Тепловые процессы в технике. 2023. Т. 15. № 10. С. 448–455
Thermal processes in engineering, 2023, vol. 15, no. 10, pp. 448–455

Научная статья
УДК 536.2:533.9

О моделировании тепловых возмущений, вносимых в разреженную плазму неподвижными каноническими телами

В.В. Черепанов✉

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия
✉ *vvcherepanov@yandex.ru*

Аннотация. Представлена математическая модель, описывающая процесс самосогласованной релаксации области возмущений, вносимых в свободномолекулярный бинарный ионизированный газ заряженным телом с абсорбирующей частицы газа поверхностью, имеющей ставшую канонической в тепловых задачах форму сферы или цилиндра. Модель позволяет описывать и анализировать тепловое поле в окрестности тела и тепловые нагрузки на его поверхность. Особенностью таких задач является их кинетическая формулировка, в которой отделить процессы тепло- и массообмена от процесса формирования электромагнитного поля невозможно. Для задачи подобрана оптимальная криволинейная система неголономных координат, минимизирующая фазовое пространство, в которых обоснована форма кинетического уравнения Власова.

Ключевые слова: тепло- и массообмен, разреженная плазма, шар и цилиндр, кинетическое описание, фазовое пространство, неголономные координаты, область возмущения, самосогласованная задача.

Для цитирования. Черепанов В.В. О моделировании тепловых возмущений, вносимых в разреженную плазму неподвижными каноническими телами // Тепловые процессы в технике. 2023. Т. 15. № 10. С. 448–455. URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=177589

Original article

On modeling of thermal disturbances introduced into a rarefied plasma by motionless canonical bodies

V.V. Cherepanov✉

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
✉ *vvcherepanov@yandex.ru*

Abstract. The article presents the mathematical model describing the process of self-consistent relaxation of the region of disturbances being introduced into a free-molecular binary ionized gas by the charged body with surface absorbing the gas particles, which has the spherical or cylinder shape having become canonical in thermal computational problems. The model allows describing and analyzing the thermal field in the vicinity of the body, and thermal loads on its surface. These problems specifics consist in their kinetic description, in which separation of the heat and mass exchange processes from the electromagnetic field description is impossible. Optimal curvilinear non-holonomic coordinate system, minimizing the phase space, in which Vlasov's kinetic equation form was substantiated, was selected for the problem.

Keywords: heat and mass transfer, rarefied plasma, canonical bodies, kinetic description, phase space, nonholonomic coordinates, perturbation region, relaxation, self-consistent problem

For citation. Cherepanov V.V. On modeling of thermal disturbances introduced into a rarefied plasma by motionless canonical bodies. *Thermal processes in engineering*, 2023, vol. 15, no. 10, pp. 448–455. URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=177589

Введение

Подавляющее большинство прямых прикладных задач описания теплового поля для тел, помещенных в среду с линейными или нелинейными свойствами, предполагают, как правило, необходимость решения системы макроскопических уравнений, включающих уравнение энергии-теплопроводности. В таких задачах вклад радиационных процессов наиболее часто учитывается включением в макроскопическое уравнение энергии источника, соответствующего принятой модели излучения, реже – компонент, учитывающий радиационное давление, поправки на вынужденное излучение и т. д. Значительно реже, исключительно в случае комбинированного теплообмена, к макроскопическим уравнениям, описывающим тепло- и массоперенос в веществе, добавляется стационарное кинетическое уравнение, описывающее перенос излучения. В этих случаях обычно предполагается, что излучение, распространяясь в среде, не влияет на ее оптические свойства. Как правило, свойства среды в таком ее описании, установленные на макроскопическом уровне, теплофизические или спектральные, изотропные или нет, предполагаются либо известными, либо связанными с макропараметрами среды по известному закону. В большинстве моделей, ориентированных на прикладные исследования, подобные связи считаются равновесными и, следовательно, нелинейными.

При решении целого ряда обратных задач идентификации подразумевается, что те или иные микро- и макроскопические свойства среды не заданы, но могут быть определены либо по результатам их решения, либо в ходе процесса математического имитационного моделирования. При таком подходе можно детально исследовать как отдельный, основной макропараметр, определяющий свойства среды, так и их группу, обычно относящуюся к какой-либо отдельной совокупности свойств: теплофизических, спектральных, термомеханических.

Случай газообразных, особенно ионизированных сред, в подобных задачах тепло- и массообмена появляется не часто. Прежде всего, потому, и в этом заключается его основное отличие от задач теплообмена в более или менее традиционных постановках, что к подобным средам в окрестности зоны их непосредственного взаимодействия с поверхностями тех или иных тел макроскопические уравнения могут оказаться в принципе не применимыми. Это связано с анизотропией в этих областях функций распределения частиц разных типов, формирующих газ, а также в связи с необходимостью учитывать некоторые возможные процессы и явления [1], которые зачастую не очень хорошо представляют себе специалисты, занимающиеся в основном теплообменом.

