УДК 536.2

Автомодельные процессы теплопереноса в прозрачном для излучения твердом теле с поглощающим включением в виде шарового слоя

А.В. Аттетков, И.К. Волков, К.А. Гайдаенко

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, 105005, Россия
e-mail: fn2@bmstu.ru; kseniyagaydaenko@gmail.com

DOI: 10.34759/tpt-2020-12-5-219-224

Поступила в редакцию 27.04.2020
После доработки 28.05.2020
Принята к публикации 28.05.2020

Рассмотрена задача определения температурного поля изотропного твердого тела с поглощающим проникающее излучение включением в виде шарового слоя. Анализируемая математическая модель процесса теплопереноса в изучаемой системе базируется на гипотезе, что поглощающее включение является термически тонким, т.е. на реализации идеи «сосредоточенная емкость», и представляет собой смешанную задачу для уравнения в частных производных второго порядка параболического типа со специфическим краевым условием, фактически учитывающим наличие поглощающего включения в системе. Идентифицированы достаточные условия, выполнение которых обеспечивает возможность реализации автомодельного процесса теплопереноса в анализируемой системе. Качественно исследованы физические свойства изучаемого автомодельного процесса и установлены его специфические особенности. Теоретически обоснована реализация режима термостатирования границы шаровой полости, обладающей поглощающим проникающее излучение включением.

Ключевые слова: изотропное твердое тело, лазерное излучение, поглощающее включение в виде шарового слоя, температурное поле, автомодельное решение.

Введение

Исследования автомодельных («самоподобных») процессов теплопереноса занимают важное место в математической теории теплопроводности твердых тел [1–4]. Как правило, используя это понятие, предполагают, что изучаемый физический процесс является гомохромным (однородным по времени) и можно проводить поиск его состояния равновесия, которое не зависит от времени [5–8].

В работах [9–11] теоретически обоснована возможность существования автомодельного процесса теплопереноса в изотропном твердом теле со сферическим очагом разогрева – шаровой полостью, заполненной высокотемпературным газом, – при наличии (или отсутствии) покрытия на его неподвижной или движущейся границе.

Особое место в исследованиях занимает математическая модель процесса теплопереноса в изотропном твердом теле с поглощающим проникающее излучение сферическим включением [12–15]. В работе [16] разработана иерархия упрощенных аналогов рассматриваемой модели и определены достаточные условия их применимости при идентификации температурного поля анализируемой системы, в работе [17] идентифицированы условия реализации автомодельного процесса теплопереноса при наличии фазовых превращений в изучаемой системе.

Цель проведенных исследований – нахождение достаточных условий, выполнение которых обеспечивает возможность существования автомодельного процесса теплопереноса в прозрачном для излучения твердом теле с поглощающим включением в виде шарового слоя.

Исходная математическая модель и ее преобразование

В качестве объекта исследований рассматривается изотропное пространство с включением радиуса R в виде шарового слоя шириной $\Delta = R - 1$. Шаровая полость единичного радиуса заполнена средой (далее – внешней средой) с начальной температурой, отличной от начальной температуры объекта исследований. На объект исследований воздействует поток излучения с плотностью мощностью f, для которого он абсолютно прозрачен, но может поглощаться шаровым слоем.

В предположении, что тепловой контакт в анализируемой системе является идеальным, и с учетом ранее полученных результатов [16] математическая модель процесса формирования температурного поля объекта исследований может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \chi\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho} + \Lambda f(\rho,\mathrm{Fo})\right\},$$
$$1 < \rho < R,\ \mathrm{Fo} > 0;$$
$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho},$$
$$\rho > R,\ \mathrm{Fo} > 0;\ \theta(\rho,0) = 0;$$
$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=1+0} = \Lambda\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})\left\{\theta(\mathrm{Fo})\big|_{\rho=1+0} - \varsigma(\mathrm{Fo})\right\}; \qquad (1)$$
$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R-0} = \theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R+0}$$
$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R-0} = \Lambda\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R+0};$$
$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\ge 0} \in L^2_{\rho^2}\left[1,+\infty\right),$$

где последнее условие означает, что при каждом фиксированном значении $\mathrm{Fo} \ge 0$ функция $\theta(\rho,\mathrm{Fo})$ интегрируема с квадратом и весом ρ^2 по радиальному переменному $\rho \in \left[1,+\infty\right)$ [18].

