

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

Научная статья

УДК 681.53

DOI: [10.34759/trd-2023-128-16](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-16)

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ОПЕРАТОРОВ УПРАВЛЕНИЯ САУ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Елизавета Юрьевна Ватаева

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического
приборостроения, Санкт-Петербург, Россия

lizon94-06@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается решение задачи синтеза законов управления нелинейных непрерывных и импульсных систем автоматического управления. В качестве математического аппарата решения предлагается применять обобщенный метод Галеркина. Рассмотренный метод распространён на новый класс систем с нелинейными характеристиками, аппроксимированными полиномиально. Также в работе рассматриваются достоинства полиномиальной аппроксимации на примере нестационарной нелинейной зависимости коэффициента сцепления тормозящего колеса тяжелого самолета с опорной поверхностью и автомобиля, приводятся результаты исследования.

Ключевые слова: нелинейные системы, нелинейные импульсные системы, полиномиальная аппроксимация, обобщенный метод Галеркина

Для цитирования: Ватаева Е.Ю. Параметрический синтез операторов управления САУ при полиномиальной аппроксимации характеристик нелинейных элементов // Труды МАИ. 2023. № 128. DOI: [10.34759/trd-2023-128-16](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-16)

INFORMATION TECHNOLOGIES AND TELECOMMUNICATIONS

Original article

PARAMETRIC SYNTHESIS OF ACS CONTROL OPERATORS WITH POLYNOMIAL APPROXIMATION OF THE CHARACTERISTICS OF NONLINEAR ELEMENTS

Elizaveta Yu. Vataeva

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,

Saint-Petersburg, Russia

lizon94-06@mail.ru

Abstract. Active technological development and improvement of technologies in various industries implies the use of non-linear discrete, discrete-continuous and impulse automatic control systems (ACS), the dynamics of which is described by high-order differential equations. In the modern theory of automatic control, the problem of synthesizing the parameters of the control laws of impulse systems containing elements and devices with nonlinear static and dynamic characteristics is a complex scientific and engineering problem. In this regard, in order to successfully solve this problem for the entire range of quality indicators and for the whole variety of systems from a unified mathematical and methodological position, it is necessary to develop new methods. The

development of Automatic control systems (ACS) control laws is directly related to the method of approximating a nonlinear characteristic, since it is necessary to maintain the degree of adequacy of the mathematical model. Since there are no universal approaches to the issue of approximation, for each specific case, it is required to take into account the specific modes of operation of the system. As you know, the most widely used piecewise linear approximation, however, the accuracy of the result obtained with such a mathematical model is not always sufficient. The various methods of approximation are considered, including irrational, integral, and analytical ones. This article proposes to use a polynomial approximation. As a method for synthesizing nonlinear systems, it is proposed to use the generalized Galerkin method, which makes it possible to synthesize control laws for automatic control systems of different classes (continuous automatic control systems and systems with various types of signal modulation, the dynamics of which is described by both linear and nonlinear equations of an arbitrarily high order).

Keywords: nonlinear systems, nonlinear impulse systems, polynomial approximation, generalized Galerkin method

For citation: Vataeva E.Yu. Parametric synthesis of ACS control operators with polynomial approximation of the characteristics of nonlinear elements. *Trudy MAI*, 2023, no. 128. DOI: [10.34759/trd-2023-128-16](https://doi.org/10.34759/trd-2023-128-16)

Активное технологическое развитие и усовершенствование технологий в различных областях промышленности подразумевает использование нелинейных

дискретных, дискретно-непрерывных и импульсных систем автоматического управления (САУ), динамика которых описывается дифференциальными уравнениями высокого порядка [1-8].

Как известно, в классической теории управления одно из основных положений – известная и адекватно описывающая математическая модель поведение исследуемого объекта [9-13]. В нелинейной теории решения задачи синтеза, часто приходится сталкиваться с неопределенностью задания модели объекта, в частности, с неточностью знания ее параметров.

При разработке математической модели объекта управления, необходимо сохранять степень адекватности, а это связано, для нелинейных САУ в том числе, с принятым способом аппроксимации нелинейности. Самым распространенным методом аппроксимации нелинейных характеристик является кусочно - линейная аппроксимация, суть которой заключается в замене нелинейной характеристики отрезками прямых, которые позволяют перейти от нелинейного дифференциального уравнения к нескольким линейным с различными значениями входящих в них коэффициентов, однако при этом требуется учет краевых условий при переходе с одного линейного участка на другой, что достаточно подробно описано при формулировке принципа интервальной суперпозиции [14-17].

В данной работе предлагается использовать полиномиальную аппроксимацию и распространить обобщенный метод Галеркина на новый класс аппроксимирующих нелинейных характеристик функций, что даст возможность расширить потенциал данного метода синтеза параметров систем управления

различных классов. И также результаты данной работы могут быть применены в изучении и разработки регуляторов для систем торможения.

Аппроксимирующий полином предлагается записывать в виде:

$$y(x) = y(x_0) + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

Рассмотрим полиномиальную аппроксимацию для нестационарной нелинейной зависимости коэффициента сцепления тормозящего колеса тяжелого самолета с опорной поверхностью (рис.1). Различные виды аппроксимации для данной характеристики рассматривались [18].

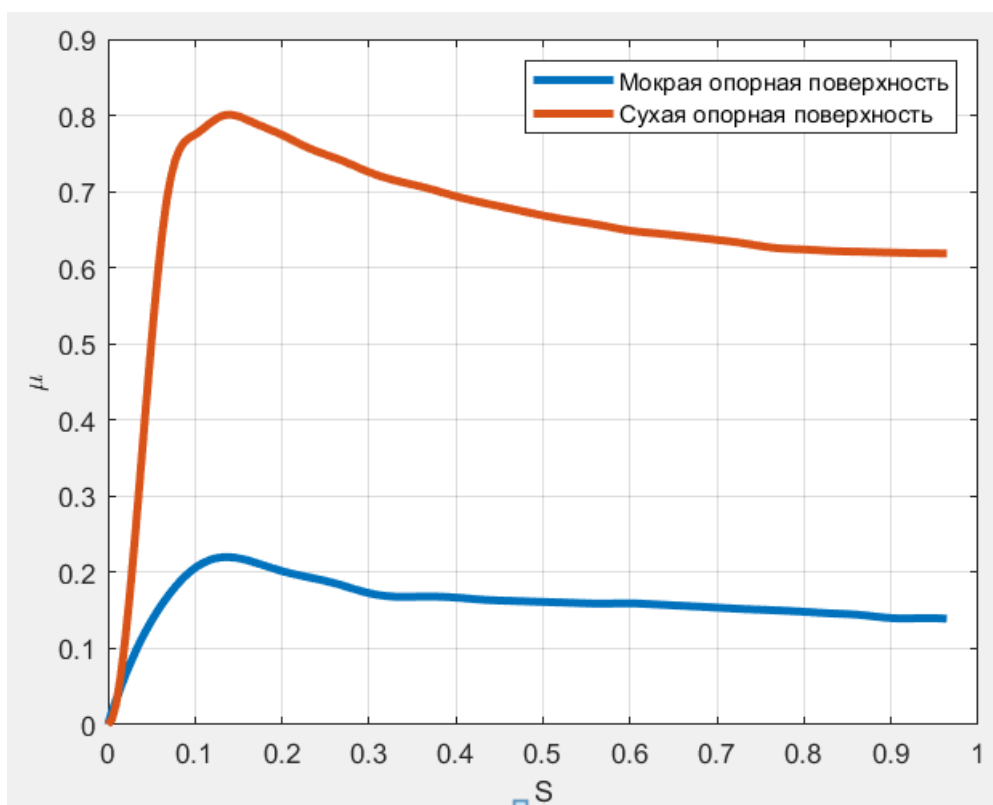


Рисунок 1 - Качественный вид зависимостей $\mu = \mu(S)$, 1 – сухая опорная поверхность,

2 – мокрая опорная поверхность

В ходе вычислений был получен полином восьмой степени (2) и коэффициенты для мокрой и сухой опорных поверхностей (табл. №1).

$$y(x) = Ax^8 + Bx^7 + Cx^6 + Dx^5 + Ex^4 + Fx^3 + Gx^2 + Hx + M \quad (2)$$

Таблица №1

Коэффициент	Мокрая поверхность	Сухая поверхность
Полиномиальная аппроксимация		
A	98.27	270.49
B	-361.3	-933.8
C	510.47	$1.17 \cdot 10^3$
D	-323.12	-534.5
E	54.63	-131.8
F	39.64	234.3
G	-22.3	-92.74
H	3.84	14.89
M	0.0017	0.031

