad \forall t \in \Delta = [t_0, t_f].$$

Порядок краевой задачи в данном случае будет таким же, как в (4.1.27). Вектор ее неизвестных параметров:

$$\mathbf{z} = (\psi_\beta(t_0), \psi_l(t_0), \psi_m(t_0), t_f)^T, \quad \beta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y\}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^8.$$

Для задачи с фиксированным временем перелета, вектор неизвестных параметров:

$$\mathbf{z} = (\psi_\beta(t_0), \psi_l(t_0), \psi_m(t_0))^T, \quad \beta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y\}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^7,$$

что эквивалентно (4.1.21). Последние полностью согласуются с соответствующими выражениями (1.3.2) – (1.3.4), полученными в первой главе, в которой подробно описывается постановка и формализация задачи траекторной оптимизации КА для базовых рассматриваемых в работе типов межорбитального перелета.

Для решения рассматриваемой задачи встречи в целом будем придерживаться той же общей методики, ранее изложенной в предыдущих разделах настоящей главы, основной идеей

которой является построение цепочки решения с использованием ряда вспомогательных (эквивалентных) задач.

Далее, определим в явном виде краевые задачи, к которым применение принципа максимума сводит рассматриваемые в настоящем разделе оптимизационные проблемы. Для задачи оптимального управления с функционалом (1.2.7), отвечающим минимизации затрат рабочего тела, решение краевой задачи сводится нахождению множества нулей вектор функции $\mathbf{f}_m(\mathbf{z})$, правые части которой определяются следующим образом:

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\beta(t_f) - \mathbf{x}_{\beta f} \\ \cos(l(t_f) - l_f(t_f)) - 1 \\ \psi_m(t_f) - 1 \\ \left. \mathbf{H}^{OT*} \right|_{t_f} - \psi_l \left. \frac{dl_f}{dt} \right|_{t_f} - \left. \mathbf{H}^{OT*} \right|_{t_0} + \psi_l \left. \frac{dl_0}{dt} \right|_{t_0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^8, \beta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y\}, \quad (4.1.32)$$

где вектор \mathbf{z} определяется согласно (4.1.20). В случае же учета действия возмущений на всех этапах движения КА и КМ, правые части в выражении (4.1.32) претерпевают следующие изменения: $\mathbf{x}_{\beta f} = \mathbf{x}_{\beta f}(t_f)$, а вместо последнего скалярного равенства используется выражение (4.1.28). В случае решения рассматриваемой задачи, соответствующем границе по дате старта $t_0 = T_0$, или решению вспомогательной задачи при фиксированном значении момента времени t_0 , последнее скалярное равенство в выражениях (4.1.32) не нужно, и вектор неизвестных параметров задачи определяется в соответствии с (4.1.20). Для «граничного» решения следует помнить о необходимости проверки условия (4.1.19) или (4.1.29).

Для функционала (1.2.8), отвечающего минимальному времени перелета, решение краевой задачи сводится к нахождению множества нулей вектор-функции $\mathbf{f}_T(\mathbf{z})$, правые части которой определяются следующим образом:

$$\mathbf{f}_T(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\beta(t_f) - \mathbf{x}_{\beta f} \\ \cos(l(t_f) - l_f(t_f)) - 1 \\ \psi_m(t_f) - 1 \\ \left. \mathbf{H}^{OT*} \right|_{t_0} - \psi_l \left. \frac{dl_0}{dt} \right|_{t_0} - 1 \\ \left. \mathbf{H}^{OT*} \right|_{t_f} - \psi_l \left. \frac{dl_f}{dt} \right|_{t_f} - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^9, \beta = \{p, e_x, e_y, i_x, i_y\}, \quad (4.1.33)$$

вектор неизвестных параметров задачи определяется согласно (4.1.25). В случае же учета действия возмущений на всех этапах движения КА и КМ, полагаем, что $\mathbf{x}_{\beta f} = \mathbf{x}_{\beta f}(t_f)$, а вместо

двух последних скалярных равенств используются соответствующие равенства из выражения (4.1.26). В случае решения рассматриваемой задачи, соответствующем границе по дате старта $t_0=T_0$, или решению вспомогательной задачи при фиксированном значении момента времени t_0 , вместо двух последних скалярных равенств в выражениях вида (4.1.25) используется равенство вида (4.1.26) (или (4.1.31)), и вектор неизвестных параметров задачи определяется в соответствии с (4.1.27).

Стоит отметить, что при решении вышеописанных краевых задач, оптимальные значения дат (моменты времени) старта КА с начальной базовой орбиты и его встречи с объектом-целью, представляются в виде соответствующих приращений безразмерного времени относительно задаваемой «физической» опорной даты T_0 , рассматриваемой в данном случае в качестве начала отсчета.

4.2 Методика решения задачи встречи

Для решения рассматриваемой задачи траекторной оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ предлагается использовать следующую (по своей сути общую как для обеих интересующих нас постановок задач, так и для настоящей диссертационной работы в целом) методику решения. Начнем рассмотрение с задачи оптимизации для функционала (1.2.7), отвечающего минимуму расходуемого рабочего тела. В данном случае продолжительность перелета от момента времени старта КА до момента его встречи с КМ задана. Вектор неизвестных параметров соответствующей краевой задачи определяется согласно (4.1.32) и (4.1.28). Решать рассматриваемую краевую задачу предлагается следующим образом.

- На первом этапе рассматривается задача межорбитального перелета КА с ЭРДУ между двумя фиксированными орбитами, первая из которых соответствует начальной базовой орбите КА, а вторая – орбите выбранного объекта КМ к которому осуществляется перелет; при этом предполагается, что элементы рассматриваемых орбит остаются неизменными в течении времени перелета T_f и их значения берутся на заданный опорный момент времени T_0 . Рассматриваемая задача решается для модели двигателя ограниченной мощности (ОМ-задача), при этом предполагается, что угловое положение КА на начальной и конечной орбите может быть выбрано произвольно, то есть выбор точек старта и встречи никак не зависит от моментов времени t_0 и t_f . Следовательно, выбор момента времени старта не оказывает никакого влияния на рассматриваемый перелет, и решению данной задачи оптимизации межорбитального перелета типа «орбита-орбита» за фиксированное время (как вспомогательной,

описанной в разделе 3.2) отвечает решение соответствующей осредненной ОМ-задачи без учета влияния возмущений.

- На втором этапе решения исходная задача рассматривается для модели двигателя ограниченной тяги, но в предположении отсутствия действующих на КА возмущений на всех этапах его движения. Начальная базовая орбита КА с ЭРДУ, по которой он движется, находясь в «режиме ожидания», фиксирована, ее элементы остаются неизменными в течение всего рассматриваемого времени перелета. Элементы орбиты объекта-цели также предполагаются неизменными. В обоих случаях, элементы орбит, а также угловые положения КА и КМ считаются заданными на некоторые опорные моменты времени – T_0 и T_{int} . Таким образом, в рассматриваемой задаче угловые положения КА и КМ в момент начала перелета с базовой орбиты непосредственно определяются выбором конкретного времени старта t_0 – для этого всего лишь необходимо решить соответствующее уравнение Кеплера. Не составляет никакого труда аналогичным образом определить и положение объекта-цели на момент встречи t_f . Таким образом, рассматриваемая на данном этапе задача оптимизации относится к перелету типа «движущаяся точка – движущаяся точка». Соответствующая ей краевая задача описывается выражениями (4.1.32). Для ее решения в качестве начального приближения используется решение осредненной задачи, рассмотренной на предыдущем этапе.
- На третьем этапе исходная задача рассматривается также для модели двигателя ограниченной тяги и с учетом влияния возмущений на КА с ЭРДУ только в течении времени перелета. В тоже время предполагается, что параметры начальной базовой орбиты и орбиты выбранного объекта-цели остаются неизменными в течении всего рассматриваемого промежутка времени, начиная от опорного момента времени T_0 до момента времени встречи t_f . Краевая задача в рассматриваемом случае описывается теми же выражениями, что и на предыдущем этапе. В качестве начального приближения для ее решения используется решение задачи, рассмотренной на предыдущем этапе
- На четвертом этапе исходная задача оптимизации для функционала вида (1.2.7) все также рассматривается для модели двигателя ограниченной тяги, но отличается от задачи предыдущего этапа тем, что теперь учитывается влияние действия возмущений на КА и КМ на всех этапах их движения начиная от опорных моментов времени T_0 и T_{int} , до момента встречи t_f . В качестве начального приближения к решению рассматриваемой на данном этапе задачи используется решение, полученное на предыдущем этапе.

Согласно приведенной схеме решения, наиболее трудоемким является четвертый этап. Так как для определения текущих параметров пассивного движения КА начиная от заданного опорного момента времени T_0 до момента старта t_0 , а также параметров движения объекта-цели начиная от опорного момента времени T_{int} до момента встречи t_f , требуется численное интегрирование пассивного движения КА и КМ в рамках принятой модели, описывающей их возмущенное движение. Это существенно усложняет как решение рассматриваемой задачи оптимизации, так и приводит к значительному росту количества потребных вычислений за одну процедуру решения. Последнюю проблему в принципе решает интерполяция заранее полученных с помощью численного интегрирования решений, описывающих пассивное движение КА до момента времени старта и движение объекта-цели начиная от некоторого опорного момента времени. Исходя из предположения, что рассматриваемые межорбитальные перелеты имеют относительно небольшие длительности, во время которых траектория КА с ЭРДУ активно изменяется, при анализе поставленной общей оптимизационной проблемы остается надеяться, что для качественного анализа задачи встречи достаточно остановиться на решении, полученном на третьем этапе. Поэтому, будем рассматривать решение третьего этапа как основное.

Решение рассматриваемой задачи встречи для функционала (1.2.8), отвечающее минимизации времени межорбитального перелета, соответствует решению краевой задачи вида (4.1.33) (и ее различным вариантам). Решение основной интересующей нас задачи (с полным учетом действия возмущений), как и в случае рассмотрения функционала (1.2.7), предполагается осуществлять по той же общей схеме, приведенной ранее, т.е. в четыре этапа. Общий подход и структура поиска решения остается в рассматриваемом случае неизменной, основная разница состоит лишь в другой формулировке используемых краевых задач. Краевая задача, соответствующая основной интересующей нас задаче оптимизации, определена выражениям (4.1.33) и (4.1.31). Далее, следуя структуре вышеизложенной схемы поиска решения, определим (кратко) этапы решения рассматриваемой задачи оптимального управления для функционала (1.2.8).

- На первом этапе здесь также рассматривается невозмущенная задача оптимизации межорбитального перелета типа «орбита-орбита» в постановке соответствующей задачи быстрого действия, решение которой для модели двигателя ограниченной тяги также осуществляется с использованием метода осреднения. Полученное решение используется в качестве начального приближения на следующем этапе.
- На втором этапе рассматривается исходная задача, также без учета влияния возмущений. Соответствующая ей краевая задача определена выражениями (4.1.33).

Полученное решение используется в качестве начального приближения на следующем этапе.

- На третьем этапе рассматривается исходная задача, но теперь уже с учетом действующих на КА возмущений в течении его активного полета. Формулировка краевой задачи на данном этапе остается без изменений. Полученное решение используется на следующем этапе.
- На четвертом этапе исходная задача рассматривается теперь уже с учетом действия возмущений на всех этапах движения КА и объекта-цели КМ, начиная от заданных опорных моментов времени и до момента встречи.

Для решения прочих краевых задач, варианты которых описаны в данном разделе, например, соответствующей «граничной» постановке, также стоит использовать приведенную выше общую схему.

4.3 Численные примеры и анализ полученных решений задачи оптимизации встречи

Далее, рассмотрим некоторые примеры решения задачи оптимизации встречи. Предположим, что КА имеет следующие характеристики:

- начальная масса КА составляет 2500 кг,
- ЭРДУ базируется на основе двух параллельно работающих двигателей СПД-140 общей тягой 0.56 Н (2×0.28 Н) и удельным импульсом в 1740 с.

и в некоторый момент времени равный 6 часам 17 минутам 24.853 секундам 8 марта 2017 года (UTC) находится на базовой орбите, элементы которой на рассматриваемый момент времени составляют:

- большая полуось $a=42164.013$ км,
- эксцентриситет $e=0.00421$,
- наклонение $i=0.67334$ град,
- долгота восходящего узла $\Omega=120.23551$ град,
- аргумент перицентра $\omega=23.453734$ град.

Эксцентрисическая аномалия КА в рассматриваемый момент времени составляет $E=74.48413$ град. Примем рассматриваемый момент времени, на который определены параметры орбиты КА, за опорную дату T_0 .

В качестве объекта-цели, выбираем нефункционирующий КА - КМ с идентификационным номером 2608, параметры орбиты которого определены на момент

времени условного пересечения (опасно близкого сближения) аппаратом ГСО. Так, 6 февраля 2017 года в 6 часов 54 минуты 18.753 секунды (UTC) элементы орбиты рассматриваемого КМ составляют:

- большая полуось $a=42130.864$ км,
- эксцентриситет $e=0.0006857$,
- наклонение $i=3.111160828$ град,
- долгота восходящего узла $\Omega=299.8803804$ град,
- аргумент перицентра $\omega=279.3799505$ град.

При этом предполагается, что в указанный момент времени КМ находится в восходящем узле своей орбиты. Примем рассматриваемую для КМ дату пересечения (опасно близкого сближения) за опорный момент времени T_{int} .

Следуя предложенной ранее методике получения решения, изложенной в предыдущем разделе, начнем решать задачу встречи для функционала (1.2.8), с решения вспомогательной задачи первого этапа – задачи быстрогодействия, рассматриваемой для перелета типа «орбита-орбита». Решая ее с использованием численного осреднения, получим следующий результат: минимальное время перелета КА между фиксированными орбитами (начальной базовой и орбитой КМ) составляет $T_{min}=15.89902$ суток, конечная масса КА – 2454.560 кг.

Далее, переходим к решению задачи встречи для функционала (1.2.8) соответствующей второму этапу: перелет типа «движущаяся точка – движущаяся точка» без учета действия возмущений. В качестве начального приближения будем использовать полученное решение задачи первого этапа. В результате решения данной задачи, определяются оптимальные значения моментов времени старта КА t_0 и встречи t_f , выраженные в виде приращений безразмерного времени относительно опорной даты T_0 . При этом, в качестве начального приближения для безразмерного значения t_0 можно использовать произвольное положительное число (т.к. предполагается, что в рассматриваемом случае оптимальное значение t_0 лежит внутри области, допустимой по ограничению (4.1.2), а опорной дате T_0 соответствует начало отсчета безразмерного времени, т.е. 0), например, лежащее в диапазоне от 0 до 1. Начальное приближение для t_f определяется так, чтобы $t_f-t_0=T_{min}$ (безр.), где T_{min} – значение минимального времени перелета, полученное на предыдущем этапе. Далее, приведем результаты полученного решения рассматриваемой задачи. Оптимальные значения моментов времени встречи и старта (безр.) в данном случае составляют $t_0=0.20174104$ и $t_f=99.9735724$. Им отвечают следующие (физические) моменты времени (UTC): 7 часов 3 минуты 31.402 секунды 8 марта 2017 года и, соответственно, 3 часа 6 минут 59.190 секунд 24 марта 2017 года. Таким образом, в данном случае минимальное время перелета, потребное для осуществления встречи составляет 15.83573 суток. Угловая дальность перелета на полученном

оптимальном решении составляет 100.57213 радиан, т.е. чуть более 16 полных витков. Конечная масса аппарата – 2454.282 кг. Значение угла истинной аномалии КА, соответствующее моменту старта с базовой орбиты составляет 161.86310 градус, а моменту встречи – 88.65089 градусов.

Далее, приведем результаты решения задачи встречи для функционала (1.2.8) с учетом действия возмущений. Для ее решения в качестве начального приближения использовалось решение предыдущего этапа. Оптимальные значения времени старта и встречи (безр.) в рассматриваемом случае: $t_0=0.09879084$ и $t_f=100.20037842$. Им отвечают следующие (физические) оптимальные моменты времени (UTC) старта и встречи: 6 часов 39 минуты 59.607 секунды 8 марта 2017 года и, соответственно, 4 часа 7 минут 23.449 секунды 24 марта 2017 года. Минимальное время перелета, потребное для осуществления встречи составляет 15.89401 суток. Значение угла истинной аномалии КА, соответствующее моменту старта с базовой орбиты составляет теперь 144.47405 градуса, а моменту встречи – 92.33455 градуса. Таким образом, при учете влияния возмущений, оптимальное значение момента времени старта сдвинулось влево и стало ближе к значению опорной даты T_0 , а момент времени встречи сместился вправо (почти на час), по сравнению с соответствующим результатом предыдущей задачи. Продолжительность перелета в рассматриваемом случае увеличилась на 83.92 минуты. Таким образом, учет влияния возмущений при решении задачи встречи привел в данном случае к ухудшению значения целевого функционала. Соответствующее значение относительной разницы целевого функционала ΔJ_f в рассматриваемом случае составляет 0.36803%.

На рисунках 4.3.1 – 4.3.7 приведены зависимости, характеризующие изменение элементов орбиты КА на оптимальном решении в течении времени перелета, а также соответствующие оптимальные программы управления для углов тангажа и рысканья. Красная линия соответствует решению задачи встречи без учета действия возмущений, синяя – с учетом.

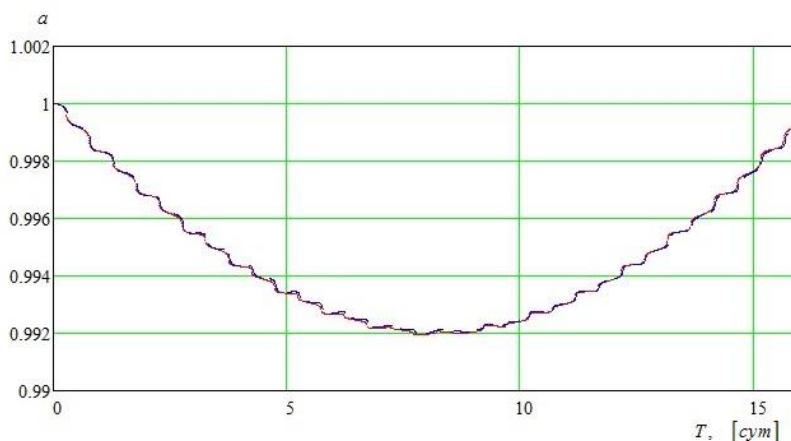


Рисунок 4.3.1 Зависимость изменения большой полуоси [безр.] орбиты КА от времени перелета [сут.]

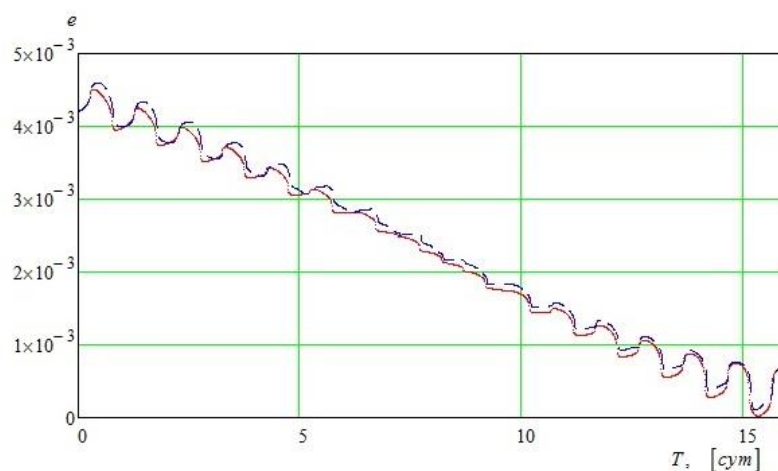


Рисунок 4.3.2 Зависимость изменения эксцентриситета орбиты КА от времени перелета [сут.]

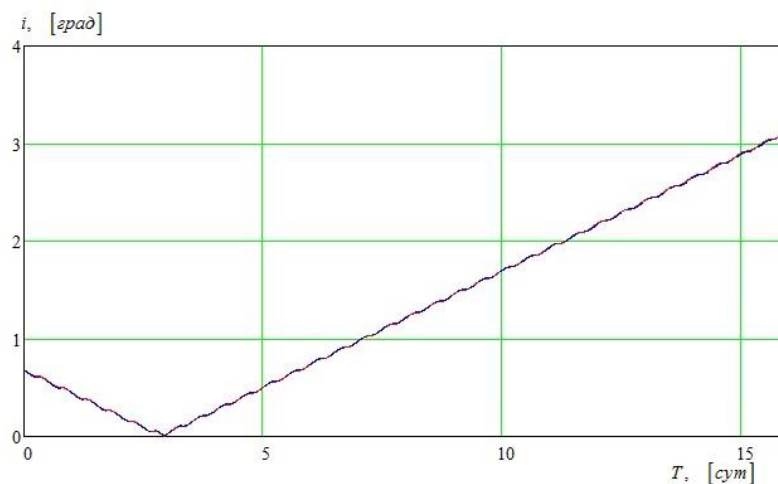


Рисунок 4.3.3 Зависимость изменения угла наклонения [град.] орбиты КА от времени перелета [сут.]

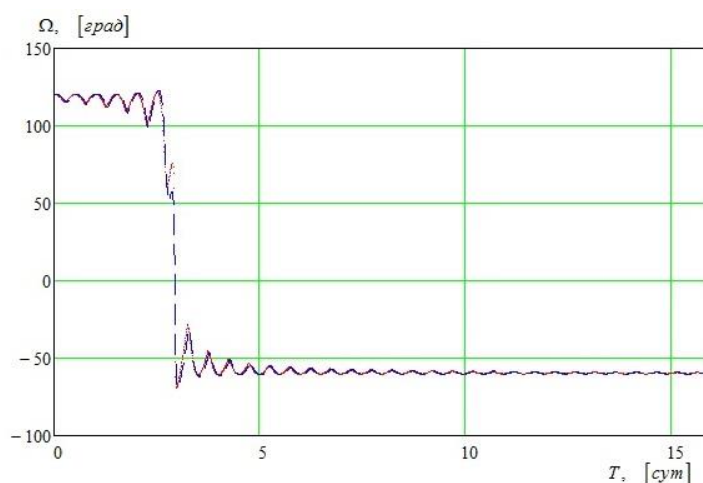


Рисунок 4.3.4 Зависимость изменения долготы восходящего узла [град.] орбиты КА от времени перелета [сут.]

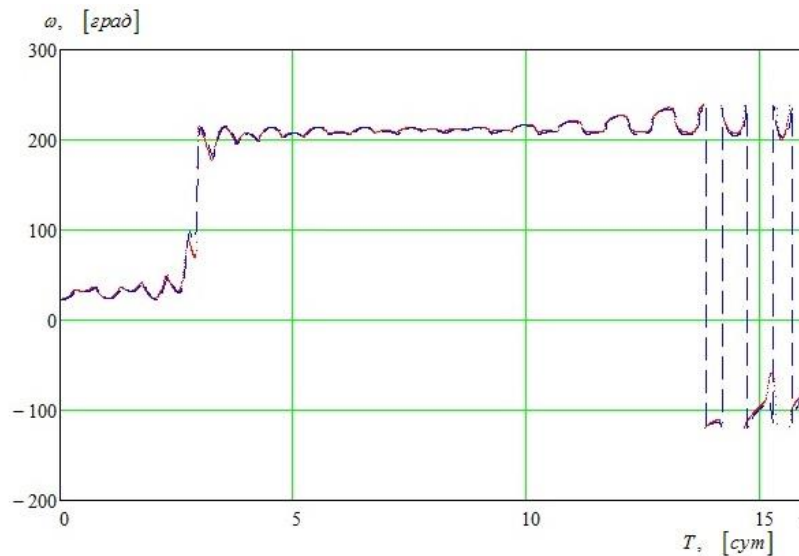


Рисунок 4.3.5 Зависимость изменения аргумента перицентра [град.] орбиты КА от времени перелета [сут.]

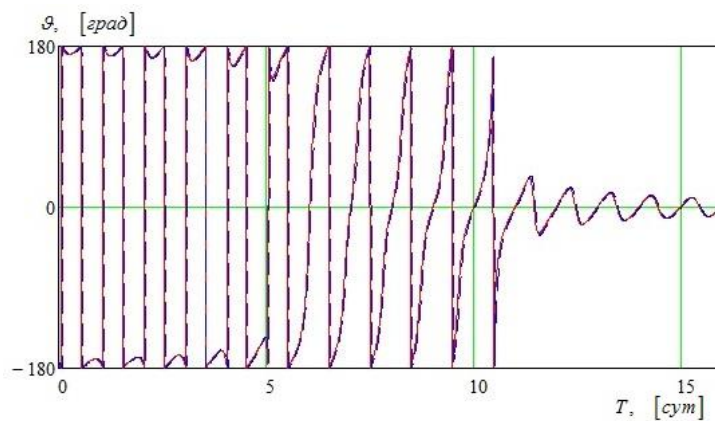


Рисунок 4.3.6 Зависимость изменения угла тангажа [град.] от времени перелета [сут.]

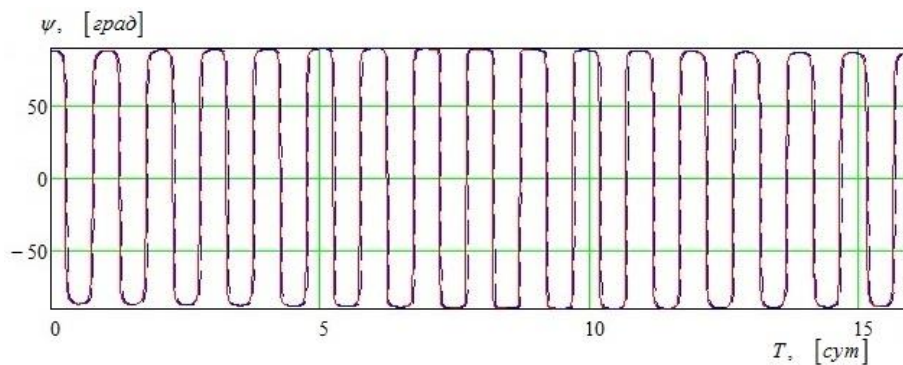


Рисунок 4.3.7 Зависимость изменения угла рысканья [град.] от времени перелета [сут.]

Из приведенных рисунков прекрасно видно, что для рассмотренного примера решения задачи встречи для функционала (1.2.8) отличия между возмущенной и невозмущенной траекториями движения КА с ЭРДУ, а также соответствующими им управлениями, минимальны.

Далее, приведем результаты полученного решения задачи встречи для функционала (1.2.7). В данном случае предполагается, что полное время перелета фиксировано и составляет 20 суток. Согласно общей предлагаемой схемы последовательного решения рассматриваемой

задачи, в качестве начального приближения для решения ОТ-задачи с функционалом (1.2.7), соответствующей межорбитальному перелету типа «движущаяся точка - движущаяся точка», используется решение вспомогательной осредненной ОМ-задачи, соответствующей перелету типа «орбита-орбита». Решение последней обеспечивает значение целевого функционала задачи (безразмерной конечной массы КА) равное 0.988207, что соответствует 2470.5175 кг. Решение неосредненной задачи типа «движущаяся точка - движущаяся точка» без учета влияния возмущений определяет значение безразмерной конечной массы КА равное 0.985895, что соответствует 2464.739639 кг. Полученное в результате решения последней оптимальное значение даты старта t_0 в виде безразмерного приращения к опорному моменту времени T_0 составляет 2.756408, что соответствует физическому моменту времени (UTC) 16 часов 47 минут 24.48451 секунды 8 марта 2017 года. Полная угловая дальность перелета составила 131.451509 радиан, что соответствует ≈ 20.92 виткам. Оптимальное значение угла истинной аномалии КА, соответствующее моменту старта с базовой орбиты составляет 307.3697 градусов, а моменту встречи с КМ – 84.09528 градуса. Наконец, решение неосредненной ОТ-задачи с функционалом (1.2.7) для межорбитального перелета типа «движущаяся точка - движущаяся точка» с учетом влияния возмущений дает значение конечной безразмерной массы КА равное 0.983238, что соответствует 2458.095529 кг. Полученное в результате решения оптимальное значение даты старта t_0 (в виде безразмерного приращения) составляет 2.671207, что соответствует физическому моменту времени (UTC) 16 часов 27 минут 56.6723 секунд 8 марта 2017 года. Оптимальное значение угла истинной аномалии КА, соответствующее моменту старта с базовой орбиты составляет 302.12698 градуса, а моменту встречи с КМ – 78.15583 градусов. Соответствующее значение относительной разницы целевого функционала ΔJ_r в рассматриваемом случае составляет 0.269566%. При этом возмущенное решение вновь оказывается незначительно хуже.

На рисунках 4.3.8 – 4.3.11 приведены зависимости, описывающие полученные в результате решения рассматриваемой задачи оптимальные программы для углов рысканья и тангажа, а также функции переключения. А на рисунках 4.3.12 – 4.3.16 - соответствующие зависимости, описывающие эволюцию элементов орбиты КА с ЭРДУ при межорбитальном перелете. Как и ранее красная линия соответствует невозмущенному решению, синяя – возмущенному.

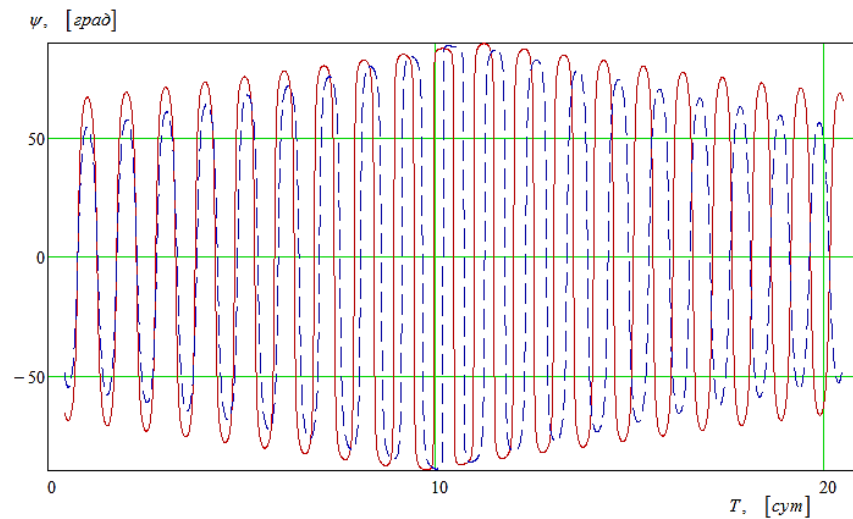


Рисунок 4.3.8 Зависимость изменения угла рысканья [град.] от времени перелета [сут.]

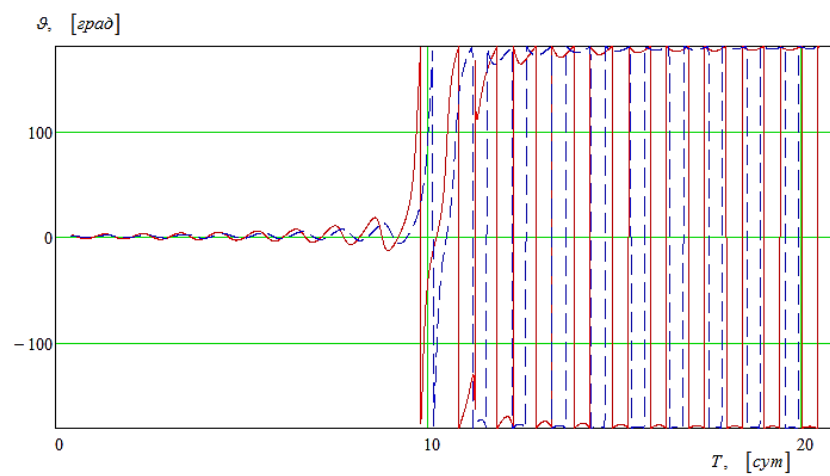


Рисунок 4.3.9 Зависимость изменения угла тангажа [град.] от времени перелета [сут.]

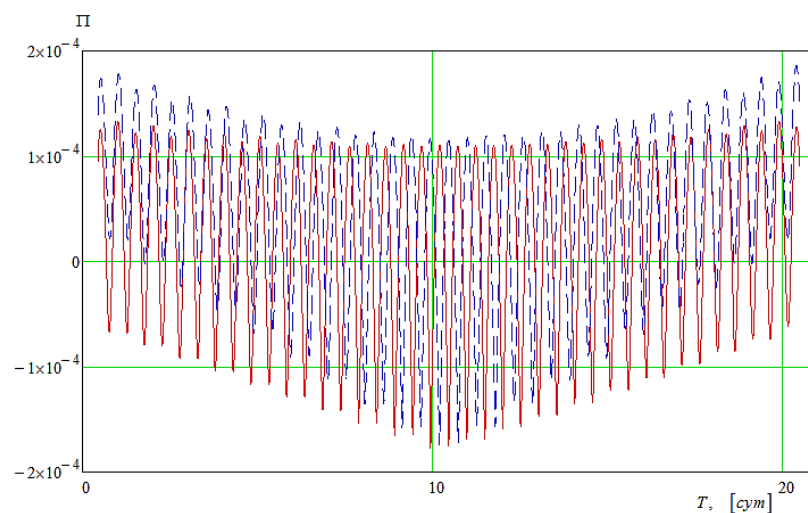


Рисунок 4.3.10 Зависимость функции переключения [безр.] от времени перелета [сут.].

Интересно отметить, что пассивные участки траектории перелета КА с ЭРДУ (в обоих случаях) расположены симметрично вдоль прямой, ортогональной линии узлов, образованной пересечением плоскостей начальной орбиты КА и орбиты КМ в момент их встречи.

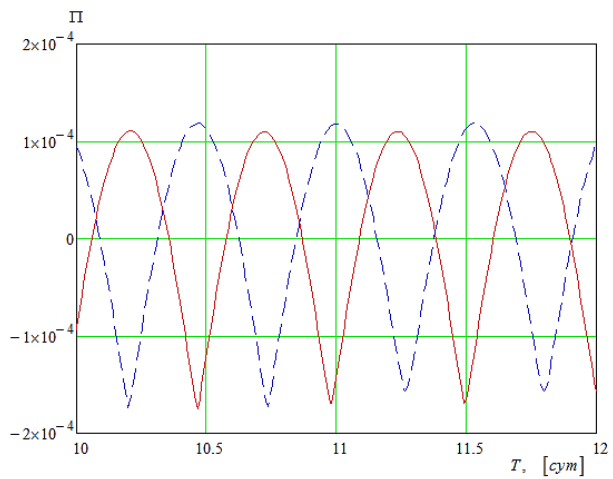


Рисунок 4.3.11 Зависимость функции переключения [безр.] от времени перелета [сут.] на интервале от 10 до 12 суток

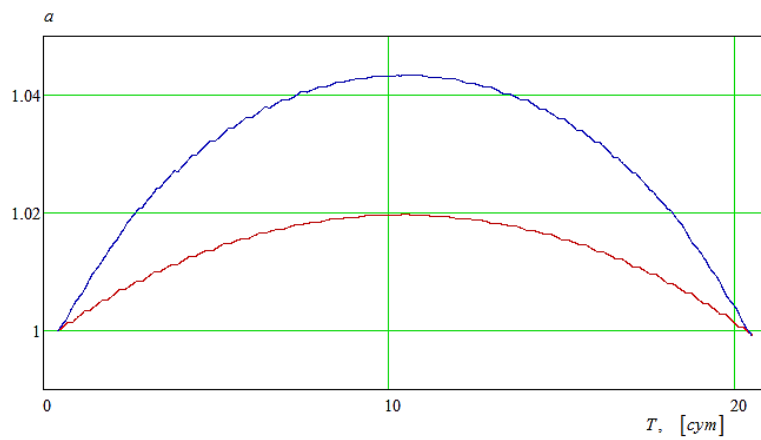


Рисунок 4.3.12 Зависимость изменения большой полуоси орбиты КА [безр.] от времени перелета [сут.]

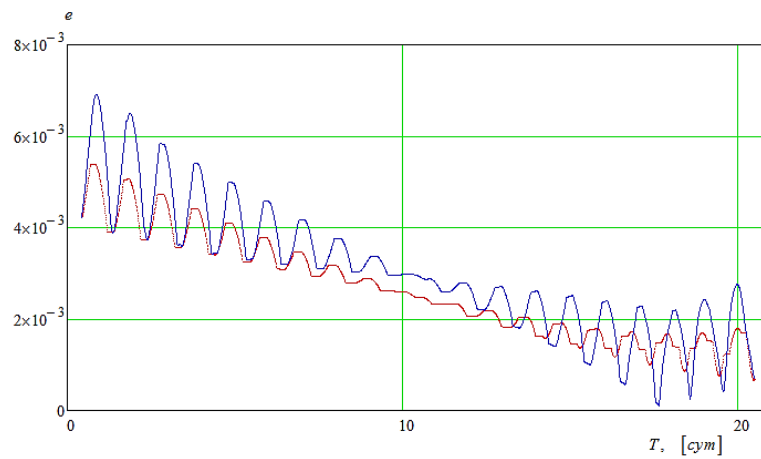


Рисунок 4.3.13 Зависимость изменения эксцентриситета орбиты КА от времени перелета [сут.]

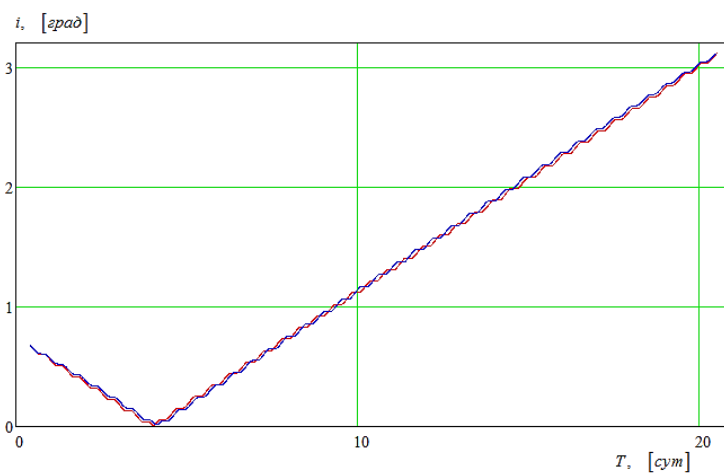


Рисунок 4.3.14 Зависимость изменения наклона орбиты КА [град.] от времени перелета [сут.]

