

---

УДК 629.78

## **Оптимизация траектории выведения космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту**

**Константинов М. С.\*, Мин Тейн**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ,  
Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*\*mail: mkonst@bk.ru*

### **Аннотация**

В данной работе рассматривается задача оптимизации траектории прямого выведения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой на рабочую гелиоцентрическую орбиту, позволяющую исследовать полярные области Солнца. Используя принципа максимума Понтрягина, решается задача оптимизации траектории выведения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой на рабочую гелиоцентрическую орбиту. Используются условия трансверсальности для оптимизации перелета на такую рабочую гелиоцентрическую орбиту, и обеспечивается выполнение этих условий при решении краевой задачи принципа максимума. Получено несколько типов экстремалей в сформулированной задаче и приведен их анализ. Представлены результаты анализа характеристик оптимальных траекторий выведения космического аппарата на целевую гелиоцентрическую орбиту.

**Ключевые слова:** космический аппарат, оптимальная траектория, исследование Солнца, принцип максимума, условия трансверсальности, ионные двигатели

### **Список сокращений**

РН – ракета – носитель

ХРБ – химический разгонный блок

КА – космический аппарат

ЭРДУ – электроракетная двигательная установка

### **Введение**

Исследование Солнца является одним из важнейших направлений фундаментальных и прикладных исследований, выполняемых с помощью научных космических аппаратов. В данной работе рассматривается задача оптимизации траектории прямого выведения (без использования гравитационных маневров) космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту, позволяющую исследовать полярные области Солнца. Эта орбита характеризуется относительно небольшим радиусом перигелия и относительно большим наклоном орбиты к плоскости эклиптики. Для выведения космического аппарата на такую гелиоцентрическую орбиту требуются большие значения характеристической скорости.

Предполагается, что ракета-носитель (РН) «Союз-2» выводит космический аппарат на низкую околоземную орбиту с космодрома Байконура. Химический разгонный блок «Фрегат» обеспечивает старт КА с этой орбиты и выход на гиперболическую траекторию отлета от Земли. После выхода на гиперболическую траекторию отлета от Земли химический разгонный блок «Фрегат» отделяется от космического аппарата. Электроракетная двигательная установка (на базе двух ионных двигателей типа «РИТ-22») обеспечивает перелет на рабочую гелиоцентрическую орбиту. Рабочая гелиоцентрическая орбита фиксируются фокальным параметром, константой энергии и наклоном орбиты. При этом оказываются заданными эксцентриситет рабочей орбиты, радиусы её перигелия и афелия. Долгота восходящего узла и аргумент перигея орбиты рассматриваются произвольными.

Задача оптимизации траектории выведения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой на заданную рабочую гелиоцентрическую орбиту за зафиксированное время проводится с использованием принципа максимума Понтрягина. Получены необходимые условия оптимальности (условия трансверсальности) для перелета на такую рабочую гелиоцентрическую орбиту и обеспечивается выполнение этих условий при решении краевой задачи принципа максимума.

В работе [1] представлены характеристики траектории прямого выведения космического аппарата с ионными двигателями на гелиоцентрическую рабочую орбиту с радиусом перигелия равным 60 радиусов Солнца, большой полуосью орбиты 0.7 астрономических единиц (АЕ) и наклоном к плоскости эклиптики 30 градусов. Новизна настоящего исследования связана с:

- использованием условий трансверсальности для перелета на рассматриваемую рабочую гелиоцентрическую орбиту при решении краевой задачи принципа максимума.

- С анализом проблемы многоэкстремальности сформулированной оптимизационной задачи и выработке рекомендаций по выбору глобального оптимума.

Представлены характеристики оптимальных траекторий выведения космического аппарата на гелиоцентрическую рабочую орбиту с ранее рассматриваемыми характеристиками: радиусом перигелия 60 радиуса Солнца, большой полуосью рабочей орбиты 0.7 астрономических единиц, а её наклонением к плоскости эклиптики 30 градусов.

## 1. Характеристики используемой транспортной системы

Анализируемая транспортная космическая система базируется на ракете-носителе «РН Союз-2», химическом разгонном блоке «Фрегат» и электроракетной двигательной установке типа «RIT-22». Считается, что космическая транспортная система на базе РН «РН Союз-2» при старте с космодрома «Байконур» может вывести на низкую околоземную орбиту КА общей массой 8250 кг. Характеристики ХРБ «Фрегат» взяты из материалов [2] НПО имени «С.А. Лавочкина». Основные характеристики ХРБ «Фрегат» представлены в таблице 1.

Таблица 1- Основные характеристики РБ «Фрегат»

1. Конечная масса, кг	980
2 Компоненты топлива окислитель горючее	Азотный тетраксид и несимметричный диметилгидразин
3. Рабочий запас топлива, максимальный, кг	5600
4. Удельный импульс двигателя,с	333,2

Основные характеристики ионного двигателя типа «RIT-22» взяты из материалов [3] и представлены в таблице 2.

Таблица 2 - Основные характеристики ионного двигателя типа «RIT-22»

Входная электрическая мощность	5 кВт
Тяга	150 мН
Удельный импульс	4500 сек
Рабочее тело	ксенон
Масса двигателя	7 кг

Напомним, что рассматриваемая двигательная установка использует два параллельно работающих двигателя типа РИТ-22.

## **2. Постановка задачи оптимизации траектории выведения КА на гелиоцентрическую орбиту с электроракетной двигательной установкой**

Рассматривается траектория прямого выведения на заданную рабочую гелиоцентрическую орбиту. То есть не предполагается использовать никаких гравитационных маневров на траектории гелиоцентрического перелета.

Базовая (промежуточная) круговая орбита ИСЗ предполагается известной своей высотой. Наклонение орбиты определяется космодромом запуска. Величина гиперболического избытка скорости является функцией используемой заправки топливом ХРБ и определяет массу КА в момент начала гелиоцентрического перелета. Таким образом, начальная масса КА на гелиоцентрическом перелете оказывается монотонно убывающей функцией величины гиперболического избытка скорости. Эта функция была записана аналитически в предположении импульсной аппроксимации активного участка полета при старте КА с базовой околоземной орбиты (гравитационными потерями этого маневра мы пренебрегали).