Так, при моделировании нестационарной картины теплового поля в зоне возмущения произвольных по своей форме абсорбирующих тел, помещенных в ионизованный газ, необходимо принимать во внимание, помимо кинетической анизотропии газовых компонент, такие дополнительные факторы, как возникновение у тел ненулевого потенциала поверхности, наличие в возмущенной зоне объемного заряда и поля, которые способны существенно влиять на перемещение компонент в окрестности тела, ограничивая или, наоборот, усиливая электрические, массовые и тепловые потоки компонентов.

Металлические или иные поверхности, способные к абсорбции заряженных газовых компонент, обычно приобретают при контакте с ионизированной средой отличный от нуля электрический потенциал, обусловленный различной подвижностью частиц разных типов, который называется плавающим. При существенном отличие масс различных частиц, например при наличии в многокомпонентном газе ионов и электронов, плавающий потенциал обычно имеет знак заряда наиболее подвижных частиц, чтобы обеспечить баланс на поверхности тела электрических потоков зарядов разного знака.

Однако его абсолютные значения обычно относительно невелики, как и возникающие электрические токи, поэтому магнитным полем в зоне возмущения чаще всего можно пренебречь. Поскольку релаксация возмущенной зоны проходит на характерных временах наиболее массивных частиц, определяемых их тепловой скоростью и дебаевским радиусом, а релаксация электрического поля осуществляется гораздо быстрее, поле можно считать квазистационарным, то есть зависящим от времени не явно, а через распределение частиц и заряда в пространстве. Наконец, если газ сильно разряжен и столкновения его частиц практически не происходят, температуры различных компонент газа могут значительно отличаться.

В данной работе представлена математическая модель процесса развития зоны возмущения поглощающим телом полностью ионизованного свободномолекулярного газа, содержащего ионы разных типов и электроны. Модель предназначена прежде всего для анализа теплового поведения тела в ионизированном газе. Однако ее возможности намного шире, поскольку модель предполагает описание не только тепловой, но и полевой картины зоны возмущения. Здесь мы будем рассматривать тела лишь простейших, канонических с точки зрения тепловых приложений, форм и полагать их покоящимися относительно невозмущенного газа.

Комбинированная модель развития зоны возмущения

Как уже отмечалось, в окрестности заряженных и абсорбирующих тел разряженные газы, как правило, имеют анизотропное распределение частиц по скорости, что полностью исключает для них возможность макроскопического, гидродинамического описания и требует решения соответствующих кинетических уравнений [2−8]. Для бесстолкновительных газов таким является кинетическое уравнение Власова [5].

Кроме того, в состав основных уравнений модели, описывающей процесс формирования возмущенной зоны, должны быть включены: уравнения, связывающие макропараметры газа с функциями распределения – микроскопическими характеристиками системы; уравнения, связывающие макроскопическое самосогласованное поле с макропараметрами газа; необходимые граничные, а в эволюционных задачах и начальные условия. В целом процесс развития возмущенной зоны, формируемой в разреженной плазме внесенным в нее неподвижным поглощающим частицы телом, можно записать в следующем виде (используется система СИ)

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} f_\alpha + \frac{e_\alpha \mathbf{E}}{m_\alpha}\cdot\nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0, \\
f_\alpha = f_\alpha(t,\mathbf{r},\mathbf{v}),\ \alpha = 1,..N, \\
t>0,\ \mathbf{v}\in R^3,\ \mathbf{r}\in V,\ \partial V = \partial V_1 \cup \partial V_b \\
div\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = \varepsilon_0^{-1}\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha(t,\mathbf{r}),\ \mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(t,\mathbf{r}) \\
f_\alpha(0,\mathbf{r},\mathbf{v}) = f_{M,\alpha}(\mathbf{r},\mathbf{v}),\ \varphi(0,\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) \\
f_\alpha(t,\mathbf{r}_1,\mathbf{v}) = 0,\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_1 < 0, \\
\varphi(t,\mathbf{r}_1) = \varphi_1\ ,\ \mathbf{r}_1 \in \partial_1 V \\
f_\alpha(t,\mathbf{r}_b,\mathbf{v}) = f_{M,\alpha}(\mathbf{r}_b,\mathbf{v}_{T,\alpha}(t,\mathbf{r}_b,\mathbf{v})), \\
\varphi(t,\mathbf{r}_b) = 0\ ,\ \mathbf{r}_b \in \partial_b V \\
n_\alpha(t,\mathbf{r}) = \int_{R^3} f_\alpha(t,\mathbf{r},\mathbf{v})\,d\mathbf{v}, \\
<\mathbf{v}_\alpha>(t,\mathbf{r}) = n_\alpha^{-1}\int_{R^3} \mathbf{v} f_\alpha(t,\mathbf{r},\mathbf{v})\,d\mathbf{v} \\
T_\alpha(t,\mathbf{r}) = \left(\frac{i}{2}n_\alpha k_Б\right)^{-1}\int_{R^3}\frac{m_\alpha v_{T,\alpha}^2(t,\mathbf{r},\mathbf{v})}{2} f_\alpha(t,\mathbf{r},\mathbf{v})\,d\mathbf{v}, \\
\mathbf{q}_\alpha(t,\mathbf{r}) = \int_{R^3}\mathbf{v}\frac{m_\alpha v_{T,\alpha}^2(t,\mathbf{r},\mathbf{v})}{2} f_\alpha(t,\mathbf{r},\mathbf{v})\,d\mathbf{v}, \\
\mathbf{v}_{T,\alpha}(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) = \mathbf{v} - <\mathbf{v}_\alpha>(t,\mathbf{r})
\end{gathered}
\tag{1}
$$

