

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



УДК 536.25

Городнов Анатолий Олегович

**Моделирование тепломассообмена при бездренажном хранении
криогенных топлив**

Специальность: 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

**Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук**

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук

Лаптев Игорь Вячеславович

Москва, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| 1. ...Тепловые и гидродинамические процессы в криогенных топливных баках на режиме бездренажного хранения | 12 |
| 2. Математическое моделирование тепломассообмена при бездренажном хранении криогенных жидкостей в баках | 20 |
| 2.1 Постановка задачи | 20 |
| 2.2 Математическая модель тепломассообмена в паровой подушке | 22 |
| 2.3 Математическая модель свободно-конвективного тепломассопереноса в жидкой фазе | 24 |
| 2.4 Модель переноса тепла в стенке бака | 25 |
| 2.5 Граничные условия и балансовые соотношения на поверхностях раздела | 26 |
| 2.7 Численные методы | 31 |
| 2.7.1 Консервативный метод численного решения уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха | 32 |
| 2.7.2 Метод с разделением задачи для газа на тепловую и динамическую части | 35 |
| 2.7.3 Тестовая задача | 38 |
| 2.7.4 SIMPLE-метод для расчета параметров жидкости | 40 |
| Выводы по главе 2 | 42 |
| 3. ..Расчетно-теоретическое исследование тепломассообмена паров водорода в замкнутых сосудах | 44 |
| 3.1 Нестационарный теплообмен в слое газообразного водорода | 44 |
| 3.1.1 Постановка задачи | 45 |
| 3.1.2 Результаты расчетов | 48 |
| 3.2 Естественная конвекция газа в замкнутой квадратной области | 58 |
| 3.2.1 Постановка задачи | 58 |
| 3.2.2 Результаты расчетов | 61 |
| 3.3 Свободная-конвективный тепломассообмен газа в цилиндрической емкости с изотермической нижней границей | 67 |
| 3.3.1 Постановка задачи | 68 |
| 3.3.2 Результаты расчетов | 71 |

| | |
|---|-----|
| Выводы по главе 3..... | 82 |
| 4. Моделирование сопряженного тепломассообмена в криогенном топливном баке на режиме бездренажного хранения..... | 84 |
| 4.1 Математическая модель и метод расчета для моделирования сопряженного тепломассообмена при бездренажном хранении | 84 |
| 4.2 Валидация модели на экспериментальных данных | 89 |
| 4.2.1 Бездренажное хранение водорода в баке малого размера..... | 89 |
| 4.2.2 Бездренажное хранение азота | 93 |
| 4.2.3 Сравнение результатов расчета с данными эксперимента МНТВ по бездренажному хранению водорода | 100 |
| 4.3 Анализ тепломассообмена при бездренажном хранении..... | 105 |
| 4.3.1 Влияние распределения теплового потока на скорость роста давления..... | 106 |
| 4.3.2 Влияние начальной неоднородности температуры пара..... | 108 |
| Выводы по главе 4..... | 110 |
| Заключение | 112 |
| Список использованной литературы..... | 115 |
| Приложение. Уравнения Навье-Стокса в различных системах координат. . | 126 |

ВВЕДЕНИЕ

Низкокипящие вещества находят широкое применение в изделиях ракетно-космической техники, в особенности в качестве компонентов топлива для двигательных установок. Общеизвестно широкое применение кислорода в качестве окислителя на большинстве существующих и перспективных средств выведения. В отечественной космической промышленности накоплен значительный опыт длительного хранения жидкого кислорода в космических условиях [1]. Такое криогенное горючее, как водород, активно применяется в зарубежных образцах техники, например на европейской ракете «Ариан-5» и японском семействе ракет «Н-II». Большой опыт работы с водородом был получен и отечественными специалистами в ходе работ по ракете «Энергия» [2, 3]. Кроме того, планируется применение водородных двигательных установок на перспективных образцах космической техники, в т.ч. для кислородно-водородного разгонного блока тяжелого варианта ракеты «Ангара» и перспективного разгонного блока ракеты сверхтяжелого класса [4, 5]. Как в России, так и за рубежом ведутся работы над метановыми двигательными установками для многоразовых систем [6]. Для предстартового захолаживания баков и в качестве газа наддува активно применяется азот и гелий. В связи с этим возникают разнообразные задачи по прогнозированию теплового и динамического состояния систем хранения криогенных компонентов.

Отличительной особенностью криогенных веществ являются крайне низкие температуры сжижения при давлениях, близких к атмосферному [7]. Это создает дополнительные сложности при работе с данными веществами на всех этапах эксплуатации ракет, и особенно проявляется при хранении компонентов топлива в баках. Вследствие низкой температуры, несмотря на наличие теплоизоляции, в баки ракет неизбежно поступает тепло от внешней среды и нагретых элементов конструкции РН. Разогрев содержимого

топливного резервуара ведет к росту давления и формированию температурного расслоения. Данная проблема баковых систем ракет особенно остро стоит для разгонных блоков, режим эксплуатации которых допускает длительное хранение компонента в баках в паузах между включениями двигателя. Например, разгонный блок «Д», разрабатываемый в Советском Союзе для реализации лунной программы в составе тяжелой ракеты «Н1-Л3», допускал эпизоды хранения компонента в баках от нескольких часов до суток. На основе данного разгонного блока в настоящее время разрабатывается разгонный блок «Персей» для тяжелой ракеты «Ангара-А5».

Прогноз эволюции теплового состояния баковых систем в режиме хранения представляет собой сложную физическую задачу сопряженного тепломассопереноса между жидкостью и паром в условиях внешнего нагрева через теплоизоляцию и стенки бака. Кроме того, для корректного описания данного этапа эксплуатации системы хранения необходимо учитывать свободно-конвективные течения в жидкости и паровой подушке из-за наличия перегрузки на всем протяжении эксплуатации бака в составе ракеты. Еще одной важной особенностью данного режима эксплуатации бака является его существенная нестационарность. Изучение внутрибаковых процессов осложняется широким диапазоном изменения определяющих параметров, таких как геометрические характеристики, свойства конструкционных материалов, величины и распределения внешнего теплопритока, свойства криогенной жидкости и ее паров, характеристики газа наддува при его наличии в подушке бака, характерные перегрузки и времена хранения.

Существующие методы прогнозирования теплового состояния криогенных топливных баков основываются на обобщении экспериментальных данных и на математическом моделировании. Экспериментальные исследования внутрибаковых процессов при хранении осложняются невозможностью воспроизвести условия микрогравитации при наземных испытаниях, а также влиянием масштабного фактора.

Математическое моделирование тепломассообмена на данном этапе работы топливных систем ракеты с использованием гидро-газодинамических кодов, упрощенных моделей и методик на основе приближения пограничного слоя сопряжено с трудностью валидации вследствие достаточно малого объема эмпирических данных, особенно для условий космического полета. Поэтому для выбора адекватной методики прогнозирования хранения особенно важно учитывать зависимость теплового и динамического состояния бака от определяющих процесс параметров. Изучение этих зависимостей и создание новых физико-математических моделей позволит повысить точность методов расчета теплового и динамического состояния баковых систем. Уточнение методов прогнозирования скорости роста давления позволит оптимизировать тепловые процессы в криогенных баках и уменьшить незабираемые остатки компонента, в том числе за счет снижения массы дренируемого компонента. Уменьшение потерь компонента позволит увеличить полезную нагрузку, за счет снижения массы топлива.

В данной работе изучается тепломассообмен при бездренажном хранении при наличии свободно-конвективных течений и теплообмена со стенкой бака. Рассматриваются особенности теплопереноса в парах криогенных веществ. Методами численного моделирования исследуется свободно-конвективный теплообмен в газах. Предлагается метод численного моделирования конвекции в паре в приближении малых чисел Маха. Также строится физико-математическая модель сопряженного тепломассообмена при хранении криогенного компонента топлива в баке с учетом влияния стенки.

Актуальность работы

В ходе развития космической техники был проделан огромный объем исследований процессов в системах хранения и подачи криогенных компонентов топлива. Однако вопрос влияния определяющих параметров на

тепломассообмен при бездренажном хранении на различных режимах эксплуатации баков нельзя назвать полностью решенным.

Существующие методы прогнозирования внутрибаковых процессов демонстрируют значительное расхождение с экспериментальными данными. Выяснение причин данных расхождений требует определения границ применимости этих подходов и исследования возможности модификации в связи с разработкой новых изделий ракетно-космической техники.

Характеристики свободно-конвективных течений и теплообмена в жидкой фазе компонентов топлива изучался достаточно подробно, тогда как вопросам теплопереноса в парах криогенных веществ уделялось намного меньше внимания. Для получения полной картины физических процессов при хранении необходимо заполнить данный пробел.

Возросшие возможности вычислительной техники привели к широкому применению коммерческих многомерных средств моделирования для решения прикладных задач теплообмена в криогенных топливных баках. Правильное использование подобных средств и кодов собственной разработки также требует повышения уровня теоретических знаний о внутрибаковых процессах.

Целью работы является разработка метода моделирования и исследование теплообмена при бездренажном хранении криогенного компонента топлива в баке.

Основные задачи

В рамках данной работы решаются следующие задачи:

1. Разработка метода моделирования физических процессов в газе на основе приближения гомобаричности.
2. Исследование влияния переменности теплофизических свойств на характеристики теплообмена в парах криогенных веществ.
3. Изучение влияния теплоемкости и теплопроводности стенки на теплообмен в паровой подушке бака.

4. Исследование свободно-конвективного тепломассопереноса в среде при различных значениях величины характерного относительного температурного перепада.
5. Разработка метода моделирования сопряженного тепломассообмена при бездренажном хранении криогенных веществ в баке.
6. Валидация метода на экспериментальных данных по бездренажному хранению.
7. Численное исследование влияния наличия начальной неоднородности температуры пара и распределения теплового потока на сопряженный свободно-конвективный тепломассоперенос в криогенном топливном баке на режиме бездренажного хранения.

Научная новизна:

- Предложена математическая модель нестационарного тепломассопереноса в замкнутых сосудах с учетом теплообмена со стенкой. Разработан и протестирован численный метод для решения уравнений данной модели в плоской и осесимметричной постановках.
- Оценена применимость модели совершенного газа для описания теплообмена в паровой подушке бака. Установлено, что учет теплоемкости и теплопроводности стенки существенно снижает скорость роста давления, интенсивность конвекции и величину температурных неоднородностей в емкости. Продемонстрировано влияние характерного температурного перепада на картину течения при свободной конвекции в газе.
- Предложен метод моделирования нестационарного сопряженного тепломассообмена в паре и жидкости при бездренажном хранении с учетом теплообмена со стенкой бака и фазовых переходов в осесимметричной постановке.

- На основе численных экспериментов показано, что учет начальной неоднородности температуры пара существенно понижает погрешность прогнозирования скорости роста давления и величины температурного расслоения при бездренажном хранении. Установлено, что подвод тепла к пару сверху дает существенно больший вклад в рост давления, чем нагрев жидкости снизу.

Достоверность результатов, полученных методами математического моделирования, подтверждается сравнением с экспериментами и данными других работ.

Практическая ценность работы заключается в создании новой физико-математической модели и численного метода для расчета тепломассообмена в криогенном топливном баке на режиме бездренажного хранения.

На защиту выносятся:

1. Метод математического моделирования тепловых процессов при естественной конвекции в газах.
2. Результаты численного исследования тепломассообменных процессов в парах криогенных компонентов топлива.
3. Физико-математическая модель и метод численного моделирования тепловых и динамических процессов в криогенных резервуарах на режиме бездренажного хранения.
4. Результаты численного исследования тепломассообменных процессов при бездренажном хранении криогенных веществ.

Апробация работы:

Основные результаты, представленные в диссертации, были доложены на следующих конференциях и семинарах: 58-ой конференция Московского физико-технического института в 2015 году; Юбилейная конференция Национального комитета РАН по тепло- и массообмену "Фундаментальные и прикладные проблемы тепломассообмена" совместно с школой-семинаром молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И.

Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках», 22-26 мая 2017 года, г. Санкт-Петербург, Седьмая российская национальная конференция по теплообмену (РНКТ-7), 22-26 октября 2018 года, г. Москва; Конференция Национального комитета РАН по тепло- и массообмену "Фундаментальные и прикладные проблемы тепломассообмена" совместно с школой-семинаром молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках», 20-24 мая 2019 года, г. Москва; X Всероссийский межотраслевой конкурс научно-технических работ и проектов «Молодежь и будущее авиации и космонавтики», 20 ноября 2018 года, Московский авиационный институт, г. Москва.

Основные результаты диссертационной работы отражены в 7 публикациях, в том числе 3 из перечня ВАК.

Публикации по теме диссертации и личный вклад соискателя:

Статьи в периодических изданиях:

1. Черкасов С.Г., Лаптев И.В., Ананьев А.В., Городнов А.О. Ламинарная естественная конвекция газа в замкнутой квадратной области. Тепловые процессы в технике. 2018. Т. 10. №5-6. С. 182–191.
2. Черкасов С.Г., Лаптев И.В., Ананьев А.В., Городнов А.О. Рост давления при нестационарной естественной конвекции паров водорода в вертикальном цилиндрическом сосуде с постоянной температурой нижней границы. Тепловые процессы в технике. 2019. Т. 11. №5. С. 203–215.
3. Черкасов С.Г., Лаптев И.В., Городнов А.О. Термодинамическая модель процессов в криогенных топливных баках. Космическая техника и технологии. 2020, №2, с. 50-60.

Сборники тезисов конференций:

4. Городнов А.О. Исследование свободной конвекции в криогенной емкости при подводе тепла снизу. Труды 58-й научной конференции МФТИ. Аэрофизика и космические исследования. 2015, с. 190.
5. Городнов А. О., Лаптев И. В., Черкасов С. Г. Моделирование естественной конвекции сжимаемого газа в замкнутой области. Сборник тезисов юбилейной конференции Национального комитета РАН по тепло-и массообмену «Фундаментальные и прикладные проблемы тепломассообмена» и «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках». Том 1. М.: Издательский дом МЭИ, 2017. С. 103–104.
6. Городнов А.О., Ананьев А.В., Лаптев И.В., Черкасов С.Г. Влияние сжимаемости на стационарный свободно-конвективный теплообмен в замкнутой области. Том 1. М.: Издательский дом МЭИ, 2018. С. 281–284.
7. Городнов А. О., Лаптев И. В., Черкасов С. Г. Рост давления при нагреве пара в вертикальной цилиндрической емкости с изотермической нижней границей. Сборник тезисов конференции Национального комитета РАН по тепло-и массообмену «Фундаментальные и прикладные проблемы тепломассообмена» и «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках». Том 1. М.: Печатный салон «Шанс», Москва, 2019. С. 139–140.

Все расчеты в диссертации и публикациях из представленного списка выполнены лично автором диссертации. Программы для расчета разработаны и протестированы автором.

Объём работы

Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения и приложения, содержит 128 машинописных листов, включающих 53 рисунка, 8 таблиц и список используемой литературы на 105 наименований.

1. Тепловые и гидродинамические процессы в криогенных топливных баках на режиме бездренажного хранения

Резкий рост числа научно-исследовательских работ по изучению внутрибаковых процессов во второй половине XX века был обусловлен прогрессом в создании космической ракетной техники с двигательными установками на низкокипящих компонентах топлива. Особенно необходимо отметить советскую и американскую лунные программы, а также работы по созданию многоразовых систем выведения, проводившиеся в СССР и США в конце XX века. Создание таких выдающихся образцов ракетной техники, как «Сатурн-V», «Энергия-Буран» и «Спейс-Шаттл» сопровождалось значительным объемом экспериментальных и теоретических работ по исследованию процесса хранения криогенных компонентов топлива. Огромный объем данных о протекании внутрибаковых процессов был получен в ходе летного эксперимента на американской ракете «Сатурн V» [8], в ходе которого было реализовано длительное хранение жидкого водорода в криогенном баке в условиях орбитального полета. Результаты наземных экспериментов по исследованию скорости роста давления и развитию температурного расслоения в баках с жидким водородом приведены в работах [9, 10]. Пример обобщения данных по росту давления при хранении жидкого водорода и азота, полученных в ходе наземных испытаний отечественными специалистами, можно найти в работе [11], где приведена эмпирическая формула для определения перегрева зеркала жидкости от числа Фурье, числа Рэлея и характерного потока тепла. В работе [12] тепломассообмен и фазовые переходы при хранении изучался на модельной жидкости при различных режимах подвода тепла к баку. Необходимо отметить, что экстраполяция результатов приведенных выше исследований на перспективные системы хранения может приводить к значительной ошибке в расчете скорости роста давления. Например, в [12] разница между расчетом скорости роста давления

по эмпирической формуле и данными опыта достигала десятков процентов. Другой проблемой экспериментальных исследований является невозможность воспроизвести в земных условиях микрогравитацию, а также трудность изучения влияния масштабного фактора вследствие дороговизны проведения опытов на натуральных баках. Однако накопление опытных данных позволило выявить основные физические процессы, влияющие на хранение, такие как свободно-конвективные течения в паре и жидкости, фазовые переходы, температурное расслоение в направлении действия перегрузки.