На рис.2 и рис. 3 представлены графические результаты аппроксимации

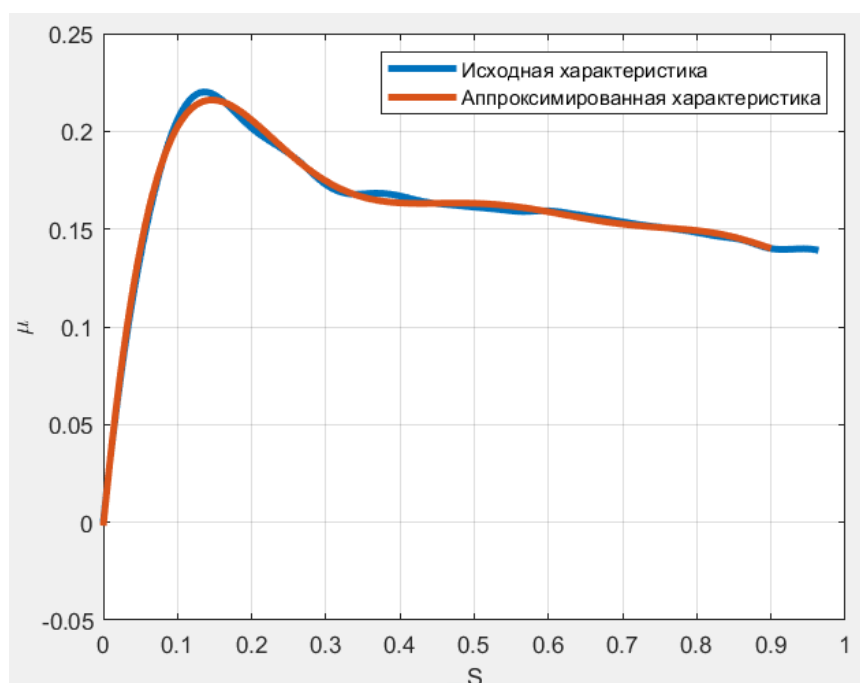


Рисунок 2 – Полиномиальная аппроксимация зависимости $\mu = \mu(S)$ для мокрой опорной поверхности

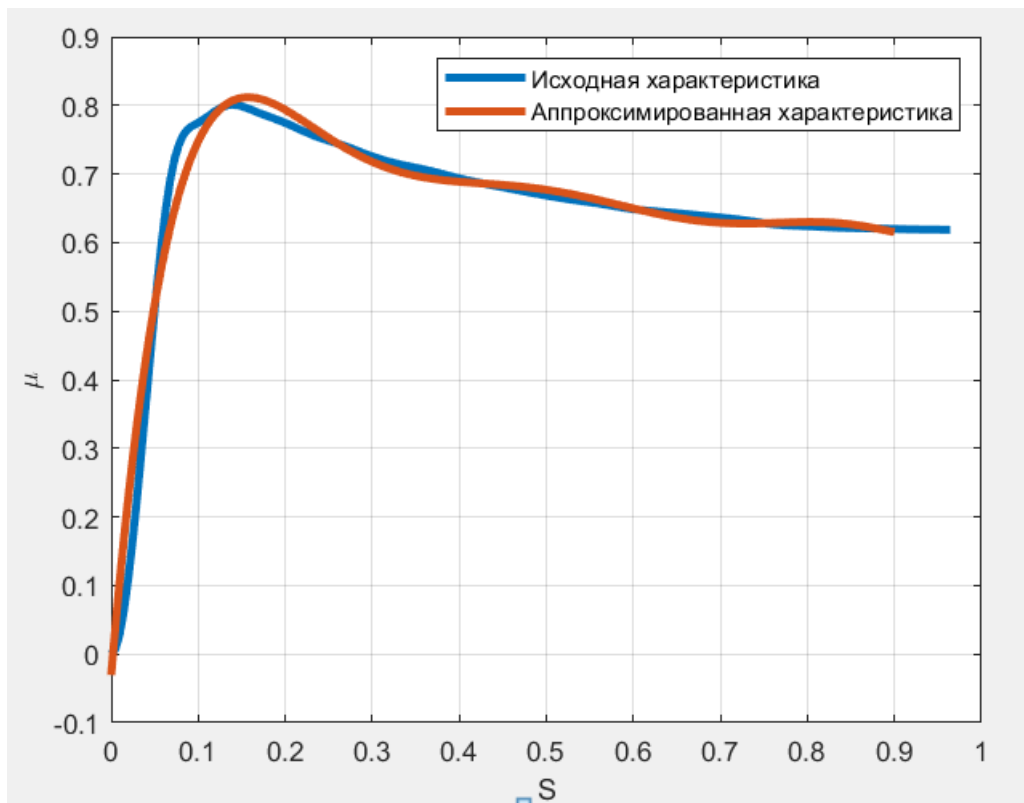


Рисунок 3 – Полиномиальная аппроксимация зависимости $\mu = \mu(S)$ для сухой опорной поверхности

Рассмотрим еще одну аппроксимацию на примере зависимости коэффициента сцепления от коэффициента относительного проскальзывания автомобиля (рис 4).

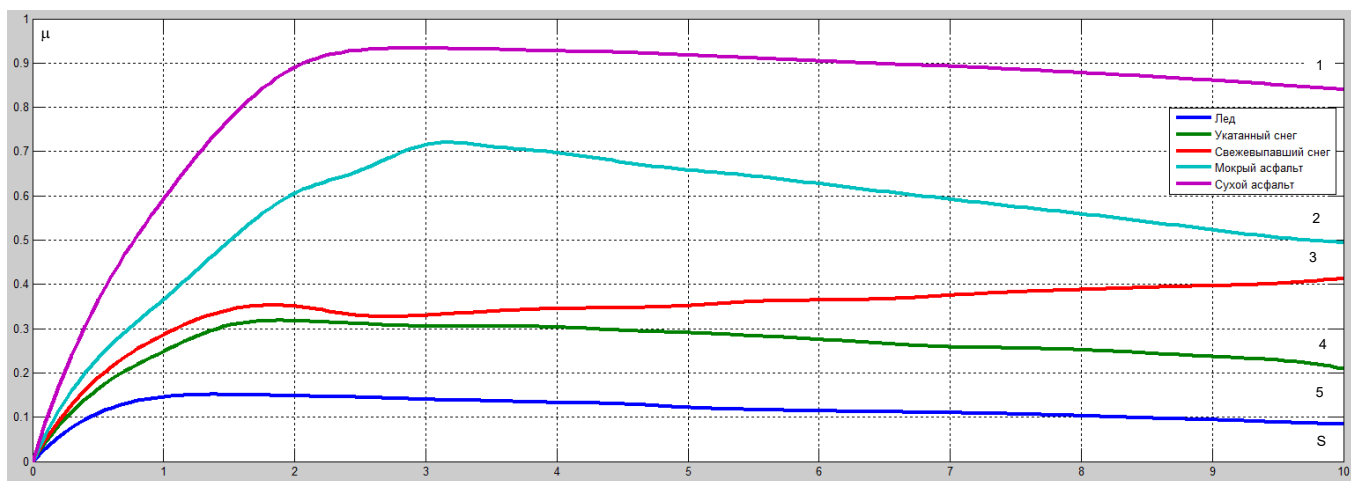


Рисунок 4 - Качественный вид зависимостей $\mu = \mu(S)$ для автомобиля, 1 – сухой асфальт, 2 – мокрый асфальт, 3 – свежесыпавший снег, 4 – укатанный снег, 5 - лед

Проаппроксимируем каждую зависимость полиномиально, получаем полином

вида $y(x) = Ax^8 + Bx^7 + Cx^6 + Dx^5 + Ex^4 + Fx^3 + Gx^2 + Hx + M$ и коэффициенты