Направление и величина гиперболического избытка скорости рассматривались, как выбираемые оптимизируемые характеристики схемы перелета. Управление движением КА на участке гелиоцентрического перелета рассматривалось в виде трех оптимизируемых функций:

- программы включения – выключения двигателя на траектории гелиоцентрического перелета. При этом количество активных и пассивных участков (как и их протяженности) не ограничивалось;
- программы по углу тангажа на активных участках траектории;
- программы по углу рыскания на активных участках траектории.

Время перелета КА на рабочую гелиоцентрическую орбиту фиксировалось 5 лет. Критерием оптимальности рассматривалась масса КА, доставляемая на рабочую гелиоцентрическую орбиту. Она максимизировалась.

## **3. Уравнения движения**

Траектория гелиоцентрического перелета исследовалась в прямоугольной гелиоцентрической эклиптической системе координат. Движение КА на гелиоцентрическом

участке траектории рассматривается под действием двух сил: гравитационной силы притяжения КА Солнцем и силы тяги электроракетной двигательной установки. Величина тяги и скорость истечения, включенной электроракетной двигательной установки считаются постоянными. Гравитационное поле притягивающего центра будем считать центральным ньютоновским. Предполагается возможность многократного включения и выключения двигательной установки. При этом уравнение движения КА имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\delta T}{m} \mathbf{u} \\ -\frac{\delta T}{w} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Где,  $\mathbf{X} = [\mathbf{r} \quad \mathbf{V} \quad m]^T$ ,  $\mathbf{r} = [x \quad y \quad z]^T$ ,  $\mathbf{V} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$ .

$\mathbf{X}$  – вектор фазового состояния КА,  $\mu$  - гравитационный параметр Солнца,  $T$  – величина тяги ЭРДУ,  $m$  – масса КА,  $w$  – скорость истечения ЭРДУ,  $\mathbf{u}$  – орт вектора тяги ЭРДУ,  $\mathbf{r}$  – радиус вектор КА,  $\mathbf{V}$  – вектор его гелиоцентрической скорости,  $\delta$  - функция включения-выключения двигателя.

#### 4. Оптимальное управление на гелиоцентрическом перелете

Задача оптимизации траектории выведения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой на заданную гелиоцентрическую орбиту за зафиксированное время анализируется с использованием принципа максимума Понтрягина [4,5]. Гамильтониан задачи оптимального управления имеет вид:

$$H = \lambda_r^T \mathbf{V} + \lambda_v^T \left[ -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\delta T}{m} \mathbf{u} \right] - \lambda_m \frac{\delta T}{w} \quad (2)$$

Где,  $\lambda_r = [\lambda_x \quad \lambda_y \quad \lambda_z]^T$  - вектор сопряженных к радиусу вектору КА переменных,  $\lambda_v = [\lambda_{vx} \quad \lambda_{vy} \quad \lambda_{vz}]^T$  - вектор сопряженных к вектору скорости переменных и  $\lambda_m$  – сопряженная к массе КА переменная. Анализ максимума гамильтониана по анализируемым управлениям дает возможность найти оптимальные законы управления движением КА. В частности, оказывается, что орт вектора тяги двигателя определяется вектором сопряженных к вектору скорости переменных:

$$\mathbf{u} = \frac{\lambda_v}{\lambda_v} \quad (3)$$

При этом гамильтониан можно переписать в следующем виде:

$$H = \lambda_r^T \mathbf{V} + \lambda_v^T \left[ -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \right] + \delta S T. \quad (4)$$

Где  $S = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{w}$  функция переключения.

Уравнения оптимального движения КА имеют вид:

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}; \quad (5-1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}. \quad (5-2)$$

Ниже представлена система уравнений оптимального движения КА на гелиоцентрическом участке траектории в безразмерных переменных. При этом за единицу расстояния принимается одна астрономическая единица (АЕ), за единицу скорости принимается местная круговая скорость относительно Солнца на удалении от Солнца в 1 АЕ. За единицу ускорения принимается ньютоновское ускорение от Солнца на расстоянии в 1 АЕ. За единицу массы, как правило, принимается масса КА в начале гелиоцентрической траектории (хотя в некоторых случаях мы используем другие варианты). За единицу тяги принимается тяга, обеспечивающая ускорение, равное одной безразмерной единице, единичной массе КА.

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad (6-1)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y; \quad (6-2)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z; \quad (6-3)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{x}{r^3} + \frac{\delta \lambda_{vx} T}{m \lambda_V}; \quad (6-4)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{y}{r^3} + \frac{\delta \lambda_{vy} T}{m \lambda_V}; \quad (6-5)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{z}{r^3} + \frac{\delta \lambda_{vz} T}{m \lambda_V}; \quad (6-6)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\delta T}{w}; \quad (6-7)$$

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = \frac{\lambda_{vx}}{r^3} - \frac{3x}{r^5} (\lambda_{vx} x + \lambda_{vy} y + \lambda_{vz} z); \quad (6-8)$$

$$\frac{d\lambda_y}{dt} = \frac{\lambda_{vy}}{r^3} - \frac{3y}{r^5} (\lambda_{vy} x + \lambda_{vx} y + \lambda_{vz} z); \quad (6-9)$$

$$\frac{d\lambda_z}{dt} = \frac{\lambda_{vz}}{r^3} - \frac{3z}{r^5} (\lambda_{vz} x + \lambda_{vx} y + \lambda_{vy} z); \quad (6-10)$$

$$\frac{d\lambda_{vx}}{dt} = -\lambda_x; \quad (6-11)$$

$$\frac{d\lambda_{vy}}{dt} = -\lambda_y; \quad (6-12)$$

$$\frac{d\lambda_{vz}}{dt} = -\lambda_z; \quad (6-13)$$

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{\delta T \lambda_V}{m^2} \quad (6-14)$$

Где,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \lambda_v = \sqrt{\lambda_{vx}^2 + \lambda_{vy}^2 + \lambda_{vz}^2}$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } S > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

## 5. Краевая задача и условия трансверсальности

В данной работе использовался метод грависфер нулевой протяженности [6]. То есть начальное положение КА относительно Солнца (положение КА в момент выхода из грависферы Земли) считалось совпадающим с положением Земли относительно Солнца в момент старта КА с базовой околоземной орбиты. Скорость КА в начальной точке гелиоцентрической траектории рассматривалась, как векторная сумма гелиоцентрической скорости Земли (в момент старта КА с базовой околоземной орбиты) и вектора гиперболического избытка скорости КА относительно Земли. Направление гиперболического избытка скорости (в соответствии с условиями оптимальности) выбирается коллинеарным базису вектору в начальной точке гелиоцентрической траектории. Величина гиперболического избытка скорости перебирается. Начальная масса КА рассматривается как масса КА после отделения ХРБ «Фрегат». При этом фазовый вектор начального состояния имеет вид

$$\mathbf{X}(to) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E(to) \\ \mathbf{V}_E(to) + V_\infty^+ \frac{\lambda_v}{\lambda_v} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Конечная гелиоцентрическая орбита (орбита назначения) фиксируются фокальным параметром, константой энергии и наклонением орбиты.