Необходимость прогнозирования скорости роста давления при бездренажном хранении привела к созданию ряда упрощенных методик. Одним из наиболее широко применяемых способов определения давления в баках является расчет по нагреву жидкости в предположении об однородности температуры. В рамках данного подхода при известном уровне теплоподвода рассчитывается прирост температуры жидкости в предположении, что прогрев бака однороден, а влияние теплоемкости паровой подушки пренебрежимо мало. Давление определяется по рассчитанной таким образом температуре из кривой насыщения. К сожалению, такой грубый метод может в несколько раз занижать скорость роста давления, что было продемонстрировано в работах [12-14] на различных экспериментальных данных. Одним из наиболее важных источников погрешности данной модели является пренебрежение неоднородностями температуры в жидкости. Из опытных данных известно, что при бездренажном хранении наблюдается стратификация температуры в направлении действия перегрузки, причем температура зеркала жидкости может значительно превышать среднемассовую. Учет данного факта позволил построить упрощенные методики [12, 13, 15], в рамках которых прогрев жидкости моделировался одномерным уравнением теплопроводности с источником. Учет температурного расслоения в жидкости позволил значительно сократить погрешность в определении прироста давления. Однако сравнение результатов расчета по одномерным моделям с

экспериментальными данными выявило существенные расхождения, достигающие десятков процентов для малых степеней заполнения.

Необходимо отметить бурное развитие коммерческих и открытых CFD кодов, произошедшее в последнее время. В открытой печати появляется все больше работ, где для численного решения уравнений гидро-газодинамики используются различные коммерческие программные комплексы. В работах [16-24] приведены примеры применения подобных методов для численного моделирования внутрибаковых процессов. Большое количество расчетов с использованием программного комплекса Flow Vision, а также полуэмпирических методик для разгонного блока КВТК приводится в книге В.В. Костюка и В.П. Фирсова [25]. В приведенных выше статьях представлена в основном только валидация CFD кодов и их составных частей, таких как модели турбулентности, на различных экспериментальных данных. Результатов по исследованию физических процессов при достаточно широком варьировании определяющих параметров в данных работах представлено не было.

Проблема определения степени влияния свободно-конвективных течений на теплообмен в баках исследовалась при помощи различных инструментов теории теплообмена и механики сплошной среды. Важным классом методов исследования тепловых и динамических процессов при конвекции в жидкостях и газах являются полуэмпирические модели на основе приближения пограничного слоя. Результаты, полученные в рамках данного подхода [26-30], позволили предсказывать характеристики ламинарных и турбулентных свободно-конвективных пограничных слоев. Примером построения методики расчета скорости роста давления при хранении на основе данного подхода является работа [31]. В методах подобного рода для замыкания уравнений обычно используют соотношения, обобщающие данные модельных экспериментов. Область применимости и погрешность подобных способов моделирования внутрибаковых процессов определяется в первую

очередь используемой «эмпирикой». Поэтому для данного типа численных методов в значительной степени характерны те же недостатки, что и для подходов, основанных на обобщении опытных данных.

Увеличение производительности вычислительной техники привело к широкому распространению моделирования внутрибаковых процессов путем решения многомерных уравнений Навье-Стокса в различной постановке. В случае бездренажного хранения динамические характеристики среды в основном определяются свободно-конвективными течениями. Наиболее распространённой моделью для описания подобных течений для слабо сжимаемой среды является приближение Буссинеска [32]. В настоящее время существует множество подходов к численному решению данных уравнений, которые можно условно разделить на методы, основанные на решении уравнений конвекции в переменных вихрь-функция тока [33, 34] и методы, в которых данные уравнения решаются в переменных скорость-давление [35, 36]. Классическим примером тестовой задачи для данного класса методов является проблема стационарной конвекции в квадратной ячейке с изотермическими вертикальными стенками. Существует достаточно много работ, посвященных обобщению расчетных данных, полученных в ходе численного моделирования конвекции в данной постановке в широком диапазоне ламинарных и турбулентных чисел Рэлея [37-39]. Также необходимо упомянуть активно развивающиеся в последнее время подходы к моделированию свободной конвекции жидкости на основе метода решеточных уравнений Больцмана [40-42].

В настоящее время приближение Буссинеска применяется для изучения процессов теплообмена при решении различных задач. В работах коллектива М.А. Шеремета [43-46] данный подход использовался для численного моделирования теплообмена в замкнутых областях с локальными источниками тепловыделения и с материалами с изменяемым фазовым состоянием, в том числе с учетом стенок. Также применение такого подхода к

подобным задачам часто встречается и в работах зарубежных авторов [47]. В работах [48, 49] данная модель использовалась для изучения физических процессов в методе выращивания кристаллов Чохральского. В монографии [50] приведено большое количество результатов исследований характеристик свободно-конвективных течений, полученных отечественными авторами для различных модельных задач в рамках приближения Буссинеска. Таким образом, можно констатировать, что моделирование свободной конвекции на основе приближения Буссинеска на современном этапе развития науки является хорошо апробированным методом, применимым к различным задачам.

Применительно к задачам исследования физических процессов в криогенных топливных баках данный класс методов использовался в первую очередь для изучения динамических характеристик течения и температурного расслоения в жидкой фазе компонента. В работах В.И. Полежаева, С.Г. Чекасова и других отечественных и зарубежных авторов [50-55] проводились численные исследования температурной стратификации и характеристик течения при нестационарной естественной конвекции в вертикальных цилиндрических сосудах при различных условиях внешнего теплоподвода. Одним из важнейших результатов данных исследований являлось прояснение механизма формирования температурного расслоения и оценка роли тепловой конвекции при нагреве баков. В этих работах было показано, что влияние тепловой конвекции на процессы в жидкости существенно анизотропно. Основная роль в формировании вертикальной стратификации принадлежит диффузионному переносу тепла от поверхности раздела фаз. Боковой нагрев лишь незначительно увеличивает температуру зеркала жидкости, а большая часть подводимой к смоченной жидкостью стенке бака энергии почти равномерно распределяется по слоям, перпендикулярным направлению действия перегрузки.

Также, в работах [56-58] приведены характеристики течения и теплообмена при нестационарной конвекции в вертикальных осесимметричных сосудах сложной формы, в том числе и для случая хранения криогенной жидкости. Надо отметить, что в силу ограниченности вычислительных ресурсов в данных исследованиях применялась достаточно грубая сетка, а максимальные значения числа Рэлея не превышали 10^6 . Тем не менее, получено достаточно хорошее совпадение по росту давления в сравнении с экспериментальными данными. Причем в опытах, с которыми производилось сравнение, реализуются намного большие числа Рэлея, что еще раз подтверждает тезис о малом вкладе свободной конвекции жидкости в нагрев поверхности раздела фаз в баках.

Однако, как и любая приближенная асимптотическая модель, уравнения Буссинеска имеют свои ограничения применительно к внутрибаковым процессам. Известно, что данный подход применим в случае малых относительных неоднородностей температуры в среде [59, 60]. Кроме того, известно, что в случае газовой среды одним из механизмов теплопередачи является поршневой эффект, описание которого требует более полного учета сжимаемости среды [61-63]. Еще одним важным результатом является затухание конвекции при нестационарном нагреве газа, тогда как в случае моделирования жидкости в приближении Буссинеска конвекция переходит в автотельный режим и не затухает полностью [64]. Описание данных эффектов с помощью сжимаемой системы уравнений Навье-Стокса связано с существенными вычислительными трудностями, так как возникает необходимость разрешать акустические возмущения, что накладывает сильные ограничения на временной шаг, связанные с устойчивостью численных методов [65].

Компромиссным вариантом, сочетающим в себе вычислительные затраты, сравнимые с моделью Буссинеска и качественное описание явлений, связанных со сжимаемостью газов, является приближение малых чисел Маха,

в отечественной литературе также называемое приближением гомобаричности [66-68]. Данная модель представляет собой асимптотику уравнений Навье-Стокса для сжимаемой среды в случае существенно дозвуковых течений, когда $M^2 \ll 1$. Сравнение данных численного исследования нестационарной конвекции газа в приближении гомобаричности с решением, полученным с использованием полной системы для сжимаемого газа, показало хорошее соответствие результатов расчёта между собой [64]. В работах [69-72] с помощью приближения гомобаричности рассмотрен ряд классических задач свободно-конвективного теплообмена. Было показано, что в случае больших неоднородностей температуры качественные различия между решениями, полученными в приближении Буссинеска и асимптотике малых чисел Маха, зависят в том числе и от характерного перепада температуры. Определяющая роль сжимаемости и поршневого эффекта в динамике жидкости около критической точки в сочетании с малыми скоростями движения позволила применять приближение гомобаричности при исследовании данной проблемы. Известно значительное число работ отечественных и зарубежных авторов, в которых использовалась дозвуковая асимптотика уравнений Навье-Стокса для решения данной задачи, например, [73, 74]. Также, данная модель применялась для исследования процессов в единичном паровом пузыре, окруженном жидкостью [75].

Существует достаточно большое количество численных методов для решения уравнений Навье-Стокса в дозвуковой асимптотике [64, 69, 76-79]. Причем как в переменных скорость-давление, так и в модифицированных для случая сжимаемого газа динамических переменных. Кроме того, для фильтрации акустических возмущений при существенно дозвуковых течениях из решения уравнений Навье-Стокса для сжимаемой среды применяются специальные предобуславливатели, например [80]. По аналогии с известным эталонным решением для уравнений естественной конвекции в приближении Буссинеска [37], результаты расчетов для модели малых чисел Маха были

обобщены в работах [81, 82]. Таким образом, можно утверждать, что математические методы, основанные на данном приближении, к настоящему времени достаточно хорошо развиты и протестированы. Однако в открытой печати не нашлось данных о применении данного подхода к многомерному моделированию внутрибаковых процессов.

Из приведенного обзора научных публикаций можно сделать вывод, что вопрос о влиянии определяющих параметров и начальных условий на физические процессы при бездренажном хранении криогенных компонентов топлива в баках ракет все еще требует более детальной проработки. Несмотря на достаточно подробное изучение вопросов, связанных с характеристиками течения и теплообменом в жидкости, физические процессы в паровой подушке баков изучены слабо. Практически нет работ, изучающих влияние характеристик и теплопереноса контактирующей с паровой подушкой части стенки на хранение криогенного топлива в баках. Поэтому в рамках данной работы основное внимание уделено именно процессам в паровой полости, в том числе тепломассообмену с учетом влияния стенки. Кроме того, полученные для газа результаты будут применены для рассмотрения проблемы хранения в рамках сопряженной модели конвекции в жидкой и паровой фазе с учетом теплоемкости и теплопроводности стенок.

2. Математическое моделирование тепломассообмена при бездренажном хранении криогенных жидкостей в баках

В данной главе рассматриваются процессы тепломассообмена в криогенном ракетном баке на режиме бездренажного хранения. Приводится общая постановка задачи. Строится физико-математическая модель физических процессов в газе, жидкости и металлических стенках бака. Приводятся условия сопряжения параметров сред на границах раздела фаз. Анализируются некоторые особенности термодинамики и теплофизических свойств паров криогенных веществ, связанных с построением моделей среды для жидкости и газа в баке.

2.1 Постановка задачи

Криогенный топливный ракетный бак представляет собой замкнутый металлический сосуд, частично заполненный жидкостью, а частично газом, и, чаще всего, окруженный теплоизоляцией. В реальном баке предусмотрены заборные устройства, дренажный клапан, могут присутствовать перегородки для гашения колебаний жидкости. Условия полета, такие как величина перегрузки, ее направление, интенсивность нагрева бака, также могут значительно варьироваться. Рассмотрение задачи о хранении во всем диапазоне изменений определяющих параметров с учетом произвольной геометрии и подвижности границы раздела фаз в полной пространственной постановке является чрезвычайно сложной задачей. Вместе с тем, общепринятой в науке практикой является анализ влияния различных определяющих параметров на примерах модельных задач. Поэтому в рамках данной работы рассмотрим следующую несколько упрощенную постановку, представленную на Рисунке 1.

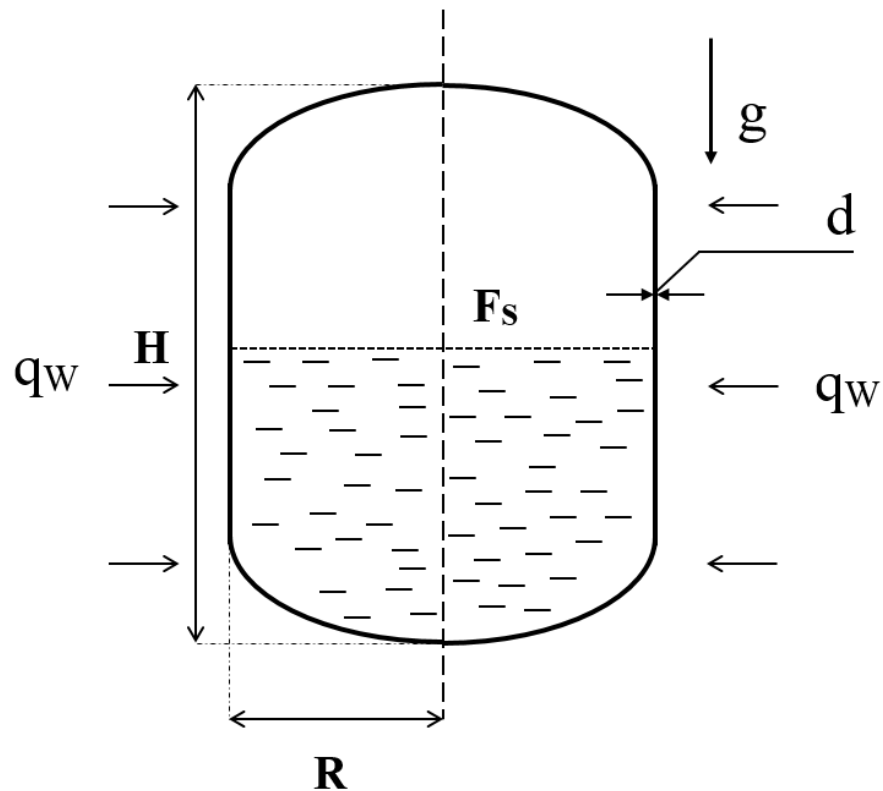


Рисунок 1. Схема криогенного бака.

Будем считать бак осесимметричным, заполненным до некоторого уровня криогенной жидкостью. Тепловой поток к стенке бака будем считать равномерно распределенным по площади. Теплообмен с теплоизоляцией в данной работе не рассматривается. Будем считать, что перегрузка постоянна по величине и всегда направлена по оси симметрии бака. Стенку бака примем гладкой, постоянной толщины, и не будем учитывать наличие внутрибаковых устройств. Необходимо отметить, что данная постановка достаточно хорошо описывает типичные наземные модельные эксперименты по исследованию процесса хранения [9, 10].

В рассматриваемой постановке используются следующие допущения:

- 1) Не будут рассматриваться вопросы, связанные с влиянием поверхностного натяжения на кривизну зеркала жидкости в баке, поэтому межфазная поверхность считается плоской.
- 2) Перепады температуры в жидкости малы.

- 3) На межфазной поверхности реализуется режим локального термодинамического равновесия, то есть давление и температура на зеркале жидкости связаны кривой насыщения.
- 4) Скорости движения в обеих фазах компонента в баке существенно меньше скорости звука.
- 5) Применимо приближение гомобаричности для пара, в рамках которого полное давление представляется в виде суммы однородной по пространству термодинамической части, и динамической, зависящей от времени и координаты:

$$P_{\text{полное}} = P(t) + p(\vec{r}, t)$$
- б) Температура межфазной поверхности однородна.