приведены в таблице 2

Таблица 2

Вид поверхности	Сухой асфальт	Мокрый асфальт	Свежевыпавший снег	Укатанный снег	Лед
A	$5.49 \cdot 10^{-7}$	$-2.48 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$9.05 \cdot 10^{-7}$	$-6.71 \cdot 10^{-7}$
B	$-2.7 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$-5.5 \cdot 10^{-5}$	$-3.6 \cdot 10^{-5}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$
C	$5.4 \cdot 10^{-4}$	-0.002	$8.37 \cdot 10^{-4}$	$5.64 \cdot 10^{-4}$	$-5.98 \cdot 10^{-4}$
D	-0.0055	0.014	-0.006	-0.004	0.0063
E	0.029	-0.067	0.02	0.016	-0.038
F	-0.054	0.17	0.0028	0.0013	-0.14
G	-0.14	-0.29	-0.20	-0.15	-0.30
H	0.77	0.55	0.47	0.4	0.34
M	0.003	0.002	$-3.57 \cdot 10^{-4}$	$2.28 \cdot 10^{-4}$	$1.41 \cdot 10^{-4}$

Графические результаты представлены на рис.5-9

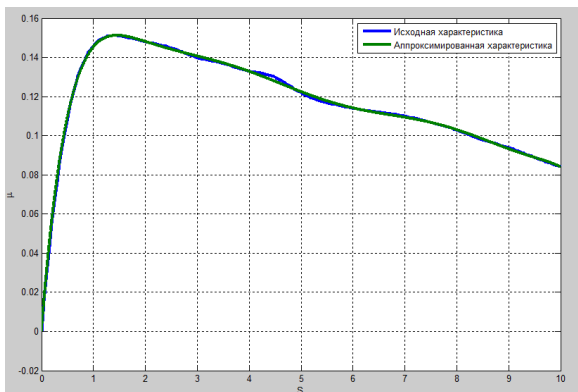


Рисунок 5 – Полиномиальная аппроксимация зависимости $\mu = \mu(S)$ для льда

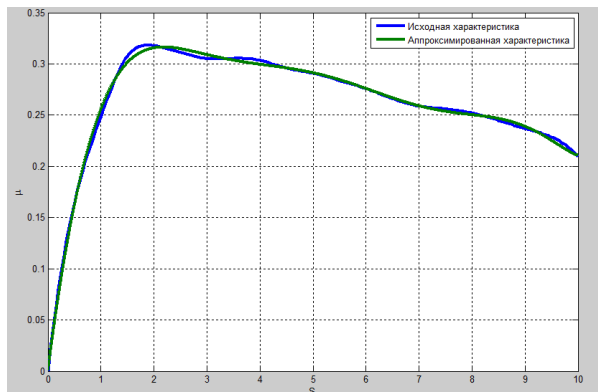


Рисунок 6 – Полиномиальная аппроксимация зависимости $\mu = \mu(S)$ при укатанном снеге

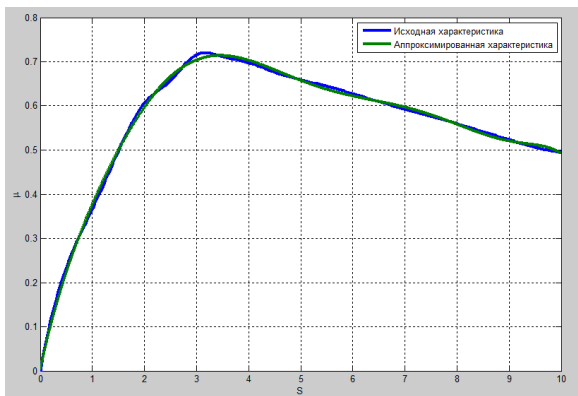


Рисунок 7 – Полиномиальная аппроксимация зависимости $\mu = \mu(S)$ при мокром асфальте

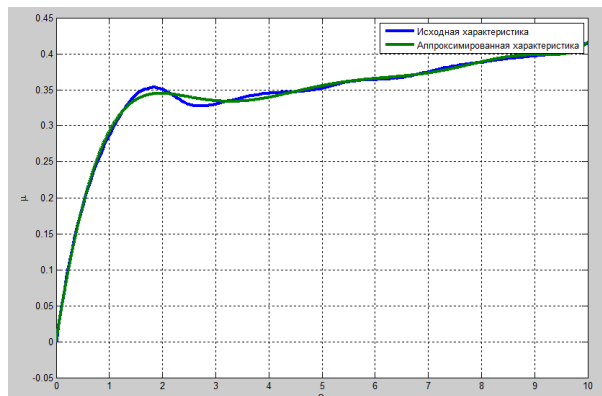


Рисунок 8 – Полиномиальная аппроксимация зависимости $\mu = \mu(S)$ при свежевypавшем снеге

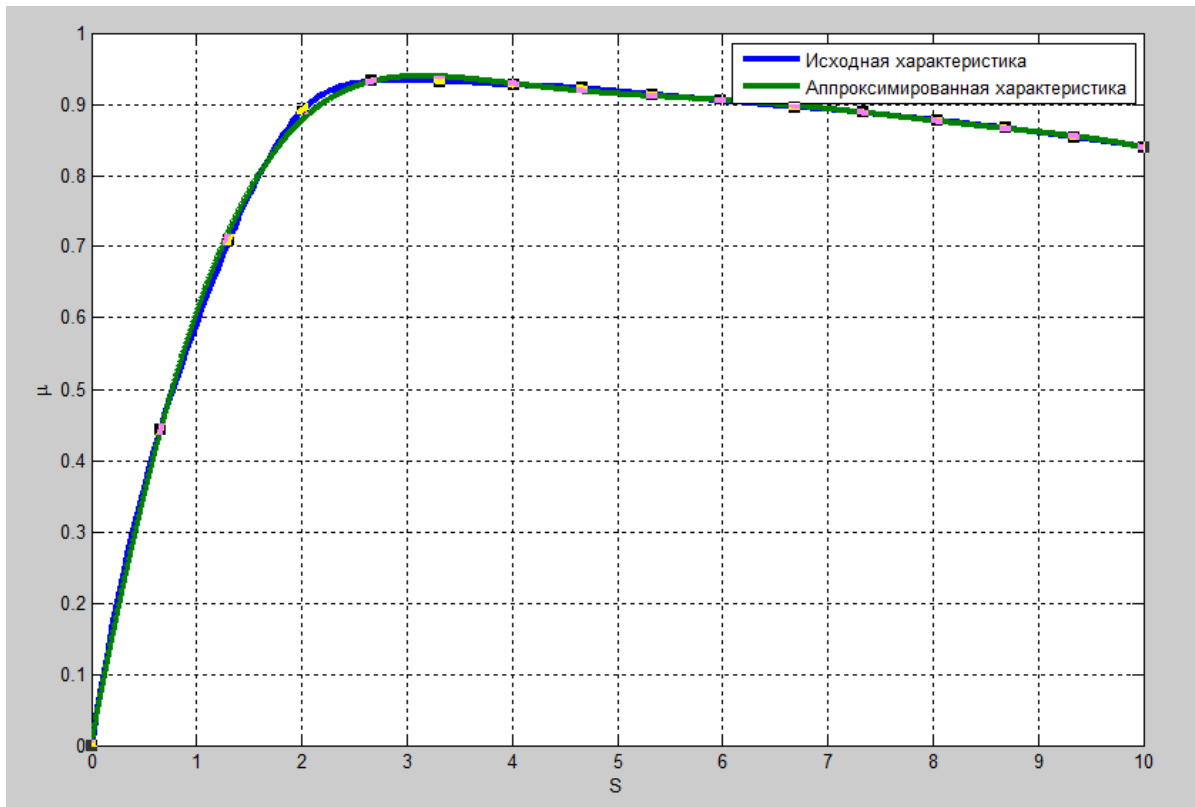


Рисунок 9 – Полиномиальная аппроксимация зависимости $\mu = \mu(S)$ при сухом асфальте

Обобщая полученные результаты аппроксимации, можно сделать вывод, что полиномиальная аппроксимация более точно повторяет вид нелинейной характеристики.

Как было указано выше, для решения задачи синтеза предлагается использовать в качестве математического аппарата обобщенный метод Галеркина. Кратко рассмотрим общую схему решения задачи синтеза обобщенным методом Галеркина, подробная методика рассмотрена в [19]. Для простоты изложения будем рассматривать импульсный элемент в качестве идеального, сигнал на выходе может быть представлен в виде

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (3)$$

где $x(nT) = \int_0^{\infty} x(t)\delta(t-nT)dt$ величина n -го дискретного значения; δ - задержанная импульсная функция, существующая при $t = nT$; T - период прерывания, интервал времени между соседними импульсами.