В математической модели (1) использованы следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\mathrm{Fo} = \frac{a_1 t}{r_0^2};\ \rho = \frac{r}{r_0};\ \theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0};$$
$$\varsigma = \frac{T_c - T_0}{T_* - T_0};\ R = \frac{r_0 + \widetilde{\Delta}}{r_0};\ \chi = \frac{a_2}{a_1};$$
$$\Lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2};\ f = \frac{q r_0}{\lambda_1(T_* - T_0)},$$

где $T(r,t)$ – температура в момент времени t в точках изучаемой системы, отстоящих от центра шаровой полости радиуса r_0 на расстоянии r; λ – теплопроводность; a – температуропроводность; T_* – масштабная температура; индексы: 1 – изотропное пространство; 2 – поглощающий шаровой слой ширины $\widetilde{\Delta}$; c – внешняя среда; 0 – начальное значение.

Для достижения основной цели исследований реализуем в математической модели (1) идею «сосредоточенная емкость» [19], т.е. будем предполагать, что среднеинтегральная температура шарового слоя

$$\left\langle\theta(\mathrm{Fo})\right\rangle = \frac{3}{R^3 - 1}\int_1^R \theta(\rho,\mathrm{Fo})\rho^2 d\rho \qquad (2)$$

равна как температурам его границ, так и температуре контактной границы анализируемой системы:

$$\theta(1+0,\mathrm{Fo}) = \theta(R-0,\mathrm{Fo}) = \left\langle\theta(\mathrm{Fo})\right\rangle =$$
$$= \theta(R+0,\mathrm{Fo}),\ \mathrm{Fo} \ge 0. \qquad (3)$$

Умножив левую и правую части второго уравнения в (1) на $3(R^3-1)^{-1}$ с последующим интегрированием по радиальному переменному ρ в пределах от 1 до R, воспользовавшись условиями сопряжения при $\rho = R$, условием принадлежности искомой функции заданному классу функций и равенствами (2), (3), трансформируем математическую модель (1) к виду:

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho},\ \rho > R, \mathrm{Fo}>0;$$
$$\theta(\rho,0) = 0;$$
$$R^2\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R} =$$
$$= Q(\mathrm{Fo}) + \mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})\left\{\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R} - \varsigma(\mathrm{Fo})\right\} + \qquad (4)$$
$$+\varepsilon\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=R};$$
$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\ge 0} \in L^2_{\rho^2}\left[R,+\infty\right),$$

где

$$\varepsilon \triangleq \frac{R^3-1}{3\chi\Lambda}; \quad Q(\mathrm{Fo}) \triangleq \int_1^R f(\rho,\mathrm{Fo})\rho^2 d\rho.$$

Математическая модель (4) – модель «сосредоточенная емкость» – представляет собой смешанную задачу для линейного уравнения в частных производных второго порядка параболического типа, наличие поглощающего шарового слоя в которой фактически учитывается краевым условием при $\rho = R$, явно содержащим производную безразмерной температуры по переменному Fo.

Если воспользоваться стандартным приемом [1] и считать

$$V(\rho,\mathrm{Fo}) \triangleq \rho\theta(\rho,\mathrm{Fo}), \tag{5}$$

то согласно (4), (5) функция $V(\rho,\mathrm{Fo})$ должна являться решением следующей смешанной задачи для уравнения в частных производных второго порядка параболического типа:

$$\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \rho^2}, \ \rho > R, \ \mathrm{Fo} > 0;$$

$$V(\rho,0) = 0;$$

$$R^2 \left.\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = \left[\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo}) + R\right] V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R} - \tag{6}$$

$$-R\left[\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})\varsigma(\mathrm{Fo}) + Q(\mathrm{Fo})\right] + \varepsilon \left.\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}\right|_{\rho=R};$$

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\ge 0} \in L^2\left[R,+\infty\right).$$