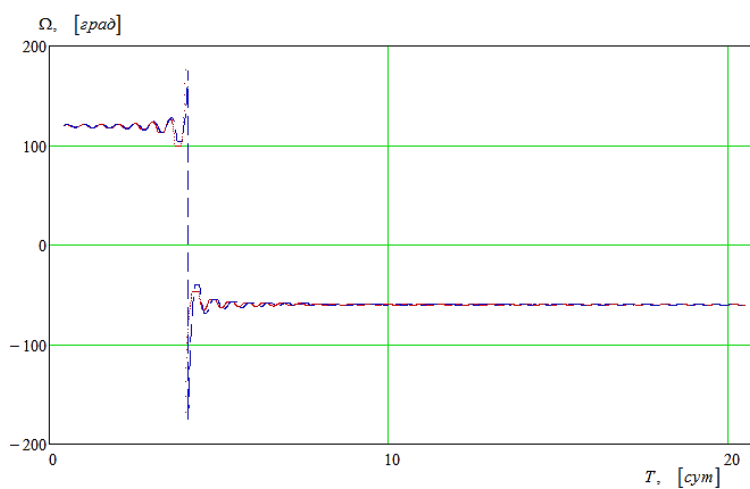


Рисунок 4.3.15 Зависимость изменения долготы восходящего узла орбиты КА [град.] от времени перелета [сут.]

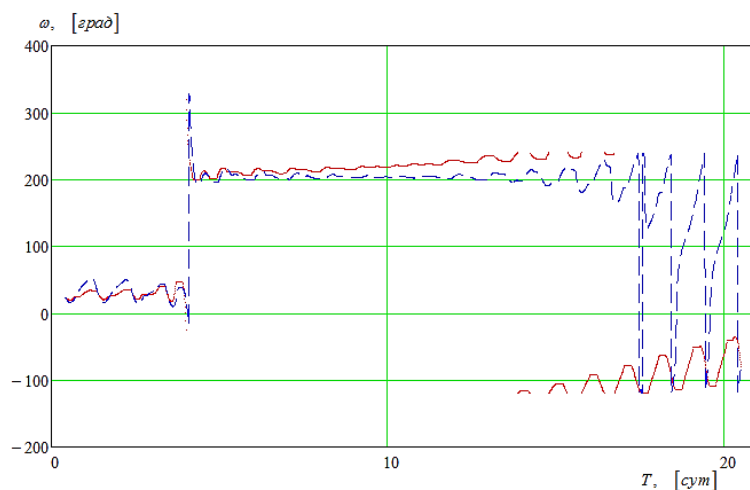


Рисунок 4.3.16 Зависимость изменения аргумента перигея орбиты КА [град.] от времени перелета [сут.]

Как видно из представленных рисунков, учет возмущений в рассматриваемом случае также не приводит к существенным изменениям структуры оптимального управления. По-прежнему наблюдается только отчетливый фазовый сдвиг вдоль оси времени перелета и небольшие

изменения в амплитуде «колебаний» для углов рысканья и тангажа. При этом соответствующие зависимости, описывающие изменение фазового вектора КА с ЭРДУ (выраженные через кеплеровские элементы орбиты) также оказываются близки.

Таким образом, на примере разобранный задачи оптимизации встречи видно, что учет влияния возмущений не приводит к существенной разнице в величине целевого функционала. При этом также не происходит изменения общей (для возмущенной и невозмущенной задачи) структуры полученных программ оптимального управления для углов рысканья и тангажа, а также для функции переключения, характеризующей оптимальный режим работы ЭРД. К тому же стоит отметить, что в данном случае при рассмотрении обеих постановок задачи полученное возмущенное решение определяет несколько худшее значение для целевого функционала задачи. Подобный результат был уже неоднократно получен ранее в настоящей главе, при сравнительном анализе полученных примеров решения возмущенных и невозмущенных задач. Однако сделать какой-либо однозначный и строгий вывод о том, какое же влияние оказывает учет действия возмущений на целевой функционал задачи все же сделать нельзя, ввиду некоторой специфики рассматриваемых в диссертационной работе задач, а также относительно малого количества полученных решений (ввиду значительной трудоемкости используемой методики).

Также стоит отметить, что рассмотренная в данном разделе для двух различных постановок (с функционалами (1.2.7) и (1.2.8)) задача оптимизации встречи оказывается существенно многоэкстремальной. Последнее, вообще говоря, характерно для любых задач оптимизации многовиткового межорбитального перелета КА с ЭРДУ, что отмечено в многочисленных работах, например, в [48, 49, 54]. Это можно легко продемонстрировать на основе полученных решений, разобранных ранее в качестве примеров. Так, для того, чтобы проверить оптимальность полученного значения момента времени старта КА с базовой орбиты t_0 , для обоих функционалов рассматривалась задача встречи в той же постановке, но при этом момент времени старта считался заданным. Далее, строилась зависимость полученного при решении значения целевого функционала от выбранного значения момента времени старта, задаваемого в виде приращения к опорному моменту времени T_0 . Время старта изменялось в диапазоне одних суток (от 0 до 24 часов), начиная от опорного момента времени. Данный диапазон значений был выбран исходя из его близости к периоду обращения рассматриваемых орбит. При этом, были получены решения, очевидно отвечающие различным экстремалам задачи. Соответствующие зависимости для значения целевого функционала в задаче встречи от момента времени старта приведены на рисунках 4.3.17 и 4.3.18. Рисунок 4.3.17 соответствует задаче быстрогодействия, а 4.3.18 - задаче минимизации рабочего тела, затрачиваемого на перелет.

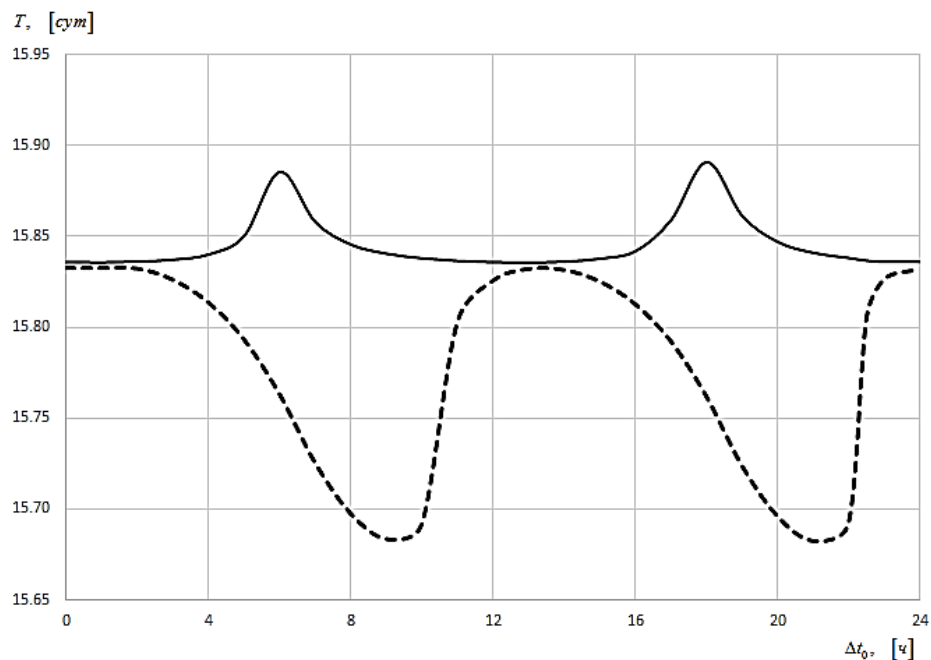


Рисунок 4.3.17 Зависимость минимального значения времени перелета [сут.] от момента старта КА с опорной орбиты, выраженного в виде приращения [ч] от опорного момента T_0 .
Сплошная и пунктирная линии соответствуют двум различным экстремалиям задачи

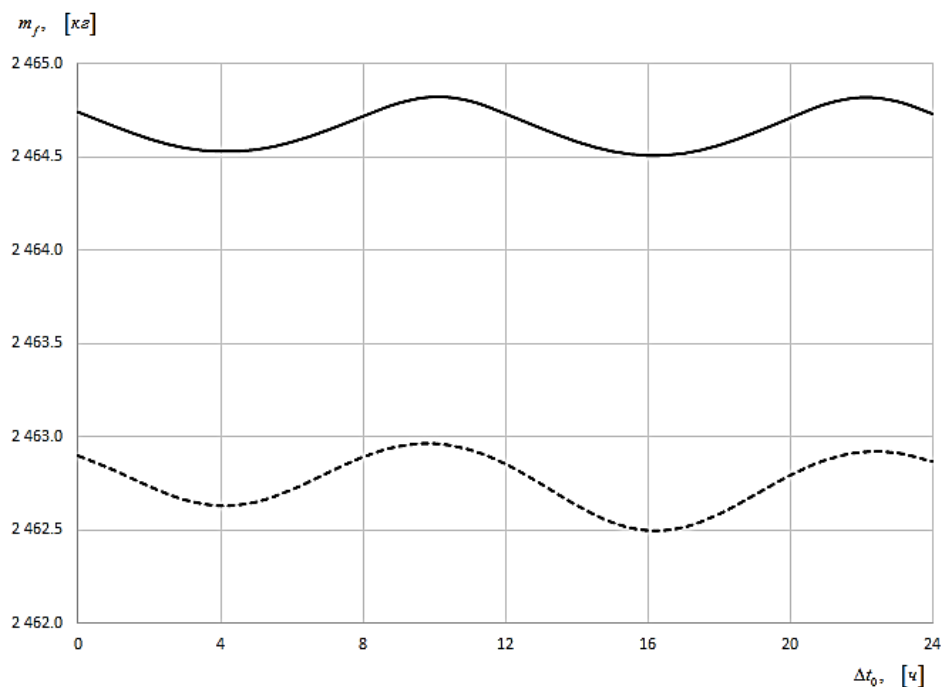


Рисунок 4.3.18 Зависимость максимального значения конечной массы КА [кг] от момента старта с опорной орбиты, выраженного в виде приращения [ч] от опорного момента T_0 .
Сплошная и пунктирная линии соответствуют двум различным экстремалиям задачи

На приведенных рисунках 4.3.17 и 4.3.18 отчетливо видно, что сплошная и пунктирная линии соответствуют различным экстремалиям рассматриваемых задач. При этом, каждая из данных зависимостей имеет схожий между собой периодический характер, при котором всегда имеется два оптимальных значения для даты старта в пределах одного периода обращения КА

на опорной орбите. Приведенные зависимости получены при решении соответствующих задач оптимизации встречи без учета влияния возмущений. Но ввиду близости оптимальных траекторий невозмущенного и возмущенного движения (что было показано ранее), кажется вполне очевидным, что общий характер данных зависимостей окажется справедливым и для решения последних. Естественно, приведенные на рисунках 4.3.17 и 4.3.18 зависимости также позволяют убедиться и в правильности полученного ранее решения для основной задачи оптимизации встречи (проверить оптимальное значение момента времени старта).

Рассмотренное ранее решение задачи оптимизации встречи с функционалом (1.2.7) было получено для сравнительно малого значения времени перелета равного 20 суткам, т.е. немногим большего минимального (определяемого решением соответствующей задачи быстрогодействия). При этом, полученная разница в значении целевого функционала (безразмерная конечная масса аппарата) на возмущенном и невозмущенном решении оказалась малой. Естественно, данный результат был получен при рассмотрении всего лишь одного частного примера (с малой длительностью перелета). Поэтому, для того, чтобы глубже оценить влияние действия возмущений на решение задачи встречи с функционалом (1.2.7), а также выявить некоторые ее качественные свойства, рассматривалось увеличение длительности перелета. При этом были получены соответствующие решения (возмущенные и невозмущенные), для которых время перелета изменялось в диапазоне от 16 до 90 суток. На рисунке 4.3.19 приведены зависимости значения конечной массы КА (кг) от длительности перелета (сутки). Сплошная линия соответствует решению невозмущенной задачи, а пунктирная – возмущенной. Видно, что в обоих случаях значение конечной массы КА сначала резко возрастает при увеличении длительности перелета, а затем асимптотически устремляется (при этом продолжая монотонно возрастать) к некоторому своему предельному значению. Последнее, вероятно, определяется из оптимального решения данной задачи при ее рассмотрении в импульсной постановке. Очевидно, что общий характер изображенных на рисунке 4.3.19 зависимостей останется неизменным и при дальнейшем увеличении продолжительности перелета. Из рисунка 4.3.19 также следует, что значение целевого функционала на возмущенном решении оказывается всюду хуже, чем на невозмущенном. При этом видно, что разница между соответствующими значениями возрастает с увеличением длительности перелета.

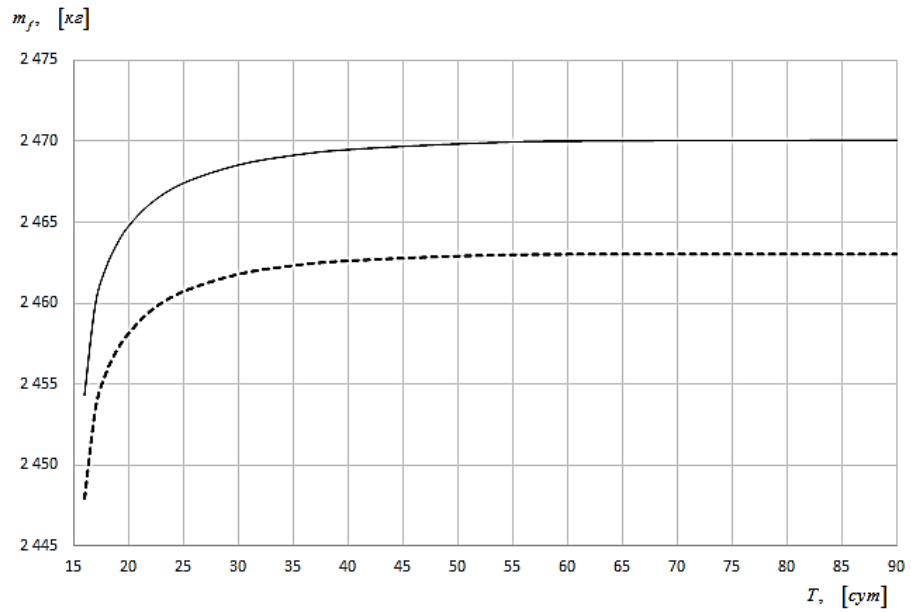


Рисунок 4.3.19 Зависимость оптимального значения конечной массы КА [кг] от времени перелета [сут.]. Сплошная линия соответствует невозмущенному решению, пунктирная - возмущенному

На рисунке 4.3.20 представлена зависимость, описывающая поведение величины относительной разницы в значении целевого функционала задачи (на возмущенном и невозмущенном решении), выраженной в процентах, при увеличении времени перелета. Видно, что величина относительной разности всюду монотонно возрастает с увеличением длительности перелета, при этом оставаясь достаточно малой.

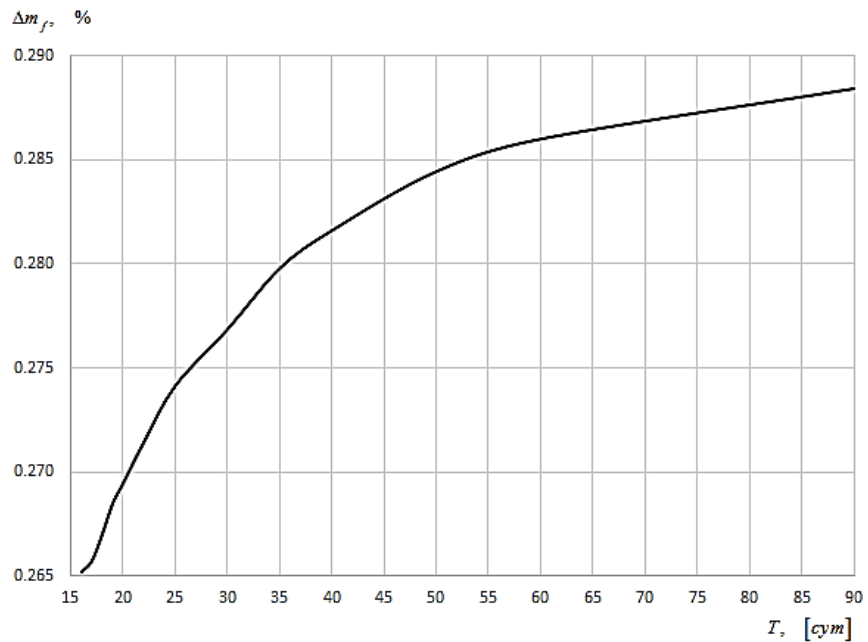


Рисунок 4.3.20 Зависимость величины относительной разницы в значении целевого функционала задачи на возмущенном и невозмущенном решении, %, от времени перелета [сут.]

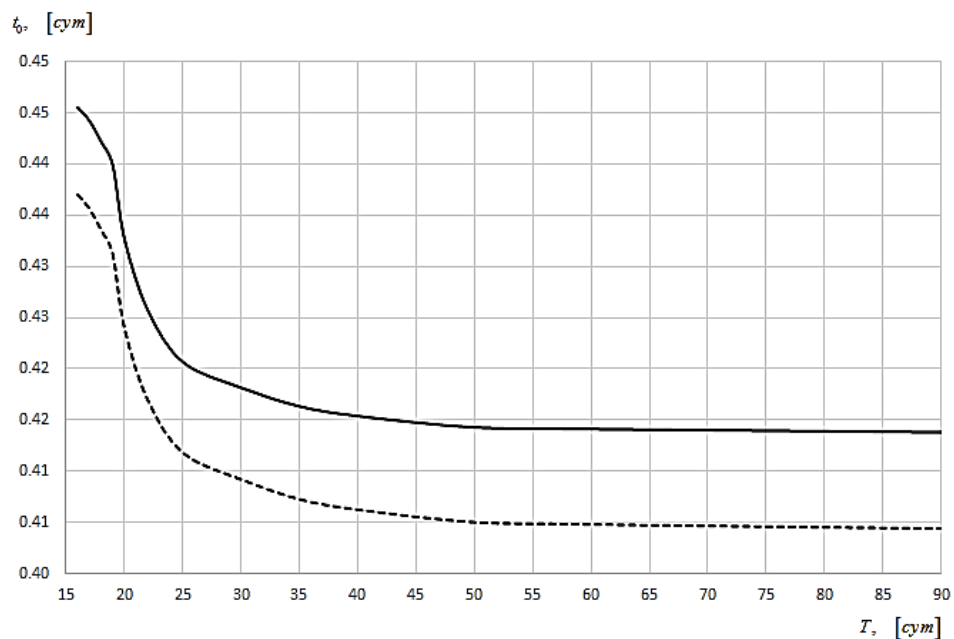


Рисунок 4.3.21 Зависимость оптимального значения времени старта t_0 [сут.], выраженного в виде приращения к опорному моменту T_0 , от времени перелета [сут.]. Сплошная линия соответствует невозмущенному решению, пунктирная - возмущенному

На рисунке 4.3.21 представлена зависимость, описывающая изменение значения оптимального момента времени старта t_0 при увеличении длительности перелета. Здесь сплошная линия снова соответствует невозмущенному решению задачи, а пунктирная – возмущенному. Видно, что в обоих случаях общий характер зависимости одинаков. Так, при увеличении времени перелета соответствующие значения оптимального момента времени старта, выраженного в виде приращения (в сутках) к опорному моменту времени T_0 , сначала достаточно резко убывают, а затем (продолжая при этом монотонно убывать) асимптотически устремляются к своему некоторому предельному значению. При этом видно, что разница между значениями оптимального момента времени t_0 , полученными на соответствующих решениях возмущенной и невозмущенной задачи, может достигать десятков минут, и при этом ее величина медленно возрастает с увеличением времени перелета.

В заключении текущего раздела можно сделать некоторые выводы для рассмотренной задачи оптимизации встречи. Во-первых, для варианта задачи с функционалом (1.2.7) незначительное увеличение (в пределах 5 – 10 суток) длительности перелета (по отношению к величине минимально возможного времени перелета, определяемой на решении соответствующей задачи быстрогодействия) позволяет достаточно сильно снизить затраты рабочего тела (рисунок 4.3.19). Однако, дальнейшее увеличение времени перелета уже оказывается неэффективным. Во-вторых, полученные оптимальные решения для невозмущенного и возмущенного вариантов задачи оптимизации встречи, оказываются весьма близкими как по величине целевого функционала, так и по структуре оптимального

управления. И на справедливость последнего практически не оказывает влияние увеличение длительности перелета. Также вполне вероятно, что описанные здесь свойства задачи оптимизации встречи, полученные при рассмотрении *частного* примера перелета КА к выбранному объекту-цели, являются *общими* для данной задачи, т.к. известные параметры орбит для большинства каталогизированных объектов КМ оказываются весьма близкими к рассмотренным в данной работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках настоящей диссертационной работы была рассмотрена и полностью теоретически обоснована предлагаемая автором универсальная методика решения возмущенных задач траекторной оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ, построенная на использовании математического аппарата дуальных чисел. В основе данной методики лежит очень простая базовая идея, непосредственно вытекающая из канонического формализма принципа максимума, которая и позволяет обойти основные трудности решения и качественного исследования задач оптимизации межорбитального перелета с учетом действия возмущений. Последние возникают из-за необходимости явной аналитической записи условий оптимальности используемого для решения задач траекторной оптимизации непрямого метода вариационной группы при наличии сложной дифференциальной связи.

В рамках предложенной методики фактическое определение правых частей системы дифференциальных уравнений оптимального движения КА с ЭРДУ сводится к вычислению частных производных от оптимального гамильтониана задачи по соответствующим компонентам ее фазового вектора (образованного объединением фазовых и сопряженных переменных). При этом, необходимое численное дифференцирование осуществляется «автоматически», т.к. при вычислении дуального представления для оптимального гамильтониана одновременно определяются и значения всех его частных производных, формирующих искомые правые части системы дифференциальных уравнений оптимального возмущенного движения КА. Последнее, как показано в работе, непосредственно следует из аналитической структуры скалярной функции дуального аргумента (нескольких дуальных аргументов). Это и позволяет с легкостью учитывать при решении задач траекторной оптимизации КА с ЭРДУ действие возмущений, описываемых сколь угодно сложной моделью. При этом на соответствующие им выражения накладывается всего лишь одно ограничение – они должны быть непрерывно дифференцируемы по своим аргументам по крайней мере внутри области, ограничивающей фазовое пространство для рассматриваемой в задаче управляемой динамической системы. Данное требование также можно несколько ослабить, т.к. фактически, при решении и исследовании задач оптимизации межорбитальных перелетов КА с ЭРДУ практически всегда рассматривается только эллиптическое движение (при котором не проявляются особенности в правых частях системы дифференциальных уравнений, описывающей управляемое возмущенное движение центра масс КА). Таким образом предлагаемая в диссертационной работе методика позволяет:

- существенно расширить сложность математической модели, описывающей управляемое возмущенное движение центра масс КА с ЭРДУ, при этом избегая

дополнительных трудностей, связанных с формализмом используемого при решении задач оптимизации межорбитального перелета непрямого метода – принципа максимума;

- качественно оценить и исследовать влияние действия возмущений при решении задач траекторной оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ.

Важно отметить, что предложенная методика решения возмущенных задач траекторной оптимизации КА с ЭРДУ, основанная на использовании дуальных чисел, является универсальной, и при выполнении ряда условий, может применяться при рассмотрении различных задач оптимизации управляемых динамических систем с помощью не прямых методов вариационной группы.

Так же в работе предлагается общая схема решения задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ при учете влияния возмущений, естественно, использующая предложенную ранее методику. Данная схема основывается на построении некоторой цепочки приближений, состоящей из последовательности решений вспомогательных задач траекторной оптимизации, каждое из которых используется в качестве начального приближения к решению последующей (более сложной), что в итоге и приводит к искомому решению основной задачи.

На основе качественного анализа полученных с помощью предлагаемой методики (и схемы) результатов решений рассматриваемых в работе задач оптимизации межорбитального перелета КА с ЭРДУ при учете влияния возмущений, осуществляемого между произвольно ориентированной начальной круговой или эллиптической орбитой и ГСО, можно сделать следующие выводы:

- для рассматриваемого вида межорбитального перелета КА с ЭРДУ (на ГСО), решение, полученное при учете влияния возмущений (в рамках принятой модели), всегда оказывается незначительно хуже с точки зрения заданного критерия качества, по сравнению с соответствующим ему решением невозмущенной задачи;
- относительная разница в значениях целевых функционалов, полученных на соответствующих решениях при рассмотрении возмущенного и невозмущенного варианта задачи, не превышает нескольких процентов (а в подавляющем большинстве случаев составляет менее одного процента);
- оптимальное управление вдоль траектории КА, полученное при решении возмущенной задачи может довольно ощутимо отличаться от управления, соответствующего решению невозмущенной: как правило это выражается в виде фазового сдвига на оптимальных программах изменения углов тангажа и рысканья, а также функции

переключения тяги, но в ряде случаев, возможно значительное изменение общей структуры полученной программы оптимального управления в целом, что целесообразно учитывать при баллистическом проектировании номинальной траектории довыведения КА с ЭРДУ на ГСО.

Естественно, приведенные выводы полностью отвечают только основному рассмотренному в работе (частному) виду межорбитального перелета КА с ЭРДУ – с произвольно ориентированной круговой или эллиптической орбитой на ГСО. Полученные численные результаты решений возмущенных задач траекторной оптимизации подтверждают как эффективность предлагаемой в работе методики, так и правильность выбора общей схемы их решения.

В работе предлагается еще одна базовая методика, основанная на использовании дуальных чисел, и предназначенная (по большей мере) для проведения качественного анализа и решения невозмущенных задач оптимизации межорбитального перелета. Она подразумевает совместное использование метода продолжения и дуальных чисел, что позволяет расширить возможности этого численного алгоритма, используемого при решении краевых задач принципа максимума. При этом показано, что в рассматриваемом случае с одинаковым успехом можно использовать как обыкновенные дуальные числа, так и их многомерные расширения. Использование данной методики позволило:

- определить решение задачи с функционалом вида (1.2.7), обеспечивающим минимизацию рабочего тела, затрачиваемого на перелет, для модели нерегулируемого двигателя (ОТ-задача) с помощью непрерывного продолжения из решения соответствующей задачи перелета для модели двигателя ограниченной мощности;
- организовать различные варианты процедуры продолжения полученного ранее решения ОТ-задачи с функционалом вида (1.2.7) по ряду ключевых параметров рассматриваемых задач оптимизации межорбитального перелета, с целью проведения ее качественного исследования, благодаря чему выявлен ряд ее важных свойств и особенностей (например, показана существенная многоэкстремальность).

В диссертационной работе рассмотрена задача оптимизации встречи, связанная с проблематикой маневрирования специального сервисного КА с ЭРДУ (буксира) с целью увода на орбиты захоронения объектов космического мусора, расположенных в близкой окрестности ГСО. Дано подробное описание и постановка рассматриваемой задачи, проведена ее полная формализация, получены необходимые условия оптимальности перелета. Решение задачи осуществлялось с помощью все той же основной предлагаемой в работе методики, следуя общей схеме, и с учетом принятой модели действия возмущений. На примере

полученных решений проведен качественный анализ, характеризующий некоторые общие свойства оптимальных траекторий перелета КА с ЭРДУ при обеспечении его встречи (рандеву) с более нефункционирующим аппаратом.

ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

ГСО – геостационарная орбита;

КА – космический аппарат;

ОМ – ограниченная мощность;

ОТ – ограниченная тяга;

ПН – полезная нагрузка;

ЭРД – электроракетный двигатель;

ЭРДУ – электроракетная двигательная установка;

a – большая полуось;

ω – аргумент перицентра;

μ – гравитационный параметр притягивающего центра,

Ω – долгота восходящего узла;

v – истинная аномалия;

τ – параметр продолжения;

ψ – угол рысканья;

\mathcal{G} – угол тангажа;

δ – параметр, определяющий режим работы двигателя;

μ_j – гравитационный параметр j -ого небесного тела;

\mathbf{a}_{pert} – вектор возмущающего ускорения;

a_τ, a_r, a_n – трансверсальная, радиальная и бинормальная проекции реактивного ускорения;

H^*, H^* – оптимальный гамильтониан;

U_P – возмущающая часть гравитационного потенциала;

ε – нильпотентный элемент; относительная ошибка;

\mathbf{f} – вектор-функция;

\mathbf{z} – вектор неизвестных параметров краевой задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 432 с.
2. Афанасьев А. П., Дикусар В. В., Милютин А. А., Чуканов С. А. Необходимое условие в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990. 320 с.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Физматлит, 2000.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960, 400 с.
5. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950, 348 с.
6. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969, 408 с.
7. Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. М.: Мир, 1972
8. Бэттин Р. Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966, 449 с.
9. Ван Дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1979, 623 с.
10. Гамильтон У. Р. Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы. М.: Наука, 1994, 560 с.
11. Гирсанов И. В. Лекции по теории экстремальных задач. М.: Издательство московского университета, 1970, 119 с.
12. Гребенников Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986, 256 с.
13. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полёта с малой тягой. М.: Наука, 1969, 680 с.
14. Дикусар В. В., Милютин А. А. Качественные и численные методы в принципе максимума. М.: Наука, 1989, 144 с.
15. Домрин А. В., Сергеев А. Г. Лекции по комплексному анализу: В 2 частях. Часть 1: первое полугодие. М.: МИАН, 2004, 176 с.
16. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1965, Т.5, №3, с.395-453
17. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968, 800 с.
18. Дубошин Г. Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976, 864 с.
19. Ефремов А. П. Кватернионы: алгебра, геометрия, и физические теории// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2004, т.1, №1, с. 111-127
20. Ефремов А. П. Q-поле, переменный кватернионный базис// Томск: Известия вузов. Физика, 1985, №12, с. 14-18

21. Жулин С. С. Метод продолжения по параметру и его приложение к задачам оптимального управления// Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии, Т.8, №1, 2007, с. 205-217.
22. Захаров Ю. А. Проектирование межорбитальных космических аппаратов. Выбор траекторий и проектных параметров. М.: Машиностроение, 1984, 176 с.
23. Зеликин М. И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. М.: Едиториал УРСС, 2004, 160 с.
24. Ивлев Д. Д. О двойных числах и их функциях// Математическое просвещение, 1961, №6, с. 197–203.
25. Иванюхин А. В., Петухов В. Г. Задача минимизации тяги и ее приложения// Космические исследования, 2015, Т.53, №4, с.320
26. Иванюхин А. В., Петухов В. Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с солнечной электроракетной двигательной установкой минимальной мощности// Вестник НПО им. С.А. Лавочкина, 2015, №2 (28), с.64-71.
27. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 480 с.
28. Константинов М. С. Методы математического программирования в проектировании летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1975, 164 с.
29. Константинов М. С., Петухов В. Г. Поддержание орбитальной конфигурации системы КА на высоких эллиптических орбитах// Вестник МАИ, 2008, Т. 15, №1, с. 10
30. Константинов М. С., Петухов В. Г., Попов Г. А. Применение СПД при выведении спутников на геостационарную орбиту с использованием ракет-носителей легкого класса// Вестник двигателестроения, 2003, №2, с.124-128.
31. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973, 443 с.
32. Кувшинова Е. Ю., Сеницын А. А. Эффективность применения межорбитальных буксиров на основе ядерных электроракетных двигательных установок в транспортных операциях Земля – Луна – Земля// Космонавтика и ракетостроение, №3 (60), 2010.
33. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973, 416 с.
34. Лебедев В. Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М., Изд.-во ВЦ АН СССР, 1968.
35. Левантовский В. И. Механика космического полета в элементарном изложении. М.: Наука, 1980, 512 с.
36. Лоуден Д. Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1966, 152 с.

37. Милютин А. А. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. М.: Физматлит, 2001, 302 с.
38. Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Издательство центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2004, 168 с.
39. Молчанов В. Ф., Малашонок Н. А., Молчанова Л. М. Группы и геометрии, связанные с дуальными числами// Вестник ТГУ, 2009, т.14, №6, с. 1475-1516.
40. Молчанов В. Ф. Элементарные представления группы Лагерра// Математические заметки, 1978, т.23, №1, с. 31-39
41. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982, 296 с.
42. Николичев И. А. Определение минимально-допустимых значений электрической мощности и тяги электроракетной двигательной установки при межорбитальных перелетах// Известия РАН. Энергетика, 2016, №2, с.129-145
43. Николичев И. А. Оптимизация многовитковых межорбитальных перелетов с двигателями малой тяги// Вестник московского авиационного института, 2013, Т.20, №5, с.66-76
44. Николичев И. А. Применение аппарата дуальных чисел при решении задач оптимизации межорбитального перелета// Вестник московского авиационного института, 2016, Т.23, №1, с.151-162.
45. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975, 560 с.
46. Петухов В. Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой// Космические исследования, 2012, т. 50, № 3, с. 258 – 270.
47. Петухов В. Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения// Космические исследования. 2008. Т. 46, № 3, с. 224-237.
48. Петухов В. Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами. Космические исследования. 2004. Т. 42, № 3, с. 260-279.
49. Петухов В. Г. Оптимизация траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками методом продолжения. дис. ... д-ра тех. наук: 05.07.09 / Петухов Вячеслав Георгиевич. - М., МАИ, 2013. - 218 с.
50. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983, 384 с.
51. Понтрягин Л. С. Дифференциальные уравнения и их приложения. М.: Едиториал УРСС, 2011, 208 с.

52. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 384с.
53. Салмин В. В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой. М.: Машиностроение, 1987, 208 с.
54. Сеницын А. А. Эффективность применения электроракетных двигательных установок в транспортной операции выведения космических аппаратов на геостационарную орбиту: дисс. ... канд. техн. наук: 05.07.05 и 05.07.09 / Сеницын Алексей Андреевич. - М., ФГУП «Исследовательский центр им. М.В. Келдыша, 2009. - 160 с.
55. Тейн М. Оптимизация схем выведения космического аппарата на высокие рабочие орбиты: дисс. ... канд. техн. наук: 05.07.09 / Мин Тейн. - М., МАИ, 2010. - 135 с.
56. Хайрер Э., Нёрсетт С, Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990, 512 с.
57. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969, 580 с.
58. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999, 224 с.
59. Широков Д. С. Алгебры Клиффорда и спиноры. М.: МИАН, 2011, 173 с.
60. Эльясгольц Л. Э. Дифференциальные уравнение и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969, 424 с.
61. Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. М.: Физматгиз, 1963, 192 с.
62. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М.: Наука, 1969, 304 с.
63. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974, 488 с.
64. Allgower Eugene L., Georg K. Introduction to Numerical Continuation Methods. Colorado State University, 1990, 397 p.
65. Ball R. S. A treatise On The Theory of screws. Cambridge University Press, 1900, 544 p.
66. Ball R. S. Theory of screws: a study in the dynamics of a rigid body. Dublin, Hodges Foster, 1876, 236 p.
67. Bombardelli C., Pelaez J. Ion Beam Shepherd for Contactless Space Debris Removal// Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2010
68. Bool G. A Treatise On The Calculus of Finite Differences. 2nd ed. Macmillan and Company, 1872, 410
69. Brouke R. A., Cefola P. J. On the Equinoctial Orbital Elements// Celestial Mechanics, 1972, vol.5, pp. 303-310.

70. Buchheim A. A Memoir on biquaternions// American Journal of Mathematics, 1885, Vol.7, №4, p.293-326
71. Chen H. S., Stadtherr M. A. A modification of Powell's dogleg method for solving systems of nonlinear equations// Computer & Chemical Engineering, Vol.5, 3, 1981, p. 143-150.
72. Chevalley C. The algebraic theory of spinors. Columbia University Press, 1954, 128 p.
73. Clifford W. K. Preliminary sketch of biquaternions// Proc. London Mathematical Society, Vol. 4, no. 64, 381-395, 1873.
74. Cunningham L. E. On the Computation of the Special Harmonic Terms Needed During Numerical Integration of Artificial Satellite// Celest. Mech., 1970, v. 2, p. 207-216.
75. Dargent T. Automatic Minimum Principle Formulation for Low Thrust Optimal Control in Orbit Transfers using Complex Numbers// International symposium on space flights dynamics, Toulouse, France, Sept. 2009, 9 p.
76. Duffy J. Analysis of mechanisms and robot manipulators. Halstead Press, 1980, p.
77. Edelbaum T. N. Optimum power-limited orbit transfer in strong gravity fields// AIAA J. 1965. V. 3. № 5. P. 921–925
78. Fischer I. S., Freudensetin F. Internal force and moment transmission in a cardan joint with manufacturing tolerances// ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 106, p. 301-311, 1984.
79. Haberkorn T., Martinon P., Gergaud, J., Low Thrust Minimum-Fuel Orbital Transfer: A Homotopic Approach// Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 27, No. 6, 2004, pp. 1046-1060.
80. Irving J. H. Low thrust flight: variable exhaust velocity in gravitational fields// Space Techn. 1959. V. 10, № 4. p. 10-01–10-54.
81. Kitamura S. Large Space Debris Reorbiter Using Ion Beam Irradiation, IAC-10-A6.4.8, 61st International Astronautical Congress, Prague, CZ.
82. Lantoine G. A, Russel R. P. A Hybrid Differential Dynamic Programming Algorithm for Constrained Optimal Control Problems. Part 1: Theory// J Optim Theory Appl (2012) 154:382–417, DOI 10.1007/s10957-012-0039-0, 36 p.
83. Lantoine G. A, Russel R. P., Dargent T. Using Multicomplex Variables for Automatic Computation of High-Order Derivatives// AAS 10-218, 2010, 18 p.
84. Lyness J. N. Numerical algorithms based on the theory of complex variables// Proc. ACM 22nd Nat. Conf., Thompson Book Co., Washington, DC, 1967. 1967. p. 124-134.
85. Martins J. R. R. A. A Coupled-Adjoint Method for High-Fidelity Aero-Structural Optimization. PhD thesis, Aerospace Engineering, Stanford University, 2002.

86. Martins J. R. R. A., Sturdza P., Alonso J. J. The complex-step derivative approximation// ACM Transactions on Mathematical Software, 2003, №29, p. 245– 262.
87. Nocedal J., Wright S. J. Numerical Optimization. Springer,1999, p.664.
88. Olver P. Introduction to Partial Differential Equations. Springer Science & Business Media, 2013, 182 p.
89. Olympio J. T. Optimisation and Optimal Control Methods for Planet Sequence Design of Low-Thrust Interplanetary Transfer Problems with Gravity-Assists. PhD Thesis, l'Ecole des Mines de Paris, 169 p., 2008
90. Patel P. L. Automating Interplanetary Trajectory Generation for Electric Propulsion Trade Studies. PhD Thesis, The University of Michigan. 2008, 147 p.
91. Piponi D. Automatic Differentiation, C++ Templates and Photogrammetry// The Journal of Graphics Tools, 2004, №9, p. 41-55.
92. Richardson C. H. An introduction to the calculus of finite differences. D. VAN NOSTRAND company, inc., 1954, 142 p.
93. Sackett L. L., Malchow H. L., Edelbaum T. N. Solar Electric Geocentric Transfer with Attitude Constraints: Analysis. NASA CR-134927, 1975.
94. Schoenmaekers J., Pulido J., Cano J. L. SMART-1. Moon mission: Trajectory design using the moon gravity// ESA S1-ESC-RP-5501, Issue 1, May 1999, 44 p.
95. Spitzer A. Novel Orbit Raising Strategy Makes Low Thrust Commercially Viable// 24th International Electric Propulsion Conference, IEPC 95-212, Russia, Moscow, 1995.
96. Spitzer, A., De Picciotto, S. A. Constant Sun Angle Transfer Orbit Sequence and Method Using Electric Propulsion. United States Patent No. 5716029, Feb. 10, 1998, 16 p.
97. Standish E. M., Newhall X. X., Williams J. G., Folkner W. F. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE403/LE403, 1995, JPL IOM 314.10-127, pp.1-27
98. The SOFA Software Libraries. International Astronomical Union. Division 1: Fundamental Astronomy, Commission 19: Rotation of the Earth, Standards Of Fundamental Astronomy Board, available at www.iausofa.org, 2016
99. Vasantha Kandasamy W. B., Smarandache F. Dual Numbers. ZIP Publishing, Ohio, 2012, p.161.
100. Vasantha Kandasamy W. B., Smarandache F. Special Quasi Dual Numbers and Groupoids. ZIP Publishing, Ohio, 2012, p.194.
101. Whiffen G. J., Sims J. A. Application of the SDC optimal control algorithm to low thrust escape and capture including fourth body effects. In 2nd International Symposium on Low Thrust Trajectories, Toulouse, France, June 18-20 2002.
102. Wohlhart K. Motor tensor calculus. Computational Kinematics (J.P. Merlet and B. Ravani eds.), Kluwer, Academic Publishers, 1995.