2.2 Математическая модель тепломассообмена в паровой подушке

Для математического описания процессов в паровой подушке воспользуемся уравнениями Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха [66] в следующей форме:

$$c_P \left(\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U T) \right) = -\nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \beta_T T \frac{dP}{dt} \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho \vec{g} \quad (2.2.3)$$

где

$$\tau = \mu \left(\nabla U + \nabla^T U - \frac{2}{3} (\nabla \cdot U) \vec{e} \right) - \text{тензор вязких напряжений.}$$

c_p – теплоемкость при постоянном объеме, ρ – плотность, T – температура, U – вектор скорости, q – вектор удельного теплового потока, λ – коэффициент теплопроводности, β_T – коэффициент сжимаемости, P – среднее, «термодинамическое» давление, p – динамическое давление, τ – тензор вязких напряжений, g – вектор перегрузки, μ – коэффициент динамической вязкости, e – единичный вектор.

Вязкая диссипация в случае приближения малых чисел Маха может быть исключена из уравнения энергии [66].

Известно [83], что уравнение состояния реального газа можно представить в следующем виде:

$$P = \rho R_V T \cdot Z(\rho, T), \quad (2.2.4)$$

где параметр Z задается следующим рядом по степеням плотности, называемым вириальным разложением:

$$Z(\rho, T) = 1 + B(T)\rho + C(T)\rho^2 + \dots \quad (2.2.5)$$

Здесь B , C , и т.д. называются вторым, третьим и т.д. вириальными коэффициентами.

Для удобства дальнейшего анализа приведем уравнения (2.2.1-2.2.4) к безразмерному виду. Введем масштабы величин следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0} & \tilde{P} &= \frac{P}{P_0} & \tilde{T} &= \frac{T}{T_0} & |\tilde{U}| &= \frac{|U|}{a_0/R} & \tilde{\nabla} &= \frac{\nabla}{1/R} \\ \tilde{t} &= \frac{t}{R^2/a_0} & \tilde{p} &= \frac{p}{\rho_0 a_0^2 / R^2} & \text{Pr} &= \frac{\mu_0 c_{p0}}{\lambda_0} & \Delta T_0 &= \frac{q_w R}{\lambda_0} \\ A &= \frac{\Delta T_0}{T_0} & Ra &= \frac{g(1/T_0)\Delta T_0 R^3 \rho_0}{a_0 \mu_0} & a_0 &= \frac{\lambda_0}{\rho_0 c_{p0}} & K_{LV}^\lambda &= \frac{\lambda_{L0}}{\lambda_0} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta T_0 &= \frac{q_w R}{\lambda_0} & K_{ID} &= \frac{P_0}{\rho_0 c_{p0} T_0} & \tilde{\beta}_T &= \frac{\beta_T}{1/T_0} & \tilde{c}_P &= \frac{c_P}{c_{p0}} \\ \tilde{\lambda} &= \frac{\lambda}{\lambda_0} & \tilde{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} & K_C &= \frac{c_{p0}}{R_V} \end{aligned}$$

Здесь и при дальнейшем изложении параметры с индексом «0» задаются при реперной температуре T_0 , q_w – плотность теплового потока на стенке бака.

Перепишем уравнения в безразмерном виде, опуская для удобства изложения волну над переменными:

$$c_P \left(\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U T) \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + K_{ID} \beta_T T \frac{dP}{dt} \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0 \quad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \times U) = -\nabla p + \text{Pr} \nabla \cdot \tau + \frac{Ra \text{Pr}}{A} \rho \frac{\bar{g}}{|g|} \quad (2.2.9)$$

Уравнение состояния:

$$P = \frac{1}{K_{ID} K_C} \rho T Z \quad (2.2.10)$$

Из условия баланса массы пара в подушке и уравнения состояния (2.2.10), пользуясь приближением гомобаричности, можно получить следующее соотношение:

$$P(t) = \frac{M(t)}{K_{ID} K_C \int_V \frac{dV}{TZ}} \quad (2.2.11)$$

$$M(t) = \int_V \rho dV \quad (2.2.12)$$

Система (2.2.6–2.2.11) позволяет описать тепловые и динамические процессы в паровой подушке. Перейдем к описанию тепломассопереноса в жидкой фазе.

2.3 Математическая модель свободно-конвективного тепломассопереноса в жидкой фазе

Малость перепадов температуры в жидкой фазе компонента при бездренажном хранении позволяет использовать модель Буссинеска [32] для

описания физических процессов. Запишем уравнения для жидкости в безразмерном виде, используя те же масштабы длины, скорости и времени, что и для газа:

$$K_{VL}^E \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (UT) \right) = K_{VL}^\lambda \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (2.3.1)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (U \times U) \right) = -K_{VL}^\rho \nabla p + \frac{K_{VL}^\lambda Pr_L}{K_{VL}^E} \nabla \cdot \tau_L + \frac{Ra_L Pr_L}{A} \frac{(K_{VL}^\lambda)^3}{(K_{VL}^E)^2} (T-1) \frac{\vec{g}}{|g|} \quad (2.3.2)$$

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (2.3.3)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} Pr_L &= \frac{\mu_L c_L}{\lambda_L} & Ra_L &= \frac{g \beta_L q_W R^4 \rho_L^2 c_L}{\lambda_L \mu_L T_0} & K_{VL}^\rho &= \frac{\rho_0}{\rho_L} \\ K_{VL}^\lambda &= \frac{\lambda_L}{\lambda} & K_{VL}^E &= \frac{\rho_L c_L}{\rho_0 c_{p0}} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Тензор вязких напряжений:

$$\tau_L = \nabla U + \nabla^T U.$$

Здесь индексом «L» обозначены параметры жидкой фазы.

Как видно из (2.3.4), в сопряженной постановке возникают дополнительные критерии подобия, характеризующие отличия теплофизических свойств жидкости и пара.

2.4 Модель переноса тепла в стенке бака

Перенос тепла в стенке бака будем моделировать уравнением теплопроводности [84]:

$$\rho_W c_W \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_W \nabla T) \quad (2.4.1)$$

Здесь ρ_W – плотность стенки, c_W – теплоемкость стенки, λ_W – коэффициент теплопроводности стенки.

Используя введенные безразмерные масштабы, данное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$K_{VW}^E \tilde{c}_W \frac{\partial T}{\partial t} = K_{VW}^\lambda \nabla \cdot (\lambda_W \nabla T) \quad (2.4.2)$$

Здесь:

$$K_{VW}^E = \frac{c_{W0} \rho_W}{c_{P0} \rho_0}, \quad K_{VW}^\lambda = \frac{\lambda_{W0}}{\lambda}, \quad \tilde{c}_W = \frac{c_W}{c_{W0}} \quad (2.4.3)$$

Для замыкания системы уравнений для газа, жидкости и стенки необходимо задать граничные и начальные условия, а также соотношения для сопряжения параметров на границах раздела сред.

2.5 Граничные условия и балансовые соотношения на поверхностях раздела

Предположим, в первом приближении, что изменение положения границы поверхности раздела фаз в результате фазовых переходов мало, температура на ней однородна, а сама межфазная поверхность находится в состоянии локального термодинамического равновесия. Тогда температура зеркала жидкости и термодинамическое давление связаны кривой насыщения:

$$P = f(T_S) \quad (2.5.1)$$

На межфазной поверхности также должно выполняться условие теплового баланса:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{VS} - \lambda_L \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{SL} = r_{LV} (\rho U \cdot n_S) \quad (2.5.2)$$

Здесь VS – тепловой поток от пара к поверхности раздела, SL – тепловой поток от поверхности раздела к жидкости, r_{LV} – удельная теплота фазового перехода. Индексом S обозначаются параметры свободной поверхности. Данное условие

означает, что в любой точке зеркала жидкости разница между тепловым потоком, идущим от пара к поверхности раздела и тепловым потоком, идущим от зеркала к жидкости, тратится на фазовый переход.

Приведем уравнение (2.5.2) к безразмерному виду, используя введенные ранее масштабы:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{VS} - K_{VL}^{\lambda} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{SL} = K_{VL}^r \tilde{r}_{LV} (\rho U \cdot n_s) \quad (2.5.3)$$

Где:

$$\tilde{r}_{LV} = \frac{r_{VL}}{r_{VL0}}, \quad K_{VL}^r = \frac{r_{VL0}}{c_{p0} T_0} \quad (2.5.4)$$

В качестве граничного условия для температуры на внешней поверхности стенки будем задавать равномерный нагрев:

$$\lambda_w \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_w = A \quad (2.5.5)$$

В следующем разделе рассмотрим некоторые особенности термодинамических свойств криогенных жидкостей, которые помогут обосновать необходимость правильного математического описания параметров среды.

2.6 Особенности термодинамики и теплофизических свойств паров криогенных веществ

Для решения уравнений движения и переноса тепла в паре также необходимо задать модель среды, а именно уравнение состояния и соотношения, задающие зависимость коэффициентов вязкости, теплопроводности и удельной теплоемкости от параметров течения.

Криогенные жидкости по определению характеризуются низкими температурами сжижения при близких к нормальному давлениях [7]. В

Таблице 1 представлены характерные параметры некоторых криогенных жидкостей:

Таблица 1. Температура кипения и критические параметры криогенных жидкостей

| Вещество | T^* , температура кипения при $P=1$ бар, [K] | T_K , критическая температура, [K] | P_K , критическое давление, [бар] |
|----------|--|--------------------------------------|-------------------------------------|
| Кислород | 90.18 | 154.77 | 50.9 |
| Водород | 20.28 | 32.98 | 12.93 |
| Азот | 77.35 | 126.25 | 33.96 |
| Метан | 111.42 | 190.55 | 46.41 |

Кроме того, вещества такого типа отличаются высоким приростом давления при относительно небольших прогревах жидкости вследствие характеристик кривых насыщения [7].

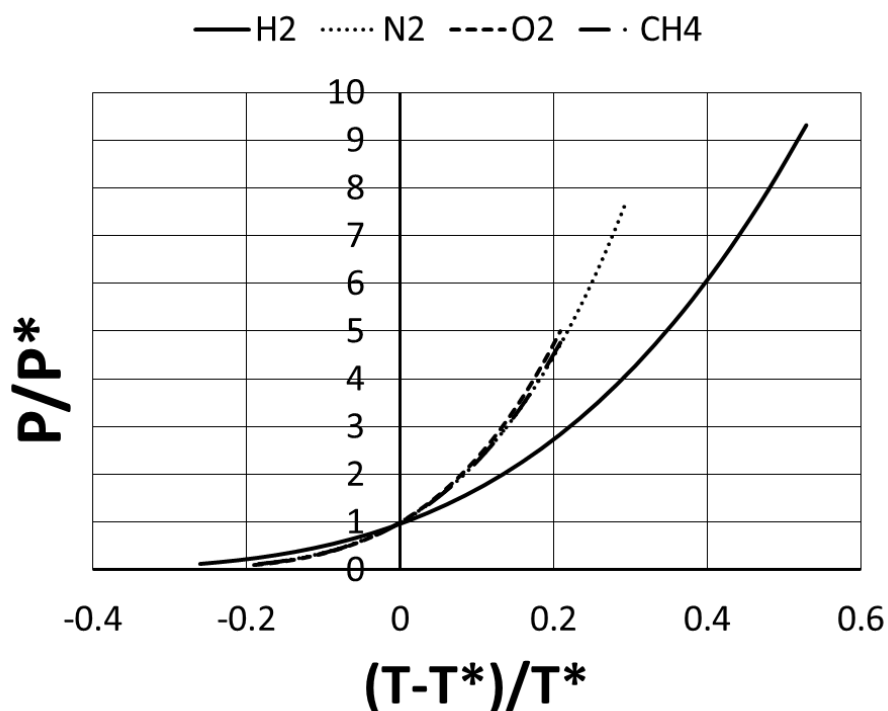


Рисунок 2. Кривые насыщения криогенных веществ, часто применяемых в РКТ.

Из представленных на Рисунке 2 данных можно заметить, что наибольший прирост давления при небольших повышениях температуры характерен для водорода. Например, изменение температуры поверхности раздела на 4 К приводит к росту давления почти до 3 бар.

Известно, что для используемых в космической технике криогенных веществ поведение их паров, в особенности на линии насыщения, может значительно отличаться от модели совершенного газа. В качестве меры данного отклонения зачастую используется параметр сжимаемости, определяемый следующим критерием:

$$Z = \frac{P}{\rho R_v T} \quad (2.6.1)$$

Совершенному газу соответствует $Z=1$.

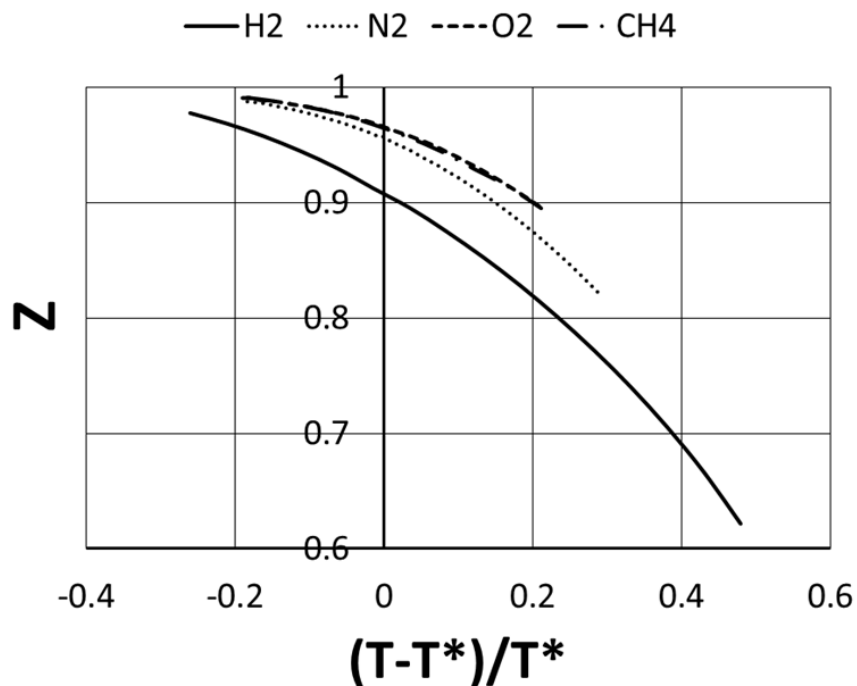


Рисунок 3. Отклонение параметров паров криогенных веществ от уравнения Менделеева-Клайперона на линии насыщения [7].

На Рисунке 3 приводится отклонение поведения паров криогенных жидкостей от уравнения Менделеева-Клайперона на линии насыщения. Как видно из рисунка, наиболее сильные различия также характерны для водорода.

От параметра сжимаемости также зависит отличие от единицы произведения коэффициента сжимаемости на температуру. С учетом уравнения состояния (2.2.10) можно записать:

$$\beta_T T = 1 + \frac{T}{Z(\rho, T)} \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_\rho \quad (2.6.2)$$

Очевидно, что отличие коэффициента сжимаемости от случая совершенного газа также максимально для водорода.

Из результатов экспериментов известно, что в паровой подушке бака могут реализовываться достаточно большие градиенты температуры. Например, в ходе хранения водорода на орбите в опыте [8] в баке диаметром 3.3 метра максимальная разница температуры в газе достигала приблизительно 100 К при температуре поверхности раздела порядка 24 К, а давление менялось от 1 до 2.5 бар. Градиенты температуры в десятки градусов также наблюдались и в экспериментах с хранением азота и кислорода [87, 88]. При таких перепадах температур коэффициент теплопроводности может сильно меняться [7].

Теплоемкость при постоянном объеме и теплоемкость при постоянном давлении в общем случае связаны следующим соотношением:

$$c_P - c_V = \frac{T}{\rho^2} \left[\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T} \right] \quad (2.6.3)$$

С учетом (2.1.13) можно представить это соотношение в следующем виде:

$$c_p - c_v = R_V \left[\frac{\left(Z(\rho, T) + T \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_\rho \right)^2}{\left(Z(\rho, T) + \rho \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \right)_T \right)} \right] \quad (2.6.4)$$

Теплоемкость при постоянном объеме можно считать зависящей только от температуры, и меняющейся для двухатомных газов при низких температурах в диапазоне от $1.5R_V$ до $2.5R_V$ [89, 90]. Таким образом, отличие изобарной теплоемкости от модели совершенного газа в случае реального газа также определяется функцией Z .

Суммируя вышеизложенные факты, можно сказать, что из применяемых в ракетной технике криогенных веществ именно пары водорода проявляют наибольшую неидеальность. Кроме того, приведенные данные показывают необходимость анализа погрешностей в определении характеристик теплопередачи в паровой подушке баков, вызванных использованием различных приближенных моделей среды.