В этих соотношениях символы, выделенные жирным шрифтом, соответствуют векторам, N – количество типов частиц многокомпонентного газа; V – зона его возмущения заряженным телом, являющаяся расчетной областью задачи в физическом пространстве, f – функция распределения частиц, n – их концентрация, T − температура, $\mathbf{q}$ – плотность теплового потока; φ, $\mathbf{E}$ – потенциал и напряженность электрического поля, которое полагается квазистационарным; i – количество поступательных степеней свободы частиц, связанное с размерностью используемого пространства скоростей задачи. Индекс α указывает на сорт частиц с массой m_α и зарядом e_α, 1 – на поверхность $\partial_1 V$ заряженного тела, b – на внешнюю границу $\partial_b V$ зоны возмущения, T – на тепловую скорость частиц, M – функцию распределения Максвелла. Угловые скобки обозначают среднее арифметическое значение, операция скалярного произведения обозначена точкой, $k_Б$ – постоянная Больцмана.

Поясняя эти соотношения, отметим, что потенциал поверхности тела в модели считается заданным и постоянным. Следует заметить, и это может быть важным, что подобные ограничения не являются принципиальными и достаточно легко могут быть устранены в ходе моделирования.

Кроме того, ионизированный многокомпонентный равновесный газ в природе обычно пребывает в состоянии плазмы. Мы не будем делать исключения из этого правила и предположим, что концентрации и заряды различных частиц удовлетворяют условию квазинейтральности $\sum\limits_{\alpha} e_\alpha n(t,\mathbf{r}_{b+}) = 0$.

Поэтому можно считать, что в начале процесса релаксации возмущенной зоны макроскопическое электрическое поле создается только внесенным телом и рассчитывается, как в вакууме. Также предположим невозмущенный газ равновесным и изотропным, поэтому для его компонентов можно считать справедливым максвелловское распределение по скорости.

Отметим, что подобные, строго говоря, асимптотические внешние граничные условия в модели перенесены из «бесконечности» в точки $\mathbf{r}_{b+}$ внешней стороны границы зоны возмущения $\partial_b V$. Однако если подобный перенос для плотности заряда вполне корректен, поскольку она действительно становится практически квазинейтральной на конечном расстоянии в несколько десятков дебаевских радиусов от тела, то считать на этой внешней границе распределение частиц по скорости таким же, как и у компонент невозмущенного неподвижного газа, нельзя. Внешняя граница $\partial_b V$ возмущенной телом области пространства абстрактна и является полностью проницаемой для частиц, которые не должны перемещаться исключительно в пределах V. Поэтому на границе $\partial_b V$ следует допустить наличие ненулевой средней скорости компонент, которая обеспечивает там непрерывность полного тока проводимости. В этом смысле на внешней границе возмущенной зоны лишь исчезает макроскопическое электрическое поле, а у функций распределения компонент пропадают эффекты анизотропии, обусловленные поглощением падающих частиц поверхностью тела.

Учитывая факт значительного отличия времен релаксации возмущенной зоны и поля, мы также можем отметить существенное отличие времени релаксации у ионов и электронов. Поэтому, если для обратного нет каких-либо серьезных оснований, включение в релаксационную модель возмущенной зоны кинетического уравнения электронов, что существенно увеличивает время решение системы (1) на компьютере, не целесообразно. Вместо этого на каждом ионном шаге по времени метода решения нестационарной задачи (1) для электронов также можно применять те или иные квазистационарные равновесные распределения в электрическом поле, например для электронов можно использовать классическое распределение Больцмана

$$n_e(t,\mathbf{r}) = n_{e,b}\exp\left(\frac{e\varphi(t,\mathbf{r})}{k_Б T_{e,b}}\right), \tag{2}$$

или учитывающее поглощение отталкивающихся частиц поверхностью тела, в случае его центральной или осевой симметрии, распределение [7]

$$\begin{gathered} n_e(t,r) = \frac{n_{e,b}}{2}\exp\left(\frac{e\varphi(t,r)}{k_Б T_{e,b}}\right)\times \\ \times\left\{1+\Phi\left(\sqrt{\frac{e\left(\varphi(t,r)-\varphi_1\right)}{k_Б T_{e,b}}}\right)+\sqrt{1-\frac{r_1^2}{r^2}}\times\right. \end{gathered} \tag{3}$$

$$\left.\times\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{er^2\left(\varphi(t,r)-\varphi_1\right)}{k_Б T_{e,b}\left(r^2-r_1^2\right)}}\right)\right]\exp\left[\frac{er_1^2\left(\varphi(t,r)-\varphi_1\right)}{k_Б T_{e,b}\left(r^2-r_1^2\right)}\right]\right\}.$$

В формулах (2) и (3) и далее e – элементарный заряд.