103. Yu W., Blair M. DNAD, a Simple Tool for Automatic Differentiation of Fortran Codes Using Dual Numbers// Computer Physics Communications, 2013, vol.184, no. 5, pp. 1446-1452

ПРИЛОЖЕНИЕ А (МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ)

А.1 Алгебра дуальных чисел

Аппарат дуальных чисел с той или иной степенью полноты изложения освещается в работах [61, 62, 65, 66, 70, 72, 73, 76, 91, 99, 100, 103]. Значительная часть этих работ посвящена исключительно прикладным аспектам применения рассматриваемого нами математического аппарата – в первую очередь, в контексте реализации вычислительных схем и процедур, направленных на определение требуемых производных для функции одной или нескольких переменных. Это находит свое отражение в создании соответствующих вычислительных программных продуктов, предназначенных для автоматического дифференцирования, таких как [91, 103]. Другая часть работ описывает применение дуальных чисел при рассмотрении ряда проблем нелинейной динамики и затрагивает различные проблемы, связанные с аналитическим описанием или численным моделированием движения твердого тела. Это находит применение в различных задачах робототехники, задачах теории удара и т.п. [66, 78, 102]. Помимо этого, дуальные числа находят широкое применение при реализации численного дифференцирования в задачах, связанных с построением и обработкой цифрового изображения [91].

К сожалению, лишь небольшая доля от общего числа работ описывает дуальные числа с позиции их рассмотрения непосредственно в качестве математического объекта. Приведем некоторые из них.

Первое строгое (да и вообще первое) математическое описание дуальных чисел было дано В.К. Клиффордом в 1873 г. и изложено в его работе [73]. Клиффорд определяет их для построения некоторого нового класса объектов - параболических бикватернионов, представляющих собой один из вариантов расширения для соответствующего аналога поля комплексных чисел [15, 57]. Данные объекты были непосредственно применены Клиффордом к «теории винтов» для описания «винтового» перемещения тела в трехмерном евклидовом пространстве. В дальнейшем, дуальные числа также рассматриваются в работах Болла [65, 66] и Бакхейма [70]. В ряде последующих работ [72, 76] изложение основной теории в целом соответствует трем первым авторам, и так или иначе связано с теорией винтового перемещения тела. Первое же практическое применение дуальных чисел в более общих задачах нелинейной механики изложено в ныне утраченной работе А.П. Котельникова 1895-ого года.

Среди отечественных авторов, судя по всему, наибольший вклад в развитие теории дуальных чисел и их геометрических приложений внес замечательный ученый-геометр И.М. Яглом. В его работах [61] и [62] изложена теория т.н. «самых общих комплексных чисел» с точки зрения свойств геометрических объектов, порождаемых их изображениями на двумерной плоскости и соответствующих им геометрий. Дуальные числа рассматриваются автором как каноническая система комплексных чисел параболического типа, которой соответствует особая геометрия на плоскости - геометрия Галилея. К сожалению, в работах Яглома практически не освещаются вопросы алгебраической теории дуальных чисел и вообще отсутствуют связанные с ними вопросы анализа.

Как каноническая система комплексных чисел параболического типа, дуальные числа также рассматриваются в классических работах Лаврентьева и Шабата по теории функции комплексного переменного и ее приложениях [33, 57]. Но и в этих работах вопросы алгебраической теории дуальных чисел освещены весьма скудно, а теория функции дуального переменного и связанные с ней вопросы анализа и вообще отсутствуют.

Некоторые вопросы, связанные с теорией функции дуального переменного и ее практических приложений рассмотрены в работах В.Ф. Молчанова и Л.М. Молчановой [39, 40]. Большая их часть посвящена прикладному аспекту применения дуальных чисел и их функций при решении ряда аналитических задач механики. При этом с точки зрения математической теории, основной акцент делается на рассмотрении однородных обобщенных функций.

В настоящее время появляются работы, посвященные созданию теории и разработке дальнейшего расширения уже непосредственно самой алгебры дуальных чисел. Примером последнего служит появление гипердуальных и квазидуальных чисел, а также специальных чисел дуального типа (их можно рассматривать как попытки дальнейшего расширения алгебры чисел параболического типа). Методические основы теории построения данных объектов приводятся в работах [99, 100].

Таким образом, теоретических работ, качественно описывающих интересующий нас класс математических объектов не так уж много. В ходе дальнейшего изложения мы постараемся несколько восполнить этот пробел.

В данной главе диссертационной работы приводится по возможности строгое описание дуальных чисел именно с позиции рассмотрения их в качестве математического объекта. В текущем разделе освещаются их основные алгебраические свойства. С точки зрения анализируемых свойств, используемых теорем и определений, изложение в основном соответствует классическим работам по алгебре и теории чисел [9].

В последующих разделах данной главы излагаются основные аспекты теории аналитической функции дуального переменного, необходимые для построения ряда вычислительных схем и проведения соответствующих вычислений с использованием дуальных чисел. Далее, будет освещен ряд вопросов, связанный с алгебраическими расширениями дуальных чисел и их приложениями.

Дадим определение дуального числа по аналогии с работами [61, 62, 91, 103]. Итак, *дуальным числом* назовем следующую упорядоченную пару действительных чисел:

$$\left. \begin{aligned} x^d &= \langle x; x' \rangle, \quad x, x' \in \mathbf{R}^1, \\ \text{или} \\ x^d &= x + \varepsilon x'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1.1})$$

В приведенных выражениях (A.1.1) величина (символ) ε представляет собой некоторый элемент рассматриваемого нами класса объектов, отвечающий следующему условию:

$$\varepsilon^2 = \langle 0; 0 \rangle. \quad (\text{A.1.2})$$

Полагаем, что как самостоятельный элемент рассматриваемого нами класса, ε допускает следующее представление (в соответствии с приведенными выражениями (A.1.1)):

$$\varepsilon = \langle 0; 1 \rangle. \quad (\text{A.1.3})$$

Строгое же определение ε как элемента соответствующей алгебры будет приведено ниже, после того как будет полностью охарактеризован рассматриваемый нами класс объектов и заданы определяющие его операции.

В выражениях (A.1.1) величина x называется действительной частью дуального числа, x' – дуальной частью. Выражение $x^d = x + \varepsilon x'$ представляет собой удобную форму записи дуального числа; ей мы также будем пользоваться в ходе дальнейшего изложения.

Далее, мы непосредственно охарактеризуем дуальные числа как некий класс объектов - D , элементы которого совместно с производимыми над ними операциями формируют некоторую абстрактную математическую модель. В качестве такой абстрактной модели, будем рассматривать модель с двумя определяющими бинарными операциями – операцией сложения и умножения (система с двойной композицией).

Пусть для двух произвольных элементов $x^d_1 = \langle x_1; x'_1 \rangle$ и $x^d_2 = \langle x_2; x'_2 \rangle$ рассматриваемого класса D операция сложения определяется следующим образом:

$$x^d_1 + x^d_2 = \langle x_1; x'_1 \rangle + \langle x_2; x'_2 \rangle = \langle x_1 + x_2; x'_1 + x'_2 \rangle. \quad (\text{A.1.4})$$

Согласно (A.1.1), выражение (A.1.4) также можно представить в следующей эквивалентной ему форме:

$$x_1^d + x_2^d = (x_1 + \varepsilon x_1') + (x_2 + \varepsilon x_2') = (x_1 + x_2) + \varepsilon(x_1' + x_2'). \quad (\text{A.1.5})$$

Операцию умножения определим следующим образом:

$$x_1^d \cdot x_2^d = \langle x_1; x_1' \rangle \cdot \langle x_2; x_2' \rangle = \langle x_1 \cdot x_2; x_1 \cdot x_2' + x_2 \cdot x_1' \rangle, \quad (\text{A.1.6})$$

или, в эквивалентной форме:

$$x_1^d \cdot x_2^d = (x_1 + \varepsilon x_1') \cdot (x_2 + \varepsilon x_2') = (x_1 \cdot x_2) + \varepsilon(x_1 \cdot x_2' + x_2 \cdot x_1'). \quad (\text{A.1.7})$$

Исходя из соотношений (A.1.6) или (A.1.7) и используя представление для ε в виде (A.1.3), легко убедиться в справедливости равенства (A.1.2) или, в «сокращенном виде», $\varepsilon^2=0$.

Определив таким образом операции сложения и умножения для рассматриваемого нами класса объектов D , мы можем сделать следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Класс объектов D образует коммутативную группу по сложению G_D .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этого утверждения достаточно проверить выполняются ли аксиомы группы для определенной нами бинарной операции (сложение) и условие коммутативности для произвольной пары из ее элементов. Проведем доказательство непосредственной проверкой выполнения требуемых условий.

Покажем сначала, что набор элементов класса $x_1^d, x_2^d, \dots \in D$ образует группу по сложению G_D . Для этого сначала необходимо проверить выполнение следующих условий – аксиом группы, относительно рассматриваемой бинарной операции «+»:

- 1) $\forall x_1^d, x_2^d \in G_D, \exists x_3^d \in G_D : x_1^d \odot x_2^d = x_3^d$ - замкнутость по отношению к рассматриваемой операции;
- 2) $\forall x_1^d, x_2^d, x_3^d \in G_D, x_1^d \odot (x_2^d \odot x_3^d) = (x_1^d \odot x_2^d) \odot x_3^d$ - ассоциативность;
- 3) $\exists !E \in G_D : E \odot x^d = x^d, \forall x^d \in G_D$ - группа содержит единичный (левый) элемент (единицу) $!E$;
- 4) $\forall x^d \in G_D \exists (x^d)^{-1} \in G_D : (x^d)^{-1} \odot x^d = !E$ - существование обратного (левого) элемента.

Замкнутость по отношению к введенной нами операции сложения очевидна. В соответствии с определенными нами выражениями (A.1.4) и (A.1.5):

$$\left. \begin{aligned} &\forall x_1^d, x_2^d \in G_D, \\ &x_1^d = x_1 + \varepsilon x_1', x_2^d = x_2 + \varepsilon x_2', \\ &x_3^d = x_1^d + x_2^d = (x_1 + \varepsilon x_1') + (x_2 + \varepsilon x_2') = (x_1 + x_2) + \varepsilon(x_1' + x_2'), \\ &x_3^d = \langle x_1 + x_2; x_1' + x_2' \rangle, x_3^d \in G_D. \end{aligned} \right\}$$

Проверим ассоциативность:

$$\left. \begin{aligned}
 x^d_1 &= x_1 + \varepsilon x'_1, \quad x^d_2 = x_2 + \varepsilon x'_2, \quad x^d_3 = x_3 + \varepsilon x'_3, \\
 x^d_1 + (x^d_2 + x^d_3) &= (x_1 + \varepsilon x'_1) + \left[(x_2 + \varepsilon x'_2) + (x_3 + \varepsilon x'_3) \right] = \\
 &= (x_1 + \varepsilon x'_1) + \left[(x_2 + x_3) + \varepsilon (x'_2 + x'_3) \right] = (x_1 + x_2 + x_3) + \varepsilon (x'_1 + x'_2 + x'_3); \\
 (x^d_1 + x^d_2) + x^d_3 &= \left[(x_1 + x_2) + \varepsilon (x'_1 + x'_2) \right] + (x_3 + \varepsilon x'_3) = \\
 &= (x_1 + x_2 + x_3) + \varepsilon (x'_1 + x'_2 + x'_3).
 \end{aligned} \right\}$$

Очевидно, что единственный элемент, содержащийся в классе D и удовлетворяющий условию 3), есть:

$$!E = \langle 0; 0 \rangle.$$

Действительно, для любого элемента из рассматриваемого нами класса справедливо следующее:

$$\left. \begin{aligned}
 !E &= 0 + \varepsilon 0, \quad !E \in G_D; \\
 !E + x^d &= x^d \quad \forall x^d \in G_D; \\
 (0 + \varepsilon 0) + (x + \varepsilon x') &= (x + \varepsilon x').
 \end{aligned} \right\}$$

Выполнение условия 4) относительно рассматриваемой нами операции сложения (согласно выражениям (A.1.4) и (A.1.5)), так же вполне очевидно. Действительно, для любого элемента из класса D удастся определить левый обратный элемент, такой что:

$$\left. \begin{aligned}
 \forall x^d \in G_D, \quad x^d &= x + \varepsilon x', \\
 (x^d)^{-1} &= -x^d, \quad (x^d)^{-1} \in G_D, \quad (x^d)^{-1} = -(x + \varepsilon x'), \\
 (x^d)^{-1} + x^d &= -(x + \varepsilon x') + (x + \varepsilon x') = !E = 0 + \varepsilon 0.
 \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, в силу выполнения условий 1) - 4) (аксиом группы), рассматриваемый нами класс объектов D образует группу по сложению G_D . Покажем далее, что она коммутативна. Вполне очевидно, что любые элементы группы G_D перестановочны, т.е. выполняется следующее условие:

$$x^d_1 + x^d_2 = x^d_2 + x^d_1, \quad \forall x^d_1, x^d_2 \in G_D. \quad (\text{A.1.8})$$

Действительно, в силу определенной нами операции сложения, проверка условия (A.1.8) элементарна:

$$\left. \begin{aligned}
 x^d_1 + x^d_2 &= (x_1 + \varepsilon x'_1) + (x_2 + \varepsilon x'_2) = (x_1 + x_2) + \varepsilon (x'_1 + x'_2), \\
 x^d_2 + x^d_1 &= (x_2 + \varepsilon x'_2) + (x_1 + \varepsilon x'_1) = (x_1 + x_2) + \varepsilon (x'_1 + x'_2).
 \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, рассматриваемая нами бинарная операция сложения (A.1.4) – коммутативна, а, следовательно, коммутативна и группа G_D (по определению). Это завершает доказательство Предположения 1.

Так как рассматриваемый класс объектов D образует группу – G_D (выполняется Предположение 1), то (в силу общих свойств группы) G_D содержит единственный правый единичный элемент $E!$ (правая единица), который совпадает с левым $!E$ (левая единица), т.е. выполняется следующее условие (элементарно проверяется):

$$\left. \begin{aligned} !E + x^d = x^d + E! = x^d \quad \forall x^d \in G_D; \\ !E = E! = \langle 0; 0 \rangle = E. \end{aligned} \right\}$$

Так же существует (содержится в группе) и правый обратный элемент. Он является единственным для каждого элемента группы, и совпадает с левым обратным элементом. Т.е. удовлетворяет следующему условию (опять же, элементарно проверяется):

$$(x^d)^{-1} + x^d = x^d + (x^d)^{-1} = E, \quad \forall x^d \in G_D.$$

Так как левая и правая единица и левый и правый обратный элемент совпадают и определяются однозначно, группа G_D содержит единственное решение (корень x^d) уравнения $a^d + x^d = b^d$ или уравнения $x^d + a^d = b^d$ где $x^d, a^d, b^d \in G_D$.

Таким образом, дуальные числа образуют коммутативную группу по сложению (аддитивную), или Абелеву группу (Предположение 1).

Продолжим описание класса D , элементами которого являются дуальные числа. Теперь мы можем сделать следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. *Класс объектов D представляет собой кольцо R_D .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для справедливости Предположения 2 необходимо показать, что определенные нами бинарные операции сложения и умножения (соотношения (A.1.4) и (A.1.6)) для объектов рассматриваемого класса D удовлетворяют следующим условиям:

- 1) класс объектов D образует коммутативную группу по сложению;
- 2) $\forall x^d_1, x^d_2 \in D \quad x^d_1 \cdot x^d_2 \in D$ - замкнутость по отношению к умножению;
- 3) $\forall x^d_1, x^d_2, x^d_3 \in D \quad x^d_1 \cdot (x^d_2 \cdot x^d_3) = (x^d_1 \cdot x^d_2) \cdot x^d_3$ - ассоциативность умножения;
- 4) $\forall x^d_1, x^d_2, x^d_3 \in D \quad x^d_1 \cdot (x^d_2 + x^d_3) = x^d_1 \cdot x^d_2 + x^d_1 \cdot x^d_3,$
 $(x^d_2 + x^d_3) \cdot x^d_1 = x^d_2 \cdot x^d_1 + x^d_3 \cdot x^d_1$ - дистрибутивность.

Первое условие очевидно выполняется в силу того, что справедливо Предположение 1.

Справедливость условия 2) следует исходя из определения введенной нами операции умножения (соотношения (A.1.6) или (A.1.7)).

Проверим выполнение условия 3) непосредственно. В соответствии с определенной нами операцией умножения для объектов класса D (соотношения (A.1.6) или (A.1.7)) а также в силу условия 2) (замкнутость по отношению к умножению), не представляет труда получить следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned}
 & x^d_1, x^d_2, x^d_3 \in D, \\
 & x^d_1 = x_1 + \varepsilon x'_1, x^d_2 = x_2 + \varepsilon x'_2, x^d_3 = x_3 + \varepsilon x'_3, \\
 & x^d_1 \cdot (x^d_2 \cdot x^d_3) = (x_1 + \varepsilon x'_1) \cdot \left[(x_2 + \varepsilon x'_2) \cdot (x_3 + \varepsilon x'_3) \right] = \\
 & = (x_1 + \varepsilon x'_1) \cdot \left[x_2 \cdot x_3 + \varepsilon (x_2 \cdot x'_3 + x_3 \cdot x'_2) \right] = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \\
 & + \varepsilon \left(x_1 \cdot (x_2 \cdot x'_3 + x_3 \cdot x'_2) + (x_2 \cdot x_3) \cdot x'_1 \right), \\
 & (x^d_1 \cdot x^d_2) \cdot x^d_3 = \left[(x_1 + \varepsilon x'_1) \cdot (x_2 + \varepsilon x'_2) \right] \cdot (x_3 + \varepsilon x'_3) = \\
 & = \left[x_1 \cdot x_2 + \varepsilon (x_2 \cdot x'_1 + x_1 \cdot x'_2) \right] \cdot (x_3 + \varepsilon x'_3) = \\
 & = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \varepsilon \left((x_2 \cdot x'_1 + x_1 \cdot x'_2) \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x'_3 \right),
 \end{aligned} \right\}$$

из которых и следует справедливость условия 3).

Условие 4) очевидно выполняется исходя из замкнутости D по отношению к операциям сложения и умножения и в силу самого определения этих операций. Непосредственная проверка этого условия дает в результате следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned}
 & x^d_1, x^d_2, x^d_3 \in D, \\
 & x^d_1 = x_1 + \varepsilon x'_1, x^d_2 = x_2 + \varepsilon x'_2, x^d_3 = x_3 + \varepsilon x'_3, \\
 & x^d_1 \cdot (x^d_2 + x^d_3) = (x_1 + \varepsilon x'_1) \cdot \left[(x_2 + \varepsilon x'_2) + (x_3 + \varepsilon x'_3) \right] = \\
 & = (x_1 + \varepsilon x'_1) \cdot \left[(x_2 + x_3) + \varepsilon (x'_2 + x'_3) \right] = x_1 \cdot (x_2 + x_3) + \\
 & + \varepsilon \left[x_1 \cdot (x'_2 + x'_3) + (x_2 + x_3) \cdot x'_1 \right] = (x_1 x_2 + x_1 x_3) + \varepsilon \left[x_1 x'_2 + x_1 x'_3 + x_2 x'_1 + x_3 x'_1 \right], \\
 & x^d_1 \cdot x^d_2 + x^d_1 \cdot x^d_3 = (x_1 + \varepsilon x'_1) \cdot (x_2 + \varepsilon x'_2) + (x_1 + \varepsilon x'_1) \cdot (x_3 + \varepsilon x'_3) = \\
 & = \left[x_1 x_2 + \varepsilon (x_1 x'_2 + x'_1 x_2) \right] + \left[x_1 x_3 + \varepsilon (x_1 x'_3 + x'_1 x_3) \right] = \\
 & = (x_1 x_2 + x_1 x_3) + \varepsilon \left[x_1 x'_2 + x_1 x'_3 + x_2 x'_1 + x_3 x'_1 \right].
 \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, условия 1) – 4) выполняются, и класс рассматриваемых объектов D является кольцом R_D (по определению). Тем самым доказана справедливость Предположения 2.

Здесь мы можем сделать промежуточный вывод о том, что класс объектов D , элементами которого являются дуальные числа есть кольцо, в силу справедливости Предположения 2.

Далее попробуем выявить ряд особенностей и уточнить общую структуру кольца R_D .

Мы можем сделать следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. *Кольцо R_D есть кольцо с делителями нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того, чтобы показать справедливость данного предположения, необходимо определить хотя бы одну пару элементов кольца R_D , отвечающих следующим условиям:

$$\exists (p^d; q^d) \in R_D, p^d \neq \mathbf{0}, q^d \neq \mathbf{0} : p^d \cdot q^d = \mathbf{0}. \quad (\text{A.1.9})$$

Элемент кольца p^d называется левым делителем нуля, элемент q^d – правым делителем нуля. В приведенном выражении $\mathbf{0}$ – есть нулевой элемент кольца R_D . Он определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{0} &= \langle 0; 0 \rangle, \mathbf{0} \in R_D, \\ \forall x^d \in R_D \quad x^d \cdot \mathbf{0} &= \mathbf{0} \cdot x^d = \langle 0; 0 \rangle = 0 + \varepsilon \cdot 0. \end{aligned} \right\}$$

Нулевой элемент кольца также может являться делителем нуля, но только при выполнении условия (A.1.9). Нетрудно показать, что искомые элементы p^d и q^d , удовлетворяющие условию (A.1.9), есть следующие элементы кольца R_D :

$$\left. \begin{aligned} (p^d; q^d) &\in R_D, \\ p^d &= 0 + \varepsilon p', \quad q^d = 0 + \varepsilon q' \quad \forall p', q' \in \mathbf{R}^1 \setminus \{0\}. \end{aligned} \right\}$$

Действительно,

$$p^d \cdot q^d = (0 + \varepsilon p') \cdot (0 + \varepsilon q') = 0 + \varepsilon \cdot 0 = \mathbf{0} \quad \forall p', q' \in \mathbf{R}^1 \setminus \{0\}. \quad (\text{A.1.10})$$

Таким образом, доказана справедливость Предположения 3. В соответствии с выражением (A.1.10), рассматриваемое нами кольцо R_D содержит делители нуля, отличные от нулевого элемента. Тогда и сам нулевой элемент также может быть отнесен к делителям нуля.

Очевидно, что множество делителей нуля - I_D - есть некоторое подмножество рассматриваемого нами кольца, наследующее часть его основных свойств и определяющих операций над элементами. Покажем далее, что I_D – есть подкольцо кольца R_D , и все его элементы образуют двусторонний идеал. Итак, для того, чтобы множество делителей нуля являлось подкольцом, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) $\forall p^d, q^d \in I_D \quad p^d + (-q^d) \in I_D$, то есть множество делителей нуля образует подгруппу аддитивной группы кольца;
- 2) $\forall p^d, q^d \in I_D \quad (p^d \cdot q^d) \in I_D$, - замкнутость умножения.

Условия 1) и 2) элементарно выполняются, так как:

$$\left. \begin{aligned} \forall p^d, q^d \in I_D, \quad \forall p', q' \in \mathbf{R}^1 \Rightarrow \\ p^d + (-q^d) = (0 + \varepsilon p') + (-0 - \varepsilon q') = 0 + \varepsilon(p' - q') \in I_D, \\ p^d \cdot q^d = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \in I_D. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом показано, что I_D – есть подкольцо кольца R_D . Подкольцо I_D является двусторонним идеалом (по определению), если для его элементов справедливо следующее условие:

$$\forall p^d \in I_D, \quad \forall x^d \in R_D \quad (p^d \cdot x^d) = (x^d \cdot p^d) \in I_D.$$

Справедливость выполнения данного условия легко проверяема:

$$\left. \begin{aligned} p^d \cdot x^d &= (0 + \varepsilon p') \cdot (x + \varepsilon x') = 0 + \varepsilon(xp') \in I_D, \\ x^d \cdot p^d &= (x + \varepsilon x') \cdot (0 + \varepsilon p') = 0 + \varepsilon(xp') = p^d \cdot x^d. \end{aligned} \right\}$$

Окончательно, мы приходим к следующему выводу: множество делителей нуля образует двусторонний идеал в рассматриваемом нами кольце дуальных чисел. Этот факт сам по себе оказывается немаловажным, так как выявленные свойства необходимы нам при дальнейшем построении множества частных, а также при определении самой операции деления.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4. *Кольцо дуальных чисел R_D есть кольцо с единицей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того, чтобы доказать справедливость данного предположения, необходимо (и достаточно) показать, что существует элемент кольца E (единичный) одновременно обладающий следующими свойствами:

- 1) $\forall x^d \in R_D \quad \exists ! E \in R_D : (!E \cdot x^d) = x^d;$
- 2) $\forall x^d \in R_D \quad \exists E! \in R_D : (x^d \cdot E!) = x^d;$
- 3) $!E = !E \cdot E! = E! = E.$

Элемент кольца $!E$ называется левой мультипликативной единицей, элемент $E!$ – правой мультипликативной единицей. Элемент E удовлетворяющий 1), 2), 3) называется просто единицей кольца.

Не составляет труда показать, что такой единичный элемент кольца существует, он единственный и однозначно определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \exists E \in R_D, \quad E &= \langle 1; 0 \rangle = (1 + \varepsilon \cdot 0) : \\ \forall x^d \in R_D \quad E \cdot x^d &= (1 + \varepsilon \cdot 0) \cdot (x + \varepsilon x') = (x + \varepsilon x') \Rightarrow !E = E, \\ \forall x^d \in R_D \quad x^d \cdot E &= (x + \varepsilon x') \cdot (1 + \varepsilon \cdot 0) = (x + \varepsilon x') \Rightarrow E! = E, \\ !E \cdot E! &= (1 + \varepsilon \cdot 0) \cdot (1 + \varepsilon \cdot 0) = E! \cdot !E = E. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, Предположение 4 справедливо.

Таким образом, определив мультипликативную единицу E для рассматриваемого кольца дуальных чисел R_D , можно перейти и к определению обратного элемента. Говорят, что

произвольный элемент кольца с единицей обладает левым (правым) обратным элементом, если выполняются следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \forall x^d \neq \mathbf{0}, x^d \in R_D \\ \exists !(x^d)^{-1}, !(x^d)^{-1} \in R_D : !(x^d)^{-1} \cdot x^d = E, \\ \exists (x^d)^{-1}!, (x^d)^{-1}! \in R_D : (x^d)^{-1}! \cdot x^d = E. \end{aligned} \right\}$$

При этом, если произвольный элемент кольца обладает и левым, и правым обратным, то между ними справедливо следующее соотношение:

$$(x^d)^{-1}! = (x^d)^{-1}! \cdot \underbrace{(!(x^d)^{-1} \cdot x^d)}_E = !(x^d)^{-1} \cdot \underbrace{(x^d \cdot (x^d)^{-1}!)}_E = !(x^d)^{-1},$$

и, следовательно, они совпадают. В этом случае говорят, что элемент кольца x^d обладает обратным элементом $(x^d)^{-1}$. Само понятие обратного элемента тесно связано с построением частных и операцией деления. Здесь следует помнить о том, что в силу справедливости Предположения 3, кольцо дуальных чисел содержит делители нуля. А это означает, что следующее уравнение

$$\forall a^d, x^d \in R_D, a^d \neq \mathbf{0} \quad a^d \cdot x^d = E \Rightarrow x^d = (a^d)^{-1} \cdot E = (a^d)^{-1},$$

невозможно разрешить относительно x^d для любых отличных от нуля a^d . Действительно, предположим, что элемент a^d является делителем нуля. Тогда:

$$\forall a^d \neq \mathbf{0}, a^d \in I_D \quad a^d \cdot x^d = (0 + \varepsilon a') \cdot (x + \varepsilon x') = 0 + \varepsilon(a'x) \neq E \quad \forall x^d \in R_D.$$

Из приведенного выражения следует, что для делителей нуля невозможно удовлетворить само определяющее обратный элемент тождество. Следовательно, для делителя нуля обратный элемент не существует.

Так как не все элементы кольца R_D дуальных чисел имеют соответствующие им обратные, рассматриваемое нами кольцо не является *телом*, а, следовательно, и не образует *поле* (по определению). При этом само кольцо *коммутативно*, то есть $\forall x^d_1, x^d_2 \in R_D \quad x^d_1 \cdot x^d_2 = x^d_2 \cdot x^d_1$.

Но для элементов кольца R_D , составляющих его некоторое подмножество $R_D^1 \subset R_D$, $R_D^1 = R_D \setminus I_D$, обратный элемент существует и может быть определен однозначно.

Покажем это. Предположим, что для произвольного элемента $x^d \in R_D^1$, обратный $(x^d)^{-1}$ определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \forall x^d \in R_D^1, x^d = x + \varepsilon x', \\ (x^d)^{-1} = \frac{x}{x^2} - \varepsilon \frac{x'}{x^2} = \left\langle \frac{x}{x^2}; -\frac{x'}{x^2} \right\rangle, \quad (x^d)^{-1} \in R_D^1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1.11})$$

Не составляет труда показать, что этот элемент (A.1.11) и будет являться обратным (по определению):

$$\left. \begin{aligned} (x^d)^{-1} \cdot x^d &= \left(\frac{x}{x^2} - \varepsilon \frac{x'}{x^2} \right) \cdot (x + \varepsilon x') = 1 + \varepsilon \cdot 0 = E, \\ x^d \cdot (x^d)^{-1} &= (x + \varepsilon x') \cdot \left(\frac{x}{x^2} - \varepsilon \frac{x'}{x^2} \right) = 1 + \varepsilon \cdot 0 = E, \\ (x^d)^{-1} &= !(x^d)^{-1} = (x^d)^{-1} ! \in R_D^1. \end{aligned} \right\}$$

Иными словами, для любого $a^d \in R_D^1$ уравнение $a^d \cdot x^d = b^d$ всегда имеет единственное решение $x^d = (a^d)^{-1} \cdot b^d, b^d \in R_D^1$.

Очевидно, что все элементы из подмножества R_D^1 (дополненного нулевым элементом), образуют коммутативную мультипликативную группу, так как выполняются соответствующие условия 1) - 4) Предположения 1 (аксиомы группы), рассмотренные для определяющей операции умножения $\odot = \cdot$. Но не образуют коммутативную аддитивную группу по сложению. Поэтому R_D^1 не является кольцом, а, следовательно, и телом. Однако, для его элементов оказывается возможным построение частных следующим образом:

$$\frac{x^d_1}{x^d_2} = x^d_1 \cdot (x^d_2)^{-1} = (x^d_2)^{-1} \cdot x^d_1, \quad x^d_2 \neq 0. \quad (\text{A.1.12})$$

При этом, должны быть справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^d_1}{x^d_2} = \frac{x^d_3}{x^d_4} &\Leftrightarrow x^d_1 \cdot x^d_4 = x^d_2 \cdot x^d_3, \\ \frac{x^d_1}{x^d_2} + \frac{x^d_3}{x^d_4} &= \frac{x^d_1 \cdot x^d_4 + x^d_2 \cdot x^d_3}{x^d_2 \cdot x^d_4}, \\ \frac{x^d_1}{x^d_2} \cdot \frac{x^d_3}{x^d_4} &= \frac{x^d_1 \cdot x^d_3}{x^d_2 \cdot x^d_4}; \quad x^d_2, x^d_4 \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1.13})$$

Проверим их, учитывая при этом данное нами определение обратного элемента и соответствующие свойства умножения для элементов R_D^1 . Для первого соотношения из

(A.1.13): умножим равенство $\frac{x^d_1}{x^d_2} = \frac{x^d_3}{x^d_4}$ справа на $(x^d_2 \cdot x^d_4)$. Тогда:

$$\left. \begin{aligned}
& (x_2^d \cdot x_4^d) = (x_2 + \varepsilon x_2') \cdot (x_4 + x_4') = x_2 x_4 + \varepsilon (x_2' x_4 + x_2 x_4'), \\
& \left(\frac{x_1^d}{x_2^d} \right) \cdot (x_2^d \cdot x_4^d) = \left(\frac{x_1 x_2}{x_2^2} + \varepsilon \left(\frac{x_1 x_2'}{x_2^2} - \frac{x_2 x_1'}{x_2^2} \right) \right) \cdot (x_2 x_4 + \varepsilon (x_2' x_4 + x_2 x_4')) = \\
& = x_1 x_4 + \varepsilon (x_1 x_4' + x_1' x_4) \Rightarrow \left(\frac{x_1^d}{x_2^d} \right) \cdot (x_2^d \cdot x_4^d) = x_1^d \cdot x_4^d; \\
& \left(\frac{x_3^d}{x_4^d} \right) \cdot (x_2^d \cdot x_4^d) = \left(\frac{x_3 x_4}{x_4^2} + \varepsilon \left(\frac{x_3 x_4'}{x_4^2} - \frac{x_4 x_3'}{x_4^2} \right) \right) \cdot (x_2 x_4 + \varepsilon (x_2' x_4 + x_2 x_4')) = \\
& = x_2 x_3 + \varepsilon (x_2' x_3 + x_2 x_3') \Rightarrow \left(\frac{x_3^d}{x_4^d} \right) \cdot (x_2^d \cdot x_4^d) = x_2^d \cdot x_3^d.
\end{aligned} \right\}$$

Второе и третье соотношения из (А.1.13) элементарно проверяются путем сравнений левых и правых частей. Для второго соотношения справедливо:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{x_1^d}{x_2^d} + \frac{x_3^d}{x_4^d} = \left[\frac{x_1 x_2}{x_2^2} + \varepsilon \left(\frac{x_2 x_1' - x_1 x_2'}{x_2^2} \right) \right] + \left[\frac{x_3 x_4}{x_4^2} + \varepsilon \left(\frac{x_4 x_3' - x_3 x_4'}{x_4^2} \right) \right] = \\
& = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_4} \right) + \varepsilon \left(\frac{x_1'}{x_2} + \frac{x_3'}{x_4} - \frac{x_1 x_2'}{x_2^2} - \frac{x_3 x_4'}{x_4^2} \right), \\
& x_1^d \cdot x_4^d + x_2^d \cdot x_3^d = (x_1 x_4 + x_2 x_3) + \varepsilon (x_1 x_4' + x_4 x_1' + x_2 x_3' + x_3 x_2'), \\
& (x_2^d \cdot x_4^d)^{-1} = (x_2 x_4 + \varepsilon (x_2 x_4' + x_2' x_4))^{-1} = \frac{x_2 x_4}{(x_2 x_4)^2} - \varepsilon \left(\frac{x_2 x_4' + x_2' x_4}{(x_2 x_4)^2} \right), \\
& (x_1^d \cdot x_4^d + x_2^d \cdot x_3^d) \cdot (x_2^d \cdot x_4^d)^{-1} = \left[(x_1 x_4 + x_2 x_3) + \varepsilon (x_1 x_4' + x_4 x_1' + x_2 x_3' + x_3 x_2') \right] \cdot \\
& \cdot \left[\frac{x_2 x_4}{(x_2 x_4)^2} - \varepsilon \left(\frac{x_2 x_4' + x_2' x_4}{(x_2 x_4)^2} \right) \right] = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_4} \right) + \varepsilon \left(\frac{x_1'}{x_2} + \frac{x_3'}{x_4} - \frac{x_1 x_2'}{x_2^2} - \frac{x_3 x_4'}{x_4^2} \right) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{x_1^d}{x_2^d} + \frac{x_3^d}{x_4^d} = \frac{x_1^d \cdot x_4^d + x_2^d \cdot x_3^d}{x_2^d \cdot x_4^d}.
\end{aligned} \right\}$$

Для третьего соотношения:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{x_1^d}{x_2^d} \cdot \frac{x_3^d}{x_4^d} = \left(\frac{x_1 x_2}{x_2^2} + \varepsilon \left(\frac{x_1' x_2 - x_1 x_2'}{x_2^2} \right) \right) \cdot \left(\frac{x_3 x_4}{x_4^2} + \varepsilon \left(\frac{x_3' x_4 - x_3 x_4'}{x_4^2} \right) \right) = \\
& = \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4} + \varepsilon \left(\frac{x_1 x_2 (x_3' x_4 - x_3 x_4') + x_3 x_4 (x_1' x_2 - x_1 x_2')}{x_2^2 x_4^2} \right), \\
& x_1^d \cdot x_3^d = x_1 x_3 + \varepsilon (x_1 x_3' + x_3 x_1'), \quad x_2^d \cdot x_4^d = x_2 x_4 + \varepsilon (x_2 x_4' + x_2' x_4), \\
& (x_1^d \cdot x_3^d) \cdot (x_2^d \cdot x_4^d)^{-1} = \left(x_1 x_3 + \varepsilon (x_1 x_3' + x_3 x_1') \right) \cdot \left(\frac{x_2 x_4}{(x_2 x_4)^2} - \varepsilon \left(\frac{x_2 x_4' + x_2' x_4}{(x_2 x_4)^2} \right) \right) = \\
& = \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4} + \varepsilon \left(\frac{x_1 x_2 (x_3' x_4 - x_3 x_4') + x_3 x_4 (x_1' x_2 - x_1 x_2')}{x_2^2 x_4^2} \right) \Rightarrow \frac{x_1^d}{x_2^d} \cdot \frac{x_3^d}{x_4^d} = \frac{x_1^d \cdot x_3^d}{x_2^d \cdot x_4^d}.
\end{aligned} \right\}$$

Приведенные выражения (A.1.13) определяют операции сложения и умножения над некоторым подмножеством, элементами которого являются частные вида (A.1.11). Данное подмножество по сути является изоморфным образом подмножества R_D^1 .

Учитывая выражения (A.1.12) и (A.1.13), а также в силу свойств рассматриваемого подмножества R_D^1 можно сделать вывод о том, что операция деления может быть однозначно определена для всех его элементов.