Постановка автомодельной задачи и ее решение

Реализуем в задаче (6) автомодельную подстановку

$$\xi = \frac{\rho - R}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}. \tag{7}$$

Тогда с учетом очевидных равенств

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{Fo}} = -\frac{\xi}{2\,\mathrm{Fo}}\frac{d}{d\xi}; \ \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\frac{d}{d\xi}; \ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\mathrm{Fo}}\frac{d^2}{d\xi^2}$$

и введенных обозначений

$$U(\xi) = V(\rho,\mathrm{Fo}); \ \ h(\mathrm{Fo}) = \mathrm{Bi}(\mathrm{Fo}) + R;$$

$$\gamma(\mathrm{Fo}) = R^{-2}h(\mathrm{Fo}); \tag{8}$$

$$f(\mathrm{Fo}) = Rh^{-1}(\mathrm{Fo})\left[\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})\zeta(\mathrm{Fo}) + Q(\mathrm{Fo})\right]$$

смешанная задача (6) эквивалентна краевой задаче:

$$\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{dU(\xi)}{d\xi} = 0, \ \xi > 0;$$

$$\left.\frac{dU(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \sqrt{\mathrm{Fo}}\,\gamma(\mathrm{Fo})\left\{U(\xi)\big|_{\xi=0} - f(\mathrm{Fo})\right\}; \tag{9}$$

$$U(\xi) \in L^2_\xi\left[0,+\infty\right).$$

Отметим, что начальное условие при $\mathrm{Fo}=0$ в смешанной задаче (6) в автомодельных переменных (7) будет иметь вид краевого условия задачи (9), заданного при $\xi = +\infty$.

Непосредственный анализ математической модели (8), (9) позволяет сделать вывод о реализуемости автомодельного процесса теплопереноса при выполнении следующих условий:

$$f(\mathrm{Fo}) \equiv f_0 - \mathrm{const};$$
$$\sqrt{\mathrm{Fo}}\gamma(\mathrm{Fo}) \equiv \gamma_0 - \mathrm{const}, \tag{10}$$

где $f_0 \ge 0, \gamma_0 > 0$ – постоянные.

При выполнении условий автомодельности (10) решение краевой задачи (9) определяется как [9]:

$$U(\xi) = U(0) + U'(0)\sqrt{\pi}\left[1 - \mathrm{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right], \ \xi \ge 0;$$
$$U(0) = f_0\frac{\gamma_0\sqrt{\pi}}{1+\gamma_0\sqrt{\pi}}, \tag{11}$$

где штрихом обозначена производная по переменному ξ; $\mathrm{erfc}\{\bullet\}$ – дополнительная функция ошибок Гаусса [2].

Результаты и обсуждение

Для получения содержательной информации о свойствах изучаемого процесса теплопереноса обратимся к условиям автомодельности (10) реализуемого граничного режима.

В простейшей ситуации $Q(\mathrm{Fo}) = 0$ (инертный шаровой слой) зависимость между функциями $\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})$ и $\varsigma(\mathrm{Fo})$ определяется как [10]

$$\left[\frac{R\varsigma(\mathrm{Fo})}{f_0} - 1\right]\frac{\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})}{R} = 1, \tag{12}$$

а закон теплообмена в изучаемой системе имеет вид

$$\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo}) = R\left(\frac{R\gamma_0}{\sqrt{\mathrm{Fo}}} - 1\right), \quad \mathrm{Fo} \ge 0. \tag{13}$$

При этом при каждом фиксированном значении $\mathrm{Fo} \ge 0$ функция $\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})$, определенная равенством (13), может принимать лишь неотрицательные значения, поэтому должно выполняться условие

$$\sqrt{\mathrm{Fo}} \le R\gamma_0. \qquad (14)$$

Условие (14) можно рассматривать как достаточное условие автомодельности реализуемого граничного режима.

В предельном случае $\mathrm{Bi(Fo)} = 0$ (тепловая изоляция границы шарового слоя), согласно (12), безразмерная температура внешней среды обращается в бесконечность, т.е. изменяется в режиме с обострением [8], при $\mathrm{Bi(Fo)} = +\infty$ $Rf_0^{-1}\left|\varsigma(\mathrm{Fo})\right| \to 1$. При этом вне зависимости от реализуемого режима теплообмена в системе безразмерная температура ее контактной границы $U(0) \equiv R\theta(R,\mathrm{Fo}) - \mathrm{const}$ определена вторым равенством в (11).