2.7 Численные методы

В силу переменности плотности математическое моделирование уравнений Навье-Стокса в приближении гомобаричности требует применения отличных от случая несжимаемой жидкости методов. Однако, как будет показано далее, возможно построение алгоритмов расчета со скоростью сходимости, сравнимой с методами решения уравнений конвекции в приближении Буссинеска, основанных на подходах типа SIMPLE, предложенного Патанкармом [35]. В данном разделе будет рассматриваться два типа аппроксимаций уравнений в приближении гомобаричности, основанные на методе контрольных объемов.

2.7.1 Консервативный метод численного решения уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха

Первый метод будем называть «консервативным». Рассмотрим основные уравнения и последовательность расчета по данному алгоритму. Для определенности рассматривается двумерный случай, а модель малых чисел Маха (5.5.1–5.5.4) приводится для случая совершенного газа с переменными значениями коэффициентов переноса и постоянной теплоемкостью. Аппроксимация уравнений производится на разнесенной прямоугольной сетке, схема которой представлена на Рисунке 4.

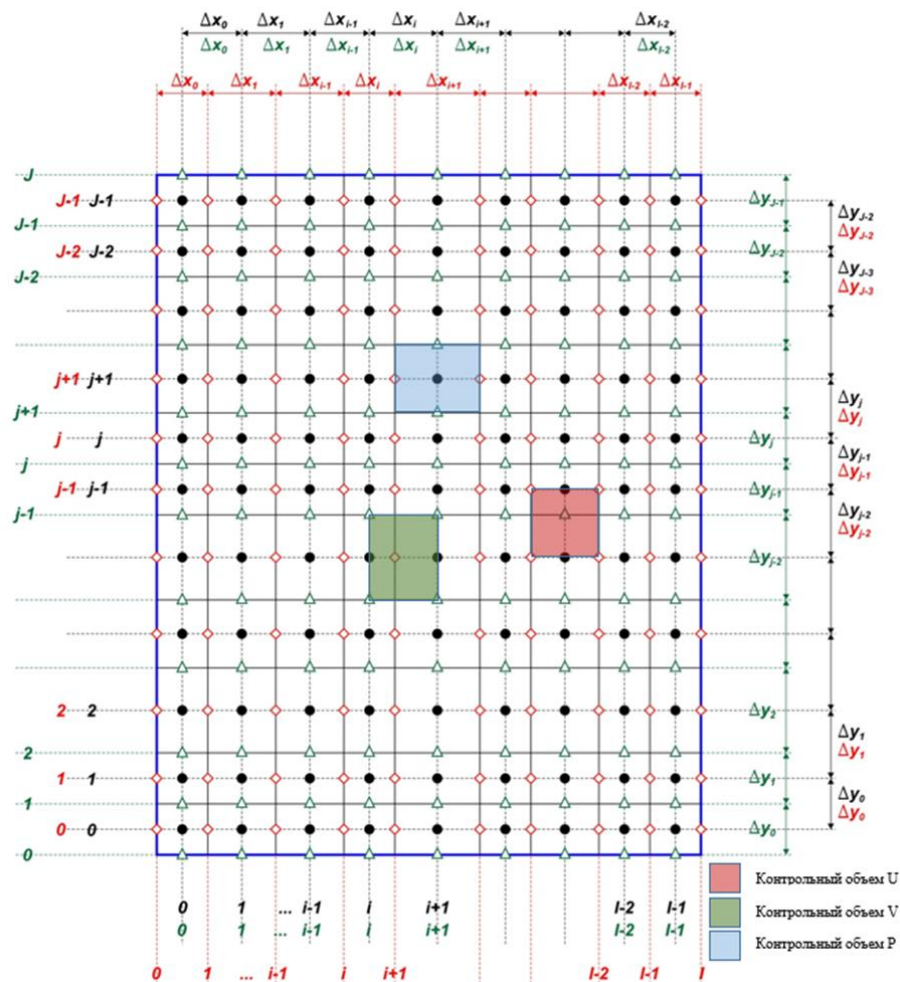


Рисунок 4. Схема дискретизации расчетной области.

Уравнения энергии на $(m+1)$ -й итерации метода с аппроксимацией временного члена схемой Эйлера записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{ij}^m T_{ij}^{m+1} - \rho_{ij}^n T_{ij}^n}{\Delta t} + \left[(\rho u T)_{i+\frac{1}{2}j}^m - (\rho u T)_{i-\frac{1}{2}j}^m \right] \Delta y_j^W + \\
& + \left[(\rho w T)_{ij+\frac{1}{2}}^m - (\rho w T)_{ij-\frac{1}{2}}^m \right] \Delta x_i^U = \left[\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^m - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}j}^m \right] \Delta y_j^W + \quad (2.7.1) \\
& + \left[\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{ij+\frac{1}{2}}^m - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{ij-\frac{1}{2}}^m \right] \Delta x_i^U
\end{aligned}$$

Другие уравнения системы также запишем в дискретном виде:

$$\frac{\rho_{ij}^{m+1} - \rho_{ij}^n}{\Delta t} + \left[(\rho u)_{i+\frac{1}{2}j}^m - (\rho u)_{i-\frac{1}{2}j}^m \right] \Delta y_j^W + \left[(\rho w)_{ij+\frac{1}{2}}^m - (\rho w)_{ij-\frac{1}{2}}^m \right] \Delta x_i^U = 0 \quad (2.7.2)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\rho u)_{ij}^{m+1} - (\rho u)_{ij}^n}{\Delta t} \Delta x_{i-1}^w \Delta y_j^W + \left[(\rho u u)_{i+\frac{1}{2}j}^m - (\rho u u)_{i-\frac{1}{2}j}^m \right] \Delta y_j^W + \\
& \left[(\rho u w)_{ij+\frac{1}{2}}^m - (\rho u w)_{ij-\frac{1}{2}}^m \right] \Delta x_{i-1}^W = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{ij}^{m+1} \Delta x_{i-1}^w \Delta y_j^W + \quad (2.7.3) \\
& \frac{4}{3} \text{Pr} \left[\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^m - \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}j}^m \right] \Delta y_j^W - \frac{2}{3} \text{Pr} \left[\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^m - \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{i-\frac{1}{2}j}^m \right] \Delta y_j^W
\end{aligned}$$

$$+ \text{Pr} \left[\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ij+\frac{1}{2}}^m - \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ij-\frac{1}{2}}^m \right] \Delta x_{i-1}^W + \text{Pr} \left[\left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{ij+\frac{1}{2}}^m - \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{ij-\frac{1}{2}}^m \right] \Delta x_{i-1}^W$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\rho w)_{ij}^{m+1} - (\rho w)_{ij}^m}{\Delta t} \Delta x_i^U \Delta y_{j-1}^U + \left[(\rho u w)_{i+\frac{1}{2}j}^m - (\rho u w)_{i-\frac{1}{2}j}^m \right] \Delta y_{j-1}^U + \\
& + \left[(\rho w w)_{ij+\frac{1}{2}}^m - (\rho w w)_{ij-\frac{1}{2}}^m \right] \Delta x_i^U = - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{ij}^{m+1} \Delta x_i^U \Delta y_{j-1}^U + \\
& + \frac{4}{3} \Pr \left[\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{ij+\frac{1}{2}}^m - \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{ij-\frac{1}{2}}^m \right] \Delta x_i^U - \frac{2}{3} \Pr \left[\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij+\frac{1}{2}}^m - \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij-\frac{1}{2}}^m \right] \Delta x_i^U \\
& + \Pr \left[\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ij+\frac{1}{2}}^m - \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ij-\frac{1}{2}}^m \right] \Delta y_{j-1}^U + \Pr \left[\left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{ij+\frac{1}{2}}^m - \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{ij-\frac{1}{2}}^m \right] \Delta y_{j-1}^U \\
& + \frac{Ra}{A} \Pr (1 - \rho)_{ij}^m \Delta x_i^U \Delta y_{j-1}^U
\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Уравнение состояния и уравнение для нахождения давления из условия сохранения массы:

$$P^{m+1} = \rho_{ij}^{m+1} T_{ij}^{m+1} \tag{2.7.5}$$

$$P(t) = \frac{M^0}{\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \frac{\Delta x_i^U \Delta y_j^W}{T_{ij}^{m+1}}} \tag{2.7.6}$$

Критерии сходимости температуры и скорости:

$$\varepsilon_T = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left| \frac{T_{ij}^{m+1} - T_{ij}^m}{T_{ij}^m} \right| \Delta x_i^U \Delta y_j^W \tag{2.7.7}$$

$$\varepsilon_U = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left| \frac{u_{ij}^{m+1} - u_{ij}^m}{u_{ij}^m} \right|; \quad \varepsilon_W = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left| \frac{w_{ij}^{m+1} - w_{ij}^m}{w_{ij}^m} \right| \tag{2.7.8}$$

Тогда консервативный алгоритм решения уравнений конвекции в приближении гомобаричности можно представить в следующем виде:

- 1) Задаем начальные условия

- 2) Рассчитываем температуру на $m+1$ итерации из (3.1.1)
- 3) Рассчитываем термодинамическое давление и плотность из (3.1.16) и (3.1.15) на $m+1$ итерации
- 4) Рассчитываем скорость и динамическое давление методом SIMPLE
- 5) Проверяем сходимость скорости и температуры, если не сошлось, обновляем значения на предыдущей итерации и переходим к п. 2. Если сошлось, обновляем значения на предыдущем временном шаге и также переходим к п.2.

Массовый баланс при такой аппроксимации уравнений для газа выполняется точно, а ошибка в тепловом балансе определяется ошибкой сходимости температуры, задаваемой (2.7.7). Необходимо отметить, что величина, определенная соотношением (2.7.7), задает интегральную ошибку в тепловом балансе системы.

2.7.2 Метод с разделением задачи для газа на тепловую и динамическую части

Основным недостатком представленного выше метода является более медленная по сравнению с давлением и скоростью сходимость температуры. Данная особенность приводит к значительному увеличению времени расчета, так как приходится решать уравнения для поправок давления и скорости на каждой итерации. Рассмотрим один из вариантов решения данной проблемы, предложенный в работе [77]. Сформулируем данный подход для осесимметричного случая. Уравнение энергии записывается в следующей не консервативной форме:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\gamma} \rho_{ij}^m \frac{T_{ij}^{m+1} - T_{ij}^n}{\Delta t} r_i^P \Delta r_i^U \Delta z_j^W + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\rho u}{r} \frac{\partial r T}{\partial r} \right)_{ij}^n r_i^P \Delta r_i^U \Delta z_j^W \\
& + \frac{1}{\gamma} \left(\rho w \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ij}^n r_i^P \Delta r_i^U \Delta z_j^W = \frac{1-\gamma}{\gamma} P^m (\nabla U)_{ij}^m r_i^P \Delta r_i^U \Delta z_j^W \\
& + \left[\left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^m - \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i-\frac{1}{2}j}^m \right] \Delta y_j^W + \left[\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ij+\frac{1}{2}}^m - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ij-\frac{1}{2}}^m \right] r_i^P \Delta r_i^U
\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

Уравнение для дивергенции скорости:

$$\begin{aligned}
(\nabla U)_{ij}^{m+1} &= \left[\left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^{m+1} - \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i-\frac{1}{2}j}^{m+1} \right] \Delta z_j^W + \\
& + \left[\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ij+\frac{1}{2}}^{m+1} - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ij-\frac{1}{2}}^{m+1} \right] r_i^P \Delta r_i^U - \frac{1}{\gamma} \frac{P^{m+1} - P^n}{\Delta t} r_i^P \Delta r_i^U \Delta z_j^W \times \\
& \times \left(P^{m+1} r_i^P \Delta r_i^U \Delta z_j^W \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.7.10}$$

Уравнение для давления из условия сохранения массы:

$$P^{m+1} = \frac{M(t)}{\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \frac{r_i^P \Delta r_i^U \Delta z_j^W}{T_{ij}^{m+1}}} \tag{2.7.11}$$

Где:

$$M(t) = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \rho_{ij}^m r_i^P \Delta r_i^U \Delta z_j^W \tag{2.7.12}$$

Критерий сходимости плотности:

$$\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left| \frac{\rho_{ij}^{m+1} - \rho_{ij}^m}{\rho_{ij}^{m+1}} \right| r_i^P \Delta r_i^U \Delta z_j^W \leq \varepsilon_\rho \tag{2.7.13}$$

Алгоритм расчета строится следующим образом:

1) Начало расчета, задаем начальные условия.

- 2) Начало нового $n+1$ временного шага, копируем значения на n временном шаге в значения на m итерации. Рассчитываем потоки массы через грани контрольных объемов на n шаге по времени.
- 3) Начало цикла для температуры, термодинамического давления и плотности. Рассчитываем температуру из (2.7.9).
- 4) Находим термодинамическое давление из (2.7.11)
- 5) Рассчитываем плотность из уравнения состояния.
- 6) Рассчитываем дивергенцию скорости на новой итерации из уравнения (2.7.10)
- 7) Проверяем сходимость плотности по условию (2.7.13), если условие не выполнено - обновляем значения температуры, давления и плотности на m итерации и переходим к п. 3. Если выполнено – переходим к расчету динамического давления и скорости.
- 8) Рассчитываем динамическое давление и скорость методом SIMPLE с использованием полученных значений температуры и плотности.
- 9) Переходим к следующему временному шагу, возвращаясь в п. 2.

Преимуществом данного подхода является более высокая скорость расчета. Так как для достижения сходимости температуры требуется большее число итерации, одновременное решение уравнений для температуры и достаточно ресурсоемкого уравнения Пуассона для поправок давления значительно увеличивает затраты времени на один временной шаг. Благодаря разделению метода на «тепловую» и «динамическую» части достигается значительный прирост в скорости расчета. Недостатком данного метода является наличие ошибки в тепловом балансе вследствие неконсервативности аппроксимации температуры.

2.7.3 Тестовая задача

Для тестирования проводился расчет стационарной конвекции воздуха между разнонагретыми вертикальными стенками в замкнутой квадратной области, а результаты расчета сравнивались с данными работ [81, 82]. На Рисунке 5 представлена схема данной задачи:

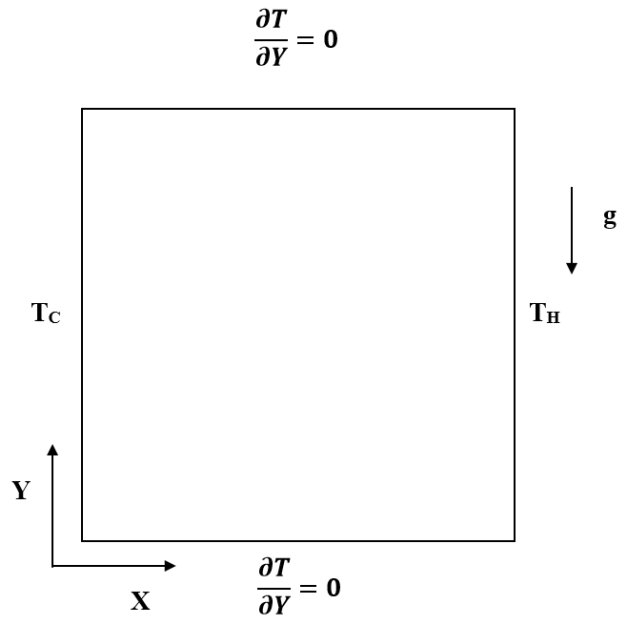


Рисунок 5. Схема задачи о конвекции в ячейке

Данная задача имеет стационарное решение. На стационарном режиме тепловой поток, идущий от горячей стенки, уравнивается тепловым потоком, идущим от газа в холодную стенку. Для оценки величины данного теплового потока удобно использовать среднее число Нуссельта на боковой стенке, определяемое следующим образом:

$$\overline{Nu}_H = \frac{1}{A} \int_0^1 \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_1 dy = \overline{Nu}_C = -\frac{1}{A} \int_0^1 \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_0 dy \quad (2.7.14)$$

Реперная температура T_0 задается как среднее между температурами холодной и горячей стенок:

$$T_0 = \frac{1}{2} (T_H + T_C) \quad (2.7.15)$$

Параметр A задается следующим образом:

$$A = \frac{\Delta T}{T_0} = 2 \frac{T_H - T_C}{T_H + T_C} \quad (2.7.16)$$

Числа Рэлея, Прандтля и коэффициент сжимаемости в таком случае определим следующим образом:

$$Ra = \frac{g\beta_T \Delta T L^3 \rho_0^2 c_{P0}}{\lambda_0 \mu_0} \quad Pr = \frac{\mu_0 c_{P0}}{\lambda_0} \quad \beta_T = \frac{1}{T_0}$$

Приведем граничные условия для температуры и скорости:

$$T(0, y) = \frac{1}{2}(2 - A); \quad T(1, y) = \frac{1}{2}(2 + A); \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \quad (2.7.17)$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \quad w(0, y) = w(1, y) = w(x, 0) = w(x, 1) = 0 \quad (2.7.18)$$

Рассматривается совершенный газ с постоянными значениями коэффициентов вязкости, теплопроводности и изобарной теплоемкости с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$. Расчеты проводились на равномерных сетках, для аппроксимации конвективных членов применялась противопоточная схема с аппроксимацией потоков массы второго порядка точности [96], диффузионные члены аппроксимировались центральными разностями. Нестационарный член аппроксимировался схемой Эйлера первого порядка точности по времени. Рассматривались следующие значения определяющих параметров задачи:

$$Ra = 10^6 \quad Pr = 1.0 \quad A = 1.2$$

В Таблице 3 приведено сравнение рассчитанных по консервативному алгоритму значений среднего числа Нуссельта на изотермических стенках с данными работы [82].