Задача синтеза нелинейных импульсных САУ рассматривается в следующей постановке, предполагается, что известна структура синтезируемой САУ и параметры объекта управления. Также накладываются ограничения на значения варьируемых параметров из условия их технической реализуемости:

$$c_k^- \leq c_k \leq c_k^+, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

где c_k^+ - максимально допустимые значения варьируемых параметров; c_k^- - минимально допустимые значения варьируемых параметров

Ограничения на грубость системы по варьируемым параметрам имеют следующий вид

$$\Delta = \frac{\delta c_k}{c_k} \leq \Delta^0,$$

где Δ^0 - заданное значение грубости системы; c_k - вариации параметров, в пределах которых обеспечивается устойчивость системы; c_k - искомые параметры оператора управления.

Запишем дифференциальное уравнение, описывающее движения системы, содержащей модулятор и нелинейный элемент с учетом полиномов оператора дифференцирования p с вещественными постоянными коэффициентами степеней n, u, v соответственно:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n a_i(c_k) p^i x(t) + \sum_{i=0}^{n^*} a_i^*(c_k) p^i x^*(t) + \sum_{i=0}^u b_i(c_k) p^i y(t) + \sum_{i=0}^{u^*} b_i^*(c_k) p^i y^*(t) = \\ & = \sum_{i=0}^v e_i(c_k) p^i f(t) + \sum_{i=0}^{v^*} e_i^*(c_k) p^i f^*(t), y(t) = F[x(t)], y^*(t) = F[x^*(t)] \end{aligned} \quad (4)$$

где $y(t) = F[x(t)]$, $y^*(t) = F[x^*(t)]$ – сигналы на выходе нелинейного элемента при непрерывном $x(t)$ и импульсном $x^*(t)$ входном сигнале.

При синтезе нелинейных САУ n – го порядка программное движение целесообразно задать в виде

$$x^0(t) = (x_y + H^* e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)) 1(t) \quad (5)$$

где x_y - значение желаемого процесса $x^0(t)$ при $t = \infty$; а H^* и φ_0 определяются

соотношениями вида

$$H^* = \sqrt{(x_0 - x_y)^2 + \left[\frac{\alpha(x_0 - x_y) + \dot{x}_0}{\beta} \right]^2},$$

$$\varphi_0 = \arctg \left[\frac{\alpha(x_0 - x_y) + \dot{x}_0}{\beta(x_0 - x_y)} \right]$$

здесь x_0, \dot{x}_0 - начальные значения исследуемой координаты, относительно которой записано уравнение движения синтезируемой САУ и ее производной в момент

времени $t = +0$; показатель затухания α , определяется из соотношения $\alpha = \frac{3 \div 4}{T_{III}}$

Следовательно, сигнал на выходе идеального модулятора, согласно выражению (3)

$$x^{0*}(t) = [x_y + H^* e^{-\alpha t} \cos(\beta n t - \varphi_0)] \delta(t - nT)$$

После того как задано желаемое программное движение и определены его параметры, формируются невязка

$$\begin{aligned} \psi(c_k, t) = & Q(c_k, D)x^0(t) + Q^*(c_k, D)x^{0*}(t) + R(c_k, D)F[x^0(t), D\{x^0(t)\}] + \\ & + R^*(c_k, D)F^*[x^{0*}(t), D\{x^{0*}(t)\}] - S(c_k, D)f(t) - S^*(c_k, D)f^*(t) \end{aligned} \quad (6)$$

где x^0 - желаемое программное движение, D - оператор обобщенного дифференцирования

Значение искомым параметров c_k определяется из условий ортогональности невязки (5) координатным функциям

$$\int_0^{\infty} \psi(c_k, t) \varphi_q(t) dt = 0; k, q = 1, 2, K, m \quad (7)$$

где $\varphi_q(t)$ - система из m непрерывно дифференцируемых линейно-независимых координатных функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), K, \varphi_q(t), K, \varphi_m(t)$.

Подставляя желаемое программное (5) в уравнение движения САУ (4) и решая уравнение (7) получаем следующую систему из m линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i(c_k) A_{qi} + \sum_{i=0}^{n^*} a_i^*(c_k) A_{qi}^* + \sum_{i=0}^u b_i(c_k) B_{qi} + \sum_{i=0}^{u^*} b_i^*(c_k) B_{qi}^* - \\ - \sum_{i=0}^v e_i(c_k) C_{qi} - \sum_{i=0}^{v^*} e_i^*(c_k) C_{qi}^* = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$q = 1, 2, K, m$$

где

$$A_{qi} = \int_0^{\infty} D^i \{x^0(t)\} e^{-\rho_q t} dt = A_q \rho_q^{i-1}; i = 1, 2, K, n$$

$$A_{qi}^* = \int_0^{\infty} D^i \{x^{0*}(t)\} e^{-\rho_q t} dt = A_q^* \rho_q^i; i = 1, 2, K, n^*$$

$$B_{qi} = \int_0^{\infty} D^i \{F[x^0(t)]\} e^{-\rho_q t} dt = B_q \rho_q^{i-1}; i = 0, 1, K, u;$$

$$B_{qi}^* = \int_0^{\infty} D^i \{F[x^{0*}(t)]\} e^{-\rho_q t} dt = B_q^* \rho_q^i; i = 0, 1, K, u^*;$$

$$C_{qi} = \int_0^{\infty} D^i \{f(t)\} e^{-\rho_q t} dt = C_q \rho_q^{i-1}; i = 0, 1, K, v,$$

$$C_{qi}^* = \int_0^{\infty} D^i \{f^*(t)\} e^{-\rho_q t} dt = C_q^* \rho_q^i; i = 0, 1, K, v^*.$$

Рекуррентные аналитические выражения A_{qi} , A_{qi}^* , C_{qi} , C_{qi}^* были рассчитаны ранее в [19], подробные расчеты и обобщения выражение B_{qi} для непрерывных и B_{qi}^* для импульсных систем при полиномиальной аппроксимации приведены в работе [20]. В данной работе приводится результат вычисления аналитического выражения B_{qi} и B_{qi}^* для процессов, записанных относительно сигнала ошибки САУ

$$x^0(t) = [H^* e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)] \delta(t - nT) \quad (9)$$

и относительно выхода САУ

$$x^0(t) = [x_y - H^* e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)] \delta(t - nT) \quad (10)$$

в табл.3 и табл.4 представлены результаты вычислений рекуррентных аналитических выражений, определяющих интегралы B_q^* .

Показатель степени, g	B_q^* для процесса вида $x^0(t) = [H^* e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)] \delta(t - nT)$
g=1	$B_q^* = H \left[\frac{e^{2(\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(\alpha+\rho q)T} + 1} \right]$
g=2	$B_q^* = \frac{1}{2} H^2 \left[\frac{e^{2(\alpha+\rho q)T}}{e^{2(\alpha+\rho q)T} - 1} + \frac{e^{2(2\alpha+\rho q)T} \cos 2\varphi_0 - e^{(2\alpha+\rho q)T} \cos 2(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(2\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 2\beta T e^{(2\alpha+\rho q)T} + 1} \right]$
g=3	$B_q^* = \frac{1}{4} H^3 \left[3 \frac{e^{2(3\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(3\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(3\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(3\alpha+\rho q)T} + 1} + \frac{e^{2(3\alpha+\rho q)T} \cos 3\varphi_0 - e^{(3\alpha+\rho q)T} \cos 3(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(3\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 3\beta T e^{(3\alpha+\rho q)T} + 1} \right]$
g=4	$B_q^* = \frac{1}{8} H^4 \left[\frac{e^{2(4\alpha+\rho q)T} \cos 4\varphi_0 - e^{(4\alpha+\rho q)T} \cos 4(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(4\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 4\beta T e^{(4\alpha+\rho q)T} + 1} + 4 \frac{e^{2(4\alpha+\rho q)T} \cos 2\varphi_0 - e^{(4\alpha+\rho q)T} \cos 2(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(4\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 2\beta T e^{(4\alpha+\rho q)T} + 1} + 3 \frac{e^{(4\alpha+\rho q)T}}{e^{(4\alpha+\rho q)T} - 1} \right]$
g=5	$B_q^* = \frac{1}{16} H^5 \left[10 \frac{e^{2(5\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(5\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(5\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(5\alpha+\rho q)T} + 1} + 5 \frac{e^{2(5\alpha+\rho q)T} \cos 3\varphi_0 - e^{(5\alpha+\rho q)T} \cos 3(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(5\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 3\beta T e^{(5\alpha+\rho q)T} + 1} + \frac{e^{2(5\alpha+\rho q)T} \cos 5\varphi_0 - e^{(5\alpha+\rho q)T} \cos 5(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(5\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 5\beta T e^{(5\alpha+\rho q)T} + 1} \right]$