При $Q(\mathrm{Fo}) > 0$, воспользовавшись условиями автомодельности (10) и равенствами (8), приходим к следующему представлению зависимости между функциями $\mathrm{Bi(Fo)}, \varsigma(\mathrm{Fo})$ и $Q(\mathrm{Fo})$:

$$\left[\frac{R\varsigma(\mathrm{Fo})}{f_0} - 1\right]\frac{\mathrm{Bi(Fo)}}{R\left[1 - f_0^{-1}Q(\mathrm{Fo})\right]} = 1, \qquad (15)$$

где закон теплообмена в изучаемой системе определен равенством (13), а закон изменения безразмерной температуры внешней среды имеет вид:

$$\varsigma(\mathrm{Fo}) = \frac{Rf_0\gamma_0 - Q(\mathrm{Fo})\sqrt{\mathrm{Fo}}}{R(R\gamma_0 - \sqrt{\mathrm{Fo}})}, \quad \mathrm{Fo} \ge 0. \qquad (16)$$

При реализации граничного режима, достаточное условие автомодельности которого определено неравенством $\sqrt{\mathrm{Fo}} < R\gamma_0$, функция $\mathrm{Bi(Fo)}$ – монотонно убывающая, причем $\mathrm{Bi}(0) = +\infty$, и обращается в нуль в конечный момент времени $\mathrm{Fo}^* = (R\gamma_0)^2$, называемый моментом обострения граничного режима. При этом безразмерная температура теплоизолируемой границы $U(0) \equiv R\theta(R,\mathrm{Fo})$ определена вторым равенством (11) и зависит от параметра автомодельности f_0, задаваемого первым условием в (10).

Особый интерес представляет случай $f_0 = 0$, наиболее содержательно отражающий специфические особенности автомодельного процесса теплопереноса в изучаемой системе. Его реализация обеспечивает возможность термостатирования контактной границы $U(0) \equiv R\theta(R,\mathrm{Fo}) = 0$. При этом, согласно (15), справедливо равенство

$$\mathrm{Bi(Fo)}\varsigma(\mathrm{Fo}) + Q(\mathrm{Fo}) = 0,$$

где функция $\varsigma(\mathrm{Fo})$, определенная равенством (16), преобразуется к виду:

$$\varsigma(\mathrm{Fo}) = -\frac{Q(\mathrm{Fo})\sqrt{\mathrm{Fo}}}{R(R\gamma_0 - \sqrt{\mathrm{Fo}})};$$

$$\varsigma(\mathrm{Fo}^*) = -\infty.$$

Представленные результаты иллюстрируют физически объяснимый факт: реализация автомодельного процесса теплопереноса в изучаемой системе возможна лишь при ее охлаждении внешней средой.

Заключение

Реализуемость автомодельного процесса теплопереноса в прозрачном для излучения твердом теле с поглощающим включением в виде шарового слоя непосредственно связана с выполнением условий, представленных совокупностью равенств (10). Эти условия полностью и однозначно определяют структуру потока лазерного излучения, реализуемого режима теплообмена в анализируемой системе и закон изменения температуры внешней среды. Установлено, что реализация автомодельного процесса теплопереноса обеспечивает возможность термостатирования границы шаровой полости, обладающей поглощающим проникающее излучение включением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карслоу Г., Егер Д**. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488с.
2. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
4. **Формалев В.Ф.** Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 312 с.
5. **Седов Л.И.** Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.
6. **Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
7. **Волосевич П.П., Леванов Е.И.** Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: Изд-во МФТИ, 1997. 240 с.
8. **Самарский А.А., Галактинов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.** Режимы с обострением в задачах для

квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 478 с.