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - p_f \\ V^2 - \frac{2}{r} - h_f \\ \sigma_z - \sqrt{p_f} \cos(i_f) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Где,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – безразмерные компоненты вектора площади,  $p_f$  – заданный безразмерный фокальный параметр орбиты,  $h_f$  – заданная безразмерная константа энергия орбиты и  $i_f$  – заданное наклонение орбиты. Напомним, что компоненты вектора площадей связаны с компонентами радиуса вектора КА и вектора его скорости следующим образом:

$$\sigma_x = yv_z - zv_y, \sigma_y = zv_x - xv_z, \sigma_z = xv_y - yv_x \text{ и } V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

В конечной точке вектор  $\boldsymbol{\Psi}$  в выражении (8) должен быть равен нулю (заметим, что в выражении использованы безразмерные переменные).

Условия трансверсальности в граничной точке – есть условия на значения сопряженных переменных к фазовым переменным в этой точке. Ниже представлен общий алгоритм для получения этих условий трансверсальности.

Вводим вектор постоянных множителей Лагранжа ( $\mathbf{v}$ ). Тогда вектор сопряженных переменных в рассматриваемой точке удовлетворяет следующему равенству:

$$\begin{pmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \\ \lambda_{vx} \\ \lambda_{vy} \\ \lambda_{vz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} v_3 \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} v_3 \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} v_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} v_2 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} v_3 \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_x} v_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_x} v_2 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial v_x} v_3 \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_y} v_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_y} v_2 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial v_y} v_3 \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_z} v_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial v_z} v_2 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial v_z} v_3 \end{pmatrix} \quad (9-1)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \\ \lambda_{vx} \\ \lambda_{vy} \\ \lambda_{vz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_z v_y - \sigma_y v_z) 2v_1 + \frac{2xv_2}{r^3} + v_y v_3 \\ (\sigma_x v_z - \sigma_z v_x) 2v_1 + \frac{2yv_2}{r^3} - v_x v_3 \\ (\sigma_y v_x - \sigma_x v_y) 2v_1 + \frac{2zv_2}{r^3} \\ (z\sigma_y - y\sigma_z) 2v_1 + 2v_x v_2 - yv_3 \\ (x\sigma_z - z\sigma_x) 2v_1 + 2v_y v_2 + xv_3 \\ (y\sigma_x - x\sigma_y) 2v_1 + 2v_z v_2 \end{pmatrix} \quad (9-2)$$

Неизвестные множители Лагранжа удастся выразить из полученных первых трёх из приведенных 6 равенств (так как они линейны относительно них) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\sigma_y v_x - \sigma_x v_y) & \frac{2z}{r^3} & 0 \\ 2(x\sigma_z - z\sigma_x) & 2v_y & x \\ 2(y\sigma_x - x\sigma_y) & 2v_z & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_z \\ \lambda_{vy} \\ \lambda_{vz} \end{pmatrix} \quad (10)$$

После этого можно получить граничные соотношения, которые не включают множители Лагранжа. Эти соотношения и есть условия трансверсальности, и оптимизационная проблема сводится к краевой задаче 6-ого порядка, где граничные условия в конечной точке имеют вид:



$$f(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - p_f \\ V^2 - \frac{2}{r} - h_f \\ \sigma_z - \sqrt{p_f} \cos(i_f) \\ (\sigma_z v_y - \sigma_y v_z) 2v_1 + \frac{2xv_2}{r^3} + v_y v_3 - \lambda_x \\ (\sigma_x v_z - \sigma_z v_x) 2v_1 + \frac{2yv_2}{r^3} - v_x v_3 - \lambda_y \\ (z\sigma_y - y\sigma_z) 2v_1 + 2v_x v_2 - yv_3 - \lambda_{vx} \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

Неизвестными ( $\mathbf{z}$ ) этой краевой задачи являются 6 сопряженных переменных в начальной точке гелиоцентрической траектории. Уменьшение количества неизвестных с 7 до 6 связано с однородности системы дифференциальных уравнений для сопряженной системы (уравнения 6-8...6-14). Как известно, что решение краевой задачи (нахождение этих 6 сопряженных переменных в начальной точке гелиоцентрической траектории) составляет основную трудность при применении принципа максимума. Трудности решения такой краевой задачи носят принципиальный характер и связаны, в частности, с вопросами существования и неединственности решения полученной системы нелинейных уравнений (11). Многоэкстремальный характер полученной краевой задачи (т.е. неединственность решения системы нелинейных уравнений) значительно осложняет проблему поиска оптимальной траектории выведения КА на рабочую гелиоцентрическую орбиту.

Методические сложности связаны с вычислительной неустойчивостью и с ограниченностью области сходимости, используемых численных методов решения такой системы уравнений. Методы оптимизации, основанные на малой вариации параметров, позволяют найти только локальное решение задачи. Поэтому требуются найти все другие возможные локальные решения, и после этого сравнить все полученные решения для выбора наилучшего решения. Этот подход, несмотря на его громоздкость и не строгость чаще всего является одним из самых надежных подходов для нахождения глобального оптимума. Большинство локальных решений можно найти в результате параметрических исследований путем вариации параметров в широком диапазоне их изменения. В данной работе найдены несколько экстремалей решения поставленной краевой задачи. Ниже представлен результат анализа полученных 9 различных экстремалей решений поставленной оптимизационной задачи.