Показатель степени, g	B_q для процесса вида $x^0(t) = [x_y - H^* e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)] \delta(t - nT)$
g=1	$B_q^* = x_y \frac{e^{\rho q T}}{e^{\rho q T} - 1} - H \left[\frac{e^{2(\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(\alpha+\rho q)T} + 1} \right]$
g=2	$B_q^* = x_y^2 \frac{e^{\rho q T}}{e^{\rho q T} - 1} - 2x_y H \left[\frac{e^{2(\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(\alpha+\rho q)T} + 1} \right] + \frac{H^2}{2} \left[\frac{e^{(2\alpha+\rho q)T}}{e^{(2\alpha+\rho q)T} - 1} + \frac{e^{2(2\alpha+\rho q)T} \cos 2\varphi_0 - e^{(2\alpha+\rho q)T} \cos 2(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(2\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 2\beta T e^{(2\alpha+\rho q)T} + 1} \right]$
g=3	$B_q^* = x_y^3 \frac{e^{\rho q T}}{e^{\rho q T} - 1} - 3x_y^2 H \left[\frac{e^{2(\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(\alpha+\rho q)T} + 1} \right] + \frac{3H^2 x_y}{2} \left[\frac{e^{(2\alpha+\rho q)T}}{e^{(2\alpha+\rho q)T} - 1} + \frac{e^{2(2\alpha+\rho q)T} \cos 2\varphi_0 - e^{(2\alpha+\rho q)T} \cos 2(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(2\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 2\beta T e^{(2\alpha+\rho q)T} + 1} \right] - \frac{1H^3}{4} \left[3 \frac{e^{2(3\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(3\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(3\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 2\beta T e^{(3\alpha+\rho q)T} + 1} + \frac{e^{2(3\alpha+\rho q)T} \cos 3\varphi_0 - e^{(3\alpha+\rho q)T} \cos 3(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(3\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 3\beta T e^{(3\alpha+\rho q)T} + 1} \right]$
g=4	$B_q^* = x_y^4 \frac{e^{\rho q T}}{e^{\rho q T} - 1} - 4x_y^3 H \left[\frac{e^{2(\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(\alpha+\rho q)T} + 1} \right] + \frac{6H^2 x_y^2}{2} \left[\frac{e^{(2\alpha+\rho q)T}}{e^{(2\alpha+\rho q)T} - 1} + \frac{e^{2(2\alpha+\rho q)T} \cos 2\varphi_0 - e^{(2\alpha+\rho q)T} \cos 2(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(2\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 2\beta T e^{(2\alpha+\rho q)T} + 1} \right] - \frac{4x_y H^3}{4} \left[3 \frac{e^{2(3\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(3\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(3\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(3\alpha+\rho q)T} + 1} + \frac{e^{2(3\alpha+\rho q)T} \cos 3\varphi_0 - e^{(3\alpha+\rho q)T} \cos 3(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(3\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 3\beta T e^{(3\alpha+\rho q)T} + 1} \right] + \frac{1}{8} H^4 \left[\frac{e^{2(4\alpha+\rho q)T} \cos 4\varphi_0 - e^{(4\alpha+\rho q)T} \cos 4(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(4\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 4\beta T e^{(4\alpha+\rho q)T} + 1} + 4 \frac{e^{2(4\alpha+\rho q)T} \cos 2\varphi_0 - e^{(4\alpha+\rho q)T} \cos 2(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(4\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 2\beta T e^{(4\alpha+\rho q)T} + 1} + 3 \frac{e^{(4\alpha+\rho q)T}}{e^{(4\alpha+\rho q)T} - 1} \right]$
g=5	$B_q^* = x_y^5 \frac{e^{\rho q T}}{e^{\rho q T} - 1} - 5x_y^4 H \left[\frac{e^{2(\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(\alpha+\rho q)T} + 1} \right] + 5x_y^3 H^2 \left[\frac{e^{(2\alpha+\rho q)T}}{e^{(2\alpha+\rho q)T} - 1} + \frac{e^{2(2\alpha+\rho q)T} \cos 2\varphi_0 - e^{(2\alpha+\rho q)T} \cos 2(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(2\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 2\beta T e^{(2\alpha+\rho q)T} + 1} \right] - \frac{5x_y^2 H^3}{2} \left[3 \frac{e^{2(3\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(3\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(3\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(3\alpha+\rho q)T} + 1} + \frac{e^{2(3\alpha+\rho q)T} \cos 3\varphi_0 - e^{(3\alpha+\rho q)T} \cos 3(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(3\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 3\beta T e^{(3\alpha+\rho q)T} + 1} \right] +$

Показатель степени, g	B_q для процесса вида $x^0(t) = [x_y - H^* e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)] \delta(t - nT)$
	$ \begin{aligned} & + \frac{5}{8} x_y H^4 \left[\frac{e^{2(4\alpha+\rho q)T} \cos 4\varphi_0 - e^{(4\alpha+\rho q)T} \cos 4(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(4\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 4\beta T e^{(4\alpha+\rho q)T} + 1} + 4 \frac{e^{2(4\alpha+\rho q)T} \cos 2\varphi_0 - e^{(4\alpha+\rho q)T} \cos 2(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(4\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 2\beta T e^{(4\alpha+\rho q)T} + 1} + 3 \frac{e^{(4\alpha+\rho q)T}}{e^{(4\alpha+\rho q)T} - 1} \right] - \\ & - \frac{1}{16} H^5 \left[\frac{e^{2(5\alpha+\rho q)T} \cos 5\varphi_0 - e^{(5\alpha+\rho q)T} \cos 5(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(5\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 5\beta T e^{(5\alpha+\rho q)T} + 1} + 5 \frac{e^{2(5\alpha+\rho q)T} \cos 3\varphi_0 - e^{(5\alpha+\rho q)T} \cos 3(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(5\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 3\beta T e^{(5\alpha+\rho q)T} + 1} + \right. \\ & \left. + 10 \frac{e^{2(5\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(5\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(5\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(5\alpha+\rho q)T} + 1} \right] \end{aligned} $
g=6	$ \begin{aligned} B_q^* = & x_y^6 \frac{e^{\rho q T}}{e^{\rho q T} - 1} - 6x_y^5 H \left[\frac{e^{2(\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(\alpha+\rho q)T} + 1} \right] + \frac{15x_y^4 H^2}{2} \left[\frac{e^{(2\alpha+\rho q)T}}{e^{(2\alpha+\rho q)T} - 1} + \frac{e^{2(2\alpha+\rho q)T} \cos 2\varphi_0 - e^{(2\alpha+\rho q)T} \cos 2(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(2\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 2\beta T e^{(2\alpha+\rho q)T} + 1} \right] \\ & - \frac{20x_y^3 H^3}{4} \left[3 \frac{e^{2(3\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(3\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(3\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(3\alpha+\rho q)T} + 1} + \frac{e^{2(3\alpha+\rho q)T} \cos 3\varphi_0 - e^{(3\alpha+\rho q)T} \cos 3(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(3\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 3\beta T e^{(3\alpha+\rho q)T} + 1} \right] + \\ & + \frac{15}{8} x_y^2 H^4 \left[\frac{e^{2(4\alpha+\rho q)T} \cos 4\varphi_0 - e^{(4\alpha+\rho q)T} \cos 4(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(4\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 4\beta T e^{(4\alpha+\rho q)T} + 1} + 4 \frac{e^{2(4\alpha+\rho q)T} \cos 2\varphi_0 - e^{(4\alpha+\rho q)T} \cos 2(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(4\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 2\beta T e^{(4\alpha+\rho q)T} + 1} + 3 \frac{e^{(4\alpha+\rho q)T}}{e^{(4\alpha+\rho q)T} - 1} \right] - \\ & - \frac{6}{16} x_y H^5 \left[\frac{e^{2(5\alpha+\rho q)T} \cos 5\varphi_0 - e^{(5\alpha+\rho q)T} \cos 5(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(5\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 5\beta T e^{(5\alpha+\rho q)T} + 1} + 5 \frac{e^{2(5\alpha+\rho q)T} \cos 3\varphi_0 - e^{(5\alpha+\rho q)T} \cos 3(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(5\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 3\beta T e^{(5\alpha+\rho q)T} + 1} + \right. \\ & \left. + 10 \frac{e^{2(5\alpha+\rho q)T} \cos \varphi_0 - e^{(5\alpha+\rho q)T} \cos(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(5\alpha+\rho q)T} - 2 \cos \beta T e^{(5\alpha+\rho q)T} + 1} \right] + \frac{H^6}{32} \left[10 \frac{e^{(6\alpha+\rho q)T}}{e^{(6\alpha+\rho q)T} - 1} + 15 \frac{e^{2(6\alpha+\rho q)T} \cos 2\varphi_0 - e^{(6\alpha+\rho q)T} \cos 2(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(6\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 2\beta T e^{(6\alpha+\rho q)T} + 1} + \right. \\ & \left. + 6 \frac{e^{2(6\alpha+\rho q)T} \cos 4\varphi_0 - e^{(6\alpha+\rho q)T} \cos 4(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(6\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 4\beta T e^{(6\alpha+\rho q)T} + 1} + \frac{e^{2(6\alpha+\rho q)T} \cos 6\varphi_0 - e^{(6\alpha+\rho q)T} \cos 6(\beta T + \varphi_0)}{e^{2(6\alpha+\rho q)T} - 2 \cos 6\beta T e^{(6\alpha+\rho q)T} + 1} \right] \end{aligned} $