9. **Аттетков А.В., Волков И.К.** О возможности реализации режима термостатирования границы сферического очага разогрева // Изв. РАН. Энергетика. 2016. № 3. С. 141–147.
10. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Автомодельное решение задачи теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева, обладающим термически тонким покрытием // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 7. С. 297–300.
11. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Автомодельное решение задачи теплопереноса в твердом теле, содержащем сферический очаг разогрева с теплопоглощающим покрытием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 4. С. 97–106.
12. **Ассовский И.Г.** Физика горения и внутренняя баллистика. М.: Наука, 2005. 357 с.
13. **Буркина Р.С., Морозова Е.Ю., Ципилев В.П.** Инициирование реакционно-способного вещества потоком излучения при его поглощении оптическими неоднородностями вещества // Физика горения и взрыва. 2011. Т. 47. № 5. С. 95–105.
14. **Кригер В.Г., Каленский А.В., Звеков А.А., Зыков И.Ю., Никитин А.П.** Процессы теплопереноса при лазерном разогреве включений в инертной матрице // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 3. С. 375–382.
15. **Адуев Б.П., Ананьина М.В., Звеков А.А., Каленский А.В., Кригер В.Г, Никитин А.П.** Микроочаговая модель лазерного инициирования взрывного разложения энергетических материалов с учетом плавления // Физика горения и взрыва. 2014. Т. 50. № 6. С. 92–99.
16. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Процессы теплопереноса в твердом теле с поглощающим включением при воздействии лазерного излучения // Тепловые процессы в технике. 2019. Т. 11. № 5. С. 216–221.
17. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Автомодельные процессы теплопереноса в прозрачном для излучения твердом теле с поглощающим включением при наличии фазовых превращений в системе // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2019. № 2. С. 60–70.
18. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 708 с.
19. **Пудовкин М.А., Волков И.К.** Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. 188 с.

Self-similar heat transfer processes in a transparent for radiation solid body with absorbing inclusion in the form of a spherical layer

A.V. Attetkov, I.K. Volkov, K.A. Gaydaenko

Bauman Moscow State Technical University (National research university), Moscow, 105005, Russia
e-mail: fn2@bmstu.ru; kseniyagaydaenko@gmail.com

In connection with theoretical and applied significance of studies of auto-model ("self-similar") processes of heat transfer in solid bodies, problems of determination of non-stationary temperature field of isotropic solid body with absorption of penetrating radiation inclusion as a spherical shape layer have been formulated. The analysed mathematical model of the heat transfer process in the studied system is based on the hypothesis that absorbing inclusion is thermally thin, i.e. the implementation of the idea of "concentrated capacitance," and is a mixed task for the equation in second-order partial derivatives of the parabolic type with a specific regional condition actually taking into account the presence of absorbing inclusion in the system. Sufficient conditions are identified, fulfilment of which provides possibility of implementation of self-similar process of heat transfer in analysed system. It is theoretically justified that the feasibility of the heat transfer process under study is directly related to the fulfilment of the conditions represented by the set of two equations. These conditions fully and unambiguously determine the structure of the laser radiation flux, the realized mode of heat exchange in the analysed system and the law of temperature change of the medium filling the spherical cavity. In order to obtain meaningful information on properties of self-similar process of heat transfer, physical properties of studied process are qualitatively investigated and its specific features are established. It has been found that the implementation of the auto-model process of heat transfer provides the possibility of thermostating the boundary of the spherical cavity, which has an inclusion absorbing penetrating radiation.

Keywords: isotropic solid body, laser radiation, absorbing inclusion in the form of a spherical layer, temperature field, self-similar solution.