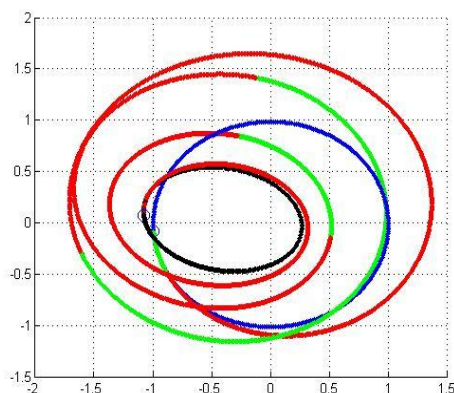
## 6. Анализ полученных результатов

Приведем численные результаты оптимизации для задачи прямого выведения КА на заданную гелиоцентрическую рабочую орбиту, характеризующуюся радиусом перигелия (равным 60 радиусов Солнца), большой полуось орбиты (равной 0.7 астрономических единиц) и наклоном к плоскости эклиптики (30 градусов). Дата старта КА считается заданной -25 марта 2016г. Время перелета на заданную гелиоцентрическую орбиту фиксируется пятью годами. Гиперболический избыток скорости при отлете от Земли рассматривается равным 1.8 км/с. При этом начальная масса КА равняется 1959.4 кг.

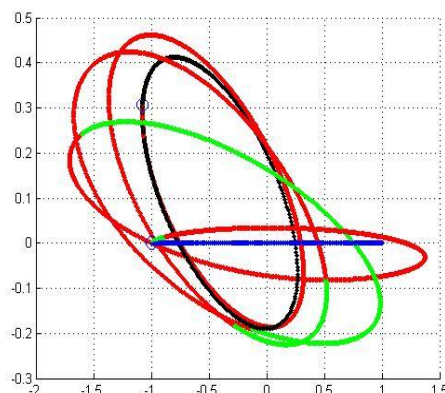
На рисунке 1 представлена траектория гелиоцентрического перелета КА на целевую рабочую гелиоцентрическую орбиту, названную экстремалью первого типа. Слева представлена проекция гелиоцентрической траектории на плоскость эклиптики, справа на плоскость  $xz$  эклиптической системы координат.

На рисунке 1 (как и на последующих шести рисунках) красной линией обозначены активные участки траектория, зеленой линией обозначены пассивные участки траектории. Орбита Земли обозначена, синей линией. Черной линией обозначена конечная рабочая орбита.

Траектория КА имеет три пассивных и три активных участка. Количество витков КА вокруг Солнца оказалось немного меньше 4-х витков. При этом конечная масса КА равняется 1133.7 кг и требуемая масса ксенона равна 825.6 кг. Долгота восходящего узла и аргумент перигелия конечной орбиты оказывается равным 146.7 градусов и 35 градусов соответственно.



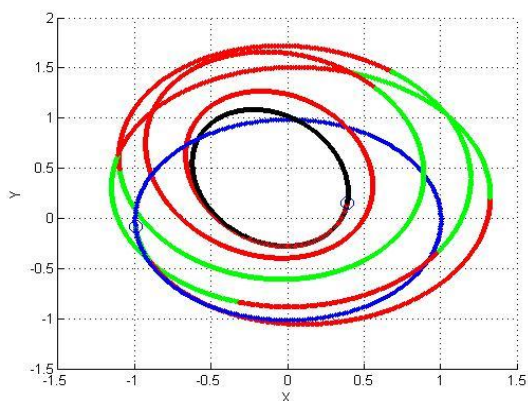
(а) проекция на плоскость эклиптики  $xу$



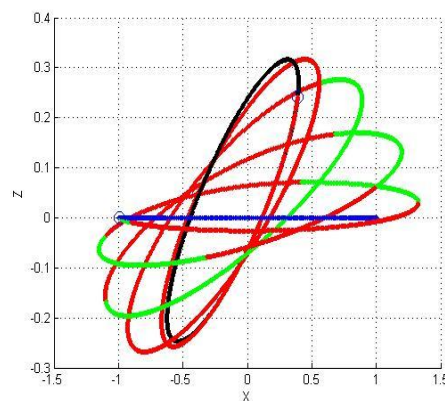
(б) проекция на плоскость  $xz$

Рисунок 1. Гелиоцентрическая траектория перелета (экстремаль первого типа).

На рисунке 2 представлена траектория перелета КА на целевую рабочую гелиоцентрическую орбиту, названная экстремалью 2-го типа. Траектория КА имеет 4 пассивных и 5 активных участков. Количество витков КА вокруг Солнца оказалось немного больше 4.5 витков. При этом конечная масса КА равняется 1239 кг и требуемая масса ксенона равна 720.3 кг. Долгота восходящего узла и аргумент перигелия конечной орбиты получаются 66.2 градусов и 82.1 градусов соответственно.



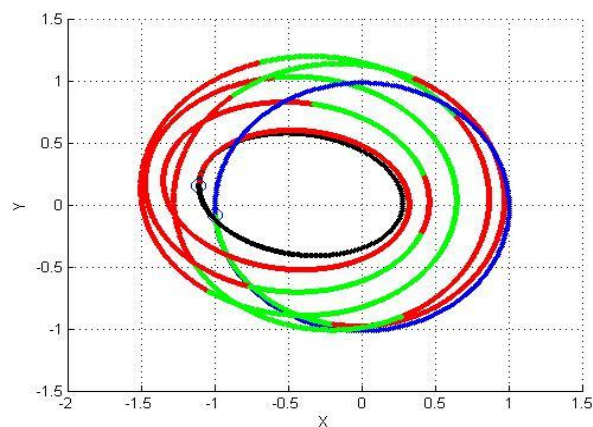
(а) проекция на плоскость эклиптики  $xy$



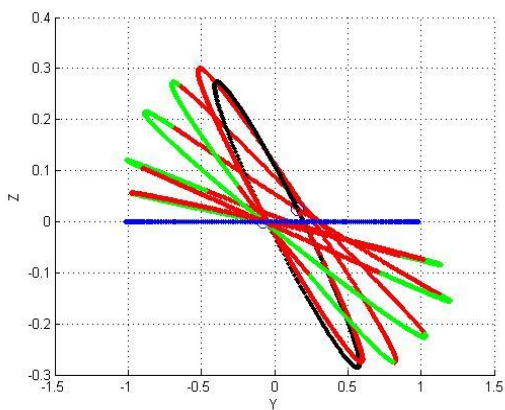
(б) проекция на плоскость  $xz$

Рисунок 2. Гелиоцентрическая траектория перелета (экстремаль второго типа).

На рисунке 3 представлена гелиоцентрическая траектория перелета КА на целевую рабочую орбиту, названная экстремалью 3-го типа. На гелиоцентрической траектории КА делает примерно пять витков вокруг Солнца. Траектория КА имеет 7 пассивных и 7 активных участков. При этом конечная масса КА равняется 1277.4 кг и требуемая масса ксенона равна 681.9 кг. Долгота восходящего узла и аргумент перигелия конечной орбиты получаются 169.7 градусов и 8.7 градусов соответственно.