Канонические тела, криволинейные голономные и неголономные координаты

Будем далее рассматривать только тела с поверхностью сферической или цилиндрической формы. В последнем случае будем полагать цилиндр бесконечно длинным прямым круговым, и поэтому в физическом пространстве будем рассматривать только двумерные задачи. Во всех этих случаях возникающая симметрия требует применения соответствующих криволинейных координат. В монографии А.А. Власова [5] была исследована связь структуры конвективного фазового оператора кинетического уравнения с метрикой пространства, обоснована его ковариантность и правила преобразования в криволинейные координаты евклидова пространства. Однако в этой классической работе рассматривался переход от декартовых фазовых координат только к произвольным голономным криволинейным координатам q_k, $k = 1,..6$, для которых почти всюду выполняются условия взаимного однозначного, непрерывного соответствия декартовым координатам. В них также было установлено, что в случае, когда функция распределения не зависит от переменных q_k, $k = m+1,..6$ полного их набора, уравнение Власова принимает следующую форму

$$\frac{\partial\left(J^* f_\alpha\right)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\dot{q}_k J^* f_\alpha\right)=0,\quad J^*=\int\limits_{\Omega_{m+1,6}} J(q_1,...,q_6)\,d\Omega_{m+1,6},\tag{4}$$

в которой J^* – проинтегрированный по области $\Omega_{m+1,6}$ полного изменения переменных q_k, $k = m+1,..6$ якобиан преобразования. Это уравнение имеет дивергентный вид и формально совпадает с уравнением неразрывности для декартовых координат, то есть отражает условие баланса для криволинейного фазового пространства количества вещества с плотностью, равной J^*f.

Задачу (1) релаксации зоны возмущения в окрестности произвольных тел целесообразно решать в безразмерной форме, для перехода к которой можно использовать естественную систему масштабов, не приводящую к дополнительным коэффициентам в безразмерных уравнениях. Для бинарного газа такая система масштабов может иметь вид (система СИ)

$$\begin{gathered}M_n = n_{i\infty},\ M_T = T_{i\infty},\\ M_L = R_{Di\infty} = (\varepsilon_0 k_Б T_{i\infty} / e^2 n_{i\infty})^{0.5},\\ M_\varphi = k_Б T_{i\infty} / e,\ M_v = (2k_Б T_{i\infty} / m_i)^{0.5},\\ M_t = M_L / M_v,\ M_E = M_\varphi / M_L, M_f = M_n / M_v^3.\end{gathered}\tag{5}$$

Как видим, кинетические задачи в фазовом пространстве являются многомерными. Поэтому, используя любую возможность ограничения диапазона изменения фазовых переменных или исключая их полностью, мы существенно выигрываем во времени при их численном решении. Но голономные координатные наборы не всегда позволяют учитывать такую специфику кинетических задач, которая позволяет сделать их фазовый объем более компактным в утилитарном понимании. Так, в условиях очевидной угловой и трансверсальной симметрии рассматриваемой в данной работе задачи (1) для неподвижных сферических и цилиндрических тел ее фазовое пространство в наибольшей степени локализуется при использовании координат r, v, $\mu = \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}/(rv)$. Но эти координаты не являются голономными, поскольку их связь с компонентами трансверсальной скорости не является взаимно однозначной, хотя и непрерывна. Фазовое пространство с такими переменными было предложено использовать для решения так называемых зондовых задач В.Н. Новиковым [9]. Однако в связи с приведением задачи к указанным неголономным переменным необходимо дать некоторые пояснения.

Во-первых, отметим, что преобразование кинетического уравнения к переменным $\{r, v, \mu\}$ в случае центральной и осевой симметрии задачи в отсутствии поля приводит к потере в фазовом конвективном операторе компонент, содержащих производную по v. Поэтому соответствующие преобразования необходимо проводить только в присутствии поля.

Во-вторых, поскольку согласно [5] конвективный фазовый оператор в голономных координатах может быть определен ковариантным дифференцированием, преобразование координат мы можем проводить, отталкиваясь от форм уравнения Власова для сферических и цилиндрических координат, приведенных и обоснованных в [5]. Эти исходные для наших дальнейших преобразований формы имеют следующий вид в случае цилиндрических

$$\begin{gathered}\frac{Df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+u^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}-\Gamma^m_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta\frac{\partial f}{\partial u^m}=\\ =\frac{\partial f}{\partial t}+v_r\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial f}{\partial z}+\\ +\left(\frac{v_\varphi^2}{r}+\frac{ZE_r}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial v_r}+\left(-\frac{v_r v_\varphi}{r}+\frac{ZE_\varphi}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial v_\varphi}+\dot{v}_z\frac{\partial f}{\partial v_z}\end{gathered}\tag{6}$$

и сферических переменных

$$\begin{gathered}\frac{Df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+u^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}-\Gamma^m_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta\frac{\partial f}{\partial u^m}=\frac{\partial f}{\partial t}+v_r\frac{\partial f}{\partial r}+\\ +\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}+\left(\frac{v_\theta^2+v_\varphi^2}{r}+\frac{ZE_r}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial v_r}+\\ +\left(\frac{v_\varphi^2}{r}\text{ctg}\theta-\frac{v_r v_\theta}{r}+\frac{ZE_\theta}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial v_\theta}+\\ +\left(-\frac{v_r v_\varphi}{r}-\frac{v_\theta v_\varphi}{r}\text{ctg}\theta+\frac{ZE_\varphi}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial v_\varphi}.\end{gathered}\tag{7}$$

Общепринято, что в операторах (6), (7) *Г* – символы Кристоффеля, а по повторяющимся верхним и нижним индексам предполагается суммирование. Также для этих операторов приведены формы, которые допускают наличие электрического поля с произвольной ориентацией в пространстве.