Таким образом, построение частных, а, следовательно, и определение самой операции деления оказывается возможным только для тех элементов рассматриваемого кольца дуальных чисел, которые принадлежат его подмножеству (коммутативной мультипликативной подгруппе) R_D^1 . Однако, множество элементов кольца, «пригодное» для построения частных можно расширить путем включения в него делителей нуля особым образом. Так, чтобы полученное частное при этом всегда имело бы следующее представление:

$$\frac{p^d}{x^d} = p^d \cdot (x^d)^{-1} = (x^d)^{-1} \cdot p^d = q^d, \quad p^d, q^d \in I_D, \quad x^d \in R_D^1. \quad (\text{A.1.14})$$

В выражении (A.1.14) полученное частное в свою очередь также является делителем нуля. Справедливость этого утверждения легко проверить. Действительно:

$$\frac{p^d}{x^d} = \frac{(0 + \varepsilon p')}{(x + \varepsilon x')} = (0 + \varepsilon p') \cdot (x + \varepsilon x')^{-1} = (0 + \varepsilon p') \cdot \left(\frac{x}{x^2} - \varepsilon \frac{x'}{x^2} \right) = 0 + \varepsilon \frac{p'}{x} \in I_D.$$

Итак, при рассмотрении вопроса построения частных и определения операции деления над элементами кольца дуальных чисел можно сделать следующий вывод. Операция деления может быть определена только лишь над элементами подмножества R_D^1 , а также в том случае,

когда частное определяется в соответствии с (A.1.14). Иными словами, нельзя делить на делители нуля.

Рассмотренные особенности кольца R_D , связанные с вопросами существования обратного элемента и построением частных являются достаточно важными, так как их необходимо учитывать при проведении вычислений над кольцом дуальных чисел.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 5. *Дуальные числа (D) образуют над полем действительных чисел (скаляров) \mathbf{R}^1 правое \mathbf{R}^1 -векторное пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того, чтобы показать справедливость данного предположения, необходимо проверить выполнение следующих условий:

- 1) \mathbf{R}^1 с элементами r_1, r_2, \dots (скалярами) есть тело;
- 2) D образует аддитивную абелеву группу с элементами x^d_1, x^d_2, \dots (вектора);
- 3) $\forall r \in \mathbf{R}^1, x^d \in D \quad x^d \cdot r \in D$, - замкнутость операции умножения (правого) на скаляр;
- 4) $\forall r \in \mathbf{R}^1, x^d_1, x^d_2 \in D \quad (x^d_1 + x^d_2) \cdot r = x^d_1 \cdot r + x^d_2 \cdot r$, - дистрибутивность;
- 5) $\forall r_1, r_2 \in \mathbf{R}^1, x^d \in D \quad x^d \cdot (r_1 + r_2) = x^d \cdot r_1 + x^d \cdot r_2$, - дистрибутивность;
- 6) $\forall r_1, r_2 \in \mathbf{R}^1, x^d \in D \quad x^d \cdot (r_1 \cdot r_2) = (x^d \cdot r_1) \cdot r_2$, - ассоциативность.
- 7) $\forall x^d \in D \quad x^d \cdot 1 = x^d$.

Если условия 1) - 7) выполнены, тогда D есть правое \mathbf{R}^1 -векторное пространство по определению.

Условие 1) очевидно выполняется, так как множество действительных чисел образует поле. Условие 2) выполнено в силу справедливости Предположения 1 и Предположения 2. Здесь также следует отметить, что введенная нами операция суммы двух дуальных чисел удовлетворяет правилам сложения векторов. Проверку условий 3) – 7) можно произвести, рассмотрев соответствующие им выражения:

$$\left. \begin{aligned}
 3) \quad & x^d \cdot r = (x + \varepsilon x') \cdot r = (x \cdot r) + \varepsilon x' \cdot r \in D; \\
 4) \quad & (x^d_1 + x^d_2) \cdot r = (x_1 \cdot r + x_2 \cdot r) + \varepsilon (x'_1 \cdot r + x'_2 \cdot r) = (x_1 + \varepsilon x'_1) \cdot r + (x_2 + \varepsilon x'_2) \cdot r = \\
 & = x^d_1 \cdot r + x^d_2 \cdot r; \\
 5) \quad & (x + \varepsilon x') \cdot (r_1 + r_2) = x \cdot (r_1 + r_2) + \varepsilon x' \cdot (r_1 + r_2) = x \cdot r_1 + x \cdot r_2 + \varepsilon x' \cdot r_1 + \varepsilon x' \cdot r_2 = \\
 & = x^d \cdot r_1 + x^d \cdot r_2; \\
 6) \quad & (x + \varepsilon x') \cdot (r_1 \cdot r_2) = x \cdot r_1 \cdot r_2 + \varepsilon x' \cdot r_1 \cdot r_2 = (x \cdot r_1 + \varepsilon x' \cdot r_1) \cdot r_2 = (x^d \cdot r_1) \cdot r_2; \\
 7) \quad & x^d \cdot 1 = (x + \varepsilon x') \cdot 1 = x \cdot 1 + \varepsilon x' \cdot 1 = x + \varepsilon x' = x^d.
 \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, условия 1) – 7) выполняются и Предположение 5 справедливо.

Так как поле действительных чисел есть коммутативное тело, то условия 3) – 7) остаются справедливыми и для левого умножения вектора на скаляр, т.е. $r \cdot x^d$. Тогда D одновременно образует и левое \mathbf{R}^1 -векторное пространство, очевидно, совпадающее с правым. Поэтому мы можем говорить, что D образует линейное векторное пространство над полем действительных чисел.

Пространство D – конечномерное; имеет размерность равную двум. Каждый его элемент – дуальное число – можно представить в следующем виде (по аналогии с комплексными числами):

$$x^d = \langle x; x' \rangle = x\mathbf{e}_1 + x'\mathbf{e}_2, \quad (\text{A.1.15})$$

где вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – представляют собой базис рассматриваемого пространства. Таким образом, каждое дуальное число можно представить в виде вектора (или точки) на соответствующей дуальной плоскости (евклидовой). При этом действительная и дуальная части числа (A.1.15) могут быть отложены на соответствующих осях (действительная ось и дуальная ось соответственно).

В качестве абсолютной величины дуального числа $[x^d] \in \mathbf{R}^1$ рассмотрим действительную величину, равную длине радиус-вектора соответствующей точки $x^d = \langle x; x' \rangle$ дуальной плоскости. То есть:

$$[x^d] = \sqrt{x^2 + x'^2}.$$

По аналогии с комплексной плоскостью, можно ввести понятие аргумента дуального числа:

$$\varphi = \text{Arg}(x^d), \varphi = \text{arctg}\left(\frac{x'}{x}\right). \quad (\text{A.1.16})$$

Тогда дуальное число можно представить следующим образом («тригонометрическая форма»):

$$x^d = [x^d](\cos(\varphi) + \varepsilon \sin(\varphi)), x = [x^d]\cos(\varphi), x' = [x^d]\sin(\varphi), -\pi < \varphi < +\pi.$$

Произведение и частное двух дуальных чисел в данной форме определится следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1^d \cdot x_2^d &= [x_1^d] \cdot [x_2^d] \cdot (\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \varepsilon \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \\ \frac{x_1^d}{x_2^d} &= \frac{[x_1^d]}{[x_2^d] \cdot \cos(\varphi_2)} (\cos(\varphi_1) - \varepsilon \sin(\varphi_2 - \varphi_1)). \end{aligned} \right\}$$

Множество делителей нуля, образующее идеал I_D , изображается на дуальной плоскости в виде вертикальной прямой, совпадающей с дуальной осью. Данная прямая (ось) разделяет

дуальную плоскость на две полуплоскости. Таким образом, построение частных оказывается возможным только для точек, принадлежащих левой и правой полуплоскости.

Покажем, далее, что множество дуальных чисел D (в силу рассмотренных выше предположений, D – есть линейное векторное пространство) образует метрическое пространство. Для этого необходимо определить некоторую функцию, отвечающую ряду условий и характеризующую расстояние между его произвольными элементами.

Определим расстояние между двумя произвольными точками дуальной плоскости следующим образом:

$$d(x_1^d, x_2^d) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2' - x_1')^2}.$$

Тогда $d(x_1^d, x_2^d)$ – действительная однозначная функция, принимающая только неотрицательные значения и определенная на всем D . Нетрудно показать, что $d(x_1^d, x_2^d)$ удовлетворяет следующим условиям (аксиомам метрического пространства):

- 1) $d(x_1^d, x_2^d) = 0 \iff x_1^d = x_2^d$,
- 2) $d(x_1^d, x_2^d) = d(x_2^d, x_1^d)$,
- 3) $d(x_1^d, x_3^d) \leq d(x_1^d, x_2^d) + d(x_2^d, x_3^d)$.

Справедливость условий 1) и 2) очевидна. Проверку условия 3) (неравенство треугольника) можно провести стандартным образом. Обозначим $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = x_2' - x_1'$, $b_1 = x_3 - x_2$, $b_2 = x_3' - x_2'$. Тогда условие 3) может быть записано следующим образом:

$$\sqrt{\sum_j (a_j + b_j)^2} \leq \sqrt{\sum_j a_j^2} + \sqrt{\sum_j b_j^2}.$$

Возводя обе части неравенства в квадрат, получим:

$$\sum_j a_j^2 + \sum_j b_j^2 + 2\sum_j a_j b_j \leq \sum_j a_j^2 + \sum_j b_j^2 + 2\sqrt{\sum_j a_j^2} \sqrt{\sum_j b_j^2}. \quad (\text{A.1.17})$$

Очевидно, что неравенство (A.1.16) справедливо в силу известного неравенства Коши-Буняковского:

$$\left(\sum_j a_j b_j \right)^2 \leq \sum_j a_j^2 \cdot \sum_j b_j^2.$$

А значит справедливо и условие 3). Таким образом, множество дуальных чисел с расстоянием d образует метрическое пространство.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 6. *Кольцо R_D есть ассоциативная (линейная) алгебра без деления над полем действительных чисел.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того, чтобы показать справедливость данного предположения, необходимо проверить выполнение следующих условий:

- 1) Кольцо R_D есть конечномерное векторное пространство над полем действительных чисел;
- 2) $\forall x_1^d, x_2^d \in R_D \forall r \in \mathbf{R}^1 \quad (r \cdot x_1^d) \cdot x_2^d = x_1^d \cdot (r \cdot x_2^d) = r \cdot (x_1^d \cdot x_2^d)$, - ассоциативность.

Условие 1) очевидно выполнено в силу справедливости Предположения 5 и следствий из него.

Условие 2) может быть проверено непосредственно:

$$\left. \begin{aligned} (r \cdot x_1^d) \cdot x_2^d &= (rx_1 + \varepsilon rx_1') \cdot (x_2 + \varepsilon x_2') = rx_1x_2 + \varepsilon (rx_1x_2' + rx_2x_1'), \\ x_1^d \cdot (r \cdot x_2^d) &= (x_1 + \varepsilon x_1') \cdot (rx_2 + \varepsilon rx_2') = rx_1x_2 + \varepsilon (rx_1x_2' + rx_2x_1'), \\ r \cdot (x_1^d \cdot x_2^d) &= r \cdot ((x_1 + \varepsilon x_1') \cdot (x_2 + \varepsilon x_2')) = r \cdot (x_1x_2 + \varepsilon (x_1x_2' + x_2x_1')) = \\ &= rx_1x_2 + \varepsilon (rx_1x_2' + rx_2x_1'). \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, кольцо дуальных чисел есть ассоциативная алгебра над полем действительных чисел – по определению. При этом, так как само кольцо R_D не является полем (из-за наличия делителей нуля), R_D - есть алгебра без деления. Таким образом Предположение 6 справедливо.

Кроме того, кольцо R_D не является простой алгеброй, так как содержит в себе двусторонний идеал - I_D (Предположение 3), отличный от него самого и от нулевого идеала. Идеал I_D есть нильпотентный идеал (по определению), так как существует целочисленная степень m , такая что

$$I_D^m = \underbrace{I_D \cdot I_D \cdot \dots}_m = \{0\}.$$

Здесь под произведением идеалов подразумеваются всевозможные произведения их элементов [9]. Очевидно, что для идеала I_D состоящего из делителей нуля степень $m=2$. Таким образом, делители нуля составляют множество нильпотентных элементов рассматриваемой алгебры. В свою очередь символ ε , которому соответствует элемент алгебры $\langle 0;1 \rangle$, называется нильпотентным.

Размерность (ранг) алгебры определяется размерностью кольца как конечномерного векторного пространства. Таким образом, дуальные числа как класс объектов образуют алгебру ранга два.

Окончательно, убедившись в справедливости Предположений 1 – 6, можно сделать следующий вывод. Множество дуальных чисел с однозначно определенными над ними операциями сложения и умножения (A.1.4) и (A.1.6) (то есть система с двойной композицией) есть линейная коммутативная ассоциативная алгебра ранга два без деления над полем действительных чисел.

Назовем число (элемент кольца R_D)

$$\bar{x}^d = x - \varepsilon x'$$

сопряженным числу

$$x^d = x + \varepsilon x'.$$

Ясно, что сопряженному числу соответствует симметричное отражение дуального числа относительно вещественной оси дуальной плоскости. Проявление подобной симметрии есть следствие взаимно-однозначного отображения дуального числа в соответствующее ему сопряженное: $x + \varepsilon x' \rightarrow x - \varepsilon x'$. По сути, данное отображение представляет собой автоморфизм, при котором сохраняются соотношения между элементами рассматриваемой алгебры. То есть, если элементу x^d_1 однозначно ставится в соответствие элемент \bar{x}^d_1 , и при этом справедливо какое-либо соотношение, например $x^d_1 \cdot x^d_2 = x^d_3$, то отсюда следует, что справедливо и $\bar{x}^d_1 \cdot \bar{x}^d_2 = \bar{x}^d_3$. Следствием этого, в свою очередь, являются следующие соотношения, связывающие основные операции над дуальными и сопряженными им числами.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^d_1 + \bar{x}^d_2 &= \overline{x^d_1 + x^d_2}, \\ \bar{x}^d_1 \cdot \bar{x}^d_2 &= \overline{x^d_1 \cdot x^d_2}, \\ \frac{\bar{x}^d_1}{\bar{x}^d_2} &= \overline{\left(\frac{x^d_1}{x^d_2} \right)}, \quad \overline{(\bar{x}^d_1)} = x^d_1. \end{aligned} \right\}$$

Введение сопряженного элемента также позволяет определить следующие отображения дуальных чисел на множество действительных чисел:

$$\text{Re} : x^d \rightarrow x, \quad \text{Dp} : x^d \rightarrow x'.$$

Здесь Re - определяет действительную часть дуального числа, а Dp – его дуальную часть. Отображение Re можно представить в «функциональной» форме. Определим его следующим образом, по аналогии с комплексными числами:

$$\text{Re}(x^d) = \frac{x^d + \bar{x}^d}{2}. \quad (\text{A.1.18})$$

К сожалению, представить отображение Dp в форме, аналогичной отображению Im для комплексных чисел оказывается невозможно. Так как в данном случае, в знаменателе соответствующего выражения присутствует делитель нуля:

$$\text{Dp}(x^d) = \frac{x^d - \bar{x}^d}{2 \cdot \varepsilon}.$$

Следовательно, для дуальных чисел не существует «функционального представления» для отображения Dp. Данное обстоятельство создает определенные трудности при анализе рассматриваемого нами класса объектов D , а также при рассмотрении основных свойств и особенностей функции дуального переменного. Также стоит отметить, что при проведении

практических вычислений над кольцом дуальных чисел удастся избежать каких-либо сложностей с определением дуальных частей, так как в данном случае соответствующая операция реализуется программно-алгоритмическим путем. При этом, нет необходимости в явном задании отображения D_r .

Отображение (A.1.18) очевидно является сюръективным, так как $\text{Re}(D) \equiv \mathbf{R}$. Иными словами, соответствующим (A.1.18) образом пространства дуальных чисел является множество элементов действительной оси. Легко показать, что отображение (A.1.18) не является инъективным, а, следовательно, не образует биекцию между элементами из D и \mathbf{R} . Действительно,

$$\text{Re}(x + \varepsilon x') = \text{Re}(x + \varepsilon x'_1) \quad \forall x', x'_1: x' \neq x'_1.$$

Важным для всего дальнейшего изложения является следующий факт – отображение (A.1.18) есть гомоморфизм между алгеброй дуальных чисел и полем действительных чисел. Действительно, для отображения Re не составляет труда проверить справедливость выполнения следующих условий (удовлетворяющее им отображение есть гомоморфизм по определению [9]):

$$\left. \begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y), \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x), \\ f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y). \end{aligned} \right\}$$

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}(x^d_1 + x^d_2) &= \text{Re}(x_1 + x_2 + \varepsilon(x'_1 + x'_2)) = x_1 + x_2 = \text{Re}(x^d_1) + \text{Re}(x^d_2), \\ \text{Re}(r \cdot x^d) &= \text{Re}(rx + \varepsilon rx') = rx = r \cdot \text{Re}(x^d), \\ \text{Re}(x^d_1 \cdot x^d_2) &= \text{Re}(x_1 x_2 + \varepsilon(x_1 x'_2 + x_2 x'_1)) = x_1 x_2 = \text{Re}(x^d_1) \cdot \text{Re}(x^d_2). \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, можно сделать следующий вывод – поле действительных чисел есть гомоморфный образ алгебры дуальных чисел.

Модулем дуального числа назовем такое действительное число, квадрат которого определяет произведение самого дуального числа на сопряженное ему:

$$|x^d| = \sqrt{(x^d \cdot \bar{x}^d)} = \sqrt{(x + \varepsilon x') \cdot (x - \varepsilon x')} = \sqrt{x^2} = \pm x. \quad (\text{A.1.19})$$

То есть модуль дуального числа полностью совпадает с соответствующей величиной его действительной части. При этом выбор знака в выражении (A.1.19) однозначно определяется знаком соответствующей действительной части дуального числа.

Исходя из данного нами определения видно, что модуль дуального числа может быть отрицательным. Это кажется несколько необычным, и, очевидно, приводит к некоторым

топологическим сложностям при описании пространства дуальных чисел D . Однако, приведенное определение модуля само по себе не является противоречивым, так как опирается исключительно на понятие определенного (однозначно) нами сопряженного числа и в соответствии с введенной операцией умножения. Здесь стоит особо отметить, что понятие модуля числа для систем «наиболее общих комплексных чисел» [33, 57] (к которым относятся и дуальные числа - как каноническая система для чисел параболического типа) однозначно не определено. Общим для всех этих систем чисел в контексте определения модуля является лишь связь между самим понятием модуля и понятием сопряженного числа. При этом модуль всегда представляет собой действительное число (необязательно неотрицательное), а сопряженный элемент, в свою очередь, выбирается исходя из того, что произведение дуального числа на его сопряженное также есть действительное число. Связь же между понятием модуля и сопряженного числа для любых систем «наиболее общих комплексных чисел» Z и их алгебраических расширений выражается следующим образом [9, 33, 57]:

$$|Z|^2 = Z \cdot \bar{Z}.$$

Этой связью мы и воспользовались в выражении (А.1.19) при определении модуля дуального числа. Данное же нами выше определение сопряженного элемента вполне согласуется с основным свойством его произведения.

Аналогичное определение модуля дуального числа используется в работах Яглома [61, 62]. Выше уже говорилось о том, что автор данных работ рассматривал комплексные числа и их обобщения исключительно с позиции их геометрических представлений и порождаемых ими геометрий на плоскости. Так, например, дуальным числам соответствует геометрия Галилея, а двойным – геометрия Минковского и т.д. При этом, рассматривая дуальные числа, автор использует понятие модуля, определяемое выражением (А.1.19) при различных геометрических построениях. Это приводит к некоторым довольно необычным представлениям классических геометрических объектов и их свойств при различных движениях. Так, окружность на плоскости в геометрии Галилея представляет собой две вертикальные прямые, параллельные мнимой оси (соответственно, дуальная ось), расстояние между которыми определено согласно с приведенным выше определением модуля дуального числа (А.1.19). При этом естественно сохраняется общее для всех геометрий определение окружности как множества точек, равноудаленных от общего центра. Таким образом, отрицательность модуля дуального числа не противоречит общим аналитическим представлениям и соответствующим им геометрическим изображениям модуля для «самых общих комплексных чисел».

В своих работах [61, 62] Яглом определяет «тригонометрическую форму» дуального числа аналогично комплексным числам, но при этом пользуется понятием модуля числа,

вместо его абсолютной величины (для системы комплексных чисел модуль числа и его абсолютная величина совпадает), как это сделано автором данной работы в выражениях (А.1.19). Само же понятие абсолютной величины числа непосредственно характеризует длину радиус-вектора точки, отвечающей его изображению на плоскости. Итак, Яглом использует следующее представление дуального числа, основываясь на определении его модуля:

$$\left. \begin{aligned} x^d = x + \varepsilon x' = |x^d| \cdot \left(1 + \varepsilon \frac{x'}{|x^d|} \right), \quad |x^d| = x, \\ \varphi = \text{Arg}(x^d) = \frac{x'}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1.20})$$

Очевидно, что приведенное выражение (А.1.20) эквивалентно введенной ранее «тригонометрической формой» дуального числа, где использовано понятие абсолютной величины вместо модуля. Не составляет труда показать, что выражение (А.1.20) переходит в эквивалентное (А.1.16) («тригонометрическая» форма) при использовании следующего очевидного соотношения между абсолютной величиной числа и его модулем:

$$|x^d| = x = [x^d] \cos(\varphi), \quad \text{tg}(\varphi) = \frac{x'}{x}.$$

Таким образом, приведенные формы представления дуального числа на плоскости эквивалентны, за исключением понятия аргумента числа. Здесь стоит отметить следующее. В случае если рассматриваемое дуальное число есть делитель нуля, то соответствующий аргумент числа согласно выражениям (А.1.16) будет равен $\varphi = \pm \pi/2$. Выбор знака при значении аргумента определяется знаком дуальной части числа. Абсолютная величина делителя нуля от нуля отлична. И рассматриваемое число может быть изображено на плоскости в «полярной форме». То есть выражения (А.1.16) позволяют однозначно определить соответствующую делителю нуля точку дуальной плоскости: так, абсолютная величина делителя нуля характеризует расстояние от точки до начала координат, а знак при аргументе позволяет определить на какой из дуальных полуосей (положительной или отрицательной) лежит эта точка. Использование же представления дуального числа в форме (А.1.20) для делителей нуля оказывается не слишком информативным. В данном случае, аргумент числа принимает значения равные $\pm \infty$ - здесь при выборе знака также следует руководствоваться знаком дуальной части делителя нуля. При этом оказывается невозможным сказать что-либо о расстоянии между точкой изображающей рассматриваемое число на дуальной оси и началом координат на дуальной плоскости. Видимо в этом случае требуется вводить некоторое особое расстояние, в общем случае определяемое как разность двух дуальных частей для пары дуальных чисел с одинаковым модулем, или, что эквивалентно, с одинаковой действительной частью. При этом однозначно сказать о том, следует ли

отождествлять понятие особого расстояния с понятием модуля, а понятие модуля с «физическим» расстоянием от центра начала координат дуальной плоскости, для делителей нуля в данном случае не представляется возможным. Этот вопрос в некоторой степени освещается в работах [33, 61].

Несмотря на описанные выше недостатки, представление дуального числа в форме (A.1.20) оказывается весьма удобным. Так, операции сложения и умножения могут быть записаны в форме (A.1.20) достаточно просто:

$$\left. \begin{aligned} x^d_1 + x^d_2 &= |x^d_1| \left(1 + \varepsilon \frac{x'_1}{|x^d_1|} \right) + |x^d_2| \left(1 + \varepsilon \frac{x'_2}{|x^d_2|} \right) = |x^d_1| + |x^d_2| + \varepsilon \left(\frac{x'_1}{|x^d_1|} + \frac{x'_2}{|x^d_2|} \right) = \\ &= x_1 + x_2 + \varepsilon (\varphi_1 + \varphi_2), \\ x^d_1 \cdot x^d_2 &= |x^d_1| \left(1 + \varepsilon \frac{x'_1}{|x^d_1|} \right) \cdot |x^d_2| \left(1 + \varepsilon \frac{x'_2}{|x^d_2|} \right) = |x^d_1| |x^d_2| \left(1 + \varepsilon \left(\frac{x'_1}{|x^d_1|} + \frac{x'_2}{|x^d_2|} \right) \right) = \\ &= x_1 x_2 (1 + \varepsilon (\varphi_1 + \varphi_2)), \\ \varphi_1 &= \text{Arg}(x^d_1) = \frac{x'_1}{x_1}, \quad \varphi_2 = \text{Arg}(x^d_2) = \frac{x'_2}{x_2}. \end{aligned} \right\}$$

Сопряженный элемент, а, следовательно, и операция деления могут быть представлены следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^d &= x(1 - \varepsilon\varphi), \\ \frac{x^d_1}{x^d_2} &= \frac{x^d_1 \bar{x}^d_2}{|x^d_2|^2} = \frac{x_1 (1 + \varepsilon\varphi_1) x_2 (1 - \varepsilon\varphi_2)}{x_2^2} = \frac{x_1}{x_2} (1 + \varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned} \right\}$$

Из приведенных выражений видно, что, как и для любых «наиболее общих комплексных чисел» основные бинарные операции над дуальными числами представляют собой комбинации растяжений/сжатий и поворотов изображающих их векторов на дуальной плоскости. Так же приведенные соотношения прекрасно демонстрируют нам гомоморфность алгебры действительных чисел рассматриваемой нами алгебре дуальных чисел, о чем уже говорилось ранее.

Таким образом, данное определение модуля (A.1.19) дуального числа оказывается весьма удобным при осуществлении основных операций над дуальными числами, а так же при проведении анализа и рассмотрении ряда вопросов, связанных с теорией функции дуального переменного. Это будет продемонстрировано в ходе дальнейшего изложения. Здесь также следует отметить следующий немаловажный момент. При всех достоинствах подобного определения модуля дуального числа, с его помощью, оказывается, невозможно задать топологию пространства дуальных чисел D . Так как, модуль разности двух дуальных чисел

$|x_2^d - x_1^d|$ не может рассматриваться в качестве метрики пространства (по определению), в отличие от, например, комплексных чисел. Поэтому, при рассмотрении вопросов анализа будем пользоваться, фактически, понятием абсолютной величины разности дуальных чисел, или, другими словами, использовать метрику d , введенную выше (см. следствия предположения 5). Подробнее, некоторые вопросы анализа и теории функции дуального переменного будут рассмотрены в следующем разделе данной главы.

Стоит отметить, что при проведении различных вычислений над элементами кольца дуальных чисел использование модуля (А.1.19) так же может приводить к определенным сложностям. Далее, будет показано, что в качестве модуля иногда удобнее рассматривать некоторое отображение, а точнее функцию, определяемую специальным образом.

В завершении описания основных свойств и ряда особенностей модуля дуального числа, можно провести некоторое сравнение между аналогичными свойствами и особенностями для модуля обыкновенного комплексного числа. Итак, в отличие от комплексных чисел, модуль дуального числа не совпадает с его абсолютной величиной. Он может принимать отрицательные значения. В остальном же основные свойства модулей дуальных и комплексных чисел совпадают. Так, и в том и в другом случае, модуль числа есть действительное число; произведение модулей пары чисел равно модулю их произведения и т.д.

Возможность того, что модуль дуального числа может принимать отрицательные значения, кажется несколько необычной сама по себе. Но, как уже было показано выше, все основные свойства модуля при этом выполнены. Можно проверить еще одно, косвенно связанное с самим понятием делителя нуля, и вытекающее из его определения. А именно, определение модуля дуального числа, согласно выражению (А.1.19), никак не противоречит следующему общему признаку делителей нуля – равенства нулю их модуля. Абсолютная же величина делителей нуля, естественно, от нуля отлична.

В заключение данного раздела стоит отметить, что так как рассматриваемая алгебра дуальных чисел есть алгебра без деления, законы сокращения для делителей нуля не выполняются. Иначе говоря, сокращать на делители нуля нельзя. Это может быть легко проиллюстрировано:

$$(x + \varepsilon x') \cdot (0 + \varepsilon p') = x \cdot (0 + \varepsilon p').$$

Алгебру дуальных чисел также можно рассматривать как некоторое расширение (алгебраическое) поля действительных чисел, получаемое путем присоединения к нему дополнительного элемента с определенными свойствами. Как показано в книгах [9, 70], такой элемент может быть получен как корень неразложимой на линейные множители над полем

действительных чисел квадратичной формы (в простейшем случае обыкновенного квадратного уравнения). Подобная схема «построения» дополнительного элемента соответствует алгебрам Клиффорда. Более подробно это будет рассмотрено в следующем разделе.

Итак, в данном разделе работы описаны основные алгебраические свойства и алгебраические конструкции дуальных чисел как системы с двойной композицией.

А.2 Функция дуального переменного

В данном разделе диссертационной работы осуществляется попытка определить основные свойства и ряд особенностей для функции дуального переменного. Необходимость рассмотрения данных аспектов связана напрямую с проведением вычислений над кольцом дуальных чисел. Общее изложение соответствующей теории в данном разделе выполнено по возможности строго с математической точки зрения, но не претендует на общую полноту, так как это не является основной целью настоящей работы.

Для нужд практических вычислений кажется вполне естественной и обоснованной необходимостью в определении ряда основных свойств и особенностей функции дуального переменного. Так как, на практике могут остро возникнуть вопросы, касающиеся основных областей анализа, связанные, например, с непрерывностью рассматриваемой функции дуального переменного, ее дифференцируемостью и т.д. И конечно, вышеозначенные аспекты могут оказывать значительное влияние при проведении практических вычислений на ЭВМ и реализации различных алгоритмов, использующих математический аппарат дуальных чисел. Более того, без формирования сопутствующей теории, определяющей основные свойства функции дуального переменного, окажется невозможным построение дуального представления для произвольной функции действительного переменного, необходимость в котором (при проведении различных вычислений) очевидна.

Таким образом, описав основные аналитические свойства функции дуального переменного, нам предоставляется возможность их использования при построении численных алгоритмов, в первую очередь – численного дифференцирования, что и будет показано в ходе дальнейшего изложения.

Итак, для выявления основных необходимых нам свойств и особенностей функции дуального переменного для начала следует определить топологию дуальной плоскости. В предыдущем разделе показано, что пространство дуальных чисел D есть метрическое пространство, с функцией, определяющей расстояния между элементами d , представляющей

собой обычную евклидову метрику. Так же данная метрика может быть определена как абсолютная величина разности двух произвольных элементов дуальной плоскости.

Как известно, для задания топологии пространства необходимо указать систему окрестностей. Пусть $x^d_0 \in D$ - произвольная точка дуальной плоскости, $\varepsilon > 0$ - любое действительное число. Тогда назовем ε -окрестностью

$$U_{x^d_0} = U(x^d_0, \varepsilon)$$

точки $x^d_0 \in D$ совокупность точек из $x^d \in D$, определяемую следующим образом:

$$U_{x^d_0} = \{x^d \in D : [x^d - x^d_0] < \varepsilon, \varepsilon > 0\}. \quad (\text{A.2.1})$$

То есть база окрестностей произвольной точки дуальной плоскости определяется набором кругов радиуса ε с центром в точке x^d_0 . Данное определение ε -окрестности для пространства дуальных чисел D по сути полностью эквивалентно аналогичному определению для комплексных чисел [15, 57].

Вообще говоря, задание топологии пространства в общем случае подразумевает определение в нем некоторого класса открытых множеств. Такому классу множеств характерны следующие свойства. Во-первых, подобный класс открытых множеств должен содержать как пустое множество, так и включать в себя все рассматриваемое пространство. Во-вторых, пересечение конечного числа открытых множеств рассматриваемого класса или объединение любого их числа, также есть открытое множество. Исходя из этого и используя введенное понятие ε -окрестности (A.2.1), определим открытое множество пространства дуальных чисел следующим образом. Пусть x^d - произвольная точка множества Ω , где Ω – какое-либо множество из D . Тогда множество Ω назовем *открытым множеством*, если для любой его точки x^d найдется окрестность U_{x^d} вида (A.2.1), целиком лежащая в Ω . Данное определение открытого множества пространства дуальных чисел D опять же является полностью эквивалентным соответствующему определению для пространства комплексных чисел \mathbb{C} , которое может быть найдено в работах [15, 57]. Да и вообще, приведенная выше формулировка самого понятия «открытое множество», может быть использована применительно к любым метрическим пространствам.

Далее, опираясь на введенные для пространства дуальных чисел смежные понятия ε -окрестности и открытого множества, определим необходимые элементы классического анализа применительно к рассматриваемому пространству D . Естественно ожидать, что приводимые ниже формулировки полностью эквивалентны соответствующим понятиям из комплексного и действительного анализа, так как они, по сути, могут быть обобщены на любые конечномерные метрические пространства.

В ряде определений и теорем комплексного и действительного анализа используется, для удобства, понятие проколотой окрестности. Дадим эквивалентное определение для рассматриваемого пространства D . Назовем проколотой окрестностью $\bar{U}_{x_0^d}$ точки x_0^d из D следующее множество точек:

$$\bar{U}_{x_0^d} = U_{x_0^d} \setminus x_0^d. \quad (\text{A.2.2.})$$

Предельную точку множества при рассмотрении пространства дуальных чисел можно определить следующим образом. Пусть M - некоторое множество из D . Тогда точка $x^d \in D$ называется предельной точкой множества $M \subset D$, если любая проколотая окрестность \bar{U}_{x^d} (A.2.2) содержит, по крайней мере, одну точку из M . Сформулировав понятие предельной точки, можно перейти к определению замкнутого множества. Множество M из D , содержащее все свои предельные точки, называется замкнутым. Множество, получающееся при присоединении к M всех его предельных точек, называется его замыканием - $[M]$. Аналогичные понятия из комплексного и действительного анализа содержатся в работах [15, 57].

Для пространства комплексных чисел \mathbb{C} естественно его расширение путем добавления идеального элемента – бесконечно удаленной точки $z=\infty$ [15, 57]. Так обеспечивается замыкание комплексной плоскости (и ее компактификация). Известно, что расширенная комплексная плоскость имеет наглядное геометрическое представление – это обеспечивается путем введения т.н. стереографической проекции – однозначного отображения точек комплексной плоскости на поверхность сферы единичного радиуса (сфера Римана). При этом вводится понятие сферической метрики – как эвклидова расстояния между двумя точками единичной сферы, являющихся изображениями соответствующих точек комплексной плоскости. Обеспечим аналогичное расширение дуальной плоскости D путем присоединения к ней бесконечно удаленного элемента $x^d=\infty$. При этом, добавляя данный элемент к кольцу дуальных чисел, необходимо определить для него правила коммутации с обычными элементами кольца. При рассмотрении соответствующих алгебр действительных и комплексных чисел, элемент ∞ - есть идеальный элемент (идеальное число), так как он образует идеал в рассматриваемых кольцах (согласно определенным для него правилам коммутации с другими элементами) [9]. Определим правила коммутации бесконечно удаленной точки $x^d=\infty$ с другими элементами дуальной плоскости так, чтобы этот элемент также был идеальным. Получим:

$$\left. \begin{aligned} x^d \pm \infty &= \infty, \\ x^d \cdot \infty &= \infty, \\ \frac{x^d}{\infty} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\infty}{x^d} &= \infty. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.3})$$

При этом, естественно, неопределенными останутся значения выражений вида:

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{\mathbf{0}}{\infty}, \frac{\infty}{\mathbf{0}}.$$

Полученные выражения (A.2.3) аналогичны соответствующим выражениям для элементов расширенной комплексной плоскости [57, 61, 65]. Таким образом, дополняя кольцо дуальных чисел идеальным элементом $x^d = \infty$ и определив правила его коммутации согласно (A.2.3), получаем расширенную дуальную плоскость - \bar{D} . Что же касается аналога стереографической проекции для дуальных чисел, стоит отметить, что вариант ее построения содержится в книге [61]. Согласно данной работе, аналогом сферы Римана для расширенной дуальной плоскости служит круговой цилиндр единичного радиуса, одна из образующих которого совпадает с дуальной (мнимой) осью. Но здесь следует принять во внимание следующее. В работе [61] в качестве расстояния между двумя элементами дуальной плоскости автор рассматривает не эвклидово расстояние, а, по сути, модуль их разницы – в соответствии с определением модуля дуального числа. Поэтому введение эквивалентной «цилиндрической» метрики для дуальных чисел кажется несколько неоднозначным.

Введение понятия предельной точки и рассмотрение расширенной дуальной плоскости является важным с точки зрения описания топологии пространства дуальных чисел, так как они позволяют осуществить переход к рассмотрению вопросов сходимости. Следуя работам по классическому и комплексному анализу [15, 57], дадим определение последовательности дуальных чисел. Последовательностью дуальных чисел $\{a_n\}$ назовем отображение множества неотрицательных целых чисел на плоскость дуального переменного, то есть:

$$\{a_n\}: N = 1, 2, \dots \rightarrow D.$$

Назовем точку a предельной точкой последовательности $\{a_n\}$, если в любой ее окрестности U_a найдется бесконечно много элементов этой последовательности. Соответственно, последовательность $\{a_n\}$, имеющая единственную предельную точку a на расширенной дуальной плоскости \bar{D} , называется сходящейся.

Дадим определение предела последовательности дуальных чисел. Это определение само собой является полным аналогом определения предела последовательности в классическом и комплексном анализе [57]. Итак, пределом последовательности дуальных

чисел $\{a_n\}$ назовем точку a_0 из D , такую что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер элемента $N(\varepsilon)$, начиная с которого при $n > N(\varepsilon)$ выполняется условие $[a_n - a_0] < \varepsilon$. При этом очевидно, что выражение $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ распадается на два эквивалентных: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Re}(a_n)) = \text{Re}(a_0)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Dp}(a_n)) = \text{Dp}(a_0)$ соответственно. В самом определении предела последовательности используется понятие абсолютной величины дуального числа, а не модуля. В противном случае, дуальная часть предела последовательности была бы не ограничена.

Далее, непосредственно перейдем к понятию функции дуального переменного. Определим ее следующим образом. Под *функцией дуального переменного*, определенной на некотором множестве M , будем понимать следующее отображение:

$$f_D : x^d \in M \rightarrow \omega \in \bar{D}, \quad M \subset \bar{D}. \quad (\text{A.2.4})$$

То есть будем считать, что на множестве $M \subset \bar{D}$ определена функция дуального переменного f_D , если задано правило, согласно которому элементам x^d множества M ставится в соответствие дуальное число ω . Другими словами, каждому дуальному числу x^d - аргументу функции f_D , соответствует ее определенное значение - ω , так же являющееся дуальным числом. Приведенное определение, по сути, повторяет стандартное определение понятия функции, хорошо известное из анализа [57]. Здесь следует сразу отметить, что соответствие, устанавливаемое отображением вида (A.2.4) между аргументом рассматриваемой функции дуального переменного и ее значением ω , может быть неоднозначным. То есть, например, одному и тому же значению аргумента могут соответствовать разные значения функции. В этом случае, рассматриваемая функция будет являться многозначной по определению. В действительном и комплексном анализе, вопросы, связанные с теорией многозначных отображений в той или иной степени освещаются в работах [21, 57]. В настоящей же работе рассматриваются только однозначные функции дуального переменного. Это связано с тем, что при проведении практических вычислений в ходе решения различных задач, в подавляющем большинстве случаев используются только однозначные функции. Помимо этого, описание самой теории функции дуального переменного не является основной целью настоящей работы, поэтому ряд напрямую не связанных с ее возможными приложениями вопросов может быть опущен. Таким образом, приведенное определение будем рассматривать как определение именно однозначной функции дуального переменного.