Обобщая выражения в табл.3 для процесса (9) получаем:

– для нечетной степени

$$B_q^* = \frac{1}{2^{g-1}} H^g \sum_{k=0}^{\frac{g-1}{2}} C_k^g \frac{\cos \varphi_0 (g-2k) e^{2(g\alpha+\rho q)T} - e^{(g\alpha+\rho q)T} \cos [(g-2k)(\beta T + \varphi_0)]}{e^{2(g\alpha+\rho q)T} - e^{(g\alpha+\rho q)T} 2 \cos [(g-2k)\beta T]}$$

– для четной степени

$$B_q^* = H^g \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(g\alpha+\rho q)T} \right) \frac{1}{2^{g-1}} \sum_{k=0}^{\frac{g-1}{2}} C_k^g \frac{\cos \varphi_0 (g-2k) e^{2(g\alpha+\rho q)T} - e^{(g\alpha+\rho q)T} \cos [(g-2k)(\beta T + \varphi_0)]}{e^{2(g\alpha+\rho q)T} - e^{(g\alpha+\rho q)T} 2 \cos [(g-2k)\beta T]} \right]$$

Обобщая выражения в табл.4 для процесса (10) получаем:

$$B_q^* = \sum_{k=0}^g x_y^{g-k} H^k (-1)^k C_g^k \left(\begin{array}{l} \frac{e^{2(k\alpha+\rho q)T} \cos k\varphi_0 - e^{(k\alpha+\rho q)T} \cos k(\beta T + \varphi_0)}{2^{k-1} (e^{2(k\alpha+\rho q)T} - 2e^{(k\alpha+\rho q)T} \cos k(\beta T + 1))} \\ + \frac{k (e^{2(k\alpha+\rho q)T} \cos (k-2)\varphi_0 - e^{(k\alpha+\rho q)T} \cos [(k-2)(\beta T + \varphi_0)])}{2^{k-1} (e^{2(k\alpha+\rho q)T} - 2e^{(k\alpha+\rho q)T} \cos k(\beta T + 1))} \end{array} \right)$$

Вычисление рекуррентных соотношений для нелинейных непрерывных систем для процесса, записанного относительно сигнала ошибки САУ (9) представлены в табл.5 и относительно выхода САУ (10) в табл.6.

Показатель степени, g	B_q для процесса вида $x^0(t) = [H^* e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)]l(t)$
g=2	$H^{2*} \rho_q \left\{ \left[\frac{1}{2(2\alpha + \rho_q)} + \frac{((2\alpha + \rho_q) \cos 2\varphi_0 + 2\beta \sin 2\varphi_0)}{2((2\alpha + \rho_q)^2 + 4\beta^2)} \right] + 2 \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^j \left[\frac{1}{2(2\alpha + \rho_q)} + \frac{((2\alpha + \rho_q) \cos 2\varphi_0 + 2\beta \sin 2\varphi_0)}{2((2\alpha + \rho_q)^2 + 4\beta^2)} \right] + (-1)^r \left[\frac{1}{2(2\alpha + \rho_q)} + \frac{((2\alpha + \rho_q) \cos 2\varphi_0 + 2\beta \sin 2\varphi_0)}{2((2\alpha + \rho_q)^2 + 4\beta^2)} \right] \right\} \rho_q^{-1}$
g=3	$\left\{ \frac{H^{3*}}{4} \rho_q \left[\frac{3(3\alpha + \rho_q) \cos \varphi_0 + \beta \sin \varphi_0}{(3\alpha + \rho_q)^2 + \beta^2} + \frac{(3\alpha + \rho_q) \cos 3\varphi_0 + 3\beta \sin 3\varphi_0}{(3\alpha + \rho_q)^2 + 9\beta^2} \right] \right\} \rho_q^{-1}$
g=4	$\frac{H^{4*}}{8} \rho_q \left\{ \left[\frac{4(4\alpha + \rho_q) \cos 2\varphi_0 + 2\beta \sin 2\varphi_0}{(4\alpha + \rho_q)^2 + 4\beta^2} + \frac{(4\alpha + \rho_q) \cos 4\varphi_0 + 4\beta \sin 4\varphi_0}{(4\alpha + \rho_q)^2 + 16\beta^2} + \frac{3}{(4\alpha + \rho_q)} \right] + 2 \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^j \left[\frac{4(4\alpha + \rho_q) \cos 2\varphi_0 + 2\beta \sin 2\varphi_0}{(4\alpha + \rho_q)^2 + 4\beta^2} + \frac{(4\alpha + \rho_q) \cos 4\varphi_0 + 4\beta \sin 4\varphi_0}{(4\alpha + \rho_q)^2 + 16\beta^2} + \frac{3}{(4\alpha + \rho_q)} \right] + (-1)^r \left[\frac{4(4\alpha + \rho_q) \cos 2\varphi_0 + 2\beta \sin 2\varphi_0}{(4\alpha + \rho_q)^2 + 4\beta^2} + \frac{(4\alpha + \rho_q) \cos 4\varphi_0 + 4\beta \sin 4\varphi_0}{(4\alpha + \rho_q)^2 + 16\beta^2} + \frac{3}{(4\alpha + \rho_q)} \right] \right\} \rho_q^{-1}$
g=5	$\frac{H^{5*}}{16} \rho_q \left\{ \left[\frac{(5\alpha + \rho_q) \cos 5\varphi_0 + 5\beta \sin 5\varphi_0}{(5\alpha + \rho_q)^2 + 25\beta^2} + \frac{5(5\alpha + \rho_q) \cos 3\varphi_0 + 3\beta \sin 3\varphi_0}{(5\alpha + \rho_q)^2 + 9\beta^2} + \frac{10(5\alpha + \rho_q) \cos \varphi_0 + \beta \sin \varphi_0}{(5\alpha + \rho_q)^2 + \beta^2} \right] \right\} \rho_q^{-1}$