Таблица 3. Значения среднего числа Нуссельта, рассчитанные представленным методом в сравнении с данными [81]

| Среднее число Нуссельта Nu | Представленный численный метод | | | | | | | Benchmark [81] |
|-------------------------------------|---|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------|
| | Число расчетных ячеек, $N \times 10^{-2}$ | | | | | | | |
| | 16 | 64 | 100 | 256 | 400 | 625 | 1600 | |
| | 9.513 | 9.02 | 8.965 | 8.906 | 8.872 | 8.860 | 8.860 | 8.860 |

Как видно из приведенных в Таблице 3 данных, предложенный численный метод демонстрирует сеточную сходимость и хорошее совпадение с данными работы [81].

2.7.4 SIMPLE-метод для расчета параметров жидкости

Для расчета скорости и давления в жидкой и паровой фазах использовался широко распространенный метод SIMPLE [35]. Приведем основные уравнения метода в дискретной форме, для определенности рассматривая осесимметричный случай. Тогда исходные уравнения (5.5.13–5.5.16) можно записать в следующем виде:

$$a_P^U u_{ij}^{m+1} = \sum_k a_k^U u_{k_{ij}}^{m+1} + A_{ij}^U (p_{i-1j} - p_{ij}) + b_{ij}^U; \quad k = E, W, N, S \quad (2.7.19)$$

$$a_P^W w_{ij}^{m+1} = \sum_k a_k^W w_{k_{ij}}^{m+1} + A_{ij}^W (p_{ij-1} - p_{ij}) + b_{ij}^W; \quad k = E, W, N, S \quad (2.7.20)$$

Здесь E, W, N, S – соответственно центры контрольных объемов слева, справа, сверху и снизу от рассматриваемого контрольного объема P .

Поправки скорости и давления:

$$\begin{aligned} u &= u^* + u' \\ w &= w^* + w' \\ p &= p^* + p' \end{aligned} \quad (2.7.21)$$

Используя стандартные для SIMPLa преобразования, получим уравнения для поправок скорости:

$$u'_{ij}{}^{m+1} = d_{ij}^U (p'_{i-1j} - p'_{ij}) \quad (2.7.21)$$

$$w'_{ij}{}^{m+1} = d_{ij}^W (p'_{ij-1} - p'_{ij}) \quad (2.7.22)$$

Здесь:

$$d_{ij}^U = \frac{A_{ij}^U}{a_p^U}, \quad d_{ij}^W = \frac{A_{ij}^W}{a_p^W} \quad k = E, W, N, S$$

Используя уравнение неразрывности, получим уравнение Пуассона для поправок давления:

$$\begin{aligned} & A_{i+1j}^U d_{i+1j}^U (p'_{i+1j} - p'_{ij}) - A_{ij}^U d_{ij}^U (p'_{ij} - p'_{i-1j}) + \\ & A_{ij+1}^W d_{ij+1}^W (p'_{ij+1} - p'_{ij}) - A_{ij}^W d_{ij}^W (p'_{ij} - p'_{ij-1}) = \\ & A_{i+1j}^U u_{i+1j}^{*m+1} - A_{ij}^U u_{ij}^{*m+1} + A_{ij+1}^W w_{ij+1}^{*m+1} - A_{ij}^W w_{ij}^{*m+1} \end{aligned} \quad (2.7.23)$$

Алгоритм расчета строится следующим образом:

- 1) Начало расчета, задаем значения параметров жидкости на предыдущем временном шаге из начальных условий;
- 2) Переходим к расчету первого временного шага, задаем скорость, температуру и давление на предыдущей итерации значениями с n-го временного шага;
- 3) Начало итерационного цикла, рассчитываем значения коэффициентов при ij узлах скорости;
- 4) Находим u^* и w^* из разностных аналогов уравнений (2.7.19, 2.7.20), используя значения давления с предыдущей итерации;
- 5) Рассчитываем невязку массового баланса, проинтегрировав по объему уравнение неразрывности;

- 6) Решаем уравнение Пуассона для поправок давления, используя метод последовательной верхней релаксации;
- 7) Корректируем скорость и давление, используя уравнения 2.7.21 и 2.7.22.
- 8) Рассчитываем сходимость скорости из уравнений (2.7.8);
- 9) Проверяем сходимость, если невязки скорости и массового баланса меньше допустимой, завершаем цикл, и переходим к п. 2. В противном случае обновляем значения на предыдущей итерации рассчитанными и переходим к п.3.

Аналогичным образом рассчитываются скорость и давление в паровой фазе, однако уравнение Пуассона несколько изменится из-за наличия производной плотности по времени:

$$\begin{aligned}
 & A_{i+1j}^U d_{i+1j}^U \rho_E^m (p'_{i+1j} - p'_{ij}) - A_{ij}^U d_{ij}^U \rho_W^m (p'_{ij} - p'_{i-1j}) + A_{ij+1}^W d_{ij+1}^W \rho_N^m (p'_{ij+1} - p'_{ij}) \\
 & - A_{ij}^W d_{ij}^W \rho_S^m (p'_{ij} - p'_{ij-1}) = \frac{\rho_{ij}^m - \rho_{ij}^n}{\Delta t} r_i^P \Delta r_i^U \Delta z_j^W + A_{i+1j}^U \rho_E^m u_{i+1j}^{*m+1} - \\
 & - A_{ij}^U \rho_W^m u_{ij}^{*m+1} + A_{ij+1}^W \rho_N^m w_{ij+1}^{*m+1} - A_{ij}^W \rho_S^m w_{ij}^{*m+1}
 \end{aligned} \quad (2.7.24)$$

Данный алгоритм вместе с методами расчета тепловых характеристик позволяет рассчитать поля температуры, давления и скорости в паровой и жидкой фазах. Вопросы численной реализации условий сопряжения на границах раздела будут рассмотрены в главе 4.

Выводы по главе 2.

- Предложена физико-математическая модель процессов тепломассопереноса в паре, жидкости и стенке бака при бездренажном хранении криогенных компонентов топлива на основе приближения гомобаричности для газовой фазы и приближения Буссинеска для жидкости. Выделены основные критерии подобия для данной модели.

- Приведены основные особенности термодинамики паров криогенных жидкостей. Показано, что для данного класса веществ наблюдается существенная неидеальность вблизи кривой насыщения. Наибольшее отклонение параметра сжимаемость Z от единицы проявляет водород. Значения данного параметра для водорода на линии насыщения в диапазоне температур 16-28 К меняется от 0.97 до 0.7. Показано, что теплофизические характеристики газообразного водорода сильно зависят от температуры и давления, что указывает на необходимость аккуратного выбора моделей среды при построении математических моделей тепломассопереноса.
- Предложены два метода расчета уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха в газе с учетом тепловой конвекции. Первый метод характеризуется консервативной схемой для температуры и расчетом тепловых и динамических параметров в едином цикле. Второй метод реализует разделение расчета на тепловую и динамическую части, позволяя ускорить расчет, при этом используя неконсервативную схему для температуры. Приведено описание алгоритма для расчета параметров жидкости на основе метода SIMPLE.
- Проведено тестирование предложенных методов на задаче о стационарной конвекции газа в квадратной ячейке. Сравнение рассчитанных по предложенному методу значений среднего числа Нуссельта на изотермических стенках показало максимальную относительную погрешность менее 1%.

3. Расчетно-теоретическое исследование тепломассообмена паров водорода в замкнутых сосудах

В данной главе рассматривается тепломассообмен паров криогенных жидкостей в замкнутых объемах. Среди криогенных веществ, применяемых в ракетно-космической технике, наиболее сильную зависимость термодинамики и теплофизических свойств от параметров среды имеет водород. Поэтому расчеты в этой части работы приводятся именно для паров водорода.

В первом разделе на примере модельной задачи о прогреве слоя газа изучается влияние погрешностей, связанных с выбором модели среды, на точность прогнозирования характеристик теплообмена. Следующий раздел посвящен оценке ошибок применения модели Буссинеска для описания конвекции в газах на примере задачи о конвекции в квадратной ячейке с разнонагретыми вертикальными изотермическими стенками. В последнем разделе данной главы изучается влияние интенсивности конвекции и теплоемкости стенки на тепломассообмен в замкнутых осесимметричных сосудах.

3.1 Нестационарный теплообмен в слое газообразного водорода

Анализ теплопередачи в парах криогенных веществ будем проводить для водорода на примере модельных задач о нагреве замкнутого объема в постановке, аналогичной [86]. Несмотря на простоту постановки, подобный подход способен наглядно продемонстрировать, как различное физико-математическое описание свойств среды влияет на процесс передачи тепла в паре.

На примере модельной задачи о прогреве слоя газообразного водорода демонстрируются различия в теплопередаче в средах, задаваемых моделями совершенного и реального газа. Приводится постановка задачи, краткое

описание численного метода, и результаты расчета при различных темпах нагрева и двух типах граничных условий на свободной поверхности.

3.1.1 Постановка задачи

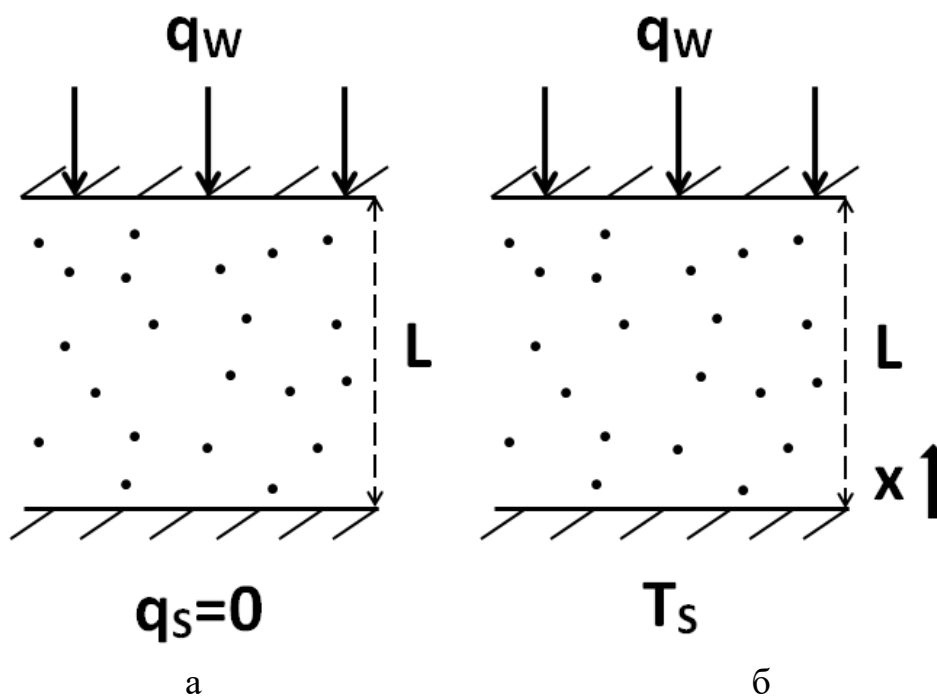


Рисунок 6. Задача о прогреве одномерного слоя водорода: а – теплоизолированная нижняя граница, б – изотермическая нижняя граница

Рассматривается задача о прогреве одномерного бесконечного слоя паров водорода шириной L между двумя стенками, к одной из которых подводится постоянный тепловой поток q_w . На противоположенной стенке рассматривается два типа граничных условий: первый тип – теплоизолированная стенка, второй тип – изотермическая стенка. Данная постановка в крайне упрощенном виде моделирует теплоперенос в паровой подушке бака без учета стенок и бокового подвода тепла, а также без фазовых переходов. Начальные условия и прочие параметры задачи, такие как время нагрева, характерная ширина слоя и температура изотермической стенки, подбираются сходными с параметрами пара в эксперименте [9]:

$$T_0 = 20.28 \text{ }^0\text{K}, \quad P_0 = 101500 \text{ Па}, \quad T_s = T_0,$$

$$\lambda_0 = 0.0158 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{K}}, \quad R = 0.05 \text{ м}, \quad q_W = 80 \text{ Вт},$$

$$T(x,0) = T_0, \quad u(x,0) = 0, \quad \rho(x,0) = \rho_0, \quad P(0) = P_0$$

Уравнения в приближении гомобаричности в безразмерном виде в одномерном случае существенно упрощаются:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.1.1)$$

$$c_P \left(\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \frac{\partial \rho u T}{\partial x} \right) = K_{ID} \beta_T T \frac{dP}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (3.1.3)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_1 = A \quad (3.1.4)$$

Зависимость безразмерного коэффициента теплопроводности от температуры будем задавать следующей аппроксимацией, имеющей расхождение менее 5% с экспериментальными данными в диапазоне температур 20-300 К и давлений 1-10 бар [7, 90]:

$$\lambda = 1 - 0.000427 (T-1)^3 + 0.00091 (T-1)^2 + 0.85236 (T-1) \quad (3.1.5)$$

Свойства таких криогенных веществ, как водород, кислород, азот и метан в области низких температур и плотностей хорошо описываются уравнением состояния со вторым и третьим вириальными коэффициентами [91-94]:

$$P = \frac{1}{K_{ID} K_C} \rho T Z$$

$$Z(\rho, T) = 1 + B(T) \rho + C(T) \rho^2 \quad (3.1.5)$$

Температурные зависимости для B и C возьмем из [91]:

$$\rho_0 B(T) = a \cdot T^{-0.25} + b \cdot T^{-0.75} + c \cdot T^{-1.25} + d \cdot T^{-1.75}; \quad (3.1.6)$$

$$a = 0.03239, \quad b = -0.065884, \quad c = -0.009493, \quad d = -0.0293045$$

$$\rho_0^2 C(T) = a T^{-0.5} (1 + b T^{-3}) \times (1 - \exp(1 - c T^3)); \quad (3.1.7)$$

$$a = 0.00033032, b = 2.25685, c = 0.952035$$

Как уже говорилось в предыдущем разделе, теплоемкость водорода при постоянном объеме зависит от температуры. При температурах ниже 50 К ее можно принять постоянной и равной $1.5R_V$, а при больших температурах аппроксимировать следующей зависимостью, обобщающей данные [7, 89]:

$$\frac{K_C}{\gamma} c_V = a \cdot T^3 + b \cdot T^2 + c \cdot T + d. \quad (3.1.8)$$

$$a = -0.002695, b = 0.050952, c = -0.180293, d = 1.678118$$

Здесь:

$$\gamma = \frac{c_{P0}}{c_{V0}} \quad (3.1.9)$$

Изобарная теплоемкость при этом определяется из соотношения (2.2.4).

Преобразуем уравнение (2.2.6) к следующему виду:

$$\left(c_P - \frac{1}{K_C} \beta_T T Z \right) \frac{\partial \rho T}{\partial t} + c_P \frac{\partial \rho T}{\partial x} = \beta_T T \frac{P}{K_C Z} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.1.10)$$

Для численного решения уравнений (3.1.1, 3.1.3-3.1.10) воспользуемся консервативным методом, приведенным в разделе 2.6. Дискретизацию уравнений проведем методом контрольного объема на равномерной сетке, с использованием центральных разностей для диффузионных и конвективных потоков и схемы Эйлера для временных производных.

Будем рассматривать случай реального газа, когда параметр Z задается уравнением (3.1.5), и случай совершенного газа с $Z=1$. Также рассмотрим случай идеального газа, когда теплофизические свойства постоянны и не зависят от температуры. Показатель адиабаты идеального газа для водорода в случае низких температур, как уже говорилось выше, ведет себя аналогично

одноатомному газу: $\gamma=1.67$. Однако в большинстве работ рассматривается показатель адиабаты идеального двухатомного газа: $\gamma=1.4$. Для удобства последующего сравнения результатов возьмем в качестве реперной изобарной теплоемкости соответствующую величину для идеального газа $3.5R_V$.