Естественно, отображение (A.2.4) может также и не быть взаимно-однозначным. То есть, одному и тому же значению функции дуального переменного могут соответствовать различные значения ее аргументов. В соответствии с принятой терминологией в теории

функции комплексного переменного, будем называть взаимно-однозначную функцию дуального переменного однолистной [15, 57].

Очевидно, что функция дуального переменного, как и функция комплексного переменного, может быть задана двумя действительными функциями. То есть, представлена в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x^d), v = v(x^d), \\ u(\cdot), v(\cdot) &: M \subset \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}, \\ \omega &= f_D(x^d) = u(x^d) + \varepsilon v(x^d). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.5})$$

Полученному представлению пары действительных функций дуального переменного u и v (A.2.5) очевидно, эквивалентно следующее:

$$\left. \begin{aligned} x^d &= x + \varepsilon x' \in M \subset \bar{D}, \\ u &= u(x, x'), v = v(x, x'), \\ u, v &: M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbf{R}, M_1 = \text{Re}(M), M_2 = \text{Dp}(M). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.6})$$

Таким образом, в ходе дальнейшего изучения свойств и особенностей функции дуального переменного будем использовать полученные для нее представления (A.2.5) и (A.2.6). Требования, предъявляемые к функциям u и v , определяющим функцию дуального переменного, будут изложены ниже.

Далее, переходим к понятию, которое играет значительную роль в действительном и комплексном анализе. Дадим определение предела функции дуального переменного, руководствуясь при этом введенными ранее понятиями проколотой и ε -окрестности. Число $A \in \bar{D}$ называется пределом функции $f_D(x^d)$ дуального переменного, определенной в некоторой проколотой окрестности \bar{U}_a точки a расширенной дуальной плоскости, при x^d стремящемся к a ,

$$\lim_{x^d \rightarrow a} f_D(x^d) = A, \quad (\text{A.2.7})$$

если для любой, наперед заданной ε -окрестности U_A точки A , найдется такая проколотая окрестность \bar{U}_a , что значения функции от точек, принадлежащих такой окрестности, расположены внутри U_A . Или, то же самое, на языке «эпсилон-дельта»: число A называется пределом функции дуального переменного в точке a , если для любого действительного $\varepsilon > 0$ найдется такое число δ , что при любом x^d , принадлежащем $0 < |x^d - a| < \delta$, $|f_D(x^d) - A| < \varepsilon$. Естественно, приведенные определения для понятия предела функции дуального переменного по своей форме аналогичны используемым в действительном и комплексном анализе [15, 57].

Следует отметить, что, так как функция дуального переменного может быть представлена в виде $f_D = u + \varepsilon v$ согласно (A.2.5), а A есть $\text{Re}(A) + \varepsilon \text{Dp}(A)$, то выражение (A.2.7), очевидно, равносильно следующим:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x^d \rightarrow a} u(x^d) &= \text{Re}(A), \\ \lim_{x^d \rightarrow a} v(x^d) &= \text{Dp}(A). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.8})$$

Так как приведенные формулировки понятия предела функции дуального переменного в целом аналогичны соответствующим формулировкам для функции комплексного переменного (а также и действительного) и, по сути, также «читаются», то кажется вполне очевидным тот факт, что основные теоремы о пределе функции в точке остаются справедливы и в рамках «дуального» анализа. К таким теоремам можно отнести, например, теорему о пределе суммы и т.д. Здесь, однако, следует принять во внимание некоторые различия между алгебраическими свойствами комплексных и дуальных чисел. Например, наличие делителей нуля у последних, может приводить к неопределенности при построении частных. Само собой, это должно отражаться и при проведении различных операций над функциями и их пределами. Однако на общих формулировках соответствующих теорем это не сказывается. Так как всегда можно определенным образом представить результат деления на делитель нуля. Например, путем введения идеальных чисел особого рода, как это делается в работах [61, 62]. При этом, естественно, требуется как-то доопределить дуальную плоскость, добавив туда эти числа. На практике это осуществляется путем построения соответствующей стереографической проекции. Более подробно останавливаться на вопросах расширения дуальной плоскости ее дополнением числами особого рода нет необходимости, так как в ряде интересующих нас теоретических вопросов, как это будет продемонстрировано в ходе последующего изложения, эти трудности удастся обойти. К тому же, при проведении практических вычислений над кольцом дуальных чисел, деление на делитель нуля, вообще говоря, явление почти исключительное. Это также будет показано далее.

Теперь перейдем к важному для нас понятию непрерывности функции дуального переменного. Анализ данного и сопутствующих ему вопросов имеет первостепенную важность, так как в большинстве случаев, при проведении любых вычислений на практике, непрерывность функции во многом определяет саму возможность их осуществления.

Начнем с непрерывности в точке. Само понятие непрерывности функции в точке в классическом и комплексном анализе тесно связано с соответствующим понятием предела [57]. Итак, назовем функцию дуального переменного $f_D(x^d)$, определенную в некоторой окрестности U_a точки $a \in \bar{D}$, непрерывной в этой точке, если существует предел

$$\lim_{x^d \rightarrow a} (f_D(x^d)) \rightarrow f_D(a).$$

Или, тоже самое, на языке «эпсилон-дельта»: функция $f_D(x^d)$ называется непрерывной в точке a , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ , что при $0 < |x^d - a| < \delta$, выполняется $|f_D(x^d) - f_D(a)| < \varepsilon$. Приведенные определения имеют форму, аналогичную соответствующим определениям действительного и комплексного анализа. Поэтому, в силу уже изложенных предположений об эквивалентности основных теорем действительного, комплексного и «дуального» анализа, можно считать, что в рассматриваемом случае элементарные теоремы, сопутствующие понятию непрерывности функции в точке, также остаются справедливы. К ним можно отнести, например, теорему о непрерывности в точке суммы двух функций и т.д. Пользуясь этим, перенесем из классического анализа на дуальную плоскость понятие непрерывности функции на множестве. Функция дуального переменного $f_D(x^d)$ называется непрерывной на некотором множестве M , если она определена и непрерывна в каждой точке этого множества. Очевидно, что для функции дуального переменного, непрерывной на замкнутом множестве, справедливы следующие свойства, аналогичные соответствующим свойствам из действительного и комплексного анализа [15, 57]. Так, непрерывная на замкнутом множестве M функция $f_D(x^d)$ ограничена (по абсолютной величине), то есть существует такое число A , что для любых точек из M , $|f_D(x^d)| \leq A$. Так же, рассматриваемая функция $f_D(x^d)$ достигает на M своей верхней и нижней грани. Помимо этого, функция дуального переменного, непрерывная на замкнутом множестве, равномерно непрерывна. То есть, для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$, такое, что для любых x^{d_1} и x^{d_2} из M , $|f_D(x^{d_1}) - f_D(x^{d_2})| < \varepsilon$ при $|x^{d_1} - x^{d_2}| < \delta$. Доказательства этих свойств можно найти в книгах по действительному и комплексному анализу [15, 57].

Теперь мы готовы перейти к вопросам, связанным с дифференцируемостью функции дуального переменного. Их рассмотрение имеет первостепенную важность, так как позволяет, как и в случае функции комплексного переменного, определить «общую аналитическую структуру» функции. Это очень важно с точки зрения построения численных алгоритмов и реализации практических вычислений над кольцом дуальных чисел, так как, например, для функций действительного переменного, очевидно, требуется построить их дуальное представление, о чем уже было сказано в начале текущего раздела.

В теории функции комплексного переменного основополагающими являются понятия комплексной дифференцируемости (\mathbb{C} -дифференцируемость), и непосредственно вытекающее из него общее понятие аналитической функции [15, 57]. Так как именно условие комплексной дифференцируемости определяет основные требования, предъявляемые к функциям u и v , тем самым определяя и саму функцию комплексного переменного $f_C = u + iv$. Условие \mathbb{C} -дифференцируемости в теории функции комплексного переменного носит

название «условие Коши-Римана» [15, 33, 57]. Прямым следствием из него является то, что функции u и v удовлетворяют уравнению Лапласа, и, следовательно, могут быть определены как различные комбинации из его частных решений. Это, в свою очередь, позволяет построить соответствующий комплексный аналог для функции действительного переменного. Соответствующие примеры построения для элементарных функций приведены, например, в книгах [15, 33, 57].

Таким образом, определив для функции дуального переменного соответствующее условие D -дифференцируемости, удастся получить требования (аналог уравнений Коши-Римана), предъявляемые к паре действительно-значных функций u и v , согласно принятому представлению (А.2.6) определяющих и саму функцию $f_D(x^d)$. При этом оказывается, что предъявляемые к u и v требования проще, чем в случае функции комплексного переменного и дают гораздо больше информации об аналитической структуре самой функции дуального переменного.

В ходе дальнейшего изложения будет получено условие D -дифференцируемости. Это будет сделано, в первую очередь, исходя из общности алгебраических свойств т.н. «самых общих комплексных чисел», то есть чисел одинаковой алгебраической природы, в класс которых включены, образуя при этом каноническую систему чисел параболического типа, рассматриваемые дуальные числа [33, 61]. Таким образом, можно ожидать, что условие комплексной дифференцируемости, вообще говоря, может быть обобщено и на весь класс «самых общих комплексных чисел». И во всех возможных случаях для пары действительно-значных функций u и v , задающей «функцию самого общего комплексного переменного», будут определены соответствующие уравнения Коши-Римана.

Следует отметить, что уравнения Коши-Римана для функции дуального переменного приведены в работе Молчанова [39]. Однако, судя по всему, они получены исходя из предположения о распространении свойства конформности отображения в точке [15, 57] на аналитические функции дуального переменного, а не непосредственно из понятия D -дифференцируемой функции.

Итак, сначала сформулируем понятие \mathbf{R} -дифференцируемости в точке для функции дуального переменного $f_D = u + \varepsilon v$. Пусть функция f_D определена в некоторой окрестности точки $x^d_0 = x_0 + x'_0$, $x^d_0 \in D$ и принимает в ней конечные значения. Тогда функция f_D \mathbf{R} -дифференцируема (дифференцируема в смысле действительного анализа) в точке x^d_0 , если u и v дифференцируемы как функции от (x, x') в точке (x_0, x'_0) . Приведенное определение понятия \mathbf{R} -дифференцируемости функции дуального переменного в точке, в целом повторяет (что вполне естественно) соответствующее ему определение комплексного анализа, которое может

быть найдено в книгах [15, 33, 57]. То есть дифференциал **R**-дифференцируемой функции дуального переменного в точке x^d_0 определяется следующим образом:

$$df_D|_{x^d_0} = du + \varepsilon dv = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x^d_0} dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x'} \right) \Big|_{x^d_0} dx' = \frac{\partial f_D}{\partial x} \Big|_{x^d_0} dx + \frac{\partial f_D}{\partial x'} \Big|_{x^d_0} dx'. \quad (\text{A.2.9})$$

Таким образом, само понятие **R**-дифференцируемости функции дуального переменного в точке, по своей сути, опирается на существование соответствующих частных производных в точке x^d_0 функций $u(x, x')$ и $v(x, x')$ по x и x' . Но, вообще говоря, из их существования еще не следует **R**-дифференцируемость, как это показано в книге [57]. Другими словами, **R**-дифференцируемость функции дуального переменного в точке означает, что ее приращение в малой окрестности этой точки может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta f_D = A_1 \Delta x + A_2 \Delta x' + o([\Delta x^d]), \quad \Delta x^d \rightarrow \mathbf{0}, \quad A_1, A_2 \in D,$$

и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное δ , что $[\Delta f_D - A_1 \Delta x - A_2 \Delta x'] < \varepsilon [\Delta x^d]$ при $[x^d - x^d_0] < \delta$.

После определения понятия **R**-дифференцируемой функции в точке, в теории функции комплексного переменного сразу же осуществляется плавный переход к понятию комплексной дифференцируемости функции (в точке), и в явной форме определяется само условие комплексной дифференцируемости («условие Коши-Римана») [15, 33, 57]. Поступим аналогичным образом. Введем эквивалентное комплексной дифференцируемости понятие D -дифференцируемости в точке для функции дуального переменного. Итак, функция f_D называется D -дифференцируемой в точке x^d_0 из D , если найдется дуальное число A , такое, что ее приращение в окрестности $U_{x^d_0}$ этой точки определяется следующим образом:

$$\Delta f_D = f_D(x^d) - f_D(x^d_0) = A \cdot \Delta x^d + o(\Delta x^d). \quad (\text{A.2.10})$$

Далее, записав отношение приращения Δf_D функции к приращению аргумента Δx^d , и устремляя последний к нулю, получим, очевидно, определение понятия производной функции дуального переменного в точке:

$$\lim_{\Delta x^d \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\Delta f_D}{\Delta x^d} = \lim_{\Delta x^d \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f_D(x^d) - f_D(x^d_0)}{x^d - x^d_0} = f'_D(x^d_0).$$

В книгах по теории функции комплексного переменного [15, 57] само условие комплексной дифференцируемости вместе с выражением для комплексной производной в представлении (A.2.10) получается весьма просто и изящно. Для этого в выражении для **R**-дифференциала функции комплексного переменного используется замена переменных и соответствующее ей представление для дифференциалов dx и dy :

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad z, \bar{z} \in \mathbb{C}, \\ x &= \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.11})$$

Тогда выражение для \mathbf{R} -дифференциала принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} df_c &= B_1 dz + B_2 d\bar{z} \Big|_{z_0}, \\ B_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_c}{\partial x} - i \frac{\partial f_c}{\partial y} \right) \Big|_{z_0} = \frac{\partial f_c}{\partial z} \Big|_{z_0}, \quad B_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_c}{\partial x} + i \frac{\partial f_c}{\partial y} \right) \Big|_{z_0} = \frac{\partial f_c}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.12})$$

Сравнивая первое из выражений (A.2.12) с выражением, определяющим дифференциал функции комплексного переменного в точке (аналогичным (A.2.10)), получаем, что условие комплексной дифференцируемости функции в точке, очевидно, есть

$$B_2 = \frac{\partial f_c}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0. \quad (\text{A.2.13})$$

Условие (A.2.13), как известно, является основополагающим в теории функции комплексного переменного [15, 33, 57]. Прямым следствием из него являются уравнения Коши-Римана, налагающие ограничения на действительно-значные функции u и v . Условие комплексной дифференцируемости в первую очередь определяет понятие голоморфной (или аналитической) функции, для которой формулируются основные теоремы комплексного анализа.

Вполне естественным кажется предположение, что условие комплексной дифференцируемости (A.2.13) может быть обобщено и на «самые общие комплексные числа». В силу тех общих соображений, о которых уже неоднократно говорилось выше, например, когда обсуждался вопрос переноса основных теорем и понятий комплексного анализа в пространство дуальных чисел. Более того, эта возможность отмечается в книге [33], на примере рассмотрения двойных чисел. Поэтому, для дуальных чисел можно воспользоваться тем же подходом для получения условия D -дифференцируемости в точке функции дуального переменного (условия ее аналитичности), что используется и для комплексных чисел.

Итак, следуя вышеизложенным путем для получения условия D -дифференцируемости, в выражении (A.2.13) необходимо представить дифференциалы dx и dx' через соответствующие им дифференциалы дуального и сопряженного ему переменного. Для этого необходимо воспользоваться соотношениями, определяющими связи между ними (аналогично (A.2.11)). Тогда соответствующее выражение для дифференциала dx имеет следующий вид:

$$x = \frac{x^d + \bar{x}^d}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} (dx^d + d\bar{x}^d).$$

К сожалению, получить подобным образом выражение для дифференциала dx' оказывается невозможно, так как для дуальных чисел отсутствует аналитическое представление для мнимой части числа, в форме, аналогичной соответствующему представлению для комплексных чисел (A.2.11). Это происходит вследствие того, что не представляется

возможным определить значение выражения, являющегося частным при делении на делитель нуля:

$$x' = \frac{x^d - \bar{x}^d}{2\varepsilon}.$$

Конечно, можно было бы попытаться доопределить дуальную плоскость числами особого рода и определить правила их коммутации, как это сделано в книге [61]. Тогда при делении на делитель нуля соответствующему частному отвечало бы свое такое особое число. Однако использование подобных чисел в данном случае приводит лишь к неопределенностям, и поэтому кажется нецелесообразным. Вследствие этого определить соответствующее выражение для дифференциала dx' таким путем не удастся.

Поэтому, для получения условия D -дифференцируемости функции дуального переменного воспользуемся непосредственно аппаратом самых общих комплексных чисел [33, 61], о которых уже неоднократно упоминалось ранее. Оказывается, что для них удастся получить обобщенное условие комплексной дифференцируемости, а также общее представление для комплексной производной. И требуемое условие D -дифференцируемости в точке для функции дуального переменного может быть получено как частный случай обобщенного условия. Общие идеи получения обобщенного условия Коши-Римана прослеживаются в работах [39, 40] и книге [61]. В ходе дальнейшего изложения, будет представлен вывод данного условия, полученный автором настоящей работы.

Исчерпывающее описание «самых общих комплексных чисел» дается в книгах [33, 61]. Так, в книге Яглома [61], они представлены как расширение алгебры действительных чисел путем присоединения к ней т.н. особого элемента и определения правил коммутации между ними. Причем особый элемент является корнем квадратного уравнения самого общего вида. В книге [33] «самые общие комплексные числа» вводятся как вектора на плоскости, для которых определены правила их сложения и умножения. При этом соотношение, определяющее особый элемент, получается исходя из предположения о том, что произведение двух векторов на плоскости также есть вектор на плоскости. А сама операция умножения векторов ассоциативна.

Итак, оперируя в ходе дальнейшего изложения понятием «самого общего комплексного числа», будем придерживаться его определения согласно книге [61]. То есть, под «самым общим комплексным числом», будем подразумевать число вида

$$Z = x + Ey,$$

где E – особый элемент, удовлетворяющий решению квадратного уравнения с действительными коэффициентами

$$x^2 + q_0x + q_1 = 0, \quad q_0, q_1 \in \mathbf{R}, \quad (\text{A.2.14})$$

в независимости от знака его дискриминанта $\Delta=q_0^2-4q_1$. Основные операции – сложение и умножение для чисел Z , вводятся исходя из общих алгебраических соображений их коммутативности и ассоциативности, то есть привычным для нас образом:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (x_1 + Ey_1) + (x_2 + Ey_2) = (x_1 + x_2) + E(y_1 + y_2), \\ Z_1 \cdot Z_2 &= (x_1 + Ey_1) \cdot (x_2 + Ey_2) = x_1x_2 + Ex_1y_2 + Ex_2y_1 + E^2y_1y_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.15})$$

Так как особый элемент E удовлетворяет квадратному уравнению (A.2.14) по определению, то, очевидно, справедливо следующее соотношение:

$$E^2 = -q_0E - q_1. \quad (\text{A.2.16})$$

Подставляя соотношение (A.2.16) во второе из выражений (A.2.15), получим следующее представление для произведения двух самых общих комплексных чисел:

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + Ey_1) \cdot (x_2 + Ey_2) = (x_1x_2 - q_1y_1y_2) + E(x_1y_2 + x_2y_1 - q_0y_1y_2). \quad (\text{A.2.17})$$

Таким образом, любая пара действительных чисел (q_0, q_1) задает несчетное множество систем комплексных чисел, основные операции над которыми определяются согласно выражениям (A.2.15) и (A.2.17).

В работах [33, 61, 62] показано, что рассматриваемая система самых общих комплексных чисел в общем случае распадается на три подсистемы. Это обеспечивается наложением определенных условий (соотношений) на пару действительных чисел (q_0, q_1) . Оказывается, данные условия тесно связаны с вопросами построения обратного элемента, и, соответственно, с определением самой операции деления. Покажем это, следуя [33]. Для этого воспользуемся общими алгебраическими понятиями единичного и обратного элемента и связью между ними [9]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{1} &= \langle 1; 0 \rangle = 1 + E \cdot 0, \\ Z \cdot Z^{-1} &= \mathbf{1}. \end{aligned} \right\}$$

Тогда, обратный элемент $Z^{-1}=a+Eb$ для числа $Z=x+Ey$ можно определить из решения следующей линейной неоднородной системы уравнений:

$$\begin{cases} xa - q_1yb = 1 \\ xb + ya - q_0yb = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2.18})$$

Система (A.2.18) имеет единственное решение, если ее определитель отличен от нуля []. Определитель [M] системы (A.2.18) дается следующим выражением:

$$[M] = x^2 - q_0xy + q_1y^2. \quad (\text{A.2.19})$$

Полученное выражение (A.2.19) можно переписать в виде:

$$[M] = \left(x - \frac{q_0}{2} y \right)^2 - \frac{1}{4} y^2 \Delta, \quad (\text{A.2.20})$$

где Δ – определитель квадратного уравнения (А.2.14). Выражение (А.2.20) представляет собой разность между всегда неотрицательным уменьшаемым и вычитаемым, знак которого определяется знаком Δ . Проанализируем поведение определителя системы (А.2.20) [М] в зависимости от знака дискриминанта квадратного уравнения (А.2.14), который, в свою очередь, определяется парой чисел (q_0, q_1) . Если $\Delta(q_0, q_1) < 0$, то определитель системы (А.2.20) всегда неотрицателен и обращается в ноль только при $x=y=0$. В этом случае невозможно построение обратного элемента для числа $Z=0$, и, следовательно, деление на нулевой элемент. Если $\Delta(q_0, q_1)=0$, то определитель системы (А.2.20) обращается в ноль на прямых $x-(1/2)q_0y=0$. При этом отвечающие условию равенства нулю дискриминанта пары чисел (q_0, q_1) можно изобразить в виде параболы на соответствующей плоскости. Если $\Delta(q_0, q_1) > 0$, то определитель системы (А.2.20) может принимать как положительные, так и отрицательные значения, и обращается в ноль на прямых

$$x - (1/2)y(q_0 \pm \sqrt{\Delta}).$$

Таким образом, в зависимости от знака дискриминанта $\Delta(q_0, q_1)$ квадратного уравнения (А.2.14), можно получить соотношения, в каждом случае определяющие набор самых общих комплексных чисел, для которых построение обратного элемента, и, следовательно, частного невозможно. Эти элементы, очевидно, являются делителями нуля. На плоскости чисел Z им отвечают разные прямые, в зависимости от выбора пары чисел (q_0, q_1) . Поэтому систему самых общих комплексных чисел Z можно разделить на три подсистемы комплексных чисел в зависимости от вида соотношений, определяющих делители нуля, или, что является эквивалентным этому, по знаку дискриминанта $\Delta(q_0, q_1)$. Знак $\Delta(q_0, q_1)$ определяется положением точки (q_0, q_1) на соответствующей плоскости. Если точка (q_0, q_1) принадлежит параболе $\Delta=0$, то соответствующая ей алгебраическая система комплексных чисел Z называется параболической. Если точка (q_0, q_1) лежит внутри параболы $\Delta=0$, то есть $\Delta(q_0, q_1) > 0$, то такая система комплексных чисел называется гиперболической. Наконец, если точка (q_0, q_1) лежит вне параболы $\Delta=0$, то есть $\Delta(q_0, q_1) < 0$, то система чисел называется эллиптической [61]. В книгах [33, 61] показано, что каждой из трех подсистем комплексных чисел соответствует своя каноническая алгебраическая система, к элементам которой может быть сведено любое число из рассматриваемых подсистем. Так, канонической алгебраической системой для эллиптических комплексных чисел является система обыкновенных комплексных чисел, для которой $q_0=0, q_1=1$, и согласно (А.2.15) $E^2=i^2=-1$. Для гиперболических чисел каноническую систему образуют двойные числа [33, 61, 24], то есть $q_0=0, q_1=-1$ и $E^2=j^2=+1$. А для параболических комплексных чисел каноническая система образована дуальными числами, для которых $q_0=0, q_1=0$ и $E^2=\varepsilon^2=0$. Таким образом, простым заданием пары чисел (q_0, q_1) можно определить конкретную алгебраическую систему комплексных чисел. Имея же общие

аналитические свойства и соотношения для самых общих комплексных чисел Z , можно легко получить необходимые частные случаи, путем соответствующего выбора (q_0, q_1) . Этим свойством и воспользуемся в дальнейшем для получения условия Коши-Римана (D -дифференцируемости) в явном виде для функции дуального переменного.

Если определитель системы (A.2.20) отличен от нуля, то обратный числу Z элемент

$$Z^{-1} = a + Eb$$

может быть определен посредством ее решения, например, с помощью метода Крамера. Решив систему, получаем следующее выражение:

$$Z^{-1} = a + Eb = \frac{x - q_0 y - Ey}{x^2 - q_0 xy + q_1 y^2}. \quad (\text{A.2.21})$$

Следовательно, в рассматриваемом случае ($[M] \neq 0$) можно определить операцию деления для самых общих комплексных чисел, так как очевидно, что любое частное может быть представлено следующим образом:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 \cdot Z_2^{-1}.$$

Далее, введем понятие модуля и сопряженного элемента для самого общего комплексного числа Z . Как уже неоднократно говорилось в предыдущем разделе настоящей работы, эти два понятия неразрывно связаны между собой. Следуя книге [33], определим сопряженный элемент

$$\bar{Z} = c + Ed$$

так, чтобы произведение $Z \cdot \bar{Z}$ всегда являлось действительным числом. Для этого, в соответствии с (A.2.18), для любых (q_0, q_1) должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} xc - q_1 yd = \lambda \\ xc + yd - q_0 yd = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2.22})$$

Условия (A.2.22), по сути, эквивалентны условиям системы (A.2.18), фактически определяющей обратный элемент. Если правая часть первого выражения в системе (A.2.22) принимает значение ноль, то ее решению при любых (q_0, q_1) будут удовлетворять только делители нуля [33, 61]. Если же правая часть первого выражения отлична от нуля, то рассматривая систему уравнений (A.2.22) как линейную неоднородную с произвольной постоянной λ в правой части, можно придти к ее решению вида:

$$c = \frac{\lambda(x - q_0 y)}{x^2 - q_0 xy + q_1 y^2}, \quad d = \frac{-\lambda y}{x^2 - q_0 xy + q_1 y^2}.$$

Таким образом, сопряженный элемент может быть представлен в виде:

$$\bar{Z} = \lambda \frac{x - q_0 y - Ey}{x^2 - q_0 xy + q_1 y^2} = \lambda Z^{-1}, \quad \forall \lambda \neq 0. \quad (\text{A.2.23})$$

Из последнего выражения следует, что сопряженный элемент в общем случае может быть записан с использованием понятия обратного элемента, и его значение всегда отличается от соответствующего значения обратного в λ раз. Выражение (A.2.23) также можно представить в виде умножения числа $Z=x-q_0y-Ey$ на некоторую действительную константу λ_1 , то есть:

$$\bar{Z} = \lambda_1(x - q_0y - Ey), \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{x^2 - q_0xy + q_1y^2}.$$

Очевидно, что соответствующим выбором постоянной λ всегда можно добиться нормировки для постоянной λ_1 так, чтобы ее нормированное значение равнялось единице. Поэтому, в качестве сопряженного элемента для числа $Z=x+Ey$, окончательно примем следующее число:

$$\bar{Z} = x - q_0y - Ey, \quad (\text{A.2.24})$$

как это сделано в книге [33]. Ясно, что сопряженный элемент, определяемый согласно выражению (A.2.24) полностью удовлетворяет предъявляемым к нему требованиям.

Определим модуль самого общего комплексного числа Z используя понятие сопряженного элемента (A.2.24). Связь между этими двумя понятиями выражается следующим соотношением, которое можно использовать в качестве определения модуля числа вообще [33, 61, 62]:

$$|Z|^2 = Z \cdot \bar{Z}.$$

Подставляя в приведенное соотношение соответствующие выражения для числа Z и сопряженного ему элемента, получаем:

$$|Z|^2 = (x + Ey)(x - q_0y - Ey) = x^2 - q_0xy + q_1y^2. \quad (\text{A.2.25})$$

Последнее выражение совпадает с определителем системы (A.2.19) и, очевидно, не может быть отрицательным, так как его левая часть есть действительное неотрицательное число. Примем квадратный корень из правой части выражения (A.2.25) в качестве определения модуля числа Z , то есть:

$$|Z| = \pm \sqrt{x^2 - q_0xy + q_1y^2}. \quad (\text{A.2.26})$$

Вообще говоря, вопрос выбора знака последнего выражения остается несколько открытым, так как само понятие модуля комплексного числа неразрывно связано с понятием расстояния между элементами различных геометрий на плоскости, точкам которой определенным образом ставятся в соответствие самые общие комплексные числа. При этом основные свойства, сохраняющиеся при различных плоских движениях для этих геометрий, существенно отличаются друг от друга [61, 62]. Об этом уже было сказано в предыдущем разделе настоящей работы.

В качестве абсолютной величины самого общего комплексного числа Z будем рассматривать следующее выражение:

$$[Z] = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (\text{A.2.27})$$

В отличие от модуля числа Z (A.2.26) его абсолютная величина (A.2.27) всегда принимает только действительные неотрицательные значения.

Далее, можно перейти к вопросам анализа и теории функции самого общего комплексного переменного. Это необходимо для получения обобщенного условия комплексной дифференцируемости функции в точке (обобщенное условие Коши-Римана), частным случаем которого будет являться искомое условие D -дифференцируемости для функции дуального переменного.

Итак, исходя из общности рассматриваемых в настоящей работе алгебраических систем комплексных чисел, можно сделать вывод о том, что основные понятия, свойства и теоремы классического комплексного (да и действительного) анализа остаются справедливы и могут быть распространены на любые случаи пространств обобщенных комплексных чисел. Фактически, это уже было показано в текущем разделе диссертационной работы при задании топологии пространства дуальных чисел вместе с основными понятиями «дуального» анализа. Действительно, для всех типов комплексных чисел (эллиптических, параболических и гиперболических) можно в качестве метрики пространства использовать абсолютную величину их разности (A.2.27), в общем случае выражающую евклидово расстояние между двумя точками обобщенной комплексной плоскости. Используя данную метрику вводятся аналогичные друг другу понятия ε -окрестности, проколотой окрестности, открытого множества и т.д., то есть, по сути, единообразно определяется топология рассматриваемых пространств обобщенных комплексных чисел и тем самым обеспечивается переход к определению основных понятий анализа, которые, в свою очередь, также могут быть обобщены. Различия здесь могут проявляться лишь при компактификации соответствующих пространств путем расширения частных комплексных плоскостей за счет присоединения к ним т.н. особых элементов, например, бесконечно удаленной точки. Это достигается введением специальной метрики посредством построения стереографической проекции (например, сфера Римана для обыкновенных комплексных чисел [15, 57]). При этом вполне вероятно, что связанные с компактификацией вопросы, по сути эквивалентные построению соответствующей стереографической проекции, также могут быть обобщены. Поэтому, руководствуясь изложенными выше соображениями, перейдем сразу к понятию функции самого общего комплексного переменного, не останавливаясь подробно на предшествующих этому сопутствующих вопросах анализа и топологии.

Обозначим пространство самых общих комплексных чисел символом \mathbf{C} . Назовем функцией f_Z самого общего комплексного переменного Z , определенной на некотором множестве $M_Z \subset \mathbf{C}$ следующее отображение:

$$f_Z : Z \in M_Z \rightarrow \Omega \in \mathbf{C},$$

ставящее в соответствие самому общему комплексному числу Z число $\Omega \in \mathbf{C}$. Другими словами, отображение f_Z определяет правило, по которому самому общему комплексному числу Z из множества M_Z ставится в соответствие самое общее комплексное число Ω . Функция f_Z также может быть задана посредством пары действительно-значных функций U и V , таких что:

$$\left. \begin{aligned} Z &= x + Ey, Z \in M_Z \subset \mathbf{C}, \\ U &= U(x, y), V = V(x, y), \\ U(\cdot), V(\cdot) &: M_Z^1 \times M_Z^2 \rightarrow \mathbf{C}, \quad M_Z^1 = \text{Re}(M_Z), M_Z^2 = \text{Im}(M_Z), \end{aligned} \right\}$$

и, следовательно,

$$\Omega = f_Z(Z) = U(x, y) + EV(x, y).$$

Очевидно, что понятия предела функции f_Z в точке, ее непрерывности в точке и на множестве (или в области), в целом аналогичны (по сути, повторяют) соответствующим понятиям для функции дуального переменного f_D , введенным ранее в текущем разделе диссертационной работы. Поэтому сразу перейдем к понятию \mathbf{R} -дифференцируемости функции f_Z в точке. Итак, пусть функция f_Z определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $Z_0 = x_0 + Ey_0$ из \mathbf{C} , и принимает в ней конечные значения. Тогда будем говорить, что функция f_Z \mathbf{R} -дифференцируема (дифференцируема в смысле действительного анализа) в точке Z_0 , если U и V дифференцируемы как функции от (x, y) в точке (x_0, y_0) . Данное определение, само собой, аналогично соответствующему определению и для функции дуального переменного. Тогда выражение для дифференциала \mathbf{R} -дифференцируемой функции f_Z в точке Z_0 можно записать следующим образом:

$$df_Z|_{Z_0} = dU + EdV = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x} \right) \Big|_{Z_0} dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + E \frac{\partial V}{\partial y} \right) \Big|_{Z_0} dy = \frac{\partial f_Z}{\partial x} \Big|_{Z_0} dx + E \frac{\partial f_Z}{\partial y} \Big|_{Z_0} dy. \quad (\text{A.2.28})$$

Далее, дадим определение понятию \mathbf{C} -дифференцируемости в точке. Функцию f_Z будем называть \mathbf{C} -дифференцируемой в точке Z_0 , если найдется такое число A_Z из \mathbf{C} , что приращение функции Δf_Z в окрестности этой точки определяется согласно следующему выражению:

$$\Delta f_Z = f_Z(Z) - f_Z(Z_0) = A_Z \Delta Z + o(\Delta Z). \quad (\text{A.2.29})$$

Производная функции f_Z в точке Z_0 , очевидно, определяется следующим образом:

$$\lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{\Delta f_Z}{\Delta Z} \Big|_{Z_0} = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{f_Z(Z) - f_Z(Z_0)}{Z - Z_0} = f'_Z(Z_0).$$

Далее, для получения обобщенного условия комплексной дифференцируемости для функции f_Z , следуя общей классической теории функции комплексного переменного [15, 33, 57], необходимо, фактически, привести выражение (A.2.28) к виду (A.2.29). О необходимости этого уже подробно говорилось в текущем разделе, при обсуждении вопросов D -дифференцируемости.

Итак, заменим дифференциалы dx и dy в выражении (A.2.28), на соответствующие дифференциалы $dZ, d\bar{Z}$, аналогично тому, как это было сделано в случае функции комплексного переменного f_C , воспользовавшись при этом определением числа Z и сопряженного ему. Соответствующие выражения для dx и dy даются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} Z &= x + Ey, \bar{Z} = x - q_0 y - Ey, Z, \bar{Z} \in \mathbf{C}, \\ x &= Z - E \left(\frac{Z - \bar{Z}}{q_0 + 2E} \right), y = \frac{Z - \bar{Z}}{q_0 + 2E}, \\ dx &= \left(1 - \frac{E}{q_0 + 2E} \right) dZ + \frac{Ed\bar{Z}}{q_0 + 2E}, \quad dy = \frac{dZ}{q_0 + 2E} - \frac{d\bar{Z}}{q_0 + 2E}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.30})$$

Приведенные выражения (A.2.30) для дифференциалов dx и dy были получены согласно общим алгебраическим свойствам самых общих комплексных чисел, и в соответствии с определенными над ними основными операциями (A.2.15), (A.2.17). При этом, естественно, подразумевается возможность построения частных, входящих в выражения (A.2.30). Далее, подставив в (A.2.28) соответствующие выражения для дифференциалов dx и dy , можно представить \mathbf{R} -дифференциал функции f_Z в точке Z_0 следующим образом:

$$df_Z \Big|_{Z_0} = A_Z^1 dZ + A_Z^2 d\bar{Z}, \quad A_Z^1, A_Z^2 \in \mathbf{C}, \quad (\text{A.2.31})$$

то есть как отображение:

$$df_Z \Big|_{Z_0} : T_{Z_0} \mathbf{C} \rightarrow T_{f_Z(Z_0)} \mathbf{C}.$$

Распишем выражение (A.2.31) подробно.

$$\left. \begin{aligned} df_Z \Big|_{Z_0} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x} \right) \left(\left(1 - \frac{E}{q_0 + 2E} \right) dZ + \frac{Ed\bar{Z}}{q_0 + 2E} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + E \frac{\partial V}{\partial y} \right) \left(\frac{dZ}{q_0 + 2E} - \frac{d\bar{Z}}{q_0 + 2E} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x} \right) dZ - \frac{1}{q_0 + 2E} \left(E \left(\frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial y} + E \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) dZ + \\ &+ \frac{1}{q_0 + 2E} \left(E \left(\frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial y} + E \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) d\bar{Z} = A_Z^1 dZ + A_Z^2 d\bar{Z}. \end{aligned} \right\}$$

Для удобства, числовые множители, входящие в последнее выражение, преобразуем к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{q_0 + 2E} &= -\frac{(q_0 + 2E)}{4q_1 - q_0^2}, \\ \frac{E}{q_0 + 2E} &= \frac{2q_1 + q_0E}{4q_1 - q_0^2}, \\ \frac{E^2}{q_0 + 2E} &= \frac{-q_0q_1 + (2q_1 - q_0^2)E}{4q_1 - q_0^2}, \end{aligned} \right\}$$

используя при этом соотношения (А.2.15) и (А.2.17). Тогда, окончательно получим следующие выражения для A_Z^1 и A_Z^2 , входящих в (А.2.31):

$$\left. \begin{aligned} A_Z^1|_{Z_0} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{2q_1 + q_0E}{4q_1 - q_0^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{(q_0 + 2E)}{4q_1 - q_0^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + E \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{1}{4q_1 - q_0^2} \left(2q_1 \frac{\partial U}{\partial x} + E2q_1 \frac{\partial V}{\partial x} + Eq_0 \frac{\partial U}{\partial x} - Eq_0^2 \frac{\partial V}{\partial x} - q_0q_1 \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \\ &- \frac{1}{4q_1 - q_0^2} \left(q_0 \frac{\partial U}{\partial y} + Eq_0 \frac{\partial V}{\partial y} + E2 \frac{\partial U}{\partial y} - E2q_0 \frac{\partial V}{\partial y} - 2q_1 \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{4q_1 - q_0^2} \left(2q_1 \frac{\partial U}{\partial x} + q_0 \frac{\partial U}{\partial y} - q_0q_1 \frac{\partial V}{\partial x} - 2q_1 \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) + \\ &+ E \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4q_1 - q_0^2} \left(q_0 \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial U}{\partial y} + (2q_1 - q_0^2) \frac{\partial V}{\partial x} - q_0 \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right), \\ A_Z^2 &= \frac{2q_1 + q_0E}{4q_1 - q_0^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{(q_0 + 2E)}{4q_1 - q_0^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + E \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{4q_1 - q_0^2} \left(2q_1 \frac{\partial U}{\partial x} + E2q_1 \frac{\partial V}{\partial x} + Eq_0 \frac{\partial U}{\partial x} - Eq_0^2 \frac{\partial V}{\partial x} - q_0q_1 \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{1}{4q_1 - q_0^2} \left(q_0 \frac{\partial U}{\partial y} + Eq_0 \frac{\partial V}{\partial y} + E2 \frac{\partial U}{\partial y} - E2q_0 \frac{\partial V}{\partial y} - 2q_1 \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{4q_1 - q_0^2} \left(2q_1 \frac{\partial U}{\partial x} + q_0 \frac{\partial U}{\partial y} - q_0q_1 \frac{\partial V}{\partial x} - 2q_1 \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \\ &+ E \frac{1}{4q_1 - q_0^2} \left(q_0 \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial U}{\partial y} + (2q_1 - q_0^2) \frac{\partial V}{\partial x} - q_0 \frac{\partial V}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\}$$

Сравнивая выражение (А.2.30) с выражением для **C**-дифференциала функции (А.2.10), можно прийти к выводу, что рассматриваемая функция f_Z является **C**-дифференцируемой в точке только тогда, когда $A_Z^2 = \mathbf{0}$. Другими словами, приращение **C**-дифференцируемой функции f_Z в окрестности точки Z_0 полностью определяется посредством линейного оператора A_Z^1 . Следовательно, условие обобщенной комплексной дифференцируемости (обобщенное условие Коши-Римана) есть условие равенства нулю A_Z^2 , которое должно выполняться для

любых значений (q_0, q_1) . А линейный оператор Az^1 , очевидно, совпадает с производной функции fz (A.2.29) в точке Z_0 . Другими словами, обобщенная комплексная производная определяется следующим образом:

$$f'_z(Z_0) = \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{4q_1 - q_0^2} \left(2q_1 \frac{\partial U}{\partial x} + q_0 \frac{\partial U}{\partial y} - q_0 q_1 \frac{\partial V}{\partial x} - 2q_1 \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) + \quad (A.2.32)$$

$$+ E \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4q_1 - q_0^2} \left(q_0 \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial U}{\partial y} + (2q_1 - q_0^2) \frac{\partial V}{\partial x} - q_0 \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right).$$

Выражение (A.2.32) также остается справедливым для любых значений (q_0, q_1) .