Показатель степени, g	B_q для процесса вида $\frac{1}{s^g} \frac{1}{s^2 + \alpha s + \beta}$
g=2	$\left\{ x_y^2 - 2x_y H^* \frac{[(\alpha + \rho_q) \cos \varphi_0 + \beta \sin \varphi_0] \rho_q}{(\alpha + \rho_q)^2 + \beta^2} + H^{*2} \left[\frac{1}{2(2\alpha + \rho_q)} + \frac{(2\alpha + \rho_q) \cos 2\varphi_0 + 2\beta \sin 2\varphi_0}{2[(2\alpha + \rho_q)^2 + 4\beta^2]} \right] \rho_q \right\} \rho_q^{-1}$
g=3	$\left\{ x_y^3 - 3x_y^2 H^* \frac{[(\alpha + \rho_q) \cos \varphi_0 + \beta \sin \varphi_0] \rho_q}{(\alpha + \rho_q)^2 + \beta^2} + 3x_y H^{*2} \left[\frac{1}{2(2\alpha + \rho_q)} + \frac{(2\alpha + \rho_q) \cos 2\varphi_0 + 2\beta \sin 2\varphi_0}{2[(2\alpha + \rho_q)^2 + 4\beta^2]} \right] \rho_q - \right. \\ \left. - H^{*3} \left[\frac{3[(3\alpha + \rho_q) \cos \varphi_0 + \beta \sin \varphi_0]}{4[(3\alpha + \rho_q)^2 + \beta^2]} + \frac{(3\alpha + \rho_q) \cos 3\varphi_0 + 3\beta \sin 3\varphi_0}{4[(3\alpha + \rho_q)^2 + 9\beta^2]} \right] \rho_q \right\} \rho_q^{-1}$
g=4	$\left\{ x_y^4 - 4x_y^3 H^* \frac{[(\alpha + \rho_q) \cos \varphi_0 + \beta \sin \varphi_0] \rho_q}{(\alpha + \rho_q)^2 + \beta^2} + 6x_y^2 H^{*2} \left[\frac{1}{2(\alpha + \rho_q)} + \frac{(2\alpha + \rho_q) \cos 2\varphi_0 + 2\beta \sin 2\varphi_0}{2[(\alpha + \rho_q)^2 + 4\beta^2]} \right] \rho_q - \right. \\ \left. - 4x_y H^{*3} \left[\frac{3[(3\alpha + \rho_q) \cos \varphi_0 + \beta \sin \varphi_0]}{4[(3\alpha + \rho_q)^2 + \beta^2]} + \frac{(3\alpha + \rho_q) \cos 3\varphi_0 + 3\beta \sin 3\varphi_0}{4[(3\alpha + \rho_q)^2 + 9\beta^2]} \right] \rho_q + \right. \\ \left. + \frac{H^{*4}}{8} \left[\frac{(4\alpha + \rho_q) \cos 4\varphi_0 + 4\beta \sin 4\varphi_0}{(4\alpha + \rho_q)^2 + 16\beta^2} + \frac{(4\alpha + \rho_q) \cos 2\varphi_0 + 2\beta \sin 2\varphi_0}{(4\alpha + \rho_q)^2 + 4\beta^2} \right] \rho_q + \left[\frac{3}{4\alpha + \rho_q} \right] \rho_q \right\} \rho_q^{-1}$

Обобщая выражения в табл. 5 получаем:

– для нечетной степени

$$B_q = \sum_{g=0}^l a_g \sum_{k=0}^g H^{*k} C_g^k \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{k}{2^{k-1}(\alpha + \rho_q)} \left[1 - \left(k - 2E\left(\frac{k}{2}\right) \right) \right] + \frac{(\alpha + \rho_q) \cos(k\varphi_0) + k\beta \sin(k\varphi_0)}{2^{k-1}[(\alpha + \rho_q)^2 + (k\beta)^2]} \right] \\ & + \frac{k[(\alpha + \rho_q) \cos((k-2)\varphi_0) + (k-2)\beta \sin((k-2)\varphi_0)]}{2^{k-1}[(\alpha + \rho_q)^2 + ((k-2)\beta)^2]} \end{aligned} \right\}$$

– для четной степени

$$B_q = \sum_{g=0}^l a_g \sum_{k=0}^g H^{*k} C_g^k \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{k}{2^{k-1}(\alpha + \rho_q)} \left[1 - \left(k - 2E\left(\frac{k}{2}\right) \right) \right] + \frac{(\alpha + \rho_q) \cos(k\varphi_0) + k\beta \sin(k\varphi_0)}{2^{k-1}[(\alpha + \rho_q)^2 + (k\beta)^2]} \right] \\ & + \frac{k[(\alpha + \rho_q) \cos((k-2)\varphi_0) + (k-2)\beta \sin((k-2)\varphi_0)]}{2^{k-1}[(\alpha + \rho_q)^2 + ((k-2)\beta)^2]} \end{aligned} \right\} +$$

$$+ 2 \sum_{g=0}^l (-1)^j \left(\sum_{g=0}^l a_g \sum_{k=0}^g H^{*k} C_g^k \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{k}{2^{k-1}(\alpha + \rho_q)} \left[1 - \left(k - 2E\left(\frac{k}{2}\right) \right) \right] + \frac{(\alpha + \rho_q) \cos(k\varphi_0) + k\beta \sin(k\varphi_0)}{2^{k-1}[(\alpha + \rho_q)^2 + (k\beta)^2]} \right] \\ & + \frac{k[(\alpha + \rho_q) \cos((k-2)\varphi_0) + (k-2)\beta \sin((k-2)\varphi_0)]}{2^{k-1}[(\alpha + \rho_q)^2 + ((k-2)\beta)^2]} \end{aligned} \right\} \right) +$$

$$+ (-1)^j \left(\sum_{g=0}^l a_g \sum_{k=0}^g H^{*k} C_g^k \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{k}{2^{k-1}(\alpha + \rho_q)} \left[1 - \left(k - 2E\left(\frac{k}{2}\right) \right) \right] + \frac{(\alpha + \rho_q) \cos(k\varphi_0) + k\beta \sin(k\varphi_0)}{2^{k-1}[(\alpha + \rho_q)^2 + (k\beta)^2]} \right] \\ & + \frac{k[(\alpha + \rho_q) \cos((k-2)\varphi_0) + (k-2)\beta \sin((k-2)\varphi_0)]}{2^{k-1}[(\alpha + \rho_q)^2 + ((k-2)\beta)^2]} \end{aligned} \right\} \right)$$

здесь E – целая часть числа.

Обобщение для нелинейных систем для процесса, записанного относительно выхода САУ (10), представленных в табл.6

$$B_q = \sum_{g=0}^l a_g \sum_{k=0}^g x_y^{g-k} H^{*k} (-1)^k C_g^k \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{k}{2^{k-1}(\alpha + \rho_q)} \left[1 - \left(k - 2E\left(\frac{k}{2}\right) \right) \right] + \frac{(\alpha + \rho_q) \cos(k\varphi_0) + k\beta \sin(k\varphi_0)}{2^{k-1}[(\alpha + \rho_q)^2 + (k\beta)^2]} \right] \\ & + \frac{k[(\alpha + \rho_q) \cos((k-2)\varphi_0) + (k-2)\beta \sin((k-2)\varphi_0)]}{2^{k-1}[(\alpha + \rho_q)^2 + ((k-2)\beta)^2]} \end{aligned} \right\}$$

В работе продемонстрирована полиномиальная аппроксимация нелинейной зависимости коэффициента сцепления тормозящего колеса с опорной поверхностью для самолета и автомобиля. По результатам эксперимента можно сделать вывод о том, что полиномиальная аппроксимация более точно повторяет вид нелинейной характеристики, что в дальнейшем улучшить качество синтеза параметров регулятора. Впоследствии при решении задачи синтеза системы проектировщик определяет подходящий вид аппроксимации в зависимости от типа рассматриваемой системы и режимов ее работы. Также, в ходе решения поставленной задачи обобщенный метод Галеркина был распространён на решение задачи синтеза нелинейных импульсных и непрерывных систем автоматического управления при полиномиальной аппроксимации. Полученные рекуррентные соотношения для вычисления интегралов B_q^* и B_q позволяют значительно упростить процесс вычислений при решении задачи параметрического синтеза для нелинейных импульсных и непрерывных систем произвольного высокого порядка и свести все вычисления к выполнению лишь простых математических операций.

Список источников

1. Borgul A., Bobtsov A., Kolyubin S., Zimenko K., Rabyish E., Pyrkin A. Mechatronic and Robotic Setups for Modern Control Theory Workshops // 9th IFAC Symposium on Advances in Control Education, 2012, pp. 348-353. DOI: 10.3182/20120619-3-RU-2024.00070

2. Pyrkin A., Bobtsov A., Kolyubin S., Faronov M. Output Controller for Uncertain Nonlinear Systems with Structural, Parametric, and Signal Disturbances // IEEE Multi-Conference on Systems and Control, 2012. DOI: 10.1109/CCA.2012.6402352
3. Колюбин С.А., Ефимов Д.В., Никифоров В.О., Бобцов А.А. Управление нелинейными системами на основе гибридных моделей с адаптацией // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 3 (79). С. 64-67.
4. Spong M.W., Corke P., Lozano R. Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum // Automatica, 2001, no. 37 (11), pp. 1845-1851. DOI: 10.1016/S0005-1098(01)00145-5
5. Hauser John, Murray Richard M. Nonlinear controllers for non-integrable systems: The Acrobot example // Proceedings of the American Control Conference, 1990, pp. 669-671. DOI: 10.23919/acc.1990.4790817
6. Данг Б., Пыркин А.А., Бобцов А.А., Ведяков А.А. Синтез адаптивного наблюдателя для нестационарных нелинейных систем с неизвестными полиномиальными параметрами // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2021. Т. 21. № 3 (133). С. 374-379. DOI: 10.17586/2226-1494-2021-21-3-374-379
7. Абрамкин С.Е., Душин С.Е. Разработка комплексных алгоритмов для автоматизированных технологических комплексов // Международная конференция «Проектирование и обеспечение качества информационных процессов и систем» (Санкт-Петербург, 15-17 марта 2022): сборник докладов. - Санкт-Петербург, Санкт-

Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В.И. Ульянова, 2022. С. 58-61.