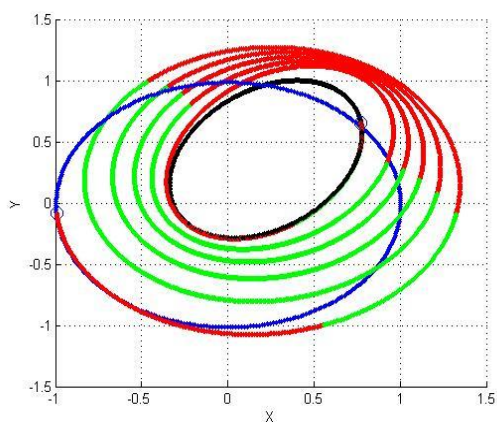
(а) проекция на плоскость эклиптики  $xy$



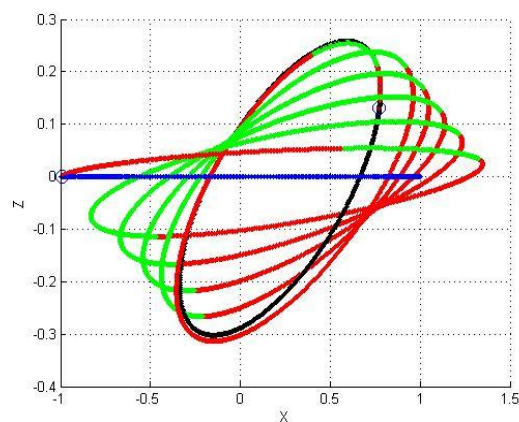
(б) проекция на плоскость  $yz$

Рисунок 3. Гелиоцентрическая траектория перелета (экстремаль 3-его типа).

На рисунке 4 представлена траектория перелета КА на целевую рабочую гелиоцентрическую орбиту, названная экстремалью 4-го типа. Траектория КА имеет 5 пассивных и 6 активных участков. КА делает больше пяти с половиной витков вокруг Солнца. При этом конечная масса КА равняется 1317.9 кг, требуемая масса ксенона равна 641.4 кг. Долгота восходящего узла и аргумент перигелия конечной орбиты получаются 126.8 градусов и 109.2 градусов соответственно.



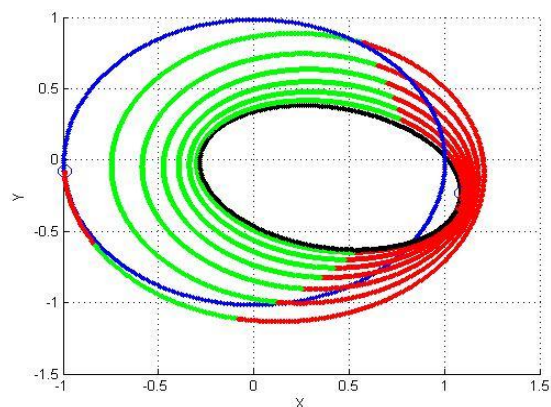
(а) проекция на плоскость эклиптики  $xy$



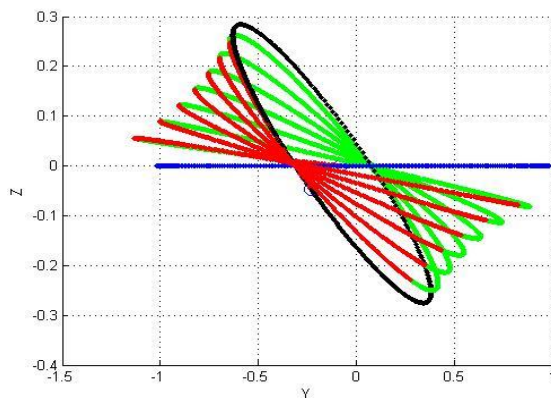
(б) проекция на плоскость  $xz$

Рисунок 4. Гелиоцентрическая траектория перелета (экстремаль 4-ого типа).

На рисунке 5 представлена траектория перелета КА на целевую рабочую гелиоцентрическую орбиту, названная экстремалью 5-го типа. Траектория КА имеет 7 пассивных и 8 активных участков. КА делает немного меньше шести с половиной витков вокруг Солнца. При этом конечная масса КА равняется 1346.8 кг и требуемая масса ксенона равна 612.5 кг. Долгота восходящего узла и аргумент перигелия конечной орбиты получаются 163.8 градусов и -166 градусов соответственно.



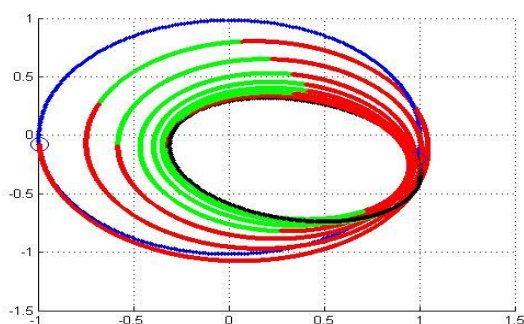
(а) проекция на плоскость эклиптики  $xy$



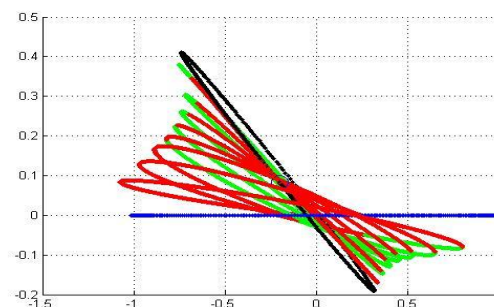
(б) проекция на плоскость  $yz$

Рисунок 5. Гелиоцентрическая траектория перелета (экстремаль 5-ого типа).

На рисунке 6 представлена траектория перелета КА на целевую рабочую гелиоцентрическую орбиту, названная экстремалью 6-го типа. На гелиоцентрической траектории перелета 8 активных участков, разделенных 7 пассивными участками. КА делает семь с половиной витков вокруг Солнца. При этом конечная масса КА равняется 1216.5 кг и требуемая масса ксенона равна 742.8 кг. Долгота восходящего узла и аргумент перигелия конечной орбиты получаются 176 градусов и -162 градусов соответственно.