Не составляет труда показать, что выражение для Az^2 совпадает со значением формальной частной производной

$$\frac{\partial f_z}{\partial \bar{Z}}$$

в точке Z_0 . Для этого нужно воспользоваться следующим представлением для пары действительно-значных функций U и V :

$$U = U(x(Z, \bar{Z}), y(Z, \bar{Z})), \quad V = V(x(Z, \bar{Z}), y(Z, \bar{Z})),$$

и обычным способом продифференцировать \mathbf{C} -функцию $f_z = U + EV$ по \bar{Z} , используя при этом понятие производной сложной функции и соотношения (A.2.30). Покажем это.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_z}{\partial \bar{Z}} \Big|_{z_0} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{Z}} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{Z}} + E \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{Z}} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{Z}} \right) = \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{(2q_1 + q_0 E)}{4q_1 - q_0^2} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{(q_0 + 2E)}{4q_1 - q_0^2} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{(2q_1 + q_0 E)}{4q_1 - q_0^2} E - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{(2q_1 + q_0 E)}{4q_1 - q_0^2} = \\ &= \frac{1}{4q_1 - q_0^2} \left(2q_1 \frac{\partial U}{\partial x} + q_0 \frac{\partial U}{\partial y} - q_0 q_1 \frac{\partial V}{\partial x} - 2q_1 \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \\ &+ E \frac{1}{4q_1 - q_0^2} \left(q_0 \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial U}{\partial y} + (2q_1 - q_0^2) \frac{\partial V}{\partial x} - q_0 \frac{\partial V}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (A.2.33)$$

Полученное выражение, очевидно, совпадает с выражением для Az^2 . Следовательно, обобщенное условие комплексной дифференцируемости в точке можно записать в виде:

$$\frac{\partial f_z}{\partial \bar{Z}} \Big|_{z_0} = \mathbf{0}. \quad (A.2.34)$$

При этом ясно, что условие (A.2.34) остается справедливым при любом выборе значений (q_0, q_1) . Обобщенное условие комплексной дифференцируемости, записанное в виде (A.2.34), имеет аналогичную условию \mathbf{C} -дифференцируемости функции f_c (A.2.13) форму. Вполне очевидно, что последнее может быть получено как частный случай условия (A.2.34) путем соответствующего выбора значений (q_0, q_1) . Следствием условия (A.2.34) являются обобщенные уравнения Коши-Римана. Для того чтобы получить их в явном виде, необходимо

просто записать выражение (А.2.33) соответствующим образом. Итак, значение выражения для частной производной (А.2.33) представляет собой самое общее комплексное число, которое в силу условия (А.2.34) равно нулю. Таким образом, приравнивая к нулю по отдельности действительную и мнимую части выражения (А.2.33), получим два скалярных равенства, образующие следующую систему уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} 2q_1 \frac{\partial U}{\partial x} + q_0 \frac{\partial U}{\partial y} - q_0 q_1 \frac{\partial V}{\partial x} - 2q_1 \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ q_0 \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial U}{\partial y} + (2q_1 - q_0^2) \frac{\partial V}{\partial x} - q_0 \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (\text{А.2.35})$$

Причем полученные соотношения должны выполняться при любых значениях (q_0, q_1) . Воспользуемся этим, чтобы привести систему уравнений в частных производных (А.2.35) к более простому виду. Положим, $q_1=0$. Тогда для любых значений q_0 одновременно должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{cases} q_0 \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \\ q_0 \left(\frac{\partial U}{\partial x} - q_0 \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \end{cases} \Rightarrow \forall q_0 \in \mathbf{R}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} - q_0 \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (\text{А.2.36})$$

Далее, положим $q_0=0$. Тогда для любых значений q_1 справедливо следующее:

$$\begin{cases} 2q_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y} + q_1 \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (\text{А.2.37})$$

Первое равенство в выражениях (А.2.37) совпадает с равенством (А.2.36) при значении $q_0=0$. Учитывая одновременность выполнения приведенных соотношений (А.2.36) - (А.2.37), окончательно получаем, что обобщенные уравнения Коши-Римана, справедливые при любых значениях (q_0, q_1) , можно представить в следующей форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} - q_0 \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y} + q_1 \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (\text{А.2.38})$$

В такой же форме полученные уравнения (А.2.38) могут быть найдены в работе [39].

Теперь можно сформулировать обобщенное понятие комплексной дифференцируемости функции f_z в точке Z_0 , используя при этом полученное условие \mathbf{C} -дифференцируемости. Итак, функция f_z , \mathbf{R} -дифференцируемая в точке Z_0 , называется \mathbf{C} -дифференцируемой функцией обобщенного комплексного аргумента в этой точке, если выполняется условие (А.2.34), или, по-другому, если для нее справедливы уравнения Коши-

Римана (А.2.38). Сразу же можно перейти к понятию голоморфной или аналитической функции, хорошо известному и, по сути, основополагающему в классической теории функции комплексного переменного [15, 57]. Тем самым удастся обобщить понятие аналитической функции для всевозможных алгебраических систем комплексных чисел. Назовем функцию fz голоморфной в точке Z_0 , если она \mathbf{C} -дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Функция fz голоморфна на открытом множестве (или в области), если она голоморфна в каждой точке этого множества (области). Приведенные определения, естественно, полностью аналогичны соответствующим определениям для аналитической функции комплексного переменного, и, по своей сути, опять же являются их обобщением. То есть общая формулировка рассмотренных понятий, вместе с условиями аналитичности (А.2.38) обобщаются на любые типы комплексных чисел. И условия аналитичности для таких чисел могут быть получены как частный случай из условий (А.2.38), за счет соответствующего выбора значений (q_0, q_1) . Справедливость такого подхода можно продемонстрировать на примере получения уравнений Коши-Римана для функции комплексного переменного. Для этого в уравнениях (А.2.38) выберем значение $q_0=0, q_1=1$, так как согласно (А.2.16), в этом случае $i^2=E^2=-1$. Тогда получим следующую систему уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

А это и есть уравнения Коши-Римана для функции комплексного переменного, которые могут быть найдены, например, в книгах [15, 33, 57].

Стоит также обратить внимание на следующий факт. Выражение (А.2.32) для обобщенной комплексной производной можно переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} f'_z(Z_0) &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{(-1)}{4q_1 - q_0^2} \left(\begin{aligned} &2q_1 \frac{\partial U}{\partial x} + q_0 \frac{\partial U}{\partial y} - q_0 q_1 \frac{\partial V}{\partial x} - 2q_1 \frac{\partial V}{\partial y} + \\ &+ E \left(q_0 \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\partial U}{\partial y} + (2q_1 - q_0^2) \frac{\partial V}{\partial x} - q_0 \frac{\partial V}{\partial y} \right) \end{aligned} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x} \right) - A_z^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{\partial f_z}{\partial Z} \Big|_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{А.2.39})$$

Следовательно, производная аналитической функции для любого типа комплексного аргумента имеет следующее простое выражение:

$$f'_z(Z_0) = \frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (\text{А.2.40})$$

в силу условий (A.2.34), (A.2.38). Тем самым обеспечивается независимость комплексной производной в точке от направления. Это хорошо известное свойство из теории функции комплексного переменного [15, 33, 57].

Теперь, после того, как было получено обобщенное условие комплексной дифференцируемости и сформулировано обобщенное понятие аналитической функции, можно получить в явном виде условие D -дифференцируемости для функции дуального переменного f_D . Это условие, очевидно, будет иметь ту же форму, что и условие (A.2.34). То есть, условие D -дифференцируемости в точке (условие Коши-Римана) для функции дуального переменного f_D можно записать следующим (аналогичным) образом:

$$\left. \frac{\partial f_D}{\partial \bar{x}^d} \right|_{x^d_0} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.2.41})$$

Прямое следствие данного условия, то есть уравнения Коши-Римана для функции дуального переменного, могут быть получены как частный случай уравнений (A.2.38). Для этого необходимо положить в этих уравнениях значения $q_0=q_1=0$, что отвечает определению дуального числа $\varepsilon^2=E^2=0$. Тогда получим следующие выражения, с учетом принятых ранее обозначений для дуальных чисел:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x'} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2.42})$$

Система уравнений в частных производных (A.2.42) есть уравнения Коши-Римана для функции дуального переменного f_D . Она фактически определяет понятие аналитичности функции, а также задает ее структуру. Сформулируем условие D -дифференцируемости функции f_D в точке, используя (A.2.41) и (A.2.42). Итак, \mathbf{R} -дифференцируемая функция f_D , определенная в некоторой окрестности точки Z_0 и принимающая в ней конечные значения, называется D -дифференцируемой в этой точке, если в ней выполняется условие (A.2.41) или уравнения (A.2.42). Следовательно, функция f_D будет называться голоморфной или аналитической в точке Z_0 , если она D -дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Соответственно, f_D голоморфна на открытом множестве (или в области), если она голоморфна в каждой точке данного множества (или области). Таким образом, определено понятие аналитической функции дуального переменного и в явном виде получены условия ее аналитичности (A.2.41) или (A.2.42). Это важно, так как на практике, при проведении соответствующих вычислений над кольцом R_D , процедура построения дуального представления для различных функций действительного переменного подразумевает

использование только аналитических функций дуального переменного, как это будет показано в ходе дальнейшего изложения.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (А.2.42) предоставляет важную информацию о структуре аналитической функции дуального переменного. Сама система (А.2.42), очевидно, существенно проще, чем аналогичная система уравнений Коши-Римана [15, 33, 57] для функции комплексного переменного. Как известно, в случае комплексного переменного, функции u и v удовлетворяют уравнению Лапласа, то есть являются комбинациями его частных решений, которые представляют собой различные произведения линейных, тригонометрических и гиперболических функций. В случае же дуального переменного, ограничения, налагаемые на пару функций u и v значительно проще. Это, в свою очередь, существенно расширяет набор действительнзначных функций, участвующих в построении аналитической функции дуального переменного. Для того чтобы показать это, достаточно записать интеграл системы (А.2.42). Он дается следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x), \\ v(x, x') &= x' \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x} + w(x). \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, аналитическая функция дуального переменного $f_D(x^d)$ в общем случае определяется парой действительнзначных функций от действительной части ее аргумента $u(\text{Re}(x^d))$ и $w(\text{Re}(x^d))$, и может быть записана следующим образом:

$$f_D(x^d) = u(x) + \varepsilon \left(x' \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x} + w(x) \right). \quad (\text{А.2.43})$$

Выражение (А.2.43) примем за определение аналитической функции дуального переменного. В той же форме оно присутствует в работе Молчанова [39], но, судя по всему, было получено исходя из несколько других соображений, о чем уже говорилось выше.

Производная функции дуального переменного в точке определяется согласно выражению (А.2.40), то есть в соответствии с общим для всех типов комплексных чисел понятием производной (комплексной). Используя выражения (А.2.40) и (А.2.43), получаем:

$$\left. \frac{df_D}{dx^d} \right|_{x_0^d} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v(x, x')}{\partial x} = \frac{du(x)}{dx} + \varepsilon \left(x' \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{dw(x)}{dx} \right).$$

Таким образом, вычисление производной функции дуального переменного эквивалентно дифференцированию функции f_D по действительной части ее аргумента.

Далее, для того, чтобы определить для функции дуального переменного понятия интеграла и первообразной, необходимо определить понятие пути на дуальной плоскости. Исходя из общности алгебраических систем комплексных чисел (эллиптических,

параболических и гиперболических) и, следовательно, возможности обобщения их основных свойств, сделаем это аналогично обыкновенным комплексным числам. То есть назовем путем на плоскости D следующее непрерывное отображение:

$$\gamma(\cdot): t \in [\alpha, \beta] \rightarrow D, \quad \alpha, \beta, t \in \mathbf{R}. \quad (\text{A.2.44})$$

Другими словами, путь $\gamma(t)$ есть непрерывная функция действительного аргумента со значениями в D . Аналогично теории функции комплексного переменного, для дуальной плоскости также можно ввести соответствующие понятия эквивалентности путей, жорданова и кусочно-гладкого пути. Приводить их здесь не имеет смысла, так как они полностью повторяют соответствующие им понятия для комплексной плоскости. То же самое касается понятий линейной связности и области [15, 57].

Итак, пусть путь $\gamma(t)$ (A.2.44) – кусочно-гладкий, а композиция D -значной функции $f_D(\gamma(t))$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда интеграл Римана

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_D(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_{\gamma} f_D(x^d) dx^d \quad (\text{A.2.45})$$

называется интегралом от функции $f_D(x^d)$ вдоль пути γ . Интеграл (A.2.45) также можно рассматривать как криволинейный интеграл от вещественных дифференциальных форм:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\gamma} f_D(x^d) dx^d &= \int_{\gamma} \left(u(x) + \varepsilon \left(x' \cdot \frac{du(x)}{dx} + w(x) \right) \right) (dx + \varepsilon dx') = \\ &= \int_{\gamma} u(x) dx + \varepsilon \left[\int_{\gamma} u(x) dx' + \int_{\gamma} \left(x' \cdot \frac{du(x)}{dx} + w(x) \right) dx \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2.46})$$

Кажется вполне очевидным, что для интеграла (A.2.45) выполняются те же свойства, что и для интеграла вдоль пути от функции комплексного переменного [57]. То есть свойства линейности, аддитивности, независимости от параметризации и зависимости от ориентации, а также свойство оценки в том случае, если вместо модуля используется понятие абсолютной величины. Первообразной голоморфной в некоторой области Ω функции f_D назовем голоморфную в той же области функцию F_D , для которой в каждой точке из Ω выполняется соотношение:

$$F_D'(x^d) = f_D(x^d), \quad \forall x^d \in \Omega \subset D.$$

Это определение по своей форме вновь повторяет соответствующее определение первообразной для функции комплексного переменного [57]. При этом очевидно, что и основные свойства первообразной F_D аналогичны свойствам комплексной первообразной. Так, введя понятие первообразной вдоль пути $\Phi_{\gamma}(t) = F_D(\gamma(t))$, получим формулу Ньютона-Лейбница для аналитической функции дуального переменного [57]:

$$\int_{\gamma} f_D(x^d) dx^d = \Phi_{\gamma}(\beta) - \Phi_{\gamma}(\alpha).$$

Следует отметить, что все приведенные понятия интеграла и первообразной для функции дуального переменного даны в предположении ее аналитичности.

Далее, учитывая то, что понятие гомотопных путей [15, 33, 57] на дуальной плоскости можно ввести совершенно аналогично соответствующему понятию для комплексной плоскости, а также саму возможность распространения основных свойств и определений комплексного анализа на пространство D , можно прийти к выводу, что основные интегральные теоремы комплексного анализа [15, 33, 57] остаются справедливы в рассматриваемом случае. То есть для аналитической функции дуального переменного выполняются теоремы Коши и следствия из них. Поэтому, судя по всему, существует и аналог т.н. интегральных формул Коши для аналитической функции дуального переменного и ее производных. Этот момент достаточно важен, так как эти формулы участвуют в определении коэффициентов ряда Тейлора для голоморфной функции, как хорошо известно из комплексного анализа [15, 57]. Тем не менее, приводить здесь соответствующие аналоги теорем Коши, их основных следствий и интегральные формулы для аналитической функции дуального переменного не имеет смысла. Так как, во-первых, можно воспользоваться комплексной аналогией [15, 57] и сразу же предположить, что коэффициенты ряда Тейлора выражаются через производные рассматриваемой функции, а во-вторых, столь глубокое теоретическое обоснование смежных вопросов не является целью настоящей работы. Поэтому можно просто дать определение ряда Тейлора для голоморфной функции дуального переменного и указать условия его сходимости. Итак, пусть функция f_D голоморфна в некоторой области Ω из D . Тогда степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x^d - a)^n \quad (\text{A.2.47})$$

назовем рядом Тейлора функции f_D с центром в точке a . По аналогии с комплексным анализом, считаем, что данный ряд сходится в круге $[x^d - a] < R$, полностью содержащемся в Ω . И для любого значения x^d из этого круга, сумма ряда равна, очевидно,

$$f_D(x^d) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x^d - a)^n. \quad (\text{A.2.48})$$

Действительное число R называется радиусом сходимости ряда (A.2.48). Коэффициенты ряда (A.2.48) c_n определяются следующим (известным) образом:

$$c_n = \frac{f_D^{(n)}(a)}{n!}.$$

Естественно, приводить доказательство данной теоремы-определения в настоящей работе не имеет смысла, так как оно может быть получено совершенно аналогично соответствующему доказательству в комплексном анализе, изложенному в книгах [1]. Ясно, что основные свойства и следствия аналогичной теоремы-определения комплексного анализа также остаются справедливыми и для пространства D , то есть могут быть распространены и на аналитическую функцию дуального переменного. Для оценки радиуса сходимости R ряда (A.2.48) можно воспользоваться т.н. формулой Коши-Адамара [15, 24, 57], записав ее в следующем виде:

$$R = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} [c_n]^{1/n} \right)^{-1}. \quad (\text{A.2.49})$$

Выражение (A.2.49) отличается от аналогичного выражения комплексного анализа тем, что под знаком предела рассматривается абсолютная величина дуального числа, а не его модуль. Формула (A.2.49) применима, вообще говоря, для любого степенного ряда вида (A.2.47). Стоит также отметить, что саму возможность разложения функции дуального переменного в ряд (A.2.48), сходящийся в некотором круге $R > 0$ с центром в точке a , можно рассматривать как определение функции, голоморфной в этой точке.

Таким образом, в данном разделе диссертационной работы удалось определить основные понятия и свойства анализа применительно к рассматриваемому пространству дуальных чисел D , необходимые для построения теории аналитической функции дуального переменного. В явном виде получены условия аналитичности для функции дуального переменного – посредством использования обобщенного условия комплексной дифференцируемости для функции самого общего комплексного аргумента. Это позволило определить общую структуру функции f_D (A.2.5), а также требования, налагаемые на пару определяющих ее действительных функций (A.2.42). Кроме того, был определен ряд основных свойств и особенностей функции дуального переменного, в целом аналогичных соответствующим свойствам в теории функции комплексного переменного.

Перед тем как приступить к непосредственному построению дуального представления для элементарных функций действительного переменного, что, очевидно, является необходимым при проведении практических вычислений над кольцом дуальных чисел, требуется ввести понятие аналитической функции нескольких дуальных переменных. Это позволит обобщить полученные для случая функции одного аргумента свойства, потребные для реализации ряда вычислительных алгоритмов с использованием дуальных чисел.

А.3 Функция нескольких дуальных переменных

Для того чтобы ввести понятие функции нескольких (n) дуальных переменных со значениями, лежащими в плоскости D , необходимо сначала определить понятие n -мерного пространства дуальных чисел - D^n . Вполне очевидно, что n -мерному пространству D^n соответствует некоторое четно-мерное пространство \mathbf{R}^{2n} . Естественно, это также справедливо и для любого другого типа комплексных чисел (эллиптических, параболических и гиперболических). Будем считать следующие упорядоченные наборы точек $2n$ действительных чисел

$$\left(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_1', x_2', \dots}_{2n} \right)$$

элементами пространства \mathbf{R}^{2n} . Можно определить на нем следующую дуальную структуру:

$$x^d_i = x_i + \varepsilon x'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.3.1})$$

Тогда пространство, точками которого являются упорядоченные наборы из n чисел

$$\left(\underbrace{x^d_1, x^d_2, \dots}_n \right) \quad (\text{A.3.2})$$

назовем n -мерным пространством дуальных чисел D^n . Число n , само собой, конечное. Также можно определить пространство D^n следующим образом:

$$D^n = \underbrace{D \times D \times \dots}_n \quad (\text{A.3.3})$$

То есть рассматривать его как n -кратное прямое произведение дуальных плоскостей. Таким образом, точками пространства D^n являются точки соответствующего ему пространства \mathbf{R}^{2n} . Однако, введение дуальной структуры (A.3.1) – (A.3.2) обеспечивает асимметрию в этом пространстве, то есть не все координаты в \mathbf{R}^{2n} равноправны [57]. Полученное определение n -мерного пространства дуальных чисел по своей форме аналогично соответствующему определению комплексного анализа, и получено исходя из тех же общих рассуждений. По сути, оно может быть также обобщено и на любую другую алгебраическую систему комплексных чисел, посредством задания соответствующей комплексной структуры в виде (A.3.1) – (A.3.2). В свою очередь, понятие n -мерного пространства для обыкновенных комплексных чисел может быть найдено, например, в книге [57].

Кажется вполне естественным введение в D^n структуры векторного пространства. Как известно, для этого необходимо определить следующие две операции над его элементами – сложение двух векторов и умножение вектора на число (в рассматриваемом случае - дуальное) [9]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^d_1 &= (x^d_{11}, x^d_{12}, \dots, x^d_{1n}), \mathbf{x}^d_2 = (x^d_{21}, x^d_{22}, \dots, x^d_{2n}), \mathbf{x}^d_1, \mathbf{x}^d_2 \in D^n, \\ \mathbf{x}^d_1 + \mathbf{x}^d_2 &= \mathbf{x}^d_3, \quad \mathbf{x}^d_3 \in D^n, \\ r \cdot \mathbf{x}^d_1 &= (r \cdot x^d_{11}, r \cdot x^d_{12}, \dots, r \cdot x^d_{1n}), \quad r \in D, (r \cdot \mathbf{x}^d) \in D^n. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.4})$$

В выражениях (A.3.4) как векторы \mathbf{x}_i обозначены те же наборы дуальных чисел, что даются выражением (A.3.2).

В качестве абсолютной величины (модуля) дуального вектора размерности n будем использовать следующее выражение:

$$[\mathbf{x}^d] = \sqrt{\sum_{i=1}^n [x^d_i]^2} = \sqrt{(x_1^2 + x_1'^2) + (x_2^2 + x_2'^2) + \dots}, \quad (\text{A.3.5})$$

представляющее собой эвклидову норму из набора абсолютных величин его координат – дуальных чисел. Понятие абсолютной величины применительно к каждой компоненте рассматриваемого вектора сохраняет тот же смысл, что и в предыдущих разделах настоящей главы диссертационной работы. Тогда в качестве метрики рассматриваемого векторного пространства D^n предлагается использовать следующее выражение:

$$\rho(\mathbf{x}^d_2, \mathbf{x}^d_1) = [\mathbf{x}^d_2 - \mathbf{x}^d_1] = \sqrt{\sum_{i=1}^n [x^d_{2i} - x^d_{1i}]^2}, \quad (\text{A.3.6})$$

которое определяет функцию расстояния ρ между элементами (векторами) пространства как абсолютную величину (A.3.5) их разности. Таким образом, n -мерное векторное пространство дуальных чисел D^n с функцией (A.3.6), выражающей расстояние между его элементами – метрическое. Это можно легко проверить, используя т.н. аксиомы метрического пространства и понятие расстояния [9].

Воспользовавшись метрикой (A.3.5), теперь можно указать систему окрестностей, то есть задать топологию в пространстве D^n . Итак, введем понятие открытого шара $B(\mathbf{x}^d_0, r)$ с центром в точке \mathbf{x}^d_0 и радиуса $r > 0$ обычным образом:

$$B(\mathbf{x}^d_0, r) = \{\mathbf{x}^d \in D^n : \rho(\mathbf{x}^d, \mathbf{x}^d_0) < r\}.$$

Тогда под ε -окрестностью U_ε точки \mathbf{x}^d_0 n -мерного пространства дуальных чисел будем понимать открытый шар $B(\mathbf{x}^d_0, \varepsilon)$ с центром в этой точке и радиуса ε :

$$U_\varepsilon(\mathbf{x}^d_0) = B(\mathbf{x}^d_0, \varepsilon).$$

Далее, следует отметить, что компактификацию пространства D^n то есть его расширение за счет присоединения к нему особых точек (например, бесконечно удаленной точки), можно реализовать аналогично тому, как это было сделано применительно к пространству D . Учитывая определение D^n согласно (A.3.3), получаем:

$$\bar{D}^n = \underbrace{\bar{D} \times \bar{D} \times \dots}_n,$$

То есть расширенное n -мерное векторное пространство дуальных чисел определяется как n -кратное прямое произведение расширенных дуальных плоскостей.

Функцией нескольких (n) дуальных переменных f_D будем называть следующее отображение:

$$f_D(\cdot): \mathbf{x}^d = \underbrace{(x^d_1, x^d_2, \dots)}_n \in \bar{D}^n \rightarrow \omega \in \bar{D}, \quad (\text{A.3.7})$$

ставящее в соответствие дуальному вектору \mathbf{x}^d (точке пространства \bar{D}^n) число ω с расширенной дуальной плоскости. Будем говорить, что функция n дуальных переменных f_D определена на некотором множестве $M \subset \bar{D}^n$, если данное множество образовано следующим образом:

$$M = \underbrace{M_1 \times M_2 \times \dots}_n, \quad x^d_1 \in M_1, x^d_2 \in M_2, \dots, \quad M_1, M_2, \dots \subset \bar{D}.$$

Приведенное определение по сути является перефразированным классическим определением понятия функции нескольких переменных, которое легко может быть найдено в книгах по комплексному и действительному анализу.

Для функции (A.3.7) также остается справедливым следующее ее представление парой действительнзначных функций u и v :

$$\left. \begin{aligned} u &= u(\mathbf{x}^d), v = v(\mathbf{x}^d), \\ u, v &: M \subset \bar{D}^n \rightarrow \mathbf{R}, \\ f_D(\mathbf{x}^d) &= u(\mathbf{x}^d) + \varepsilon v(\mathbf{x}^d) = \omega. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.8})$$

Как и ранее, пару действительнзначных функций u и v удобно представить в следующей эквивалентной (A.3.8) форме:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^d &= (x^d_1, x^d_2, \dots, x^d_n), \mathbf{x}^d \in M \subset \bar{D}^n, \\ u &= u(x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n), v = v(x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \\ u, v &: \underbrace{(\text{Re}(M_1) \times \text{Dp}(M_1)) \times (\text{Re}(M_2) \times \text{Dp}(M_2)) \times \dots}_n \subset \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.9})$$

Соответствующие понятия предела функции n дуальных переменных в точке и ее непрерывности можно ввести аналогичным образом, как это было сделано в предыдущем разделе для функции одного аргумента. Не останавливаясь на этом, перейдем сразу же к понятию \mathbf{R} -дифференцируемости функции f_D в точке. Итак, пусть функция f_D определена и принимает конечные значения в некоторой окрестности точки \mathbf{x}^d_0 . Тогда назовем функцию f_D \mathbf{R} -дифференцируемой в этой точке (дифференцируемой в смысле действительного анализа),

если u и v (А.3.9) дифференцируемы как функции от $(x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ в точке $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, x'_{10}, x'_{20}, \dots, x'_{n0})$. Тогда **R**-дифференциал функции f_D в точке \mathbf{x}^d_0 можно записать следующим образом:

$$df_D|_{\mathbf{x}^d_0} = \left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) dx_n + \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial x'_1} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x'_1} \right) dx'_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x'_2} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x'_2} \right) dx'_2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x'_n} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x'_n} \right) dx'_n. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.10})$$

Назовем функцию n дуальных переменных f_D дифференцируемой в смысле дуального анализа (D^n -дифференцируемой), если ее дифференциал (D^n -дифференциал) в точке \mathbf{x}^d_0 можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} df_D|_{\mathbf{x}^d_0} &= A_1 dx^d_1 + A_2 dx^d_2 + \dots + A_n dx^d_n, \\ dx^d_1 &= dx_1 + \varepsilon dx'_1, dx^d_2 = dx_2 + \varepsilon dx'_2, \dots, dx^d_n = dx_n + \varepsilon dx'_n. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.11})$$

Для получения условия аналитичности функции f_D в точке (условия D^n -дифференцируемости) будем следовать тем же путем, что и при получении соответствующего условия D -дифференцируемости для функции одного переменного. То есть сначала необходимо записать выражение для **R**-дифференциала функции n дуальных переменных в виде:

$$df_D|_{\mathbf{x}^d_0} = B_1 dx^d_1 + B_2 dx^d_2 + \dots + B_n dx^d_n + \bar{B}_1 d\bar{x}^d_1 + \bar{B}_2 d\bar{x}^d_2 + \dots + \bar{B}_n d\bar{x}^d_n. \quad (\text{A.3.12})$$

А затем, фактически, привести выражение (А.3.12) к форме выражения для D^n -дифференциала функции (А.3.11). Другими словами, условие D^n -дифференцируемости функции f_D в точке \mathbf{x}^d_0 будет эквивалентно выполнению следующей системы равенств:

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_1 &= 0, \\ \bar{B}_2 &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ \bar{B}_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.13})$$

Таким образом, система уравнений вида (А.3.13), по сути, является системой дифференциальных уравнений Коши-Римана для аналитической функции f_D .

Как и в случае функции одного переменного, получить выражение для **R**-дифференциала (А.3.12) функции f_D в явном виде не удастся, так как произвести замену дифференциалов

$$(dx_i, dx'_i) \Rightarrow (dx^d_i, d\bar{x}^d_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

в выражении (А.3.12) вследствие наличия делителей нуля нельзя. Поэтому вновь приходится прибегать к рассмотрению обобщенных условий аналитичности для функции n самых общих комплексных аргументов. Тогда система уравнений (А.3.13) в явном виде может быть

получена как частный случай обобщенного условия комплексной дифференцируемости, так же как это было сделано в предыдущем разделе работы.

Итак, будем рассматривать n -мерное векторное пространство самых общих комплексных чисел \mathbf{C}^n , точками которого являются следующие упорядоченные наборы чисел \mathbf{Z} :

$$\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n).$$

Здесь под Z_i все также понимаются числа вида (А.2.15). Очевидно, что каждой точке \mathbf{Z} пространства \mathbf{C}^n соответствует упорядоченный набор из $2n$ действительных чисел, для которых определена следующая комплексная структура:

$$x_i + E y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В качестве метрики пространства \mathbf{C}^n можно рассматривать аналогичную (А.3.6) функцию расстояния между его элементами $\rho(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)$. Следовательно, аналогичным же образом удастся задать систему окрестностей в \mathbf{C}^n , используя введенные для пространства D^n понятия открытого шара и ε -окрестности. Этим достигается задание топологии в \mathbf{C}^n .

В качестве функции n самых общих комплексных переменных рассмотрим следующее отображение, определенное на некотором множестве M_Z из \mathbf{C}^n :

$$f_Z : \mathbf{Z} \in M_Z \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \Omega \in \mathbf{C}, \quad (\text{А.3.14})$$

ставящее в соответствие точке $\mathbf{Z}=(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ пространства \mathbf{C}^n точку Ω плоскости самых общих комплексных чисел. Функция (А.3.14) также может быть представлена парой действительно-значных функций U и V :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z} &= (Z_1, Z_2, \dots, Z_n), \mathbf{Z} \in M_Z = M_{Z_1} \times M_{Z_2} \times \dots \times M_{Z_n} \subset \mathbf{C}^n, \\ U &= U(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n), V = V(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ u, v &: \underbrace{(\operatorname{Re}(M_{Z_1}) \times \operatorname{Im}(M_{Z_1})) \times (\operatorname{Re}(M_{Z_2}) \times \operatorname{Im}(M_{Z_2})) \times \dots}_{n} \subset \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}. \end{aligned} \right\}$$

Не останавливаясь на понятиях предела функции (А.3.14) в точке и ее непрерывности (ввиду того, что их можно ввести аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе работы), сразу же перейдем к понятию \mathbf{R} -дифференцируемости функции f_Z в точке. Итак, пусть функция f_Z определена и принимает конечные значения в некоторой окрестности точки \mathbf{Z}_0 . Тогда назовем функцию f_Z \mathbf{R} -дифференцируемой в этой точке (дифференцируемой в смысле действительного анализа), если U и V дифференцируемы как функции от $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ в точке $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$. Тогда \mathbf{R} -дифференциал функции f_Z в точке \mathbf{Z}_0 можно записать следующим образом:

$$df_z|_{z_0} = \left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + E \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2} + E \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} + E \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) dx_n + \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial y_1} + E \frac{\partial V}{\partial y_1} \right) dy_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial y_2} + E \frac{\partial V}{\partial y_2} \right) dy_2 + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial y_n} + E \frac{\partial V}{\partial y_n} \right) dy_n. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3.15})$$

Используя соотношения (A.2.30) из предыдущего раздела, определяющие связь между дифференциалами (dx_i, dy_i) и $(dZ_i, d\bar{Z}_i)$, удается представить выражение (A.3.15) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} df_z|_{z_0} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + E \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) \left(\left(1 - \frac{E}{q_0 + 2E} \right) dZ_1 + \frac{Ed\bar{Z}_1}{q_0 + 2E} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y_1} + E \frac{\partial V}{\partial y_1} \right) \left(\frac{dZ_1}{q_0 + 2E} - \frac{d\bar{Z}_1}{q_0 + 2E} \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} + E \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \left(\left(1 - \frac{E}{q_0 + 2E} \right) dZ_n + \frac{Ed\bar{Z}_n}{q_0 + 2E} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y_n} + E \frac{\partial V}{\partial y_n} \right) \left(\frac{dZ_n}{q_0 + 2E} - \frac{d\bar{Z}_n}{q_0 + 2E} \right) = \\ &= A_{z_1}^1 dZ_1 + \dots + A_{z_2}^1 dZ_n + A_{z_1}^2 d\bar{Z}_1 + \dots + A_{z_2}^2 d\bar{Z}_n. \end{aligned} \right\}$$

При этом, комплексный дифференциал функции f_z в точке (\mathbf{C}^n -дифференциал), очевидно, имеет следующее представление:

$$df_z|_{z_0} = \sum_{i=1}^n A_{z_i}^1 dZ_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда условию комплексной дифференцируемости (\mathbf{C}^n -дифференцируемости) в точке функции f_z , очевидно, отвечает одновременное выполнение следующих равенств:

$$A_{z_i}^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.3.16})$$

Не составляет труда показать, что система соотношений (A.3.16) по своей сути эквивалентна одновременному равенству нулю следующих формальных частных производных:

$$\left. \frac{\partial f_z}{\partial \bar{Z}_i} \right|_{z_0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для этого можно использовать тот же подход, что и в предыдущем разделе настоящей работы. Записав систему равенств (A.3.16) в явном виде, и учитывая соотношения (A.2.30) из предыдущего раздела, получаем обобщенные уравнения Коши-Римана для функции n комплексных переменных:

Итак, получив условия D^n -дифференцируемости в точке для функции f_D , можно перейти к общему понятию аналитической функции нескольких дуальных переменных. Будем называть функцию n дуальных переменных f_D аналитической в точке \mathbf{x}^d_0 , если в каждой точке некоторой ее окрестности она D^n -дифференцируема. Соответственно, функцию f_D будем называть аналитической на открытом множестве (в области), если она является аналитической в каждой точке этого множества (области).

Общий интеграл системы дифференциальных уравнений в частных производных (А.3.19) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ v(x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n) &= x'_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x'_n \frac{\partial u}{\partial x_n} + w(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \right\} \quad (\text{А.3.21})$$

Следовательно, любая аналитическая функция n дуальных переменных, согласно соотношениям (А.3.9) и (А.3.21), может быть представлена в следующем виде:

$$f_D(\mathbf{x}^d) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n x'_i \frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} + w(x_1, x_2, \dots, x_n) \right), \quad \mathbf{x}^d \in \bar{D}^n. \quad (\text{А.3.22})$$

Полученное выражение (А.3.22), по сути, можно рассматривать в качестве определения аналитической функции n дуальных переменных.

С учетом соотношений (А.3.21) и выражения (А.3.18), частные дуальные производные аналитической функции f_D даются следующими выражениями:

$$\frac{\partial f_D}{\partial x^d_j} = \frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n x'_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial w(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{А.3.23})$$

Где j – индекс производной. То есть дуальная частная производная от аналитической функции n переменных определяется как частная производная выражения (А.3.22), взятая по действительной части соответствующего дуального аргумента.