8. Ильюшин Ю.В., Шестопалов М.Ю. Применение модифицированного критерия Найквиста для анализа импульсных распределенных систем // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2019. № 3. С. 42-46.

9. Мельников Д.В., Широкова З.Г. Синтез радиоэлектронных систем управления в классе нелинейных систем // Наука, техника и образование. 2016. № 3 (7). С. 36-44.

10. Дыбок В.В., Ходунков В.П., Баскаков В.А. Перспективные технические решения в синтезе следящих систем автоматического управления // Техно-технологические проблемы сервиса. 2014. № 1 (27). С. 53-56.

11. Wang J., Aranovskiy S.V., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A., Kolyubin S.A. A Method to Provide Conditions for Sustained Excitation // Automation and Remote Control, 2018, vol. 79, no. 2, pp. 258-264. DOI: 10.1134/S0005117918020054

12. Bazylev D., Vukosavic S., Bobtsov A., Pyrkin A., Stankovic A., Ortega R. Sensorless Control of PM Synchronous Motors with a Robust Nonlinear Observer // Proceedings 2018 IEEE Industrial Cyber-Physical Systems (ICPS), 2018, pp. 304-309. DOI: 10.1109/ICPHYS.2018.8387676

13. Hassan K. Khalil. Nonlinear Systems, USA, 2013, 560 p.

14. Shankar Sarty. Nonlinear Systems. Analysis, Stability, and Control, USA, Berkeley Publ., 1999, 675 p.

15. Haskara I., Ozguner U. Winkelman J. Extremum control for optimal operating point determination and set point optimization via sliding modes // Journal Dynamic System, Measurement and Control, 2000, vol. 122, pp. 719-724. DOI: 10.1115/1.1317231
16. Ибрагимов Д.Н. Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстрогодействия линейной дискретной системы // Труды МАИ. 2015. № 87. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=69797>
17. Урюпин И.В. Синтез оптимальных кусочно – гладких аппроксимаций траекторий движения летательных аппаратов // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93440>
18. Шишлаков В.Ф., Шишлаков А.В., Тимофеев С.С. Синтез САУ при различных видах аппроксимации нелинейных характеристик: теория и практика: монография. - СПб.: ГУАП, 2017. – 151 с.
19. Никитин А.В., Шишлаков В.Ф. Параметрический синтез нелинейных систем автоматического управления: монография. – СПб: ГУАП, 2003. – 358 с.
20. Vladislav Shishlakov, Elizaveta Vataeva, Natalia Reshetnikova, Dmitriy Shishlakov. Synthesis of control laws of electromechanical systems under polynomial approximation of characteristics of nonlinear elements // 13th International Scientific-Technical Conference on Electromechanics and Robotics «Zavalishin's Readings», 2018, vol. 161 (2), pp. 02006. DOI: 10.1051/mateconf/201816102006

References

1. Borgul A., Bobtsov A., Kolyubin S., Zimenko K., Rabyish E., Pyrkin A. Mechatronic and Robotic Setups for Modern Control Theory Workshops, *9th IFAC Symposium on Advances in Control Education*, 2012, pp. 348-353. DOI: 10.3182/20120619-3-RU-2024.00070
2. Pyrkin A., Bobtsov A., Kolyubin S., Faronov M. Output Controller for Uncertain Nonlinear Systems with Structural, Parametric, and Signal Disturbances, *IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, 2012. DOI: 10.1109/CCA.2012.6402352
3. Kolyubin S.A., Efimov D.V., Nikiforov V.O., Bobtsov A.A. *Nauchno-tehnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki*, 2012, no. 3 (79), pp. 64-67.
4. Spong M.W., Corke P., Lozano R. Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum, *Automatica*, 2001, no. 37 (11), pp. 1845-1851. DOI: 10.1016/S0005-1098(01)00145-5
5. Hauser John, Murray Richard M. Nonlinear controllers for non-integrable systems: The Acrobot example, *Proceedings of the American Control Conference*, 1990, pp. 669-671. DOI: 10.23919/acc.1990.4790817
6. Dang B., Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Vedyakov A.A. *Nauchno-tehnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki*, 2021, vol. 21, no. 3 (133), pp. 374-379. DOI: 10.17586/2226-1494-2021-21-3-374-379
7. Abramkin S.E., Dushin S.E. *Mezhdunarodnaya konferentsiya «Proektirovanie i obespechenie kachestva informatsionnykh protsessov i sistem»*: sbornik dokladov, Saint-Petersburg, Sankt-Peterburgskii gosudarstvennyi elektrotekhnicheskii universitet "LETI" im. V.I. Ul'yanova, 2022, pp. 58-61.

8. Il'yushin Yu.V., Shestopalov M.Yu. *Izvestiya SPbGETU LETI*, 2019, no. 3, pp. 42-46.
9. Mel'nikov D.V., Shirokova Z.G. *Nauka, tekhnika i obrazovanie*, 2016, no. 3 (7), pp. 36-44.
10. Dybok V.V., Khodunkov V.P., Baskakov V.A. *Tekhniko-tehnologicheskie problemy servisa*, 2014, no. 1 (27), pp. 53-56.
11. Wang J., Aranovskiy S.V., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A., Kolyubin S.A. A Method to Provide Conditions for Sustained Excitation, *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 2, pp. 258-264. DOI: 10.1134/S0005117918020054
12. Bazylev D., Vukosavic S., Bobtsov A., Pyrkin A., Stankovic A., Ortega R. Sensorless Control of PM Synchronous Motors with a Robust Nonlinear Observer, *Proceedings 2018 IEEE Industrial Cyber-Physical Systems (ICPS)*, 2018, pp. 304-309. DOI: 10.1109/ICPHYS.2018.8387676
13. Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*, USA, 2013, 560 p.
14. Shankar Sarty. *Nonlinear Systems. Analysis, Stability, and Control*, USA, Berkeley Publ., 1999, 675 p.
15. Haskara I., Ozguner U. Winkelman J. Extremum control for optimal operating point determination and set point optimization via sliding modes, *Journal Dynamic System, Measurement and Control*, 2000, vol. 122, pp. 719-724. DOI: 10.1115/1.1317231
16. Ibragimov D.N. *Trudy MAI*, 2015, no. 87. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=69797>
17. Uryupin I.V. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93440>

18. Shishlakov V.F., Shishlakov A.V., Timofeev S.S. *Sintez SAU pri razlichnykh vidakh approksimatsii nelineinykh kharakteristik: teoriya i praktika* (Synthesis of automatic control systems for various types of approximation of nonlinear characteristics: theory and practice). Saint Petersburg, GUAP, 2017, 151 p.
19. Nikitin A.V., Shishlakov V.F. *Parametricheskii sintez nelineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Parametric synthesis of nonlinear automatic control systems), Saint Petersburg, GUAP, 2003, 358 p.
20. Vladislav Shishlakov, Elizaveta Vataeva, Natalia Reshetnikova, Dmitriy Shishlakov. Synthesis of control laws of electromechanical systems under polynomial approximation of characteristics of nonlinear elements, *13th International Scientific-Technical Conference on Electromechanics and Robotics «Zavalishin's Readings»*, 2018, vol. 161 (2), pp. 02006. DOI: 10.1051/mateconf/201816102006

Статья поступила в редакцию 04.12.2022

Одобрена после рецензирования 12.12.2022

Принята к публикации 27.02.2023

The article was submitted on 04.12.2022; approved after reviewing on 12.12.2022; accepted for publication on 27.02.2023