3.1.2 Результаты расчетов

В рамках описанной выше постановки скорость роста давления с учетом всех принятых упрощений, задается следующим уравнением, получаемым из интегрального теплового баланса для пара:

$$\frac{dP}{dt} \int_0^1 \left(K_{ID} K_C \frac{c_P}{Z} - \beta_T T \right) dx = A \left(1 - \overline{Nu}_S \right) - \int_0^1 c_P \frac{\partial \rho u T}{\partial x} dx \quad (3.1.17)$$

Для случая идеального газа с постоянными коэффициентами теплопроводности и теплоемкости данное выражение существенно упрощается. Если граница расчетной области теплоизолирована, то:

$$\frac{dP}{dt} = (\gamma - 1)A \quad (3.1.18)$$

Для задачи с теплоизолированной нижней границей отклонение давления от величины, задаваемой (3.1.18) как раз является показателем влияния неидеальности. Рассмотрим несколько вариантов моделей среды, представленных в Таблице 2:

Таблица 3. Рассматриваемые модели среды

| Модель среды | Уравнение состояния | Коэффициент теплопроводности | Теплоемкость при постоянном давлении |
|--|--|------------------------------|--------------------------------------|
| Совершенный двухатомный газ с постоянными свойствами | $P = \rho RT$ | $\lambda = \lambda(T_0)$ | $c_p = 3.5R$ |
| Совершенный одноатомный газ с постоянными свойствами | $P = \rho RT$ | $\lambda = \lambda(T_0)$ | $c_p = 2.5R$ |
| Совершенный одноатомный газ с температурной зависимостью теплопроводности | $P = \rho RT$ | $\lambda = \lambda(T)$ | $c_p = 2.5R$ |
| Совершенный газ с температурной зависимостью теплоемкости и теплопроводности | $P = \rho RT$ | $\lambda = \lambda(T)$ | $c_p = c_p(T)$ |
| Реальный газ | $P = \rho RT \left(1 + \frac{B(T)}{\rho} + \frac{C(T)}{\rho^2} \right)$ | $\lambda = \lambda(T)$ | $c_p = c_p(T, P)$ |

На Рисунках 7-12 приведены результаты расчетов задачи с теплоизолированной нижней границей при различных величинах теплового потока.

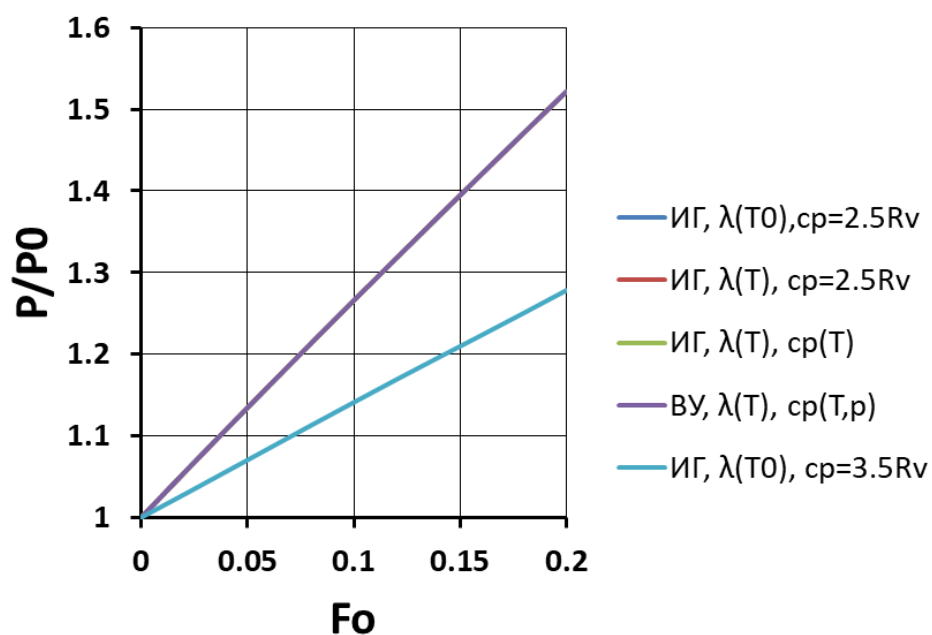


Рисунок 7. Рост давления, рассчитанный для разных моделей среды при $A=1.0$ для задачи с теплоизолированной нижней границей

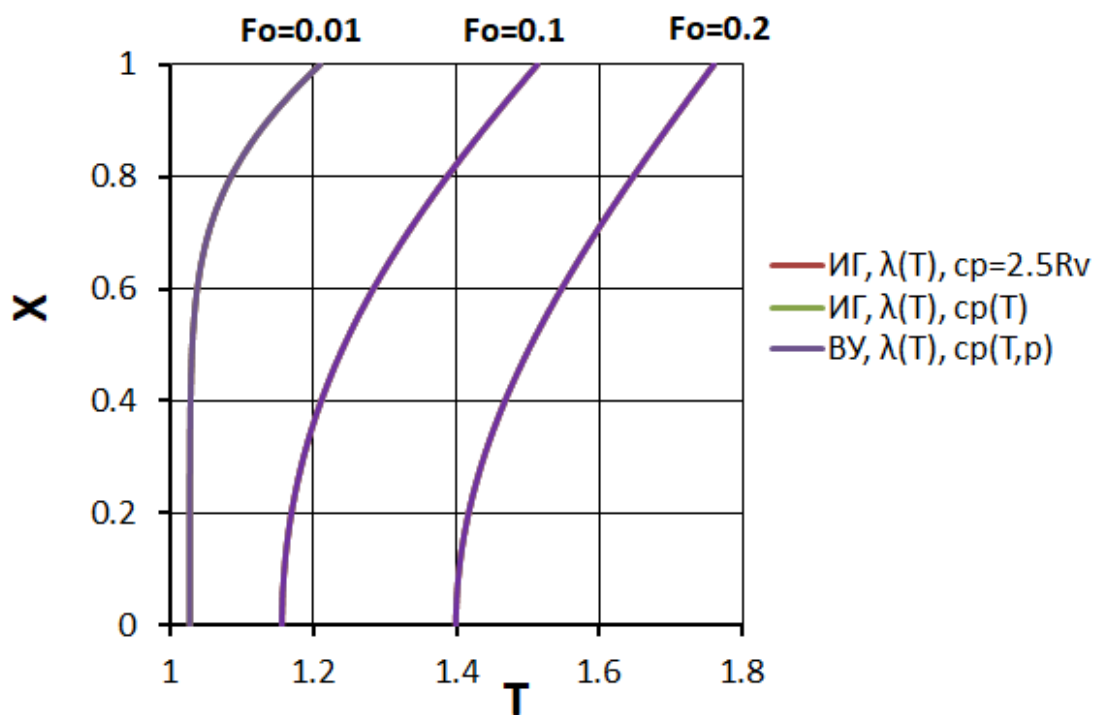


Рисунок 8. Профили температуры в различные моменты времени, рассчитанные для разных моделей среды при $A=1.0$ для задачи с теплоизолированной нижней границей

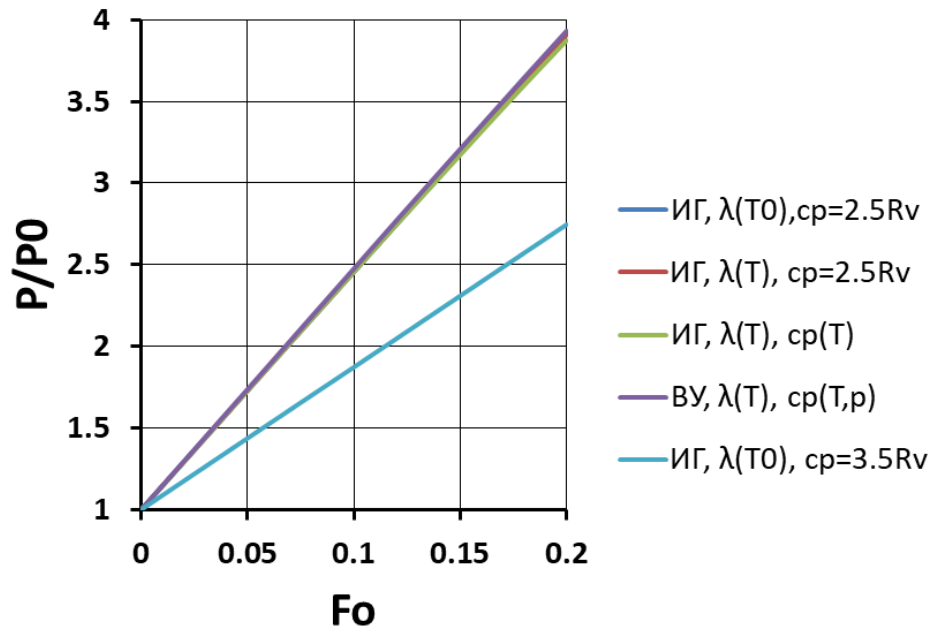


Рисунок 9. Рост давления, рассчитанный для разных моделей среды при $A=6.25$ для задачи с теплоизолированной нижней границей

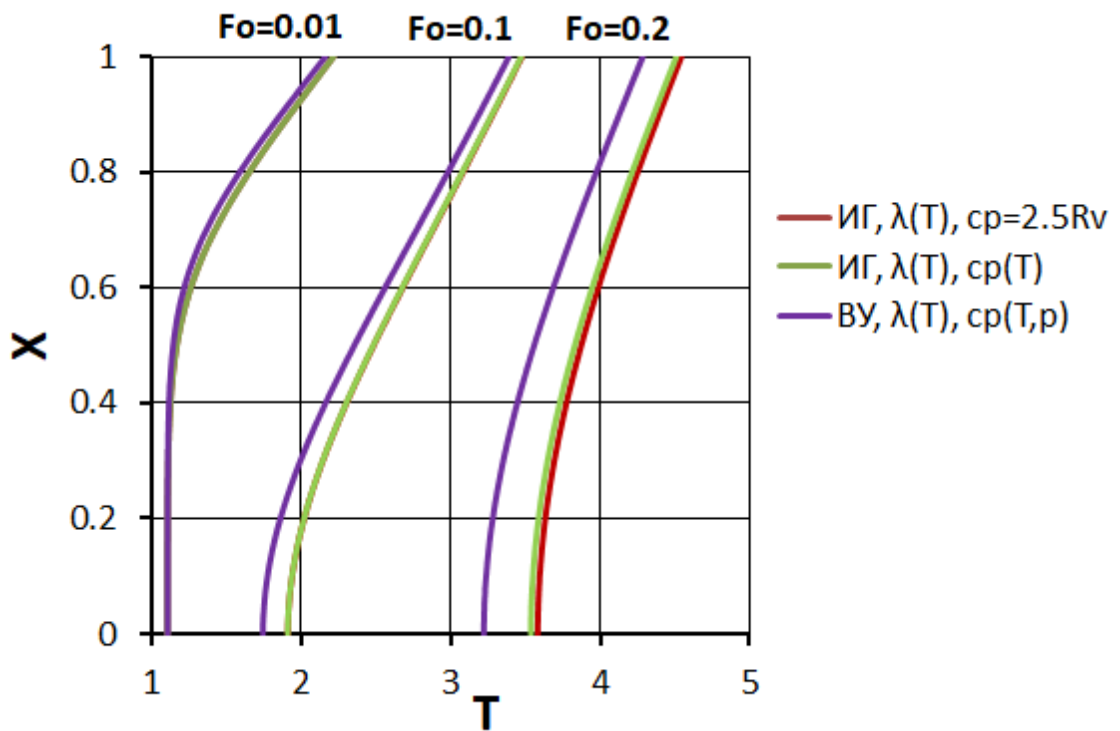


Рисунок 10. Профили температуры в различные моменты времени, рассчитанные для разных моделей среды при $A=6.25$ для задачи с теплоизолированной нижней границей

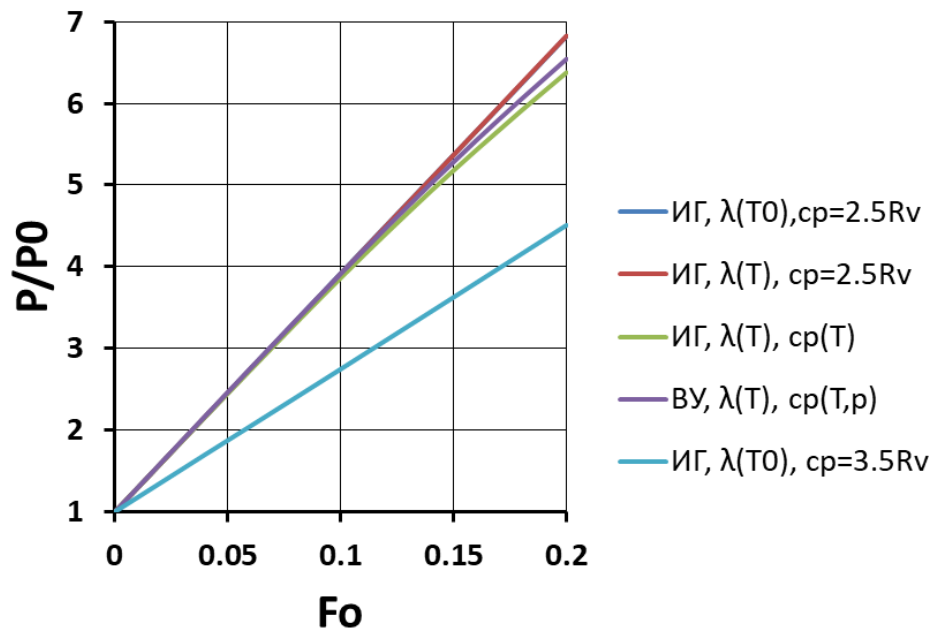


Рисунок 11. Рост давления, рассчитанный для разных моделей среды при $A=12.5$ для задачи с теплоизолированной нижней границей

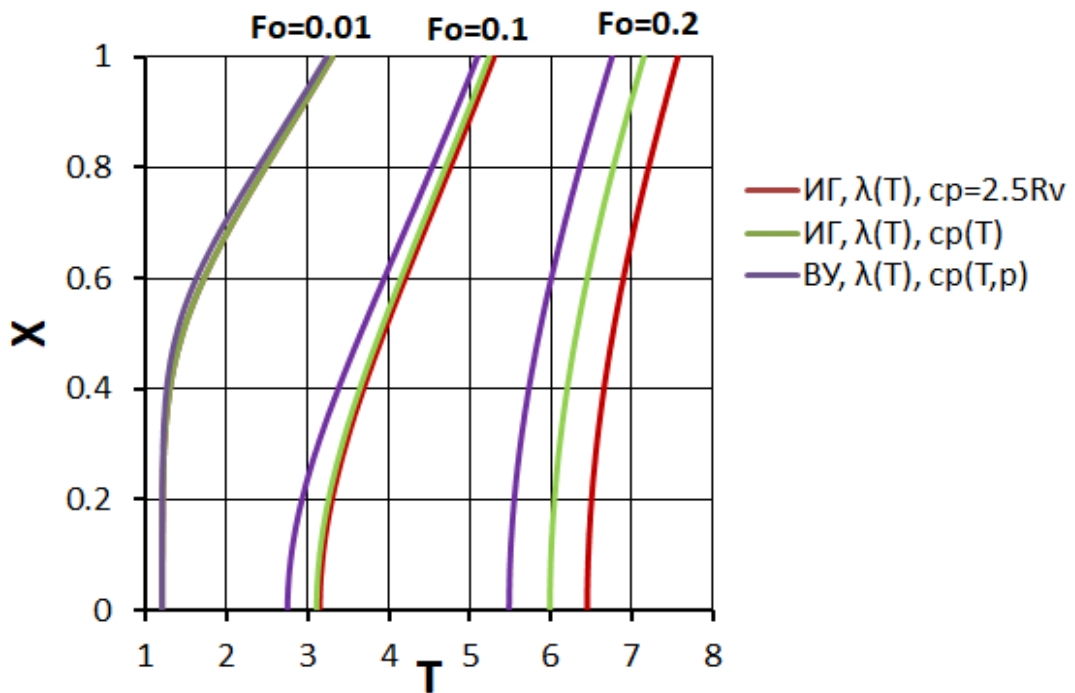


Рисунок 12. Профили температуры в различные моменты времени, рассчитанные для разных моделей среды при $A=12.5$ для задачи с теплоизолированной нижней границей

Как видно из представленных данных, использование для описания свойств водорода модели совершенного газа с постоянной теплоемкостью и теплопроводностью может приводить к существенным погрешностям, как по давлению, так и по температуре, за исключением, малых времен и небольших значениях параметра A . Также к ошибке более 30% по давлению приводит использование в расчетах значения теплоемкости для двухатомного газа при времени нагрева $Fo=0.2$. При этом, модель совершенного газа с зависящими от температуры значениями коэффициента теплопроводности и изобарной теплоемкости показывает достаточно хорошее совпадение с результатами, рассчитанными с использованием полной модели реального газа. В диапазоне тепловых потоков $A=1-12.5$ и времени нагрева до $Fo=0.2$ максимальное отклонение температуры от модели реального газа составило менее 10% по сравнению с максимумом по профилю. Для давления максимальное отклонение составило 3% по сравнению с максимумом давления в модели реального газа.