Аналитическая функция n дуальных переменных, судя по всему, обладает теми же основными свойствами, что и аналитическая функция n обыкновенных комплексных переменных. Теория последней излагается, например, в книге [57]. Исходя из неоднократно приведенных выше соображений общности свойств алгебраических систем комплексных чисел, можно считать, что основные понятия и свойства из теории последней, в той или иной степени могут быть обобщены и на функцию f_D . Не останавливаясь на этом подробно, скажем лишь, что для аналитической функции нескольких дуальных переменных справедливы соответствующие аналоги основных интегральных теорем (и следствий из них) теории аналитической функции нескольких комплексных переменных. В частности, важным для дальнейшего изложения является возможность представления функции (А.3.22) рядом Тейлора, что, само собой, также справедливо и для функции n комплексных переменных. То

есть функцию (А.3.22) можно представить в некотором поликруге с центром в точке \mathbf{a} следующим степенным рядом:

$$\left. \begin{aligned} f_D(\mathbf{x}^d) &= \sum_{|m|=0}^{\infty} c_m (x^d_1 - a_1)^{m_1} (x^d_2 - a_2)^{m_2} \dots (x^d_n - a_n)^{m_n}, \\ \mathbf{x}^d, \mathbf{a} \in D^n, m &= (m_1, m_2, \dots, m_n), |m| = \sum_{i=1}^n m_i. \end{aligned} \right\} \quad (\text{А.3.24})$$

Коэффициенты которого определяются следующим образом:

$$c_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^{(|m|)} f_D}{(\partial x^d_1)^{m_1} (\partial x^d_2)^{m_2} \dots (\partial x^d_n)^{m_n}}. \quad (\text{А.3.25})$$

В выражениях (А.3.24) и (А.3.25) m – целочисленный вектор, каждая из n компонент которого принимает только неотрицательные значения. Модуль целочисленного вектора m определяется как сумма его компонентов. Для определения радиуса сходимости ряда (А.3.24) также можно использовать формулу Коши-Адамара, многомерный аналог которой для функции n комплексных переменных дается в книге [57]. Применительно к рассматриваемому случаю аналитической функции n дуальных переменных в данной формуле вместо модуля i -ого коэффициента степенного ряда (А.3.25) необходимо использовать его абсолютную величину, также, как и в случае функции одного переменного.

Таким образом, в данном разделе диссертационной работы определены структура и основные (необходимые для дальнейшего изложения) свойства аналитической функции n дуальных переменных.

А.4 Свойства дуального представление элементарных функций

В предшествующих разделах текущей главы диссертационной работы были определены основные алгебраические свойства и особенности кольца дуальных чисел R_D , а также, в необходимом для вычислительных приложений объеме рассмотрена теория аналитической функции дуального переменного. Здесь важным является следующее – помимо основных понятий анализа, необходимых для реализации вычислений на практике, таких как непрерывность функции дуального переменного, ограниченность на множестве и др., была определена сама структура аналитической функции, которая дается выражением (А.2.46) ((А.3.22) для случая n переменных). При этом сама структура аналитической функции дуального переменного (n переменных) оказывается значительно проще и информативнее, чем в случае функции обыкновенного комплексного переменного (n комплексных переменных). А вытекающие из нее свойства и ложатся в основу соответствующего метода численного дифференцирования для функции действительного аргумента [91, 103]. Данный

факт, как ни странно, практически не нашел своего отражения в работах по численному дифференцированию с использованием математического аппарата дуальных чисел.

Далее, рассмотрим простейшие (элементарные) аналитические функции дуального переменного. Это необходимо с целью выявления основных свойств и особенностей общей структуры функции (А.2.46), которые будут в дальнейшем использованы при построении дуальных представлений для отвечающих им произвольных действительнзначных функций действительного аргумента. А в этом и лежит ключ к обоснованию соответствующего метода численного дифференцирования, изложенного в работах [91, 103]. С другой стороны, интересующие свойства всегда позволят однозначно определить пару функций $u(x)$ и $w(x)$, необходимых для задания произвольной аналитической функции дуального переменного.

Итак, начнем рассмотрение со следующей простейшей функции одного дуального переменного:

$$f_D(x^d) = (x^d)^2, \quad x^d \in \bar{D}. \quad (\text{A.4.1})$$

Очевидно, что данная функция определена и непрерывна во всех точках расширенной дуальной плоскости и не имеет в ней особенностей. Правую часть выражения (А.4.1) можно записать следующим образом:

$$(x^d)^2 = x^d \cdot x^d = (x + \varepsilon x')(x + \varepsilon x') = x^2 + \varepsilon 2xx'.$$

Тогда в соответствии с общим представлением для произвольной функции дуального переменного (А.2.5), получаем:

$$\left. \begin{aligned} u(x, x') &= x^2, \quad v(x, x') = 2xx', \\ f_D(x^d) &= (x^d)^2 = u(x, x') + \varepsilon v(x, x') = x^2 + \varepsilon 2xx'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4.2})$$

С учетом полученных выражений (А.4.2) проверим, выполняется ли условие D -дифференцируемости в точке (А.2.42) (произвольной) для рассматриваемой функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x'} = \frac{\partial(2xx')}{\partial x'} = 2x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} \Leftarrow \forall x^d_0 \in \bar{D}. \quad (\text{A.4.3})$$

Из соотношений (А.4.3) видно, что уравнения Коши-Римана также удовлетворяются и во всех других точках расширенной дуальной плоскости. Таким образом, рассматриваемая функция (А.4.1) является аналитической на всей расширенной дуальной плоскости. Следовательно, она может быть представлена в виде (А.2.46):

$$\left. \begin{aligned} f_D(x^d) &= (x^d)^2 = x^2 + \varepsilon x'(2x) = u(x) + \varepsilon \left(x' \frac{du(x)}{dx} + w(x) \right), \Rightarrow \\ \Rightarrow u(x) &= x^2, \quad \frac{du(x)}{dx} = 2x, \quad w(x) = 0, \quad \forall x^d \in \bar{D}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4.4})$$

Итак, очевидные следствия из выражений (А.4.2) позволяют окончательно определить структуру рассматриваемой аналитической функции (А.4.1). Видно, что формально она полностью определяется действительнзначной функцией $u(x)=x^2$, непрерывной вместе со своей производной на всей действительной оси. Функция же $w(x)$ в рассматриваемом случае тождественно равна нулю. При этом справедливость представления аналитической функции в виде (А.2.46) очевидна.

Обратим внимание на следующее. В рассматриваемом случае функция $u(x)=x^2$, представляющая собой действительную часть аналитической функции дуального переменного (А.4.1), есть отображение всего пространства действительных чисел \mathbf{R} в себя. А аналитическая функция дуального переменного $f_D(x^d)=(x^d)^2$ есть *тоже самое* отображение, только оно, в свою очередь, переводит элементы расширенной дуальной плоскости в соответствующие им элементы той же плоскости. Другими словами, само правило, по которому устанавливаются соответствия

$$\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R} \Leftrightarrow \bar{D} \mapsto \bar{D} \quad (\text{А.4.5})$$

между соответствующими элементами пространств \mathbf{R} и \bar{D} одинаково. Вместе с тем, очевидно, одинаковы и свойства этих отображений. Данная особенность не является неожиданной, так как в первом разделе настоящей главы был получен следующий важный результат: поле действительных чисел есть гомоморфный образ алгебры дуальных чисел. При этом в качестве гомоморфизма выступает непрерывное отображение (А.1.18), не являющееся взаимно-однозначным. Также, рассматриваемое свойство (А.4.5) структуры аналитической функции дуального переменного может быть получено исходя из следующих соображений. Обратим внимание на основные операции над кольцом дуальных чисел (А.1.5) и (А.1.7). Видно, что действительные части образов операций сложения и умножения двух дуальных чисел получаются также, как если бы те же операции были бы применены к действительным частям их прообразов. При этом операции сложения и умножения являются основополагающими для любой системы с двойной композицией, так как с помощью них определяются прочие операции над элементами рассматриваемой алгебры. Выше было показано, что аналитическая функция дуального переменного разлагается в степенной ряд вида (А.2.48). Тогда стоит ожидать, что действительная часть суммы такого ряда будет представлять собой степенной ряд, сходящийся к действительной функции, значения которой совпадают с соответствующими значениями действительной части образа функции дуального переменного. Очевидно, что это справедливо в силу упомянутых выше свойств основных операций.

Таким образом, получено важное свойство структуры аналитической функции дуального переменного, которое, очевидно, может быть использовано «в обоих

направлениях». Так, с одной стороны, если для произвольной функции f_D установлено свойство ее аналитичности, то легко может быть определена функция $u(x)$ (в явном виде), входящая в ее структуру:

$$f_D(\cdot) \Rightarrow u(\cdot).$$

С другой стороны, для произвольной действительной функции $f(x)$ всегда можно построить ее дуальное представление, положив при этом $u(x)=f(x)$:

$$f(x) \equiv u(x) \Rightarrow f_D(x^d). \quad (\text{A.4.6})$$

Это следует напрямую из представления (A.2.46) для функции f_D , которое можно непосредственно использовать в качестве определения аналитической функции дуального переменного. Здесь, правда, стоит отметить следующее. Во-первых, функция $u(x)$ должна быть, как минимум, непрерывной вместе со своей первой производной в точке. Это естественно определяет ограничения, налагаемые на функцию $f(x)$, для которой необходимо построить дуальное представление. При этом совершенно ясно, что особые точки $f(x)$ соответствующим образом переносятся на дуальную плоскость и проявляются уже как особенности функции f_D . Во-вторых, в рассмотренном частном примере (A.4.1) аналитической функции дуального переменного было получено что $w(x)=0$ для любых x . Но всегда ли это так? Ответ на этот вопрос очень важен, так как, согласно все тому же представлению (A.2.46), аналитическая функция f_D определяется парой действительных функций u и w . Чтобы получить ответ на поставленный вопрос рассмотрим следующий пример функции одного дуального переменного:

$$f_D(x^d) = c^d \cdot (x^d)^2, \quad c^d \in \bar{D}. \quad (\text{A.4.7})$$

Функция (A.4.7) отличается от рассматриваемой ранее функции (A.4.1) только лишь присутствием умножения на дуальное число (константу) c^d . Правая часть выражения (A.4.7) может быть записана следующим образом:

$$c^d (x^d)^2 = (c + \varepsilon c')(x^2 + \varepsilon 2xx') = cx^2 + \varepsilon(2cxx' + c'x^2).$$

Следовательно, можно получить следующее представление для функции (A.4.7):

$$\left. \begin{aligned} f_D(x^d) &= u(x, x') + \varepsilon v(x, x') = cx^2 + \varepsilon(2cxx' + c'x^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(x) = cx^2, v(x, x') = 2cxx' + c'x^2. \end{aligned} \right\}$$

При этом очевидно, что функция (A.4.7) является голоморфной (аналитической) во всех точках дуальной плоскости, так как всюду на ней справедливы уравнения Коши-Римана. Проверить это не составляет никакого труда. Таким образом, для рассматриваемой аналитической функции (A.4.7) оказывается справедливо следующее представление (A.2.46):

$$\left. \begin{aligned} f_D(x^d) &= cx^2 + \varepsilon(2cxx' + c'x^2) = u(x) + \varepsilon \left(x' \frac{du(x)}{dx} + w(x) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow u(x) &= cx^2, \quad x' \frac{du(x)}{dx} = 2cxx', \quad w(x) = c'x^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4.8})$$

Из полученных выражений (A.4.8) следует, что функция $w(x)$ в общем случае может быть отличной от нуля. И не принимать это во внимание при построении дуального представления (A.2.46) для действительной функции $f(x)$ нельзя.

Рассмотренный частный пример аналитической функции дуального переменного (A.3.7), к сожалению, не проливает свет на саму структуру функции $w(x)$. То есть пока невозможно дать ответ на вопрос о том, какой именно должна быть выбрана функция $w(x)$ при построении дуального представления (A.2.46) для действительной функции $f(x)$. Исходя из рассмотрения самой возможности такого построения, следует ожидать, что $w(x)$ каким-то образом (единственным) определяется через $u(x)=f(x)$. В противном случае, построение (A.2.46) было бы в принципе невозможно. Далее будет показано, что данное предположение относительно функции $w(x)$ верно. Для того чтобы явно определить связь между функциями $u(x)$ и $w(x)$ необходимо рассмотреть случай аналитической функции нескольких дуальных переменных.

Итак, рассмотрим следующую простейшую функцию двух дуальных переменных:

$$f_D(x_1^d, x_2^d) = x_1^d \cdot (x_2^d)^2, \quad x_1^d, x_2^d \in \bar{D}. \quad (\text{A.4.9})$$

Правую часть выражения (A.4.9) можно представить следующим образом:

$$x_1^d \cdot x_2^d = (x_1 + \varepsilon x_1') (x_2^2 + \varepsilon 2x_2 x_2') = x_1 x_2^2 + \varepsilon (2x_1 x_2 x_2' + x_2^2 x_1').$$

Тогда, согласно общему представлению для функции нескольких дуальных переменных (A.3.14) получаем:

$$\left. \begin{aligned} f_D(x_1^d, x_2^d) &= u(x_1, x_2, x_1', x_2') + \varepsilon v(x_1, x_2, x_1', x_2') = x_1 x_2^2 + \varepsilon (2x_1 x_2 x_2' + x_2^2 x_1') \Rightarrow \\ \Rightarrow u(x_1, x_2, x_1', x_2') &= x_1 x_2^2, \quad v(x_1, x_2, x_1', x_2') = 2x_1 x_2 x_2' + x_2^2 x_1'. \end{aligned} \right\}$$

Для функции (A.4.9) легко устанавливается справедливость системы уравнений Коши-Римана (A.3.19) для всех точек пространства D^2 . Таким образом, функция (A.4.9) – аналитическая. Следовательно, она может быть представлена в виде (A.3.22), согласно принятому определению аналитической функции нескольких дуальных переменных:

$$\left. \begin{aligned}
f_D(x_1^d, x_2^d) &= x_1 x_2^2 + \varepsilon(2x_2 x_1 x_2' + x_2^2 x_1') = u(x_1, x_2) + \varepsilon \left(x_1' \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2' \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} + w(x_1, x_2) \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow u(x_1, x_2) &= x_1 x_2^2, \quad x_1' \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = x_2^2 x_1', \quad x_2' \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2x_1 x_2 x_2', \quad w(x_1, x_2) = 0.
\end{aligned} \right\}$$

Как видно из последнего выражения, вновь, как и в случае функции (А.4.1), $w=0$. Это наводит на мысль о том, что если аналитическая функция дуального переменного (n дуальных переменных) в своем выражении не содержит дуальных констант (постоянных с ненулевой дуальной частью), то есть определяется выражением, являющимся произвольной комбинацией своего аргумента (n аргументов) и действительных постоянных, то всегда $w=0$. Действительно, выражения, определяющие структуру функций (А.4.1) и (А.4.9) не содержат дуальных постоянных. При этом любое включение в них действительных констант так, чтобы функция оставалась аналитической, не изменит ее общей структуры. То есть функция w будет по-прежнему тождественно равна нулю. В явном виде это будет показано в ходе дальнейшего изложения.

Теперь обратим внимание на следующее. Очевидно, что функция (А.4.7) может быть представлена как функция (А.4.9), если положить в ней переменную x_1^d равной c^d . Тогда сравнивая между собой соответствующие выражения, определяющие структуру рассматриваемых функций, получим следующее:

$$\left. \begin{aligned}
f_D(c^d, x^d) &= cx^2 + \varepsilon(2xcx' + x^2 c') = u(c, x) + \varepsilon \left(c' \frac{\partial u(c, x)}{\partial c} + x' \frac{\partial u(c, x)}{\partial x} \right) = \\
= f_D(x^d) &= cx^2 + \varepsilon(2xcx' + x^2 c') = u(x) + \varepsilon \left(x' \frac{du(x)}{dx} + w(x) \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow w(x) &= c' \frac{\partial u(c, x)}{\partial c}.
\end{aligned} \right\} \quad (\text{А.4.10})$$

То есть для аналитической функции одного дуального переменного (А.4.7), содержащей в своем выражении дуальную постоянную c^d , функция $w(x)$ может быть представлена как произведение формальной частной производной функции $u(x)$ по действительной части этой постоянной на ее дуальную часть. Отсюда также следует, что если постоянные, входящие в выражение для аналитической функции дуального переменного имеют нулевую дуальную часть, то есть являются действительными числами, то в этом случае всегда $w(x)=0$. Используя аналогичный подход, это же свойство можно доказать и для функции n дуальных переменных, тем самым обобщив полученный результат. Окончательно, приведем выражения для аналитических функций одного или n дуальных переменных, содержащих в своих выражениях k дуальных постоянных:

$$\left. \begin{aligned} f_D(x^d) &= u(x) + \varepsilon \left(x' \frac{du(x)}{dx} + w(x) \right), \quad w(x) = \sum_{j=1}^k c'_j \frac{\partial u(x)}{\partial c_j}; \\ f_D(x^d_1, x^d_2, \dots, x^d_n) &= u(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n x'_i \frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x'_i} + w(x_1, x_2, \dots, x_n) \right), \\ w(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^k c'_j \frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial c_j}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4.11})$$

В заключение данного раздела покажем справедливость представления аналитической функции дуального переменного степенными рядами вида (A.2.48). Для этого воспользуемся известными разложениями в степенные ряды для функций действительного или комплексного переменного и определим их суммы над элементами дуальной плоскости. Так, например, в действительном и комплексном анализе функция

$$f(\xi) = \frac{1}{1-\xi}, \quad (\text{A.4.12})$$

может быть представлена в виде суммы следующего степенного ряда [33, 57]:

$$\mathbf{1} + \xi + \xi^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}^n \cdot \xi^n, \quad \xi \in \mathbf{R} \vee \xi \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.4.13})$$

Этот ряд (A.4.13) сходится к точному значению функции (A.4.12) при $|\xi| < 1$. Запишем теперь сумму ряда (A.4.13) для элементов дуальной плоскости:

$$S(x^d) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}^n \cdot (x^d)^n = \mathbf{1} + (x + \varepsilon x') + (x + \varepsilon x')^2 + \dots + (x + \varepsilon x')^n + \dots \quad (\text{A.4.14})$$

Каждое слагаемое рассматриваемого ряда (A.4.14) представляет собой дуальное число, возведенное в целую неотрицательную степень. Для того чтобы получить выражение целочисленной степени дуального числа

$$(x^d)^n = (x + \varepsilon x')^n, \quad (\text{A.4.15})$$

воспользуемся следующей формулой (Бином Ньютона для целочисленных показателей [57]):

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j a^{n-j} b^j, \quad C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}, \quad j=0,1,2,\dots \quad (\text{A.4.16})$$

Как известно [57], данная формула справедлива как для действительных, так и для комплексных чисел a и b . Исходя из общности алгебраических свойств рассматриваемых в настоящей работе систем чисел, использование формулы (A.4.16) для вычисления выражения (A.4.15) кажется вполне обоснованным. Справедливость формулы (A.4.16) применительно к дуальным числам (a и b) легко проверяется путем непосредственного n -кратного умножения. Так, например, квадрат дуального числа дается следующим выражением:

$$(x^d)^2 = (x + \varepsilon x')(x + \varepsilon x') = x^2 + \varepsilon 2xx'.$$

Используя же формулу (A.4.16), получим:

$$\left. \begin{aligned} (x^d)^2 &= ((x + \varepsilon \cdot 0) + (0 + \varepsilon x'))^2 \Rightarrow a = x + \varepsilon \cdot 0, \quad b = 0 + \varepsilon x', \\ C_2^0 &= 1, \quad C_2^1 = 2, \quad C_2^2 = 1, \\ \sum_{j=0}^2 C_2^j a^{2-j} b^j &= 1 \cdot (x + \varepsilon \cdot 0)^2 \cdot (0 + \varepsilon x')^0 + 2 \cdot (x + \varepsilon \cdot 0)^1 \cdot (0 + \varepsilon x')^1 + 1 \cdot (x + \varepsilon \cdot 0)^0 \cdot (0 + \varepsilon x')^2 = \\ &= x^2 + \varepsilon 2xx'. \end{aligned} \right\}$$

В приведенных выражениях были использованы следующие (очевидные) свойства возведения в целую неотрицательную степень дуального числа, вытекающие из операции умножения (A.1.6):

$$\left. \begin{aligned} (x + \varepsilon 0)^n &= \underbrace{(x + \varepsilon 0) \cdot (x + \varepsilon 0) \cdot \dots \cdot (x + \varepsilon 0)}_n = x^n, \quad n > 1; \\ (0 + \varepsilon x')^n &= \underbrace{(0 + \varepsilon x') \cdot (0 + \varepsilon x') \cdot \dots \cdot (0 + \varepsilon x')}_n = 0, \quad n > 1; \\ (x + \varepsilon x')^0 &= \mathbf{1}. \end{aligned} \right\}$$

С учетом последних выражений, формулу (A.4.16) можно упростить (здесь для дуальных чисел a и b используется тоже представление, что и в приведенных ранее выражениях):

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^1 C_n^j a^{n-j} b^j = a^n + \frac{n!}{(n-1)!} a^{n-1} b.$$

Окончательно получаем, что выражение для целой неотрицательной степени дуального числа определяется следующим образом:

$$(x^d)^n = (x + \varepsilon x')^n = \left(\underbrace{(x + \varepsilon 0)}_a + \underbrace{(0 + \varepsilon x')}_b \right)^n = (a + b)^n = a^n + \frac{n!}{(n-1)!} a^{n-1} b = x^n + \varepsilon n x^{n-1} x'. \quad (\text{A.4.17})$$

Учитывая (A.4.17), сумму ряда (A.4.14) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} S(x^d) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}^n \cdot (x^d)^n = \mathbf{1} + (x + \varepsilon x') + (x + \varepsilon x')^2 + \dots + (x + \varepsilon x')^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \varepsilon x' \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4.18})$$

Полученное выражение (A.4.18) для $S(x^d)$ представляет собой комбинацию из сумм двух действительных рядов:

$$S(x^d) = S_1(x) + \varepsilon x' S_2(x), \quad S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}. \quad (\text{A.4.19})$$

Сумма ряда $S_1(x)$, согласно (A.4.12) и (A.4.13), сходится при $|x| < 1$ к выражению $1/(1-x)$ (геометрическая прогрессия). В свою очередь, сумма ряда $S_2(x)$, очевидно, может быть определена посредством $S_1(x)$ следующим образом:

$$S_2(x) = \frac{dS_1(x)}{dx}. \quad (\text{A.4.20})$$

Так как $S_1(x)$ сходится при $|x| < 1$, то $S_2(x)$ тем более сходится на рассматриваемом интервале, в силу свойства дифференцирования бесконечных рядов (все слагаемые в $S_2(x)$ – непрерывные и конечные производные на $|x| < 1$). При этом совершенно ясно, что сумма ряда $S_2(x)$ сходится, согласно (A.4.12), к следующему выражению:

$$S_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Тогда сумма ряда (A.4.14) дается следующим выражением:

$$S(x^d) = \frac{1}{1-x} + \varepsilon x' \frac{1}{(1-x)^2}. \quad (\text{A.4.21})$$

Соответствующая (A.4.12) функция дуального переменного

$$f_D(x^d) = \frac{1}{1-x^d} \quad (\text{A.4.22})$$

может быть представлена следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} f_D(x^d) &= \frac{1}{1-(x+\varepsilon x')} = \frac{1}{(1-x)-\varepsilon x'} = \frac{(1-x)+\varepsilon x'}{((1-x)-\varepsilon x')((1-x)+\varepsilon x')} = \\ &= \frac{(1-x)+\varepsilon x'}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} + \varepsilon \frac{x'}{(1-x)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4.23})$$

Полученное выражение (A.4.23), очевидно, совпадает с выражением для суммы ряда (A.4.21). При этом, функция (A.4.23) аналитическая в интересующей нас области $[x^d - \mathbf{0}] < 1$ (проверить это не составит никакого труда). Для оценки радиуса сходимости ряда (A.4.14) можно воспользоваться формулой Коши-Адамара (A.2.49). Она дает вполне ожидаемый результат: сумма ряда (A.4.14) сходится к точным значениям функции дуального переменного (A.4.22) в круге с радиусом меньшим единицы и центром в нуле. Таким образом, на примере функции (A.4.22), показана справедливость представления степенными рядами аналитической функции дуального переменного. Это также может быть полезно при построении требуемого дуального представления для функции действительного переменного. Так как теперь для этого можно воспользоваться ее разложением в степенной ряд и перенести его на дуальную плоскость. Кроме того, на примере рассмотренного степенного ряда (A.4.14) установлено, что его сумма эквивалентна комбинации из двух сумм действительных рядов (A.4.19), один из которых выражается через другой путем простого дифференцирования. Согласно свойствам дифференцирования бесконечных рядов функций, оба этих ряда сходятся внутри одного и того же интервала. Учитывая же соответствующее выражение (A.4.17) для целой положительной степени дуального числа, можно заключить, что любой степенной ряд с

действительными коэффициентами в общем случае приводится к форме (А.4.19). А структура суммы степенного ряда естественно повторяет структуру соответствующей аналитической функции дуального переменного.

Таким образом, в данном разделе текущей главы настоящей диссертационной работы окончательно уточнена структура аналитической функции дуального переменного (нескольких дуальных переменных). Выявлено важное свойство этой структуры, позволяющее достаточно просто построить дуальное представление для требуемой действительной функции. Также показана возможность построения дуального представления действительной функции посредством использования ее известных разложений в степенной ряд.

А.5 Элементарные функции дуального переменного

В данном разделе текущей главы диссертационной работы представлена таблица основных элементарных функций дуального переменного, необходимая при проведении практических вычислений. По ходу изложения, сначала будут приведены конкретные примеры построения дуального представления для некоторых действительных функций, а за тем и сама таблица, включающая в себя необходимый минимум элементарных функций дуального переменного для проведения вычислений на ЭВМ. Вопросы, непосредственно связанные с программной реализацией данной таблицы, как и основных операций, производимых над дуальными числами, будут освещены в ходе дальнейшего изложения.

Итак, рассмотрим элементарную действительную функцию $f(x)=e^x$. Она непрерывна вместе со всеми своими производными на всем диапазоне значений своего аргумента. Для того чтобы построить дуальное представление для рассматриваемой функции

$$f(\cdot) \mapsto f_D(\cdot)$$

воспользуемся свойством структуры аналитической функции дуального переменного, о котором шла речь в предыдущем разделе работы. Следовательно, просто полагаем, что действительная функция $u(x)$ совпадает с $f(x)=e^x$. Тогда, согласно определению аналитической функции дуального переменного (А.4.11), получаем:

$$f_D(x^d) = e^{x^d} = e^x + \varepsilon \left(x' \frac{de^x}{dx} + 0 \right) = e^x + \varepsilon x' e^x = e^x (1 + \varepsilon x'). \quad (\text{А.5.1})$$

В приведенном выражении для f_D функция $w(x)=0$, так как исходная функция $f(x)$ не содержит в себе действительных констант. Здесь сразу же стоит отметить следующее. В противном случае, т.е. если бы $f(x)$ содержала в себе действительные постоянные, функция $w(x)$, входящая в структуру аналитической функции (А.4.11), по-прежнему равнялась бы нулю. Согласно

которая, очевидно, совпадает с (А.5.1).

Положив в выражении для функции (А.5.1) действительную часть дуального переменного равной нулю, получим «дуальный» аналог известной формулы Эйлера из комплексного анализа [15, 57]:

$$e^{\varepsilon x'} = e^{0+\varepsilon x'} = 1 + \varepsilon x'.$$

Нетрудно убедиться, что для функции (А.5.1) справедлива т.н. теорема сложения:

$$e^{x_1^d} e^{x_2^d} = e^{x_1^d + x_2^d}.$$

Действительно:

$$e^{x_1^d} e^{x_2^d} = e^{x_1} e^{x_2} (1 + \varepsilon x_1') (1 + \varepsilon x_2') = e^{x_1 + x_2} (1 + \varepsilon (x_1' + x_2')), \quad (\text{А.5.4})$$

обозначив за X^d сумму $(x_1^d + x_2^d)$, выражение (А.5.4) можно представить в виде:

$$e^{x_1^d} e^{x_2^d} = e^{x_1 + x_2} (1 + \varepsilon (x_1' + x_2')) = e^{X^d}, \quad X^d = x_1^d + x_2^d = (x_1 + x_2) + \varepsilon (x_1' + x_2').$$

Последнее и доказывает справедливость этой теоремы.

Далее, рассмотрим тригонометрические функции $f(x)=\sin(x)$ и $f(x)=\cos(x)$. Вновь воспользовавшись свойством структуры аналитической функции, получим их следующее дуальное представление:

$$\left. \begin{aligned} \sin(x^d) &= \sin(x) + \varepsilon \left(x' \frac{d \sin(x)}{dx} + 0 \right) = \sin(x) + \varepsilon x' \cos(x), \\ \cos(x^d) &= \cos(x) + \varepsilon \left(x' \frac{d \cos(x)}{dx} + 0 \right) = \cos(x) - \varepsilon x' \sin(x). \end{aligned} \right\} \quad (\text{А.5.5})$$

Справедливость выражений (А.5.5) также можно установить, используя известные из действительного и комплексного анализа разложения для функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$ в степенные ряды, и применив их к элементам пространства D . Не будем останавливаться на этом подробно, так как данная процедура, по своей сути, повторяет вышеизложенную процедуру для функции $f(x)=e^x$. Да и вообще, она, очевидно, может быть обобщена для любых действительных функций, которые могут быть представлены сходящимися степенными рядами, по крайней мере, внутри некоторого интервала.

Функции (А.5.5) также наследуют основные свойства и особенности их действительных прообразов. Они определены и непрерывны во всех точках расширенной дуальной плоскости. Являются периодическими. Кроме того, для них остаются справедливы основные тригонометрические формулы (тождества), такие как, синус суммы, косинус суммы и т.д. Это можно легко проверить, используя при этом соответствующее дуальное представление (в виде функции двух переменных), или непосредственно подстановкой.

Дуальные производные функций (А.5.5), согласно (А.2.40), даются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \sin(x^d)}{dx^d} &= \frac{d}{dx} (\sin(x) + \varepsilon x' \cos(x)) = \cos(x) - \varepsilon x' \sin(x) = \cos(x^d), \\ \frac{d \cos(x^d)}{dx^d} &= \frac{d}{dx} (\cos(x) - \varepsilon x' \sin(x)) = -\sin(x) - \varepsilon x' \cos(x) = -\sin(x^d). \end{aligned} \right\}$$

Очевидно, что их старшие производные (до n -ого порядка включительно) можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^n \sin(x^d)}{(dx^d)^n} &= \cos\left(x^d + \frac{\pi}{2}n\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right) - \varepsilon x' \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), \\ \frac{d^n \cos(x^d)}{(dx^d)^n} &= \sin\left(x^d + \frac{\pi}{2}n\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right) + \varepsilon x' \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right). \end{aligned} \right\}$$

Полученные выражения легко проверяемы, а по своей форме они, по сути, повторяют запись производных n -ого порядка для действительных функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Очевидно, что функции дуального переменного (А.5.5), как и их действительные прообразы, дифференцируемы во всех точках D бесконечное число раз.

Интересно отметить, что, в отличие от пространства комплексных чисел, в D отсутствует явная связь между тригонометрическими функциями (А.5.5) и функцией (А.5.1). Другими словами, они не могут быть напрямую выражены (в явном виде) друг через друга. Однако, как и для случая пространства действительных чисел, для дуальных чисел связь между функцией (А.5.1) и гиперболическими функциями остается такой же. То есть справедливы, например, следующие соотношения:

$$\operatorname{sh}(x^d) = \frac{e^{x^d} - e^{-x^d}}{2}, \quad \operatorname{csh}(x^d) = \frac{e^{x^d} + e^{-x^d}}{2}.$$

Проверку последних можно произвести, используя известные разложения соответствующих функций ($\operatorname{sh}(x)$ и $\operatorname{csh}(x)$) в степенной ряд.

Определим дуальное представление для функции $f(x)=\operatorname{tg}(x)$ следующим образом:

$$\operatorname{tg}(x^d) = \frac{\sin(x^d)}{\cos(x^d)} = \frac{\sin(x) + \varepsilon x' \cos(x)}{\cos(x) - \varepsilon x' \sin(x)}. \quad (\text{А.5.6})$$

Сразу же обратим внимание на то, что при значениях действительной части дуального аргумента функции $\operatorname{tg}(x^d)$ равных $(\pi/2)n$, где n – целое, правая часть выражения (А.5.6) неопределенна, так как деление на делитель нуля невозможно. Таким образом получаем, что все прямые вида $x=(\pi/2)n$ на плоскости дуального переменного – особые для функции (А.5.6). Вполне очевидно, что данная особенность вновь наследуется функцией (А.5.6) от своего действительного прообраза. Этот факт еще раз подчеркивает гомоморфность алгебр дуальных и действительных чисел.

Приведем правую часть выражения (А.5.6) к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin(x) + \varepsilon x' \cos(x)}{\cos(x) - \varepsilon x' \sin(x)} &= \frac{(\sin(x) + \varepsilon x' \cos(x))(\cos(x) + \varepsilon x' \sin(x))}{(\cos(x) - \varepsilon x' \sin(x))(\cos(x) + \varepsilon x' \sin(x))} = \\ &= \frac{\sin(x)\cos(x) + \varepsilon x'}{\cos(x)^2} = \operatorname{tg}(x) + \varepsilon x'(1 + \operatorname{tg}(x)^2). \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, окончательно получим следующее дуальное представление для функции $\operatorname{tg}(x)$:

$$\operatorname{tg}(x^d) = \operatorname{tg}(x) + \varepsilon x'(1 + \operatorname{tg}(x)^2). \quad (\text{А.5.7})$$

Естественно, выражение (А.5.7) удовлетворяет общей структуре аналитической функции дуального переменного, так как

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg}(x) = 1 + \operatorname{tg}(x)^2,$$

и, следовательно, соответствующее дуальное представление также можно получить исходя из используемого свойства (структуры).

Далее приведена таблица А.5.1, содержащая набор элементарных функций дуального переменного и представляющая собой необходимый минимум для практической реализации вычислений над кольцом дуальных чисел.

Таблица А.5.1 Элементарные функции дуального переменного

$f_D(x^d) = u(x) + \varepsilon v(x, x')$			
Функция	$u(x)$	$v(x, x')$	Особые точки и прямые
x^d	x	x'	Нет
$(x^d)^r, r \in \mathbb{Z}$	x^r	$x' r x^{r-1}$	При $r < 0$ особая прямая $x=0$
e^{x^d}	e^x	$x' e^x$	Нет
$\sin(x^d)$	$\sin(x)$	$x' \cos(x)$	Нет
$\cos(x^d)$	$\cos(x)$	$x' \sin(x)$	Нет
$\operatorname{tg}(x^d)$	$\operatorname{tg}(x)$	$x'(1 + \operatorname{tg}(x)^2)$	Особые прямые $x = (\pi/2)n$
$\ln(x^d)$	$\ln(x)$	$x' \frac{1}{x}$	Особая прямая $x=0$

$\log_a(x^d), a > 0$	$\log_a(x)$	$x' \frac{1}{x \ln(a)}$	Особая прямая $x=0$
$a^{x^d}, a > 0, a \in \mathbf{R}$	a^x	$x' a^x \ln(a)$	Нет
$\sqrt{x^d}$	\sqrt{x}	$x' \frac{1}{2\sqrt{x}}$	Функция определена лишь при $x > 0$
$\sqrt[n]{x^d}, n \in \mathbf{N}$	$\sqrt[n]{x}$	$x' n \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	Функция определена лишь при $x > 0$

Формально, приведенная таблица может быть расширена рассмотрением случая функции двух переменных. Вообще говоря, исходя из общих теоретических и практических соображений, в этом нет прямой необходимости. Однако оказывается, что в такой форме (функциональной) удобно представить основные арифметические операции над элементами пространства D при практической реализации вычислений на ЭВМ. Соответствующие им представления в явном виде приведены в следующей таблице А.5.2:

Таблица А.5.2 Основные операции в функциональном виде

$f_D(x_1^d, x_2^d) = u(x_1, x_2) + \varepsilon v(x_1, x_2, x_1', x_2')$			
Операция	$u(x_1, x_2)$	$v(x_1, x_2, x_1', x_2')$	Особенности
$x_1^d + x_2^d$	$x_1 + x_2$	$x_1' + x_2'$	Нет
$x_1^d \cdot x_2^d$	$x_1 \cdot x_2$	$x_1' x_2' + x_2' x_1'$	Нет
$\frac{x_1^d}{x_2^d}$	$\frac{x_1}{x_2}$	$x_1' \frac{1}{x_2} - x_2' \frac{x_1}{x_2^2}$	Деление не определено при $x_2=0$
$(x_1^d)^{x_2^d}$	$x_1^{x_2}$	$x_1' x_2 x_1^{x_2-1} + x_2' x_1^{x_2} \ln(x_1)$	Операция определена только при $x_1 > 0$

Итак, задав таблицу основных элементарных функций, появляется возможность с помощью них записать и произвольную (сложную) функцию дуального переменного, так как для пространства D , очевидно, выполняются свойства композиции (или суперпозиции) элементарных функций, общие для любых топологических пространств. Другими словами,

любую функцию дуального переменного можно представить в виде композиции из элементарных функций одной или нескольких переменных. Для того чтобы показать это свойство, рассмотрим следующий простой пример построения дуального представления для действительной функции $F(x)=\sin(x^2)$. Последняя представляет собой композицию $F=(f \circ g)(x)$ из двух элементарных функций $f(x)=\sin(x)$ и $g(x)=x$. Используя свойство структуры аналитической функции дуального переменного, т.е. полагая $u(x)=F(x)$, получим:

$$F_D(x^d) = \sin(x^2) + \varepsilon x'(2x \cos(x^2)). \quad (\text{A.5.8})$$

С другой стороны, функцию (A.5.2) можно представить в виде композиции $F_D=(f_D \circ g_D)(x^d)$ двух элементарных функций дуального переменного $f_D(x^d)=\sin(x^d)$ и $g_D(x^d)=(x^d)^2$, т.е.

$$F_D(x^d) = f_D(g_D(x^d)). \quad (\text{A.5.9})$$

Последнее выражение можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} g_D(\cdot) &= g(\cdot) + \varepsilon g'(\cdot) \Rightarrow \\ F(\cdot) &= (f_D \circ g_D) = \sin(g_D(\cdot)) = \sin(g(\cdot)) + \varepsilon g'(\cdot) \cos(g(\cdot)), \end{aligned} \right\}$$

и учитывая, что $g_D(x^d)=(x^d)^2=x^2+\varepsilon 2xx'$ и $g(x^d)=x$, $g'(x^d)=2xx'$, окончательно получаем:

$$F_D(x^d) = \sin(g(x^d)) + \varepsilon g'(x^d) \cos(g(x^d)) = \sin(x^2) + \varepsilon (2xx') \cos(x^2). \quad (\text{A.5.10})$$

Выражения для F_D (A.5.8) и (A.5.9), очевидно, совпадают. Тем самым показана справедливость представления произвольной функции дуального переменного в виде композиции элементарных функций. Данный факт оказывается очень важным с точки зрения практической реализации процесса вычислений над кольцом дуальных чисел. Потому что для произвольной действительной функции теперь нет необходимости непосредственно определять ее дуальное представление (при проведении вычислений). Так как достаточно просто задать его в виде композиции из элементарных функций от одного или двух дуальных переменных.