Рассмотрим сначала цилиндрический оператор (6). Будем сразу рассматривать исключительно случай осевой симметрии в физическом пространстве, когда ситуация дополнительно является однородной в направлении оси координат Oz, совпадающей с осью цилиндра. В этом случае поле, функция распределения и конвективный фазовый оператор не зависят от φ и z, однако функция распределения и оператор сохраняют зависимость от радиальной и трансверсальной скорости.

Поэтому из (6) получаем

$$\frac{Df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+v_r\frac{\partial f}{\partial r}+\left(\frac{v_\varphi^2}{r}+\frac{ZE_r}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial v_r}-\frac{v_r v_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial v_\varphi}. \quad (8)$$

Скоростные переменные в цилиндрических и неголономных координатах связаны соотношениями

$$v_r=v\mu,\ v_\varphi=\pm v\sqrt{1-\mu^2}$$
$$v=\sqrt{v_r^2+v_\varphi^2},\ \mu=v_r/\sqrt{v_r^2+v_\varphi^2}, \quad (9)$$

причем «играющие» знаки в одной из этих формул и порождают неголономность соответствующих преобразований. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial v_r}=\frac{\partial\mu}{\partial v_r}\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{\partial v}{\partial v_r}\frac{\partial}{\partial v},\ \frac{\partial}{\partial v_\varphi}=\frac{\partial\mu}{\partial v_\varphi}\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{\partial v}{\partial v_\varphi}\frac{\partial}{\partial v}. \quad (10)$$

Вычисляя из (9) соответствующие частные производные в правых частях соотношений (10), получаем

$$\frac{\partial\mu}{\partial v_r}=\frac{\sqrt{v_r^2+v_\varphi^2}-\frac{1}{2}\frac{v_r}{\sqrt{v_r^2+v_\varphi^2}}2v_r}{v_r^2+v_\varphi^2}=\frac{v^2-v_r^2}{(v^2)^{3/2}}=\frac{1-\mu^2}{v},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial v_\varphi}=v_r(-0.5)(v_r^2+v_\varphi^2)^{-3/2}2v_\varphi=-\frac{v_r v_\varphi}{(v^2)^{3/2}}=\mp\frac{\mu\sqrt{1-\mu^2}}{v},$$

$$\frac{\partial v}{\partial v_r}=0.5(v_r^2+v_\varphi^2)^{-1/2}2v_r=\frac{v_r}{v}=\mu,\ \frac{\partial v}{\partial v_\varphi}=\frac{v_\varphi}{v}=\pm\sqrt{1-\mu^2},$$

откуда с учетом (10) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial v_r}=\frac{1-\mu^2}{v}\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial v_\varphi}=\mp\frac{\mu\sqrt{1-\mu^2}}{v}\frac{\partial}{\partial\mu}\pm\sqrt{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial v}. \quad (11)$$

Подставив (11) в скоростные компоненты фазового конвективного оператора (8), находим их выражение в интересующих нас неголономных фазовых координатах

$$\hat{A}=-\frac{v_r v_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial v_\varphi}=$$
$$=\mp\frac{v^2}{r}\mu\sqrt{1-\mu^2}\left[\mp\frac{\mu\sqrt{1-\mu^2}}{v}\frac{\partial}{\partial\mu}\pm\sqrt{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial v}\right]=$$
$$=\frac{v}{r}\mu^2(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}-\frac{v^2}{r}\mu(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial v}$$

и

$$\hat{B}=\left(\frac{v_\varphi^2}{r}+\frac{ZE_r}{2}\right)\frac{\partial}{\partial v_r}=\left[\frac{v^2(1-\mu^2)}{r}+\frac{ZE_r}{2}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{1-\mu^2}{v}\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial}{\partial v}\right)=(1-\mu^2)\left[\frac{v}{r}(1-\mu^2)+\frac{ZE_r}{2v}\right]\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\left[\frac{v^2(1-\mu^2)}{r}+\frac{ZE_r}{2}\right]\frac{\partial}{\partial v}.$$

В результате получаем окончательное выражение для скоростных компонентов конвективного фазового оператора

$$\hat{A}+\hat{B}=(1-\mu^2)\left(\frac{v}{r}+\frac{ZE_r}{2v}\right)\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{ZE_r\mu}{2}\frac{\partial}{\partial v}. \quad (12)$$