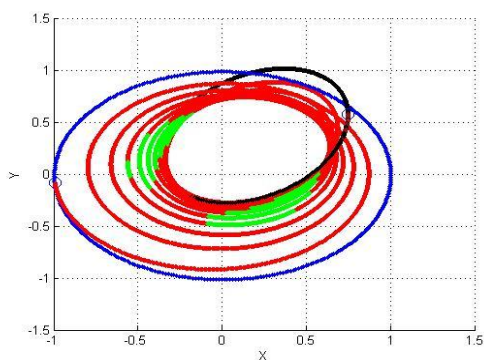
(а) проекция на плоскость эклиптикиху



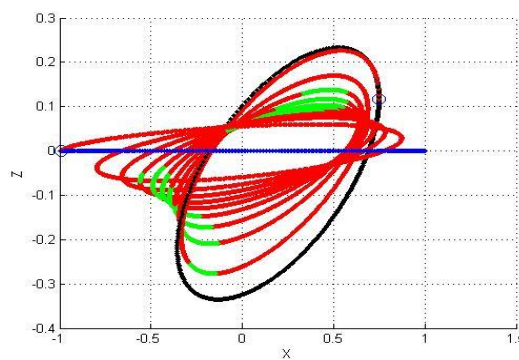
(б) проекция на плоскостьyz

Рисунок 6. Гелиоцентрическая траектория перелета (экстремаль 6-ого типа).

На рисунке 7 представлена траектория перелета КА на целевую рабочую гелиоцентрическую орбиту, названная экстремалью 7-го типа. КА делает больше девяти витков вокруг Солнца. На траектории перелета 12 активных участков, разделенных 11 пассивными участками. При этом конечная масса КА равняется 1023.9 кг и требуемая масса ксенона равна 935.4 кг. Долгота восходящего узла и аргумент перигелия конечной орбиты получаются 130.1 градусов и 119.1 градусов соответственно.



(а) проекция на плоскость эклиптикиху



(б) проекция на плоскостьxz

Рисунок 7. Гелиоцентрическая траектория перелета (экстремаль 7-ого типа).

Таким образом, мы привели 7 экстремалей для рассматриваемой задачи. После проведенного анализа нам стало понятно, что приведенными экстремальями не

ограничивается список существующих экстремалей. То есть существуют и другие экстремали.

Анализ полученных экстремалей показывает, что тип экстремали определяется (характеризуется) угловой дальностью гелиоцентрического перелета, количеством активных и пассивных участков траектории. Можно считать доказанным, что наилучшая экстремаль (на ней обеспечивается максимальная масса на рабочей орбите) имеет некоторую среднюю угловую дальность полета и соответствующее среднее число активных и пассивных участков. Такой глобальной экстремалью оказалась 5-ая экстремаль. На этой экстремали КА делает 6 с половиной оборотов вокруг Солнца. На ней 8 активных участков траектории, разделенных 7 пассивными участками. Первым участком является небольшой по продолжительности активный участок.

Объяснить управление движением на полученной экстремали достаточно просто. Действительно, направление гиперболического избытка скорости отлета от Земли и направление тяги на первом активном участке (она разгонная и увеличивает гелиоцентрическую скорость КА) обеспечивают увеличение величины радиуса вектора КА относительно Солнца. После небольшого по продолжительности активного участка КА, двигаясь по пассивной траектории, достигает афелия орбиты, который практически совпадает с нисходящим узлом оскулирующей орбиты КА. Далее все активные участки многовиткового перелета располагаются только в районах афелия оскулирующей орбиты, линия узлов которой совпадает с линией апсид. Направление тяги выбирается так, чтобы на этих участках достаточно резко тормозить КА (чтобы уменьшить перигелий орбиты) и одновременно эффективно увеличивать наклонение орбиты (за счет относительно значительного по модулю угла рыскания). Максимальное значение угла рыскания на оскулирующих витках траектории перелета монотонно увеличивается с примерно 40 градусов (на первом витке траектории КА вокруг Солнца) до 75 градусов (на последнем витке траектории). Такое изменение оптимального значения угла рыскания связано с тем, что каждый последующий виток траектории имеет меньшую орбитальную энергию, меньшую скорость в окрестности афелия оскулирующей орбиты, что способствует эффективному изменению направления скорости КА, которое обеспечивает изменение наклонения орбиты.

Есть определенные надежды, что эта экстремаль является глобальной (самой лучшей по рассматриваемому массовому критерию). В дальнейшем эту экстремаль будем называть оптимальным решением или оптимальной траекторией.

Увеличение или уменьшение угловой дальности полета приводят к менее рациональной структуре управления перелетом и следовательно к большим затратам массы рабочего тела. Например, при уменьшении угловой дальности перелета на два витка (экстремаль 2-ого типа), появляется необходимость изменять наклонение орбиты не только в районе оскулирующего афелия, но и в районе перигелия и вдали от узловых точек оскулирующей траектории (рисунок 2). При этом увеличивается продолжительность активных участков траектории и уменьшается продолжительность пассивных участков. Увеличиваются гравитационные потери в скорости из-за того, что возрастает угол наклона скорости к местному горизонту на активных участках траектории. Всё это приводит к увеличению затрат характеристической скорости, к увеличению затрат топлива.

Ясно, что существует некоторая минимальная дальность гелиоцентрического перелета, при реализации которого траектория КА становится полностью активной. При этом требуемые затраты топлива в рассматриваемой проблеме становятся очень большими 1072.6 кг. Масса КА на рабочей орбите мала – 886.7 кг

Интересно и то, что увеличение угловой дальности полета (от оптимальной угловой дальности, которую мы получили для экстремали 5-ого типа) приводит к аналогичному увеличению характеристической скорости маневра и увеличению требуемой массы рабочего тела для ЭРДУ. Так увеличение угловой дальности на один виток (экстремаль 6-ого типа) приводит к необходимости использовать траекторию перелета, оскулирующая большая ось которой меньше, чем оптимальная (нужно успеть сделать лишний виток вокруг Солнца за фиксированное время). Ухудшается возможность эффективно изменять наклонение орбиты (из-за уменьшения радиуса афелия орбиты). Уменьшается протяженность пассивных участков траектории, но увеличивается протяженность активных участков траектории. Последнее приводит к большим углам наклона скорости к местному горизонту на активных участках траектории, что увеличивает гравитационные потери в скорости, увеличивает требуемый расход рабочего тела для ЭРДУ.

Поэтому существует некоторая максимальная дальность гелиоцентрического перелета, при реализации которого траектория КА становится полностью активной. Как и при минимальной угловой дальности требуемые затраты топлива в рассматриваемой проблеме становятся очень большими 1072.6 кг.