Также стоит отметить, что в рассматриваемом пространстве D остается справедливо и правило дифференцирования сложной функции. Покажем это. Итак, сначала вычислим дуальную производную для функции (A.5.8) напрямую. Согласно (A.2.22), она дается следующим выражением:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx^d} F_D(x^d) &= \frac{d}{dx^d} \sin((x^d)^2) = \frac{d}{dx} (\sin(x^2) + \varepsilon 2x'x \cos(x^2)) = \\ &= 2x \cos(x^2) + \varepsilon (2x' \cos(x^2) - 4x'x^2 \sin(x^2)). \end{aligned} \right\}$$

С другой стороны, используя представление для F_D в виде (A.5.9), ту же производную можно вычислить, используя правило дифференцирования сложной функции:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d}{dx^d} F(x^d) &= \frac{d}{dx^d} (f_D(g_D(x^d))) = \frac{\partial f_D}{\partial g_D} \frac{dg_D}{dx^d} = \frac{\partial}{\partial g_D(x^d)} (\sin(g_D(x^d))) \times \\
&\times \frac{d}{dx} \left(g(x) + \varepsilon x' \frac{d}{dx} g(x) \right) = \left[\frac{\partial}{\partial g(x)} (\sin(g(x)) + \varepsilon g'(x, x') \cos(g(x))) \right] \times \\
&\times \left(\frac{d}{dx} g(x) + \varepsilon x' \frac{d^2}{dx^2} g(x) \right) = 2(\cos(g(x)) - \varepsilon g'(x, x') \sin(g(x)))(x + \varepsilon x') = \\
&= 2 \cos(g_D(x^d)) x^d = 2(\cos(x^2) - \varepsilon 2x x' \sin(x^2))(x + \varepsilon x') = \\
&= 2x \cos(x^2) + \varepsilon (2x' \cos(x^2) - 4x x' \sin(x^2)).
\end{aligned} \right\} \quad (A.5.11)$$

Очевидно, что полученные выражения для дуальной производной функции F_D совпадают. Следовательно, выполняется и правило дифференцирования сложной функции. Также здесь следует отметить, что в выражениях (A.5.11) частная производная

$$\left. \frac{\partial f_D}{\partial g_D} \Big|_{g_D(x^d)} \right\} \quad (A.5.12)$$

понимается в смысле дуальной производной (A.2.22). Хотя, формально, результат выражения (A.5.11) может быть получен исходя из общих правил «символьного» дифференцирования, не принимая во внимание саму природу переменной. Это также видно из выражений (A.5.11).

В заключение данного раздела следует отметить, что все особенности аналитической функции дуального переменного наследуются ей от ее действительного прообраза. Это следует из общей структуры аналитической функции и подчеркивает гомоморфность алгебр дуальных и действительных чисел.

A.6 Дуальные числа с векторной дуальной частью

С точки зрения полноты общего теоретического обоснования применяемых методик и вычислительных схем, в настоящей работе осталось рассмотреть лишь «многомерный» вариант дуальных чисел. В первую очередь стоит отметить, что речь здесь пойдет не об $2n$ -мерных пространствах действительных чисел, для которых каким-то образом введена обыкновенная комплексная структура. То есть не о тех пространствах, которые фактически могут быть получены путем n -кратного прямого произведения комплексных плоскостей (в частности, такие пространства (D^n) были частично рассмотрены в предыдущих разделах данной главы при обсуждении функции нескольких дуальных переменных). Речь пойдет о некотором дальнейшем алгебраическом расширении поля действительных чисел, результатом которого является частная алгебраическая система гиперкомплексных чисел [9, 10, 19, 20, 61,

83, 99, 100], наследующая основные свойства алгебры дуальных чисел. Такие «многомерные» дуальные числа будем называть *дуальными числами с векторной дуальной частью*, как это делается в работах [99, 100, 103]. Подавляющее большинство из этих работ вновь, как и в случае обыкновенных дуальных чисел, посвящено исключительно прикладным аспектам их применения, напрямую связанным с методикой численного дифференцирования. Причем представленные в этих работах алгоритмы, вообще говоря, не имеют должного теоретического обоснования.

В этом разделе будут кратко рассмотрены алгебраические свойства и особенности дуальных чисел с векторной дуальной частью, а также основные положения теории аналитической функции многомерного дуального переменного. Это является необходимым, в первую очередь, именно для теоретического обоснования вычислительных процедур, использующих данный математический аппарат.

Итак, начнем с алгебры дуальных чисел с векторной дуальной частью. Чтобы избежать ненужных повторений, а также упростить само изложение, обратимся сначала к общему понятию гиперкомплексного числа. Рассмотрим некоторое конечномерное векторное пространство \mathbf{Z} над полем действительных чисел, в котором определены базисные элементы E_i . Тогда любой его элемент (вектор пространства) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{z} = z_0 E_0 + z_1 E_1 + \dots + z_n E_n, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{Z}, z_i \in \mathbf{R}. \quad (\text{A.6.1})$$

Будем отождествлять понятие гиперкомплексного числа с элементом пространства \mathbf{Z} . Для формирования полноценной (с точки зрения практического применения) алгебраической системы чисел с двойной композицией (системы с двумя определяющими операциями), элементы пространства \mathbf{Z} должны удовлетворять т.н. групповым свойствам [9] по отношению к рассматриваемым над ними операциям. Среди этих свойств наибольшее значение имеет замкнутость по отношению к операциям сложения и умножения. То есть сумма и произведение элементов вида (A.6.1) должны принадлежать к тому же классу объектов. Кроме того, очевидно должны выполняться характерные для любого векторного пространства свойства умножения вектора на скаляр (ассоциативность и дистрибутивность). При этом сами элементы пространства \mathbf{Z} могут не образовывать даже кольца, ввиду отсутствия требования ассоциативности умножения. Все перечисленные алгебраические понятия и свойства (применительно к обыкновенным дуальным числам) были подробно рассмотрены в первом разделе настоящей главы. Общее же их описание, может быть найдено, например, в книге [9].

Используя вышеизложенные соображения, введем операции сложения и умножения для чисел вида (A.6.1) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 &= (z_{1_0} E_0 + z_{1_1} E_1 + \dots + z_{1_n} E_n) + (z_{2_0} E_0 + z_{2_1} E_1 + \dots + z_{2_n} E_n) = \\
&= (z_{1_0} + z_{2_0}) E_0 + (z_{1_1} + z_{2_1}) E_1 + \dots + (z_{1_n} + z_{2_n}) E_n, \\
\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 &= (z_{1_0} E_0 + z_{1_1} E_1 + \dots + z_{1_n} E_n) \cdot (z_{2_0} E_0 + z_{2_1} E_1 + \dots + z_{2_n} E_n) = \\
&= z_{1_0} z_{2_0} E_0^2 + z_{1_0} z_{2_1} E_0 E_1 + \dots + z_{1_0} z_{2_n} E_0 E_n + z_{1_1} z_{2_0} E_1 E_0 + z_{1_1} z_{2_1} E_1^2 + \dots + \\
&+ z_{1_1} z_{2_n} E_1 E_n + \dots + z_{1_n} z_{2_0} E_n E_0 + z_{1_n} z_{2_1} E_n E_1 + \dots + z_{1_n} z_{2_n} E_n^2.
\end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6.2})$$

В приведенных выражениях (A.6.2), для операции умножения, очевидно, предполагается, что остаются справедливы обыкновенные правила раскрытия скобок (дистрибутивность). Данное предположение является вполне естественным и обобщается на любые системы комплексных чисел [9, 33, 61, 62].

Операция сложения двух чисел вида (A.6.1) определена вполне однозначно. Вполне очевидно, что рассматриваемые числа образуют коммутативную группу по сложению. Действительно, не составляет никакого труда проверить замкнутость операции сложения и ее ассоциативность (проверка осуществляется непосредственно подстановкой):

$$\left. \begin{aligned}
\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbf{Z}, \quad \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_3 \in \mathbf{Z}, \\
\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in \mathbf{Z}, \quad (\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) + \mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_1 + (\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3).
\end{aligned} \right\}$$

Также очевидно существование единичного элемента:

$$\forall \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} + !E = \mathbf{z}, \quad !E = E! = E = \mathbf{0} = (0E_0 + 0E_1 + \dots + 0E_n), \quad E \in \mathbf{Z},$$

и, следовательно, обратного. Причем он единственен и существует всегда:

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbf{Z} \quad \exists \mathbf{z}^{-1} \in \mathbf{Z} : \mathbf{z} + \mathbf{z}^{-1} = \mathbf{z}^{-1} + \mathbf{z} = E = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}^{-1} = -\mathbf{z} = -1 \cdot \mathbf{z}.$$

Таким образом, основные групповые свойства (по сложению) выполнены. Кроме того, операция сложения коммутативна:

$$\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbf{Z} \quad \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_1,$$

что также элементарно проверяется подстановкой.

А вот с операцией умножения дело обстоит несколько сложнее. Основным предъявляемым к ней требованием является замкнутость. Иначе, при умножении двух чисел вида (A.6.1) друг на друга не удавалось бы остаться в том же классе объектов \mathbf{Z} . Очевидно, что операция умножения будет замкнутой только в том случае, если всевозможные попарные произведения базис-векторов E_i друг на друга не выводят из рассматриваемого класса. То есть, если

$$(E_i \cdot E_j) \in \mathbf{Z}, \quad \forall i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (\text{A.6.3})$$

При этом произведения вида

$$E_a \cdot E_b \cdot E_c \cdot \dots, \quad \forall a, b, c, \dots \in 0, 1, \dots, n,$$

для любых наборов индексов a, b, c, \dots всегда должны быть определены и также принадлежать к классу \mathbf{Z} . Условие (А.6.3) можно переписать следующим образом:

$$E_i \cdot E_j = p^{(i,j)}_0 E_0 + p^{(i,j)}_1 E_1 + \dots + p^{(i,j)}_n E_n,$$

где $p^{(i,j)}_k$ – действительные коэффициенты, $k=0,1,\dots,n$. В общем случае $p^{(i,j)}_k \neq p^{(j,i)}_k$, поэтому для полного определения операции умножения необходимо задать $(n+1)^3$ действительных коэффициентов. Набор коэффициентов $p^{(i,j)}_k$ удобно представлять в виде соответствующей таблицы умножения векторов E_i [9, 61, 65].

В общем случае, операция умножения для чисел вида (А.6.1) будет неассоциативной и некоммутативной. Для того чтобы добиться выполнения этих свойств необходимо положить

$$E_i \cdot E_j = E_j \cdot E_i, \quad \forall i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (\text{А.6.4})$$

Проверка данного утверждения осуществляется непосредственно прямой подстановкой. Не останавливаясь на этом подробно, отметим лишь следующий очевидный факт. Условие (А.6.4) будет выполнено только при $p^{(i,j)}_k = p^{(j,i)}_k$. А это, в свою очередь, сокращает число действительных коэффициентов $p^{(i,j)}_k$, подлежащих определению, до $2(n+1)^2$.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: алгебраическая система гиперкомплексных чисел вида (А.6.1) коммутативна и ассоциативна по отношению к своим определяющим операциям только лишь при выполнении условия (А.6.4). Кроме того, если для любых ее элементов всегда выполняется тождественное равенство вида

$$(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) \mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_2 \mathbf{z}_3 \equiv \mathbf{z}_3 (\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_3 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 \mathbf{z}_2 \quad \forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in \mathbf{Z}, \quad (\text{А.6.5})$$

(выражающее свойства дистрибутивности и коммутативность умножения), то рассматриваемая система чисел образует коммутативное кольцо (по определению [9]). Здесь также стоит отметить следующее. Вполне очевидно, что наложив ряд ограничений, связывающих между собой базис-векторы E_i рассматриваемого пространства \mathbf{Z} (посредством введения дополнительных условий вида (А.6.4) и (А.6.5)), можно получить многомерное обобщение самых общих комплексных чисел (как дальнейшее алгебраическое расширение поля действительных чисел) с сохранением их алгебраических свойств. Действительно, если специальным образом задавая таблицу умножения для гиперкомплексных чисел (А.6.1), удастся удовлетворить групповым свойствам относительно определяющих операций сложения и умножения (при этом группа по сложению для чисел вида (А.6.1) всегда коммутативная), то полученная алгебраическая система всегда будет как минимум кольцом, элементы которого образуют n -мерное векторное пространство над полем действительных чисел. То есть свойства рассматриваемой алгебраической системы будут полностью совпадать с соответствующими свойствами для самых общих комплексных чисел. При этом последние,

также могут быть представлены в виде (А.6.1). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример. Обыкновенное дуальное число $x^d = x + \varepsilon x'$ может быть записано в виде

$$x^d = xE_0 + x'E_1, \quad (\text{А.6.6})$$

т.е. как элемент двумерного векторного пространства (вектор на плоскости) с заданным базисом $(E_0; E_1)$. Как известно, дуальные числа образуют коммутативное кольцо (это было показано в первом разделе настоящей главы). А это означает, что для чисел вида (А.6.6) операция умножения (замкнутого) должна быть ассоциативной и коммутативной, т.е. необходимо выполнение условия (А.6.4). Этим и нужно руководствоваться при задании соответствующей таблицы умножения векторов $(E_0; E_1)$. В рассматриваемом случае число $n=1$. Следовательно, таблицу умножения должны определять 8 действительных коэффициентов $p^{(i,j)}_k$. Воспользовавшись определением операции умножения для двух обыкновенных дуальных чисел (А.6.6), не представляет труда подобрать их значения:

$$\left. \begin{aligned} p^{(i,j)}_0 = p^{(j,i)}_0 = 0, p^{(i,j)}_1 = p^{(j,i)}_1 = 1, i \neq j; \\ p^{(1,1)}_0 = 1, p^{(1,1)}_1 = 1, p^{(2,2)}_0 = 0, p^{(2,2)}_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{А.6.7})$$

Этому набору коэффициентов (А.6.7) отвечает следующая таблица А.6.1 умножения векторов E_i :

Таблица А.6.1 Таблица умножения

*	E_0	E_1
E_0	E_0	E_1
E_1	E_1	0

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} (x_1E_0 + x'_1E_1)(x_2E_0 + x'_2E_1) &= x_1x_2E_0E_0 + x_1x'_2E_0E_1 + x'_1x_2E_1E_0 + x'_1x'_2E_1E_1 = \\ &= x_1x_2E_0 + (x_2x'_1 + x_1x'_2)E_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{А.6.8})$$

Таким образом, для системы гиперкомплексных чисел (А.6.6), без всякого труда удалось определить операцию умножения (А.6.8), полностью эквивалентную (А.1.7). Следовательно, получено гиперкомплексное представление (А.6.6) обыкновенного дуального числа. И тем самым определена алгебраическая система чисел (А.6.6), обладающая идентичными им свойствами.

Зачастую, элемент E_0 в (А.6.1) отождествляют с единицей (действительной или комплексной). То есть считают, что рассматриваемый элемент удовлетворяет следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} E_0 \cdot E_i &= E_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \\ E_0 \cdot E_0 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Это представляется весьма удобным при определении общих соотношений (коммутации) между базис-векторами E_i для какого-либо конечномерного векторного пространства. Подобные соотношения являются следствием некоторых условий, налагаемых, в первую очередь, на операцию умножения векторов. В качестве частного примера такого рода условия, можно привести ограничения на умножение следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbf{Z}, \\ \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i &= Q(\mathbf{z}_i), \\ \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2 \mathbf{z}_1 &= B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6.9})$$

Данные условия определяют т.н. Клиффордовы алгебры [9, 20, 59, 65, 66, 70, 73], которые обобщают ряд гиперкомплексных систем чисел (кватернионы, бикватернионы) и, что особенно важно, обыкновенные дуальные числа. В выражениях (A.6.9) $Q(\mathbf{z})$ есть квадратичная форма с действительными коэффициентами вида

$$Q(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n q_i z_i^2 + \sum_{i < j \leq n} q_{ij} z_i z_j, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (\text{A.6.10})$$

а $B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ – симметричная билинейная форма, определяемая как

$$B(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = Q(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) - Q(\mathbf{z}_1) - Q(\mathbf{z}_2).$$

Элементы векторного пространства размерности 2^m , удовлетворяющий соотношениям (A.6.10), для алгебр Клиффорда обычно представляют следующим образом:

$$\mathbf{z} = \alpha \cdot 1 + \sum_{i=1}^m \beta_i E_i + \sum_{i < j < m} \delta_{ij} E_{ij} + \dots + \varepsilon_{1\dots m} E_{1\dots m}, \quad (1 \Leftrightarrow E_0).$$

Записав гиперкомплексное число (A.6.6) в форме

$$x^d = x + E_1 x'$$

(отождествляя E_0 с единицей), не составляет труда показать, что оно представляет собой элемент алгебры Клиффорда. Не останавливаясь на этом подробно, достаточно отметить, что соотношения (A.6.9) всегда будут выполнены, если положить $(E_1 E_1) = 0$ (при этом в выражении (A.2.14) $n=1$ и $q_1=0$). Таким образом, окончательно показано, дуальные числа можно представить как частный случай «многомерной» алгебраической системы, элементы которой удовлетворяют условиям алгебр Клиффорда.

Выше уже говорилось, что определив специальным образом правила коммутации базис-векторов пространства гиперкомплексных чисел \mathbf{Z} , можно получить многомерное обобщение самых общих комплексных чисел с сохранением их алгебраических свойств.

Дуальные числа, в свою очередь, есть частный случай Клиффордовой алгебры. Тогда рассматривая $(n+1)$ -мерное векторное пространство (содержащее единицу), с элементами вида

$$x^d = x \cdot 1 + \varepsilon_1 x' + \varepsilon_2 x'' + \dots + \varepsilon_n x'^{\dots}, \quad (\text{A.6.11})$$

приходим к алгебраической системе гиперкомплексных чисел, которая при

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (\text{A.6.12})$$

удовлетворяет условиям (A.6.9), т.е. также является алгеброй Клиффорда. Гиперкомплексные числа вида (A.6.11), для которых выполнены условия (A.6.12), определяющие таблицу умножения базис-векторов, представляют собой многомерное обобщение дуальных чисел. Так как, во-первых, и те и другие есть Клиффордовы алгебры. Во-вторых, элементы вида (A.6.11) образуют коммутативное кольцо, также как и дуальные числа. Следовательно, алгебраическая система чисел (A.6.11) наследует все основные свойства дуальных чисел, включая и присутствие делителей нуля. Числа вида (A.6.11) и будем называть дуальными числами с векторной дуальной частью.

Определим операции сложения и умножения для чисел вида (A.6.11) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x^d_1 + x^d_2 &= (x_1 + \varepsilon_1 x'_1 + \varepsilon_2 x''_1 + \dots + \varepsilon_n x'^{\dots}_1) + (x_2 + \varepsilon_1 x'_2 + \varepsilon_2 x''_2 + \dots + \varepsilon_n x'^{\dots}_2) = \\ &= x_1 + x_2 + \varepsilon_1 (x'_1 + x'_2) + \varepsilon_2 (x''_1 + x''_2) + \dots + \varepsilon_n (x'^{\dots}_1 + x'^{\dots}_2), \\ x^d_1 \cdot x^d_2 &= (x_1 + \varepsilon_1 x'_1 + \varepsilon_2 x''_1 + \dots + \varepsilon_n x'^{\dots}_1) \cdot (x_2 + \varepsilon_1 x'_2 + \varepsilon_2 x''_2 + \dots + \varepsilon_n x'^{\dots}_2) = \\ &= x_1 x_2 + \varepsilon_1 (x_1 x'_2 + x_2 x'_1) + \varepsilon_2 (x_1 x''_2 + x_2 x''_1) + \dots + \varepsilon_n (x_1 x'^{\dots}_2 + x_2 x'^{\dots}_1). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6.13})$$

В выражениях (A.6.13) ε_i есть по-прежнему нильпотентные символы. Единицей кольца дуальных чисел с векторной дуальной частью является элемент вида:

$$!E = E! = \mathbf{1} = 1 + \varepsilon_1 \cdot 0 + \varepsilon_2 \cdot 0 + \dots + \varepsilon_n \cdot 0.$$

Обратный элемент определяется следующим образом:

$$(x^d)^{-1} = \frac{\mathbf{1} \cdot (x - \varepsilon_1 x' - \dots - \varepsilon_n x'^{\dots})}{(x + \varepsilon_1 x' + \dots + \varepsilon_n x'^{\dots})(x - \varepsilon_1 x' - \dots - \varepsilon_n x'^{\dots})} = \frac{x - \varepsilon_1 x' - \dots - \varepsilon_n x'^{\dots}}{x^2}.$$

Делителями нуля, очевидно, являются все числа вида:

$$0 + \varepsilon_1 x' + \varepsilon_2 x'' + \dots + \varepsilon_n x'^{\dots}.$$

Частное двух чисел вида (A.6.11) определяется следующим образом (когда деление возможно):

$$\left. \begin{aligned}
 x_2 \neq 0, \quad \frac{x_1^d}{x_2^d} &= x_1^d (x_2^d)^{-1} = \frac{(x_1 + \varepsilon_1 x_1' + \dots + \varepsilon_n x_1^{n'}) (x_2 - \varepsilon_1 x_2' - \dots - \varepsilon_n x_2^{n'})}{x_2^2} = \\
 &= \frac{(x_1 x_2 + \varepsilon_1 (x_2 x_1' - x_1 x_2') + \dots + \varepsilon_n (x_2 x_1^{n'} - x_1 x_2^{n'}))}{x_2^2} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{\varepsilon_1 (x_2 x_1' - x_1 x_2') + \dots + \varepsilon_n (x_2 x_1^{n'} - x_1 x_2^{n'})}{x_2^2}.
 \end{aligned} \right\}$$

Справедливость всех полученных соотношений может быть проверена аналогично тому, как это было сделано в первом разделе настоящей главы. Да и вообще, кажется вполне очевидным, что все Предположения 1-6 из первого раздела могут быть эквивалентным образом сформулированы для чисел (А.6.11). Не останавливаясь на этом подробно, отметим лишь, что числа (А.6.11) образуют аналогичную ассоциативную алгебру без деления над полем действительных чисел.

Определим сопряженный элемент числа (А.6.11) следующим образом:

$$\bar{x}^d = x - \varepsilon_1 x' - \varepsilon_2 x'' - \dots - \varepsilon_n x^{n'}.$$

Тогда модуль дуального числа с векторной дуальной частью равен

$$|x^d| = \sqrt{(x^d \bar{x}^d)} = \pm x,$$

т.е. определяется аналогично модулю обыкновенного дуального числа. Введем понятие абсолютной величины числа (). Она дается следующим выражением:

$$[x^d] = \sqrt{x^2 + (x')^2 + (x'')^2 + \dots + (x^{n'})^2}.$$

Действительная часть дуального числа с векторной дуальной частью в функциональной форме может быть записана как

$$\operatorname{Re}(x^d) = \frac{x^d + \bar{x}^d}{2}. \quad (\text{А.6.14})$$

Очевидно, что, как и в случае обыкновенного дуального числа, мнимую часть числа (А.6.11) выразить в функциональной форме невозможно. Это приводит к определенным трудностям при рассмотрении ряда связанных теоретических вопросов, однако, не оказывает никакого влияния на практическую реализацию вычислений над кольцом чисел (А.6.11).

Отображение (А.6.14) есть гомоморфизм между рассматриваемой алгеброй чисел (А.6.11) и полем действительных чисел (проверить это не сложно). Следовательно, поле действительных чисел есть гомоморфный образ алгебры дуальных чисел с векторной дуальной частью. Данное свойство является, по сути, определяющим с точки зрения построения структуры аналитической функции дуального переменного. Очевидно, что оно также обобщается и для функции дуального аргумента с векторной дуальной частью.

Таким образом, с точки зрения алгебры, система чисел (А.6.11) представляет собой «многомерный» аналог обыкновенных дуальных чисел, и наследует все их основные свойства

и особенности. Также, можно сделать вывод о том, что дуальное число с векторной дуальной частью есть некоторое обобщение понятия дуального числа, осуществляемое посредством его представления в гиперкомплексной форме.

Теперь переходим к вопросам, связанным с рассмотрением функции «многомерного» дуального переменного. Будем обозначать пространство чисел (А.6.11) символом \mathbf{D} . Оно, очевидно, метризуемо (в качестве его метрики можно рассматривать ту же функцию расстояния $d(x^d_1, x^d_2)$, что и для пространства D). Для задания топологии в \mathbf{D} необходимо указать систему окрестностей. Тогда используя функцию расстояния, выражаемую в виде абсолютной величины разности двух чисел

$$d(x^d_1, x^d_2) = [x^d_2 - x^d_1],$$

удается определить понятие ε -окрестности точки x^d_0 совершенно аналогично тому, как это было сделано для пространства D :

$$U_{x^d_0} = \{x^d \in \mathbf{D} : [x^d - x^d_0] < \varepsilon, \varepsilon > 0\}.$$

Прочие важные понятия топологии (предельная точка, последовательность и т.д.) применительно к пространству \mathbf{D} могут быть введены стандартным образом, как это было сделано во втором разделе настоящей главы. Не останавливаясь на этом, перейдем сразу же к понятию функции многомерного дуального переменного. Итак, под *функцией многомерного дуального переменного*, определенной на некотором множестве M из \mathbf{D} будем понимать следующее отображение:

$$f_D : x^d \in M \subset \mathbf{D} \rightarrow \omega \in \mathbf{D}, \quad (\text{А.6.15})$$

ставящее в соответствие дуальному числу с векторной дуальной частью x^d множества M , число ω из \mathbf{D} . Очевидно, что для функции (А.6.15) также справедливо следующее ее представление $(n+1)$ (пространство \mathbf{D} имеет размерность $(n+1)$) действительными функциями u и v_i многомерного дуального аргумента (или, что эквивалентно, $(n+1)$ действительной функцией $(n+1)$ действительного аргумента):

$$\left. \begin{aligned} x^d \in M \subset \mathbf{D}, x^d &= x + \underbrace{\varepsilon_1 x' + \varepsilon_2 x'' + \dots + \varepsilon_n x'^{\dots}}_n, \\ u(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot), \dots &: M \rightarrow \mathbf{R}, \\ \omega = f_D(x^d) &= u\left(x, \underbrace{x', x'', \dots, x'^{\dots}}_n\right) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i\left(x, \underbrace{x', x'', \dots, x'^{\dots}}_n\right). \end{aligned} \right\}$$

Не останавливаясь на понятиях предела функции (А.6.15) в точке, непрерывности и др. (они вводятся стандартным образом), перейдем сразу же к понятию \mathbf{R} -дифференцируемости

(А.6.15) в точке. Итак, пусть f_D определена и принимает конечные значения в некоторой окрестности точки x^d_0 . Назовем функцию (А.6.15) **R**-дифференцируемой (дифференцируемой в смысле действительного анализа) в окрестности этой точки, если u и v_i дифференцируемы как функции от $(x, x', x'', \dots, x^{(n)})$ в точке $(x_0, x'_0, x''_0, \dots, x^{(n)}_0)$. То есть, **R**-дифференциал функции (А.6.15) в точке можно представить в следующем виде:

$$df_D|_{x^d_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) dx + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x'} \right) + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x''} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x''} \right) + \dots \left. \vphantom{df_D|_{x^d_0}} \right\} \\ \dots + \varepsilon_n \left(\frac{\partial u}{\partial x^{(n)}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x^{(n)}} \right).$$

Точно так же, как и в случае функции обыкновенного дуального переменного, основной интерес для нас представляет условие **D**-дифференцируемости в точке, запись которого в явном виде позволит получить общую структуру аналитической функции. Определив систему уравнений Коши-Римана для функции (А.6.15) появится возможность воспользоваться свойством структуры аналитической функции, что является необходимым при проведении практических вычислений над кольцом дуальных чисел с векторной дуальной частью.

В рассматриваемом случае следовать стандартным путем для получения условий **D**-дифференцируемости функции (А.6.15) в точке нет необходимости. Во-первых, это может оказаться слишком сложно (или даже вовсе невозможно) с точки зрения приведения выражений к требуемой форме (здесь размерность имеет определяющее значение). Во-вторых, можно воспользоваться известными свойствами аналитической функции обыкновенного дуального переменного. Это можно сделать, опять же, исходя из общих алгебраических свойств дуальных чисел и их многомерного расширения. Кроме того, как уже упоминалось ранее, в принципе можно определить такую алгебраическую систему гиперкомплексных чисел, которая являлась бы многомерным обобщением для самых общих комплексных чисел. Поэтому и предположение об общности свойств функций f_D и f_D , имеющих между собой схожую структуру, кажется вполне оправданным.

Поступим следующим образом. Производная аналитической функции самого общего комплексного переменного в точке определяется следующим выражением:

$$\frac{df_Z}{dZ} \Big|_{z_0} = \frac{d}{dx} (U(x, y) + EV(x, y)),$$

т.е. для любого типа комплексных чисел ее нахождение сводится к простому дифференцированию функции по действительной части ее аргумента. Это, в свою очередь, определяет общий для всех комплексных систем геометрический смысл производной аналитической функции в точке и ее (производной) характерные свойства. Очевидно, что если функция самого общего комплексного переменного аналитическая в точке и ее производная в

ней отлична от нуля, то рассматриваемое отображение f_Z конформно [] в этой точке. А это, в свою очередь, означает, что коэффициент растяжения длин дуг путей, выходящих из этой точки, определяется модулем значения производной функции f_Z в ней. Покажем это на примере функции дуального переменного f_D , конформной в некоторой окрестности U точки x^d_0 . Рассмотрим гладкий путь γ , выходящий из точки x^d_0 . То есть отображение вида:

$$\gamma(t) : t \in [0, 1] \rightarrow D, \dot{\gamma}(t) \neq 0, \gamma(0) = x^d_0.$$

Композиция функций $f_D \circ \gamma$ определяет гладкий путь $\Gamma(t)$ на плоскости значений $f_D(U)$. Производная пути $\Gamma(t)$ определяется следующим образом:

$$\dot{\Gamma}(t) = \left(\frac{d}{d\gamma(t)} f_D(\gamma(t)) \right) \dot{\gamma}(t).$$

Элементы длины дуги для путей γ и Γ равны:

$$ds_\gamma(t) = [\dot{\gamma}(t)] dt, \quad ds_\Gamma(t) = [\dot{\Gamma}(t)] dt.$$

Тогда отношение длин дуг этих путей в точке x^d_0 дается следующим выражением:

$$\frac{ds_\Gamma(0)}{ds_\gamma(0)} = \frac{[\dot{\Gamma}(0)] dt}{[\dot{\gamma}(0)] dt} = \frac{\left[\left(\frac{d}{d\gamma(0)} f_D(0) \right) \dot{\gamma}(0) \right] dt}{[\dot{\gamma}(0)] dt} = \left[\frac{df_D}{dx^d} \right]_{x^d_0}. \quad (\text{A.6.16})$$

Если функция f_D не является аналитической в окрестности рассматриваемой точки, то условие (A.6.16), очевидно, нарушается, так как в его правой части (под знаком абсолютной величины) будет присутствовать выражение для \mathbf{R} -дифференциала функции f_D , а не дуальной производной. Подобные построения для случая функции обыкновенного комплексного переменного приведены, например, в книге [15].

Рассмотренное свойство, в свою очередь, позволяет достаточно просто получить условия аналитичности функции в точке. Если функция f_D не голоморфна (произвольная непрерывная) в окрестности U , то производную пути $\Gamma(t)$ можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \gamma(t) &= x(t) + \varepsilon x'(t) \Rightarrow \\ \dot{\Gamma}(t) &= \frac{d}{dt} f_D(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} (u(x(t), x'(t)) + \varepsilon v(x(t), x'(t))) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dot{x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x'} \right) \dot{x}' \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6.17})$$

С другой стороны, если f_D аналитическая в окрестности точки x^d_0 , то (здесь использовано выражение для дуальной производной)

$$\dot{\Gamma}(t) = \frac{d}{dt} f_D(\gamma(t)) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right) (\dot{x}(t) + \varepsilon \dot{x}'(t)) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dot{x}(t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x}'(t). \quad (\text{A.6.18})$$

Следовательно, произвольная функция f_D будет аналитической в окрестности U если правые части в выражениях (А.6.17) и (А.6.18) равны. Приравнивая соответствующие выражения, получим, что при любом выборе пути γ (гладкого) для этого должны выполняться следующие условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

представляющие собой уравнения Коши-Римана для функции дуального переменного.

Для того чтобы получить условия аналитичности для функции многомерного дуального переменного, воспользуемся тем же приемом. При этом сделаем следующее предположение: комплексная (дуальная) производная функции (А.6.15) в точке x^d_0 определяется следующим образом:

$$\left. \frac{d}{dx^d} f_D \right|_{x^d_0} = \frac{d}{dx} \left(u(x, x', x'', \dots, x^{(n)}) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i(x, x', x'', \dots, x^{(n)}) \right). \quad (\text{А.6.19})$$

Тем самым предполагается, что выражение для производной, общее для любых систем комплексных чисел, сохраняет свой вид и для их многомерных расширений. Справедливость данного предположения может быть обоснована (возможно) исходя из общности алгебраических свойств непосредственно дуальных чисел и их рассматриваемого многомерного расширения. Далее, приступаем непосредственно к выводу соответствующих уравнений Коши-Римана. Итак, в некоторой окрестности U точки x^d_0 пространства D рассмотрим выходящий из этой точки гладкий путь $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = x(t) + \varepsilon_1 x'(t) + \varepsilon_2 x''(t) + \dots + \varepsilon_n x^{(n)}(t), \quad \gamma(0) = x^d_0, \quad t \in [0, 1].$$

Композиция $f_D(\gamma(t))$ определяет гладкий путь $\Gamma(t)$ в пространстве значений $f_D(U)$. Предполагая, что функция f_D \mathbf{R} -дифференцируема в U , вычислим производную пути $\Gamma(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(t) &= \frac{d}{dt} f_D(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \left(u(x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i(x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) \right) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \dot{x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{\partial v_i}{\partial x'} \right) \dot{x}' + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x^{(n)}} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{\partial v_i}{\partial x^{(n)}} \right) \dot{x}^{(n)}. \end{aligned}$$

С другой стороны, предполагая, что функция f_D голоморфна в окрестности U , ту же производную можно записать, используя выражение (А.6.19) и свойство композиции:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(t) &= \left(\frac{df_D}{d\gamma(t)} \right) \dot{\gamma}(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) (\dot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}'(t) + \varepsilon_2 \dot{x}''(t) + \dots + \varepsilon_n \dot{x}^{(n)}(t)) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \dot{x} + \varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x}' + \dots + \varepsilon_n \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x}^{(n)}. \end{aligned}$$

Теперь можно обобщить полученный результат (А.6.22) на случай функции нескольких многомерных дуальных переменных. Опуская задание топологии в пространстве D^m (это можно сделать аналогичным образом тому, как это было сделано ранее в разделе А.4), и не останавливаясь подробно на понятии функции нескольких многомерных дуальных переменных $f_D(\mathbf{x}^d)$ и связанных с ней, запишем лишь ее общее представление с помощью $(n+1)$ действительнзначной функции:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^d &= (x^d_1, x^d_2, \dots, x^d_m), \mathbf{x}^d \in M \subset D^m, \\ u(\cdot), v_i(\cdot) &: M \rightarrow D, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \omega &= f_D(\mathbf{x}^d) = u \left(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_m}_{m}, \underbrace{x'_1, x''_1, \dots, x'_1 \dots}_{n}, \underbrace{x'_2, x''_2, \dots, x'_2 \dots}_{n}, \dots, \underbrace{x'_m, x''_m, \dots, x'_m \dots}_{n} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \left(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_m}_{m}, \underbrace{x'_1, x''_1, \dots, x'_1 \dots}_{n}, \underbrace{x'_2, x''_2, \dots, x'_2 \dots}_{n}, \dots, \underbrace{x'_m, x''_m, \dots, x'_m \dots}_{n} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{А.6.24})$$

Далее, вновь повторяя предшествующий алгоритм для нахождения условия D^n -дифференцируемости (А.6.20) в точке, получим набор следующих условий (их вывод опускаем, так как он по своей сути в точности повторяет соответствующий вывод для случая функции одной многомерной переменной):

$$\left\{ \begin{aligned} &\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x'_1} = 0, \frac{\partial u}{\partial x''_1} = 0, \dots, \frac{\partial u}{\partial x'_1 \dots} = 0}_{n}, \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x'_2} = 0, \frac{\partial u}{\partial x''_2} = 0, \dots, \frac{\partial u}{\partial x'_2 \dots} = 0}_{n}, \dots, \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x'_m} = 0, \frac{\partial u}{\partial x''_m} = 0, \dots, \frac{\partial u}{\partial x'_m \dots} = 0}_{n}, \\ &\underbrace{\left. \frac{\partial v_1}{\partial x'_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x'_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v_1}{\partial x'_m} = \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial v_2}{\partial x'_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x'_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v_2}{\partial x'_m} = \frac{\partial u}{\partial x_m}, \dots \right\}}_m \\ &\underbrace{\left. \frac{\partial v_n}{\partial x'_1 \dots} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial v_n}{\partial x'_2 \dots} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial x'_m \dots} = \frac{\partial u}{\partial x_m} \right\}}_m \end{aligned} \right\} n \quad (\text{А.6.25})$$

Система (А.6.25) $2mn$ дифференциальных уравнений в частных производных есть система уравнений Коши-Римана для функции (А.6.24). Ее общий интеграл дается следующими выражениями:

и т.д. Операция сложения двух дуальных чисел с векторной дуальной частью в «функциональной форме» представляется как

$$f_D(x_1^d, x_2^d) = x_1^d + x_2^d = x_1 + x_2 + \varepsilon_1(x_1' + x_2') + \varepsilon_2(x_1'' + x_2'') + \dots + \varepsilon_n(x_1^{(n)} + x_2^{(n)}),$$

операция умножения

$$f_D(x_1^d, x_2^d) = x_1^d \cdot x_2^d = x_1 x_2 + \varepsilon_1(x_1' x_2 + x_2' x_1) + \varepsilon_2(x_1'' x_2 + x_2'' x_1) + \dots + \varepsilon_n(x_1^{(n)} x_2 + x_2^{(n)} x_1),$$

и т.д. Определив подобным образом, необходимый набор элементарных функций и соответствующие представления основных операций для случая многомерного дуального переменного, можно построить дуальное представление произвольной (сложной) действительной функции, так как, очевидно, выполнены основные свойства композиции. При этом полученное дуальное представление наследует все свойства и особенности своего действительного прообраза.

В данном разделе диссертационной работы получено обобщение необходимых основ теории аналитической функции дуального переменного на случай многомерного аргумента.