С учетом формулы (12) безразмерная бинарная модель (1) процесса релаксации возмущенной зоны для цилиндра принимает вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}+v\mu\frac{\partial f_i}{\partial r_\alpha}+0.5Z_iE_r\frac{\partial f_i}{\partial v}+$$
$$+(1-\mu^2)\left(v/r+0.5Z_iE_r/v\right)\frac{\partial f_i}{\partial\mu}=0,\ f_i=f_i(t,r,v,\mu),$$
$$t>0,\ v\in(0,\infty),\ r\in[r_1,r_b],$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\gamma}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=n_e-Z_in_i\ E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r},\ \gamma=\begin{bmatrix}1-\text{цилиндр}\\2-\text{сфера}\end{bmatrix}$$
$$f_i(0,r,v,\mu)=\pi^{-3/2}\exp(-v^2),\ \varphi(0,r)=\varphi_1 r_1/r,$$
$$f_i(t,r_1,v,\mu)=0,\ \mu<0,\ \varphi(t,r_1)=\varphi_1,\ <v_{i,\tau}>(t,r)=0,$$
$$f_i(t,r_b,v,\mu)=\pi^{-3/2}\exp(-v^2+2vv_{i\infty}\mu-v_{i\infty}^2),$$
$$\varphi(t,r_b)=0,\ n_\alpha(t,r)=2\pi\int_0^\infty v^2\int_{-1}^1 f_\alpha(t,r,v,\mu)d\mu dv,$$
$$<v_{i,r}>(t,r)=2\pi n_i^{-1}\int_0^\infty v^3\int_{-1}^1\mu f_\alpha(t,r,v,\mu)d\mu dv$$

$$T_i(t,r) = 2\pi n_i^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-1}^{1} v^2 v_{T,\alpha}^2 (t,r,v,\mu) f_\alpha(t,r,v,\mu) d\mu dv,$$

$$q_{\alpha,r}(t,r) = 2\pi n_i^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-1}^{1} \mu v^3 v_{T,\alpha}^2 (t,r,v,\mu) f_\alpha(t,r,v,\mu) d\mu dv,$$

$$v_T^2(t,r,v,\mu) = \left(v\mu - < v_{i,r} > (t,r)\right)^2 + v^2(1-\mu^2), \quad (13)$$

в котором Z_i – зарядовое число ионов, а для электронов следует применять безразмерные аналоги распределений (2) или (3).

Заметим, что поскольку в случае неподвижного сферического тела, возникающей центральной симметрии функции распределения, заряда и поля, функция распределения также зависит только от радиальной и трансверсальной компоненты скорости, мы приходим к такому же виду фазового конвективного оператора в неголономных координатах. В этом не трудно убедиться в результате непосредственных преобразований, подобных тем, которые приведены выше.

Проблему вычисления несобственных интегралов по v в (13) можно устранить, использую адаптивную подвижную по v сетку [9], отслеживающую смещение по этой переменной основной части носителя функции распределения. В этом случае интегрирование по модулю скорости можно проводить по конечному интервалу. Однако более точно подобные интегралы также можно вычислить, используя прием вычисления несобственных спектральных интегралов, продемонстрированный в [10].

Кроме того, отметим, что наличие дивергентной формы (4) у кинетического уравнения в системе (13) позволяет применять для его аппроксимации разного рода консервативные вычислительные алгоритмы [11] и имитационные динамические методы, основанные на моделировании переноса или баланса вещества и его свойств. В связи с очевидной целесообразностью перехода к дивергентной форме (4) кинетического уравнения задачи (13) заметим также, что проинтегрированный по несущественным фазовым переменным якобиан преобразования зависит от выбора формы возмущающего объекта следующим образом

$$J^* = \begin{bmatrix} 4\pi r v / \sqrt{1-\mu^2}, \text{ цилиндрический} \\ 8\pi^2 r^2 v^2, \text{ сферический} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

поскольку интегрирование необходимо провести по всем углам физического пространства, а также по азимуту сферической или полярному углу цилиндрической системы пространства скоростей. В обоих случаях количество поступательных степеней свободы частиц плазмы $i = 2$, поскольку пространство скоростей двумерно и позволяет контролировать в полном объеме лишь радиальную компоненту скорости и модуль трансверсальной компоненты. Очевидно и то, что обобщение модели (13) на случай ионов нескольких типов тривиально и в пояснениях не нуждается.

В завершение отметим, что исследования низкотемпературной плазмы в настоящее время активно проводятся, хотя они давно уже вышли за рамки ранее традиционных аэрокосмических приложений для подобного рода моделей. Помимо них постоянно появляются новые интересные приложения из области медицины, экологии, энергетики, физики твердого тела, транспорта и т. д. [12−22]

Заключение

В работе представлены ключевые соотношения математической модели, описывающей процесс релаксации области тепловых и физических возмущений, вносимых в свободномолекулярный бинарный ионизированный газ телом канонической формы с поверхностью, абсорбирующей частицы. Особенностью таких самосогласованных задач моделирования является их исключительно кинетический, микроскопический уровень описания, при котором отделить процессы тепло- и массообмена от процесса формирования электромагнитного поля абсолютно невозможно. Проведено масштабирование задачи и для случая некоторых симметричных тел (сфера, бесконечный прямой круговой цилиндр), выбрана наиболее удобная криволинейная система координат с неголономными связями, в которую преобразованы уравнения модели. Подобное преобразование полностью обосновано, а также схематично намечены пути преодоления ряда ключевых проблем, которые могут возникать при решении уравнений модели на компьютере.