В случае задачи с изотермической нижней границей рост давления в случае совершенного газа с постоянной теплоемкостью определяется следующим соотношением:

$$\frac{dP}{dt} = (\gamma - 1)A(1 - \overline{Nu}_s) \quad (3.1.18)$$

$$\overline{Nu}_s = \frac{1}{A} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_0 \quad (3.1.19)$$

С учетом проведенных для теплоизолированной стенки результатов, в данном случае не будем рассматривать модель среды с постоянной изобарной теплоемкостью, равной $3.5R_v$. На Рисунках 13-18 приведены данные расчетов задачи с изотермической стенкой, полученные с использованием различных моделей среды.

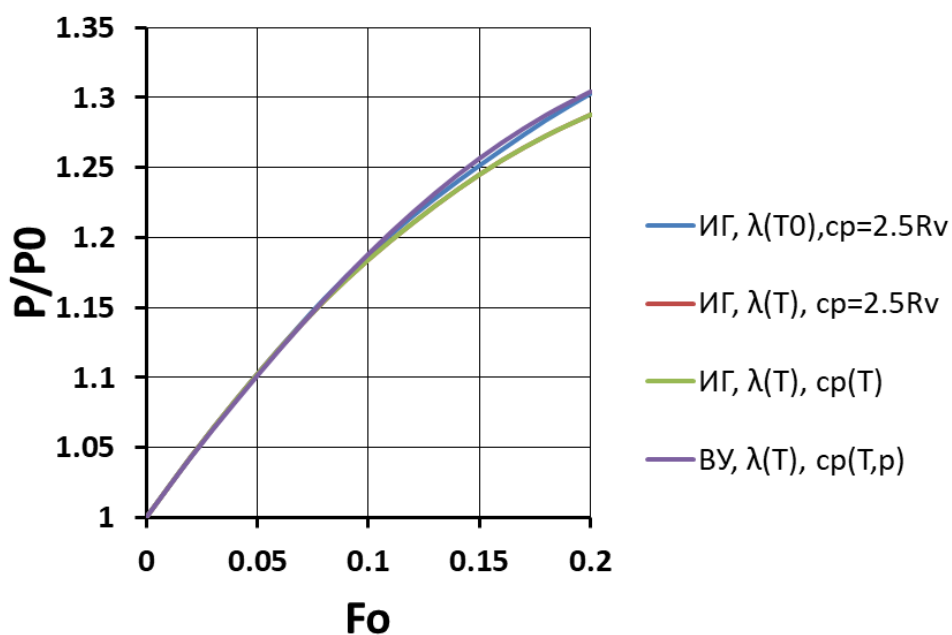


Рисунок 13. Рост давления, рассчитанный для разных моделей среды при $A=1$ для задачи с изотермической нижней границей

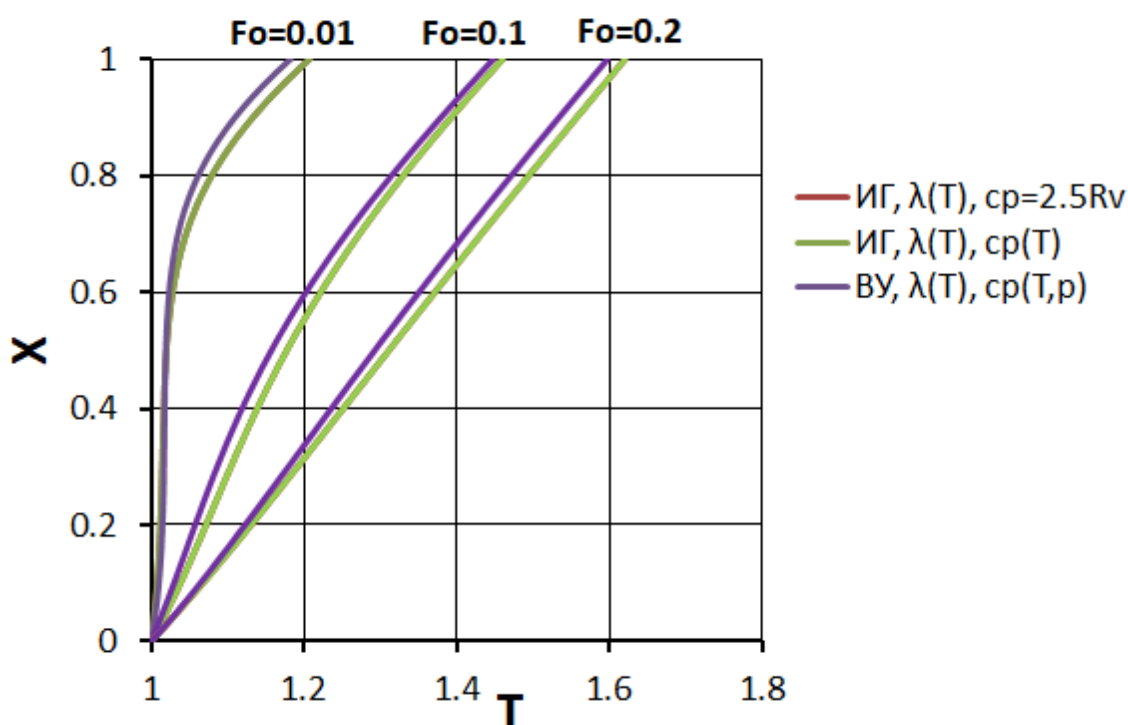


Рисунок 14. Профили температуры в различные моменты времени, рассчитанные для разных моделей среды при $A=1$ для задачи с изотермической нижней границей

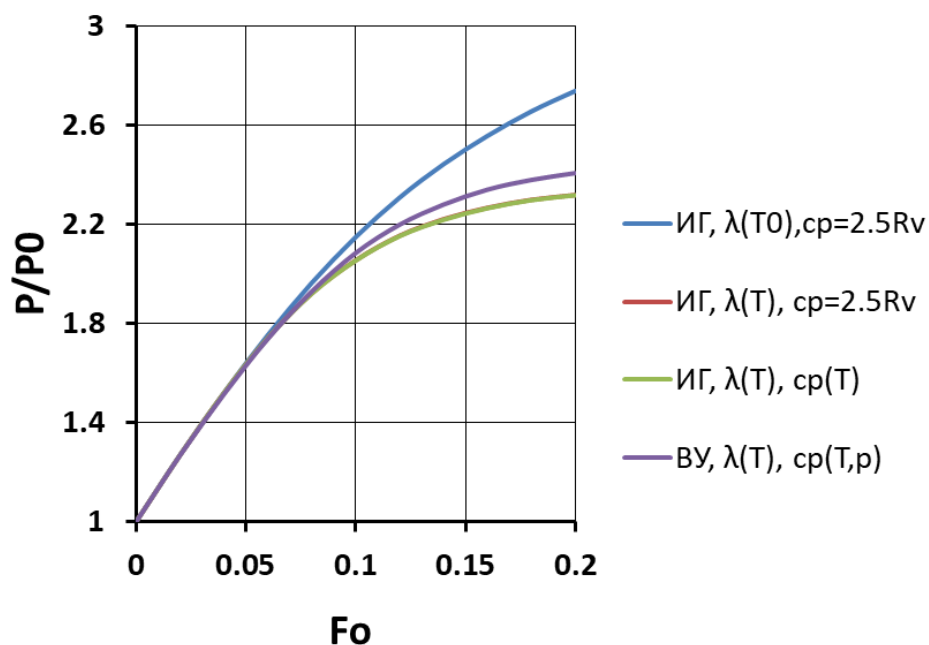


Рисунок 15. Рост давления, рассчитанный для разных моделей среды при $A=6.25$ для задачи с изотермической нижней границей

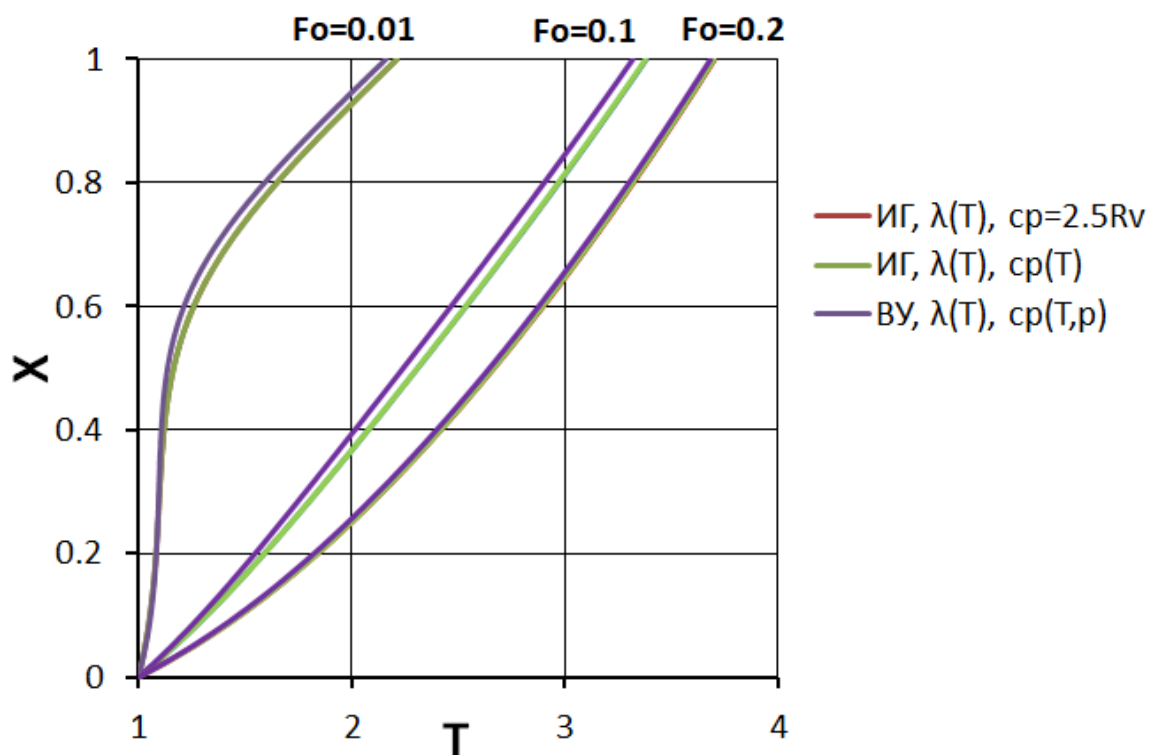


Рисунок 16. Профили температуры в различные моменты времени, рассчитанные для разных моделей среды при $A=6.25$ для задачи с изотермической нижней границей

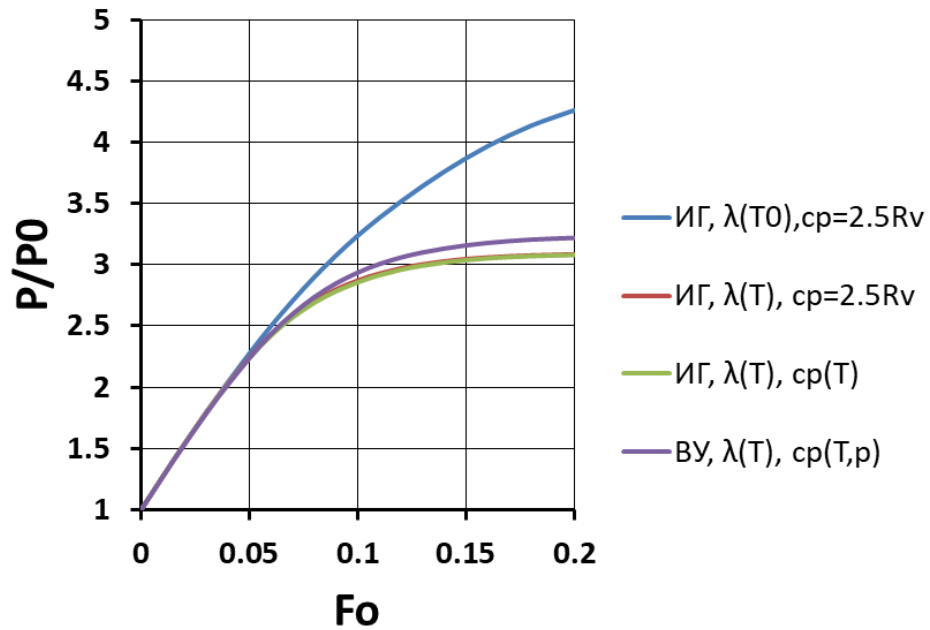


Рисунок 17. Рост давления, рассчитанный для разных моделей среды при $A=12.5$ для задачи с изотермической нижней границей

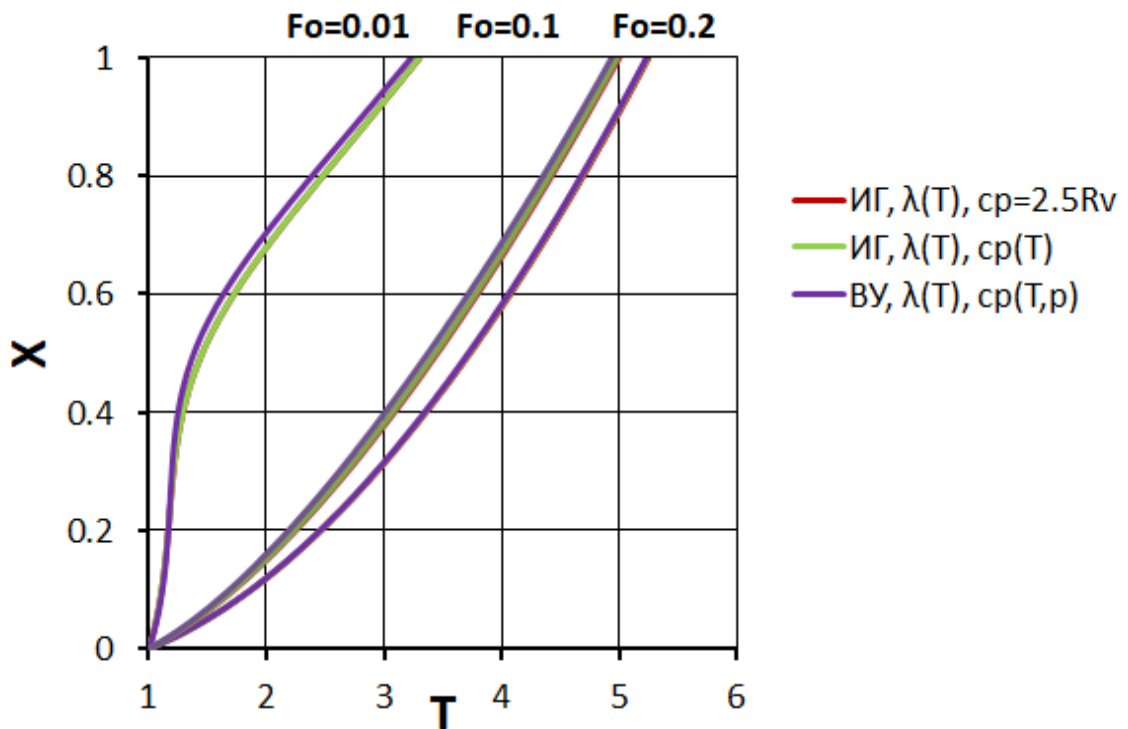


Рисунок 18. Профили температуры в различные моменты времени, рассчитанные для разных моделей среды при $A=12.5$ для задачи с изотермической нижней границей

В рамках данной постановки задачи наибольшее расхождение по давлению, достигающее 30% по сравнению с результатами, полученными для модели реального газа, показала модель с постоянным коэффициентом теплопроводности. При этом, расчеты по модели калорически неидеального газа с учетом температурных зависимостей коэффициента теплопроводности и изобарной теплоемкости и модель, учитывающая только переменность теплопроводности, демонстрирует малое отклонение от результатов, полученных в рамках модели реального газа, не превышающее 4% по давлению.