REFERENCES

1. **Karslou G., Eger D.** *Teploprovodnost' tvyordyh tel* [Thermal conductivity of solids]. M.: Nauka, 1964. 488 p. In Russ.
2. **Lykov A.V.** *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. In Russ.
3. **Kartashov E.M**. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tvyordyh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. M.: Vysshaya shkola, 2001. 552 p. In Russ.
4. **Formalev V.F.** *Teploprovodnost' anizotropnyh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach* [Thermal conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods for solving problems]. M.: Fizmatlit, 2014. 312 p. In Russ.
5. **Sedov L.I**. *Metody podobiya i razmernostej v mekhanike* [Similarity and dimension methods in mechanics]. Moscow: Nauka, 1977. 440 p. In Russ.
6. **Zel'dovich Y.B., Raizer Y.P.** *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavlenij* [Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena]. Moscow: Nauka, 1966. 686 p. In Russ.
7. **Volosevich P.P., Levanov E.I.** *Avtomodel'nye resheniya zadach gazovoj dinamiki i teploperenosa* [Self-similar solutions of the gas dynamics and heat-transfer problems]. Moscow: Publishing house of MIPT, 1997. 240 p. In Russ.
8. **Samarsky A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P.** *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilinejnykh parabolicheskikh uravnenij* [Regimes with sharpenings in problems for quasilinear parabolic equations]. Moscow: Nauka, 1987. 478 p. In Russ.
9. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** O vozmozhnosti realizatsii rezhima termostatirovaniya granitsy sfericheskogo ochaga razogreva [On the possibility of the realization of thermostating mode of a spherical hot spot boundary]. *Izvestiya RAN. Energetika – Proceedings of the RAS. Energetics,* 2016, no. 3, pp. 141–147. In Russ.
10. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Avtomodel'noe reshenie zadachi teploperenosa v tverdom tele so sfericheskim ochagom razogreva, obladayushhim termicheski tonkim pokrytiem [Self-similar solution of heat transport problems in a solid with a spherical hot spot having a thermally thin coating]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal Processes in Engineering*, 2016, vol. 8, no. 7, pp. 297–300. In Russ.
11. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Avtomodel'noe reshenie zadachi teploperenosa v tverdom tele, soderzhashhem sfericheskij ochag razogreva s teplopogloshhayushhim pokrytiem [Self-similar solution of heat transport problems in solid with heat-absorbing coating spherical hot spot]. *Vestnik MGTU im. N.EH. Baumana. Ser. Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences,* 2016, no. 4, pp. 97–106. In Russ. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-97-106
12. **Assovsky I.G.** *Fizika goreniya i vnutrennyaya ballistika* [Combustion physics and internal ballistics]. Moscow: Nauka, 2005. 357 p. In Russ.
13. **Burkina R.S., Morozova E.Y., Tsipilev V.P.** Initiation of a reactive material by a radiation beam absorbed by optical heterogeneities of the material. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2011, vol. 47, no. 5, pp. 581–590.
14. **Kriger V.G., Kalenskii A.V., Zykov I.Y., Nikitin A.P., Zvekov A.A.** Heat-transfer processes upon laser heating of inert-matrix-hosted inclusions. *Thermophysics and Aeromechanics,* 2013, vol. 20, no.3, pp. 367–374.
15. **Aduev B.P., Anan'eva M.V., Zvekov A.A., Kalenskii A.V., Kriger V.G., Nikitin A.P.** Miro-hotspot model for the laser initiation of explosive decomposition of energetic materials with melting taken into account. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2014, vol. 50, no. 6, pp. 704–710.
16. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Protsessy teploperenosa v tverdomtele s pogloshhayushhim vklyucheniem pri vozdejstvii lazernogo izlucheniya [Heat transfer processes in a solid with absorbing inclusion while the laser radiation impact]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2019, vol. 19, no. 5, pp. 216–221. In Russ.
17. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Avtomodel'nye protsessy teploperenosa v prozrachnom dlya izlucheniya tverdom tele s pogloshhayushhim vklyucheniem pri nalichii fazovykh prevrashhenij v sisteme [Self-similar heat transfer processes in a radiation-transparent solid body containing an absorptive inclusion with the system featuring phase transitions]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering,* 2019, no. 2, pp.60–70.DOI: 10.18698/0236-3941-2019-2-60-70
18. **Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.** *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoj fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1970. 712 p. In Russ.
19. **Pudovkin M.A., Volkov I.K.** *Kraevye zadachi matematicheskoj teorii teploprovodnosti v prilozhenii k raschetam temperaturnykh polej v neftyanykh plastakh pri zavodnenii* [Boundary-value problems of the mathematical theory of heat conduction in application to calculations of temperature fields in oil reservoirs in water flooding]. Kazan: Publishing house of Kazan University, 1978. 188 p. In Russ.