Список источников

1. **Арцимович А.А., Сагдеев Р.З.** Физика плазмы для физиков. Москва: Атомиздат, 1979. 320 с.
2. **Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов. Москва: Иностранная литература, 1960. 512 с.
3. **Климонтович Ю.Л.** Кинетическая теория электромагнитных процессов. Москва: Наука, 1980. 374 с.
4. **Берд Г.** Молекулярная газовая динамика. Москва: Мир, 1981, 320 с.
5. **Власов А.А.** Статистические функции распределения. Москва: Наука, 1966. 356 с.
6. **Алексеев Б.В.** Математическая кинетика реагирующих газов. Москва: Наука, 1982. 424 с.

7. **Альперт Я.Л., Гуревич А.В., Питаевский Л.П.** Искусственные спутники в разреженной плазме. Москва: Наука, 1964. 384 с.
8. **Мэтьюз Дж., Уокер Р.** Математические методы физики. Москва: Атомиздат, 1972. 400 с.
9. **Алексеев Б.В., Котельников В.А., Новиков В.Н.** Нестационарный зонд Ленгмюра // Теплофизика высоких температур. 1980. Т. 18. № 5. С. 1062–1065.
10. **Алифанов О.М., Черепанов В.В.** Методы исследования и прогнозирования свойств высокопористых теплозащитных материалов. Москва: Московский авиационный институт, 2014. 264 с.
11. **Годунов С.К., Рябенький В.С.** Разностные схемы. Введение в теорию. Москва: Наука, 1977. 440 с.
12. **Kuznetsov I.A., Saveliev A.A., Rasipuram S., Kuznetsov A.V., Broun A., Jasper W.** Development of active porous medium filters on plasma textiles // AIP Conference Proceedings. 2012. Vol. 1453. Iss. 1. P. 265–270. URL: https://doi.org/ 10.1063/1.4711186
13. **Lev D., Myers R.M., Lemmer K.M., Kolbeck J., Koizumi H., Polzin K.** The technological and commercial expansion of electric propulsion // Acta Astronautica. 2019. Vol. 159. P. 213–227.
14. **Ohkawa Y.** Review of KITE – Electrodynamic tender experiment on the Japanese H-II Transfer Vehicle // Acta Astronautica, 2020. Vol. 177. P. 750–758. URL: https://doi.org/10.1016/jactaastro.2020.03.04
15. **Sanmartin J.R., Estes R.D.** The orbital-motion-limited regime of cylindrigal Langmuir probes // Physics of Plasmas. 1999. Vol. 6. No. 1. P. 395-405.
16. **Thissen H.** Plasma-based surface modification for the control of biointerfacial interactions // Biosynthetic Polymers for Medical Applications. A volume in Woodhead Publishing Series in Biomaterials. Ed by L. Poole-Warren, P. Martens, R. Green. Elsevier Science Direct, 2016. P. 129-144. URL: https://doi.org/10.1016/C2013-0-16462-8
17. **Giddey S., Badwal S.P.S., Kulkarni A., Munnings C.** A comprehensive review of direct carbon fuel cell technology // Progress in Energy and Combustion Science. 2012. Vol. 38. No. 3. P. 360–399. URL: https://doi.org/10.1016/j.pecs.2012.01.003
18. **Gay-Mimbrera J., Garcia M.C., Isla-Tejera B., Rodero–Serrano A., Garcia–Nieto A.V., Ruano J.** Clinical and Biological Principles of Cold Atmospheric Plasma Application in Skin Cancer // Advanced in Therapy. 2016. Vol. 33. No. 6. P. 894–909. URL: https://doi.org/10.1007/s12325-016-0338-1
19. **Freidman P.C., Fridman A.** Using cold plasma to treat warts in children // Pediatric Dermatology. 2020. Vol. 37. No. 4. P. 706–709. URL: https://doi.org/10.1111/pde.14180
20. **Chung S.S.M.** FDTD Simulations on radar cross section of metal cone and plasma covered metal cone // Vacuum. 2012. Vol. 86. Iss. 7. P. 970–984. URL: https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2011.08.016
21. **Morfill G.E., Ivlev A.V.** Complex. plasmas: An interdisciplinary research field // Reviews of Modern Physics. 2009. Vol. 81. No. 4. Article number 1353.
22. **Merlino R.L.** Experimental Investigations of Dusty Plasmas // AIP Conference Proceedings. 2005. Vol. 799. Iss. 1. P. 3–11. URL: https://doi.org/10.1063/1.2134567