Анализ влияния даты старта. Чтобы выяснить, как дата старта влияет на массовые характеристики проекта, мы варьировали её в пределах одного года. Оказалось, что изменение даты старта приводит к очень небольшому изменению требуемого для перелета

рабочего тела и, следовательно, к небольшому изменению массы КА на рабочей орбите (менее чем на 10 кг). Малое изменение затрат на перелет объясняется небольшим эксцентриситетом Земной орбиты.

Анализ влияния величины гиперболического избытка скорости. Более интересные выводы были получены при варьировании величины гиперболического избытка скорости отлета от Земли. Гиперболический избыток варьировался в диапазоне (1...2 км/сек) с шагом 100 м/сек. Некоторые результаты такого варьирования представлены на рисунках 8 и 9.

На рисунке 9 представлены функции переключения электроракетной двигательной установки как функции времени перелета на рабочую орбиту для пяти значений гиперболического избытка скорости отлета от Земли -  $V_{inf} = 1, 1.3, 1.5, 1.8, 2$  км/с.

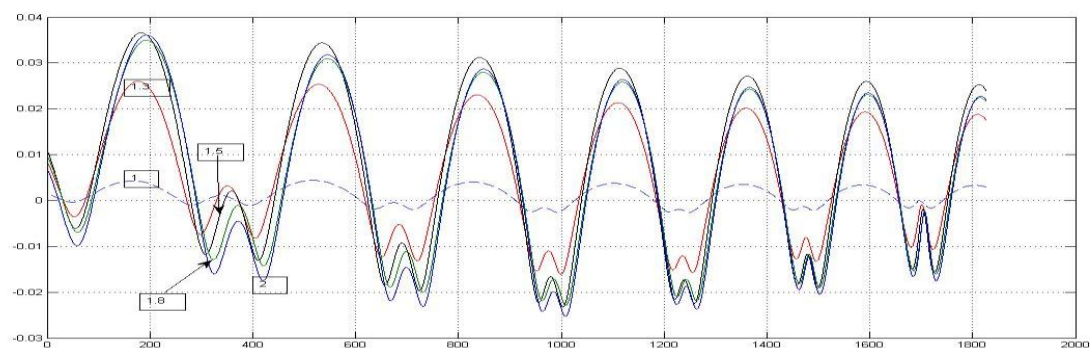


Рисунок 8 – Функции переключения на оптимальной траектории гелиоцентрического перелета на целевую орбиту с радиусом перигелия  $60RS$ , большой полуосью  $0.7$  а.е., наклоном к плоскости эклиптики  $30^\circ$  для пяти значений гиперболического избытка скорости отлета от Земли ( $V_{inf} = 1, 1.3, 1.5, 1.8$  и  $2$  км/с). На графике значения гиперболического избытка скорости показаны в квадратиках.

Напомним что, когда функция переключения больше нуля, ЭРДУ работает, и когда она меньше нуля, ЭРДУ выключается и траектория КА оказывается пассивной. Анализ приведенных зависимостей показывает, что для всех рассмотренных величин гиперболического избытка скорости траектории перелета начинаются и заканчиваются пассивными участками. Управление принципиально отличным оказывается только на втором витке траектории. Если гиперболический избыток скорости большой ( $1.8...2.0$  км/с), то на втором витке траектории существует только один активный участок (в районе афелия орбиты). Если гиперболический избыток скорости относительно мал ( $1.0...1.5$  км/с), то на втором витке траектории существует два активных участка (один в районе афелия, другой – в районе перигелия орбиты).



Описанное свойство хорошо иллюстрируется зависимостями, представленными на рисунке 9. На нем показано гелиоцентрическое удаление КА как функции времени перелета. Красными линиями на рисунке 9 обозначены участки работы ЭРДУ и зелеными линиями обозначены пассивные участки. Анализ показывает, что при небольшой величине гиперболического избытка скорости (до 1.7 км/сек) на траектории второго витка траектории КА существует небольшой активный участок, расположенный в районе перигелия оскулирующей орбиты КА. На нем ЭРДУ увеличивает скорость КА, чтобы «поднять» афелий оскулирующей орбиты. Если величина гиперболического избытка скорости равна или больше 1.8 км/сек, этот активный участок исчезает. Как будет показано ниже, конечная масса КА при увеличении гиперболического избытка скорости (в рассматриваемом диапазоне этого избытка) монотонно уменьшается (из-за уменьшения начальной массы КА), несмотря на уменьшение при этом требуемой массы ксенона для ЭРДУ.

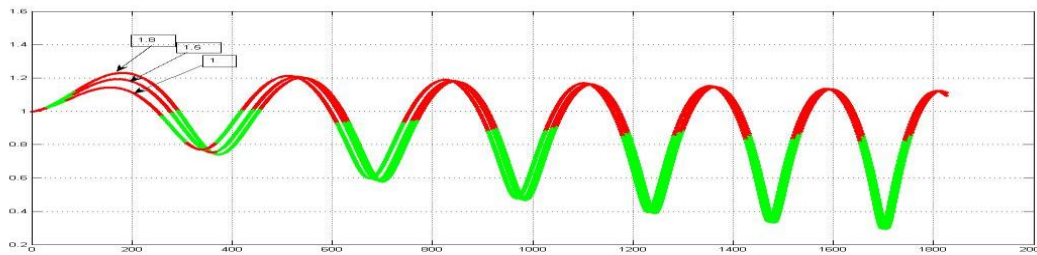


Рисунок 9 – Гелиоцентрическое удаление КА на оптимальной траектории перелета на целевую орбиту для трёх значений гиперболического избытка скорости отлета от Земли ( $V_{inf} = 1, 1.5$  и  $1.8$ ). На графике значения гиперболического избытка скорости показаны в квадратиках.

На рисунке 10 представлены программы изменения угла тангажа и угла рыскания на активных участках траектории как функции времени перелета при начальном гиперболическом избытке скорости 1.8 км/с. Красными линиями обозначена программа изменения угла рыскания, и синими линиями обозначена программа изменения угла тангажа на активных участках траектории.