References

1. **Artsimovich A.A., Sagdeev R.Z.** Fizika plasmy dlya fizikov [Plasma physics for physicists]. Moscow: Atomizdat, 1979, 320 p. (In Russ.)
2. **Chapman S., Cowling T.G.** Matematicheskaya teoriya neodnorodnykh gazov [The mathematical theory or non-uniform gases]. Izdatel'stvo “Inostrannaya literature”, 1970, 512 p. (In Russ.)
3. **Klimontovich Yu.L.** KIneticheskaya teoriya electromagnitnykh processov. [Kinetic theory of electromagnetic processes]. Moscow: Nauka, 1980, 374 p. (In Russ.)
4. **Bird G.A.** Molekulyarnaya gazovaya dinamika [Molecular gas dynamics]. Moscow: Mir, 1981, 320 p. (In Russ.)
5. **Vlasov A.A.** Statisticheskie functcii raspredeleniya [Statistical distribution functions]. Moscow: Nauka, 1966, 356 p. (In Russ.)
6. **Alekseev B.V.** Matematicheskaya kinetika reagiruyushchikh gazov [Acute problems of theoretical physics]. Moscow: Nauka, 1982, 424 p. (In Russ.)
7. **Alpert Ya.L., Gurevich A.V., Pitaevsky L.P.** Iscusstvennye sputniki v razrejennoi plazme [Artificial satellites in rarefied plasma]. Moscow: Nauka, 1964. 384 p. (In Russ.)
8. **Mathews J., Walker R.L.** Matematicheskie metody fiziki [Mathematical methods of physics]. Moscow: Atomizdat, 1972, 400 p.
9. **Alekseev B.V., Kotelnikov V.A., Novikov V.N.** Nestatcionarnyi zond Lengmjura [Nonstationary Langmuir’s Probe]. *High Temperature*, 1980, vol. 18, no. 5, pp. 1062–1065. (In Russ.)
10. **Alifanov O.M., Cherepanov V.V.** Metodi issledovaniya i prognosirovaniya svoystv vysokoporistykh teplozhaschytnykh materialov [Methods for studying and predicting the properties of highly porous heat-protective materials]. Moscow: Moscow Aviation Institute, 2014, 264 p. (In Russ.)
11. **Godunov S.K., Ryabenkiy V.S.** Raznostnye skhemy. Vvedeniye v teoriyu. [Difference schemes. Introduction to theory]. Moscow: Nauka, 1977, 440 p. (In Russ.)
12. **Kuznetsov I.A., Saveliev A.A., Rasipuram S., Kuznetsov A.V., Broun A., Jasper W.** Development of active porous medium filters on plasma textiles . *AIP Conference Proceedings*, 2012, vol. 1453, iss. 1, pp. 265–270. URL: https://doi.org/10.1063/1.4711186
13. **Lev D., Myers R.M., Lemmer K.M., Kolbeck J., Koizumi H., Polzin K.** The technological and commercial expansion of electric propulsion. *Acta Astronautica*, 2019, vol. 159, pp. 213–227.
14. **Ohkawa Y.** Review of KITE – Electrodynamic tender experiment on the Japanese H-II Transfer Vehicle. *Acta Astronautica*, 2020, vol. 177, pp. 750–758. URL: https://doi.org/10.1016/jactaastro.2020.03.04
15. **Sanmartin J.R., Estes R.D.** The orbital-motion-limited regime of cylindrigal Langmuir probes. *Physics of Plasmas*, 1999, vol. 6, no. 1, pp. 395-405.
16. **Thissen H.** Plasma-based surface modification for the control of biointerfacial interactions. *Biosynthetic Polymers for Medical Applications. A volume in Woodhead Publishing Series in Biomaterials*. Ed by L. Poole-Warren, P. Martens, R. Green. Elsevier Science Direct, 2016. P. 129-144. URL: https://doi.org/10.1016/C2013-0-16462-8
17. **Giddey S., Badwal S.P.S., Kulkarni A., Munnings C.** A comprehensive review of direct carbon fuel cell technology. *Progress in Energy and Combustion Science*, 2012, vol. 38, no. 3, pp. 360–399. URL: https://doi.org/10.1016/j.pecs.2012.01.003
18. **Gay-Mimbrera J., Garcia M.C., Isla-Tejera B., Rodero–Serrano A., Garcia–Nieto A.V., Ruano J.** Clinical and Biological Principles of Cold Atmospheric Plasma Application in Skin Cancer. *Advanced in Therapy*, 2016, vol. 33, no. 6, pp. 894–909. URL: https://doi.org/10.1007/s12325-016-0338-1
19. **Freidman P.C., Fridman A.** Using cold plasma to treat warts in children. *Pediatric Dermatology*, 2020, vol. 37, no. 4, pp. 706–709. URL: https://doi.org/10.1111/pde.14180
20. **Chung S.S.M.** FDTD Simulations on radar cross section of metal cone and plasma covered metal cone. *Vacuum*, 2012, vol. 86, iss. 7, pp. 970–984. URL: https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2011.08.016
21. **Morfill G.E., Ivlev A.V.** Complex. plasmas: An interdisciplinary research field. *Reviews of Modern Physics*, 2009, vol. 81. no. 4, article number 1353.
22. **Merlino R.L.** Experimental Investigations of Dusty Plasmas. *AIP Conference Proceedings*, 2005, vol. 799, iss. 1, pp. 3–11. URL: https://doi.org/10.1063/1.2134567

Статья поступила в редакцию 07.09.2023; одобрена после рецензирования 10.10.2023; принята к публикации 16.10.2023.

The article was submitted on 07.09.2023; approved after reviewing on 10.10.2023; accepted for publication on 16.10.2023.