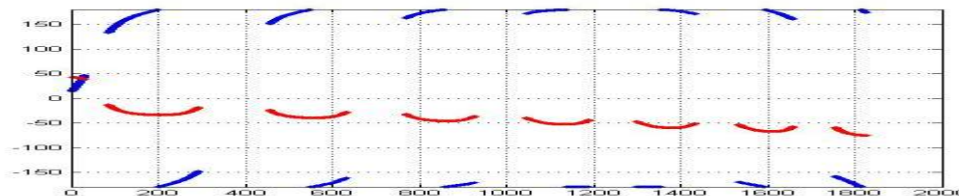


Рисунок 10 – Углы тангажа (синяя линия, градусы) и рыскание (красная линия, градусы) как функция времени перелета [сутки]

Анализ приведенных зависимостей показывает, что оптимальные значения угла рыскания (по модулю) увеличиваются от витка к витку траектории и находятся в диапазоне 10..80 градусов. На большей части траектории угол тангажа близок к 180 градусов, что обеспечивает эффективное торможение КА на активных участках траектории.

В таблице 3 приведены результаты оптимизации траектории перелета при варьировании величины гиперболического избытка скорости при отлете от Земли для даты старта 25.03.2016. Во 2-ом столбце таблицы приведена начальная масса КА  $M_0$ . В третьем столбце приведена масса КА на орбите назначения, в последнем столбце – масса требуемого на перелет ксенона.

Анализ результатов, помещенных в Таблице 3, показывает, что максимальная масса КА 1367,2 кг на орбите назначения достигается при минимально рассмотренной величине гиперболического избытка скорости 1 км/с.

Таблица 3. Массовые характеристики проекта как функции величины гиперболического избытка скорости при отлете от Земли

Vinf(km/s)	$M_0$ (kg)	$M_f$ (kg)	$M_{\text{Xenon}}$ (kg)
1	2051,4	1367,2	684,3
1,1	2042,7	1366,5	676,1
1,2	2033,7	1365,3	667,7
1,3	2022,7	1363,6	659,1
1,4	2011,5	1361,3	650,3
1,5	1999,6	1358,4	641,2
1,6	1986,9	1355,0	631,9
1,7	1973,5	1351,2	622,3
1,8	1959,3	1346,8	612,5
1,9	1944,5	1341,7	602,8
2	1928,9	1335,9	593

Казалось бы, что анализируя массовые критерии, следовало исследовать меньшие значения гиперболического избытка скорости. Но мешает этому следующее обстоятельство: существуют ограничения на расстояние до Солнца траектории выведения КА на рабочую орбиту (их выдвигают проектанты КА и разработчики научной аппаратуры).

Ограничение сверху и снизу на расстояние до Солнца на активных участках траектории связано с обеспечением энергией ЭРДУ для случая использования солнечных батарей и тепловой защитой систем КА. Если полагать, что допустимый диапазон удалений от Солнца 0.8 АЕ...1.25 АЕ, то целесообразно рассмотреть оптимальную траекторию с величиной гиперболического избытка скорости равной 1.8 км/с. На ней нет активных

участков в районах оскулирующего перигелия. Именно поэтому этот случай был рассмотрен подробно. Понятно, что можно усложнить постановку задачи и обеспечить удовлетворение (фазовых) ограничений при меньших величинах гиперболического избытка скорости. Но целесообразность такого усложнения неочевидна. Из данных, помещенных в таблицу 3 видно, что предельный выигрыш от такой постановки не более двух десятков килограмм в конечной массе КА. Действительно, масса КА на рабочей орбите при гиперболическом избытке скорости в 1 км/сек всего на 20 кг больше массы КА при величине гиперболического избытка в 1.8 км/сек. Эти 20 кг и есть предельный выигрыш оптимизации величины гиперболического избытка скорости.

Отметим дополнительное преимущество рассматриваемого варианта схемы выведения. На предлагаемой траектории выведения КА нет активных участков в районах перигелия траектории выведения. Поэтому можно использовать бортовую электрическую мощность на обеспечения работы научной аппаратуры в районах оскулирующих перигелиев траектории выведения КА на рабочую орбиту и с близкого расстояния изучать Солнце.

Анализ влияния величины наклона рабочей орбиты. Проанализируем массовые характеристики проекта как функцию наклона рабочей орбиты. В таблице 4 приведена величина доставляемой массы КА на рабочую орбиту как функции наклона конечной орбиты. При этом гиперболический избыток скорости рассматривается равным 1.8 км/с,.

Таблица 4. Масса КА на рабочей орбите как функция наклона конечной орбиты

Наклонение конечной орбиты (град)	Конечная масса КА (кг)
20	1467,7
21	1457,2
22	1446,2
23	1434,8
24	1423,1
25	1411,1
26	1398,8
27	1386,3
28	1373,4
29	1360,2
30	1346,8

Таблица 4 показывает, что для увеличения наклона конечной орбиты на один градус приходится увеличивать массу требуемого ксенона для ЭРДУ примерно на 12-13 кг. Поэтому, если разработчиков научной аппаратуры проекта устраивает наклонение рабочей орбиты к

плоскости эклиптики в 20 градусов, то есть возможность увеличить массу КА на рабочей орбите на 121 кг (за счет уменьшения требуемой массы ксенона).

## 7. Заключение

Проанализирована задача оптимизации траектории прямого выведения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой на рабочую гелиоцентрическую орбиту, позволяющую исследовать полярные области Солнца. Получены необходимые условия оптимальности для перелета на такую рабочую гелиоцентрическую орбиту и обеспечивается выполнение этих условий при решении краевой задачи. Приведены результаты анализа многоэкстремальности в проанализированной задаче. Найдено 7 типов экстремалей, проанализированы их свойства, Представлены характеристики оптимальной траектории прямого выведения космического аппарата на целевую гелиоцентрическую орбиту.

## Библиографический список

1. Х.В. Лёб, В.Г. Петухов, Г.А. Попов. Гелиоцентрические траектории космического аппарата с ионными двигателями для исследования Солнца. Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск № 42, 2011г.
2. <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=24275>
3. Официальный сайт НПО имени «С.А. Лавочкина» доступен на ссылке
4. [http://www.laspace.ru/rus/fregat\\_construction.php](http://www.laspace.ru/rus/fregat_construction.php)
5. Официальный сайт EADSASTRIUM доступен на ссылке
6. <http://cs.astrium.eads.net/sp/spacecraft-propulsion/ion-propulsion/index.html>
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд., М. Наука, 1983г.
8. Г.Л. Гродзовский, Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев. Механика космического полета (проблемы оптимизации). изд., М. Наука, 1975г.
9. М.С. Константинов, Е.Ф. Каменков, Б.П. Перелыгин, В.К. Безвербый; Под.ред. В.П. Мишина, Механика космического полета. М.: Машиностроение, 1989г.