Градиенты температуры и величины давления, реализовавшиеся в паровой подушке водородных баков по данным известных экспериментальных работ, не превышали 100 К и 4 бар. В ходе модельных расчетов был получен более широкий диапазон давлений и температур. Из приведенных результатов можно отметить, что передача тепла и поршневой эффект в водороде с достаточной точностью описываются моделью совершенного газа с учетом температурных зависимостей коэффициента теплопроводности и изобарной теплоемкости.

Выбранное для модельных расчетов максимальное значение параметра A соответствует тепловому потоку, подводимому к паровой подушке модельного бака в эксперименте [9]. Однако градиенты температуры, полученные в расчетах без учета фазовых переходов, теплоемкости стенки и бокового подвода тепла почти в 3 раза выше, чем в данном эксперименте. В следующей главе будет анализироваться влияние комбинированного подвода тепла к пару и влияние теплоемкости стенки бака, используя для описания свойств водорода модель калорически неидеального газа, эффективность которой была показана в данном разделе.

3.2 Естественная конвекция газа в замкнутой квадратной области

При исследовании естественной конвекции газов широко применяется модель Буссинеска. Однако при достаточно больших градиентах температуры погрешность применения данного подхода к математическому моделированию может существенно возрасти [59]. По сравнению с приближением Буссинеска, гомобаричная модель требует для корректного применения лишь малость скорости движения в сравнении со скоростью звука, и способна корректно описывать свободно-конвективный тепломассообмен в случае существенных неоднородностей температуры и плотности. Целесообразно оценить погрешность применения модели Буссинеска на примере модельной задачи путем сравнения полученных в ее асимптотике решений с данными, рассчитанными при помощи приближения гомобаричности.

В данном разделе рассмотрена задача о стационарной конвекции водорода в квадратной ячейке между вертикальными разнонагретыми изотермическими стенками. Проанализированы особенности течения газа при наличии значительных относительных перепадов температуры между стенками, а также оценена погрешность применения приближения Буссинеска для данной задачи. Кроме того, показано определяющее влияние выбора модели среды для приближения Буссинеска на погрешность в определении основных параметров задачи.

3.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о стационарной конвекции газа в квадратной ячейке (Рисунок 5). Расчеты будем проводить для водородного пара, а зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры будем считать линейными. Для описания тепломассопереноса воспользуемся приближением

гомобаричности. Целесообразно привести уравнения (5.5.1–5.5.4) к виду, более подходящему для описываемой задачи.

Введем безразмерную избыточную температуру:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_H - T_C} = \frac{T - 1}{A} \quad (3.2.1)$$

Выбор реперной температуры T_0 в общем случае произволен. В рамках данной работы будут рассматриваться значения реперной температуры, удовлетворяющие следующему неравенству: $T_C \leq T_0 \leq T_H$. Введем параметр, характеризующий отличие реперной температуры от температур горячей и холодной стенок:

$$\xi = \frac{T_0 - T_C}{\Delta T} \quad (3.2.2)$$

Заметим, что $\xi=0$, если в качестве температуры T_0 берется температура холодной стенки T_C ; $\xi=1$ при $T_0=T_H$ и $\xi=1/2$, если в качестве температуры T_0 берется средняя температура $(T_C+T_H)/2$.

С учетом сделанных замен, задача преобразуется к следующему безразмерному виду:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial y} = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho w u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w w}{\partial y} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{Ra \text{ Pr}}{P(1 + A\theta)} \theta \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial \rho u \theta}{\partial x} + \frac{\partial \rho w \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad (3.2.6)$$

$$P = \rho(1 + A\theta) \quad (3.2.7)$$

$$P(t) = \frac{1}{\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1 + A\theta}} \quad (3.2.8)$$

$$\theta(0, y) = -\xi; \quad \theta(1, y) = 1 - \xi; \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \quad (3.2.9)$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \quad w(0, y) = w(1, y) = w(x, 0) = w(x, 1) = 0 \quad (3.2.10)$$

$$\lambda = 1 + A\theta \quad (3.2.11)$$

$$\mu = 1 + A\theta \quad (3.2.12)$$

Необходимо отметить, что при $A \rightarrow 0$ задача (2.6.3-2.6.9) переходит в задачу Буссинеска, описываемую следующими уравнениями:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial u u}{\partial x} + \frac{\partial w u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.2.14)$$

$$\frac{\partial w u}{\partial x} + \frac{\partial w w}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + Ra \text{Pr} \theta \quad (3.2.15)$$

$$\frac{\partial u \theta}{\partial x} + \frac{\partial w \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (3.2.16)$$

$$\theta(0, y) = 0; \quad \theta(1, y) = 1; \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \quad (3.2.17)$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \quad w(0, y) = w(1, y) = w(x, 0) = w(x, 1) = 0 \quad (3.2.18)$$

Числа Рэлея, Прандтля и коэффициент сжимаемости в таком случае определим следующим образом:

$$Ra = \frac{g \beta_T \Delta T L^3 \rho_0^2 c_{p0}}{\lambda_0 \mu_0} \quad \text{Pr} = \frac{\mu_0 c_{p0}}{\lambda_0} \quad \beta_T = \frac{1}{T_0}, \quad \Delta T = T_H - T_C \quad (3.2.19)$$

3.2.2 Результаты расчетов

Решения для сжимаемой постановки, рассчитанные представленным в главе 2 консервативным методом, сравнивались с результатами, полученными в пределе Буссинеска при $A \rightarrow 0$.

На Рисунке 19 представлено влияние выбора реперной температуры T_0 на относительную погрешность определенного в пределе Буссинеска среднего числа Нуссельта по сравнению с данными, полученными для конвекции при больших температурных перепадах.

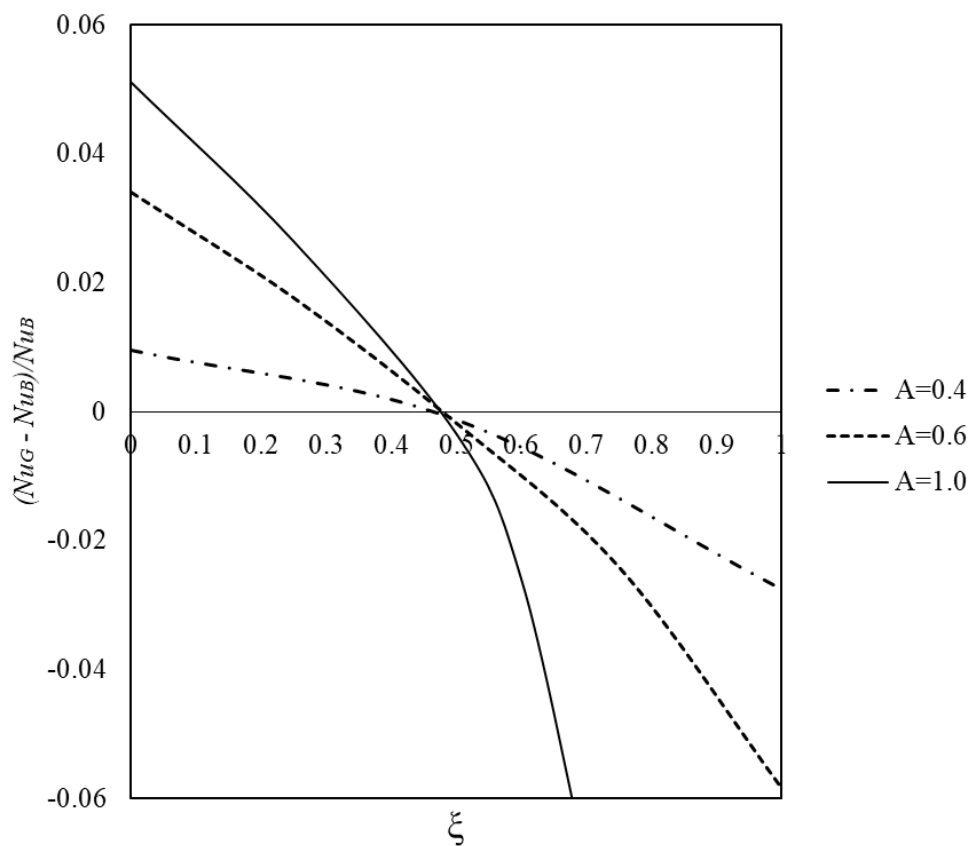


Рисунок 19. Относительная погрешность определения среднего числа Нуссельта в газе по сравнению с пределом Буссинеска от ξ при различных значениях A и фиксированном $Ra=10^6$

На Рисунке 20 представлена относительная погрешность между максимальной скоростью в газе и максимальной скоростью в пределе Буссинеска в зависимости от ξ :

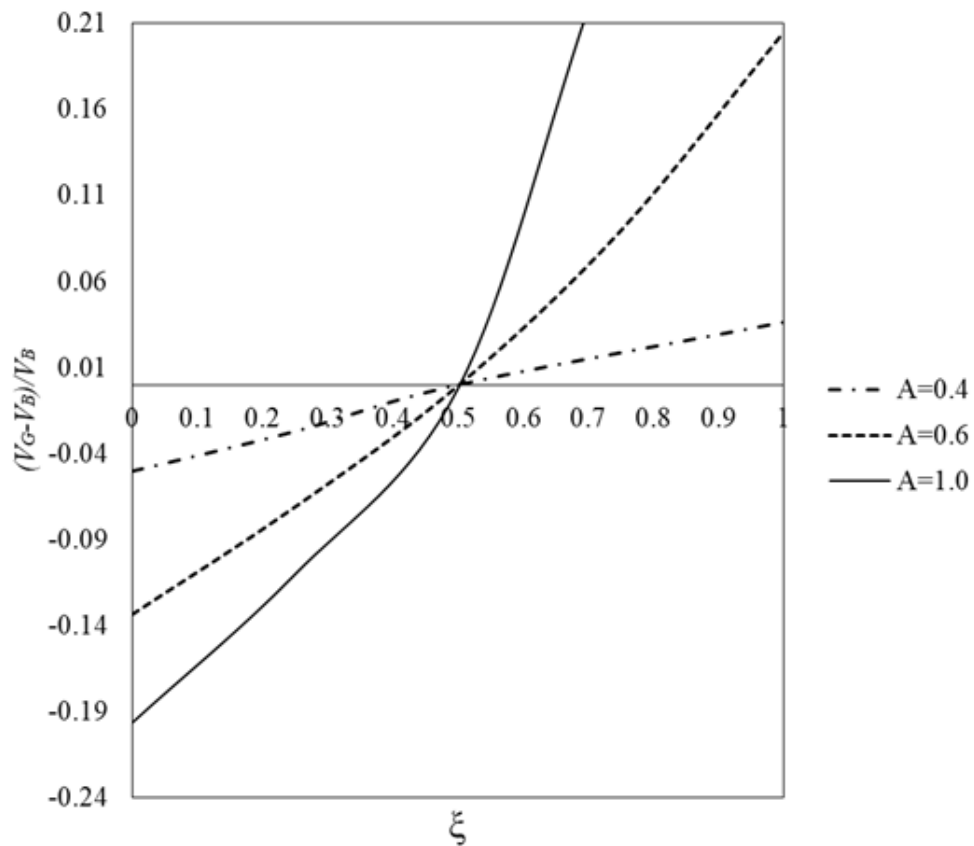


Рисунок 20. Относительная погрешность определения максимума скорости в газе по сравнению с пределом Буссинеска от ξ при различных значениях A и фиксированном $Ra=10^6$

Из представленных данных видно, что при значении $\xi=1/2$ разница между решениями, полученными при больших значениях A и в пределе Буссинеска минимальна, и не зависит от A. Данному значению ξ соответствует определенное значение реперной температуры:

$$T^* = \frac{T_H - T_C}{2} \quad (3.2.20)$$

В Таблицах 4-5 представлены значения среднего числа Нуссельта и максимума скорости, рассчитанные для различных значений A и Ra , причем за характерную температуру принята T^* .

Таблица 4. Среднее число Нуссельта при различных значениях Ra и A

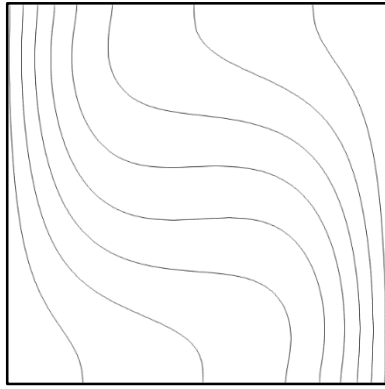
| Ra | A | | | | |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 0.01 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.2 |
| 10^4 | 2.239 | 2.238 | 2.238 | 2.235 | 2.227 |
| 10^5 | 4.529 | 4.532 | 4.533 | 4.531 | 4.524 |
| 10^6 | 8.902 | 8.918 | 8.91 | 8.895 | 8.82 |

Таблица 5. Максимум модуля скорости при различных значениях Ra и A

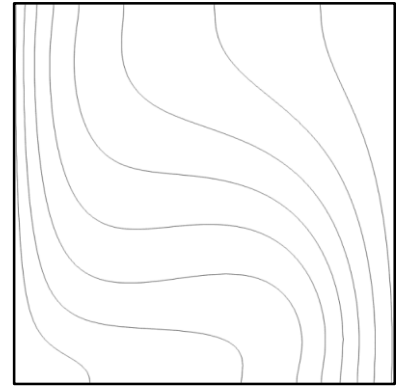
| Ra | A | | | | |
|--------|--------|---------|--------|---------|---------|
| | 0.01 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.2 |
| 10^4 | 20.32 | 20.844 | 21.14 | 21.411 | 22.024 |
| 10^5 | 74.411 | 75.063 | 75.566 | 75.9 | 75.925 |
| 10^6 | 251.52 | 251.424 | 251.41 | 248.003 | 247.216 |

Из представленных данных видно, что погрешность определенных в пределе Буссинеска среднего числа Нуссельта и максимума модуля скорости по сравнению с случаем значительных перепадов температуры при таком выборе реперной температуры минимальна.

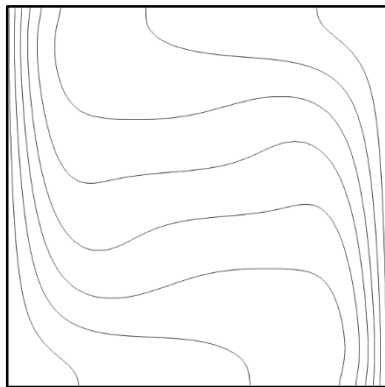
Основное отличие от конвекции Буссинеска проявляется в характеристиках пограничного слоя. На рисунках 23 и 24 представлены изолинии температуры и линии тока в области при различных значениях Ra и A , рассчитанные при реперной температуре, заданной соотношением (3.2.20).



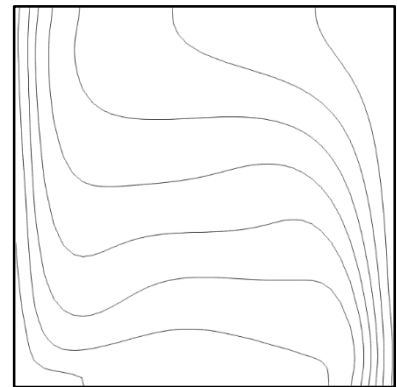
a



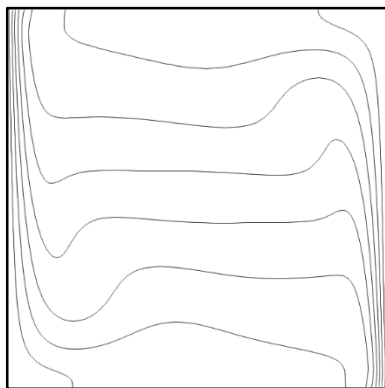
b



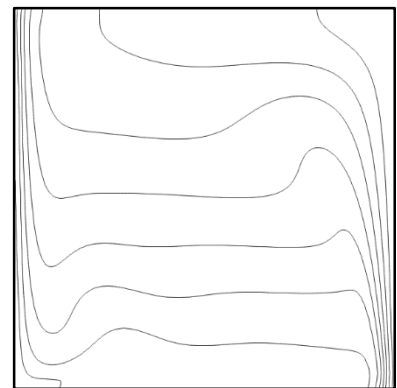
c



d



e



f

Рисунок 21. Изолинии температуры ($Ra=10^4$, $a - A=0.01$, $b - A=1.2$; $Ra=10^5$, $c - A=0.01$, $d - A=1.2$; $Ra=10^6$, $e - A=0.01$, $f - A=1.2$)

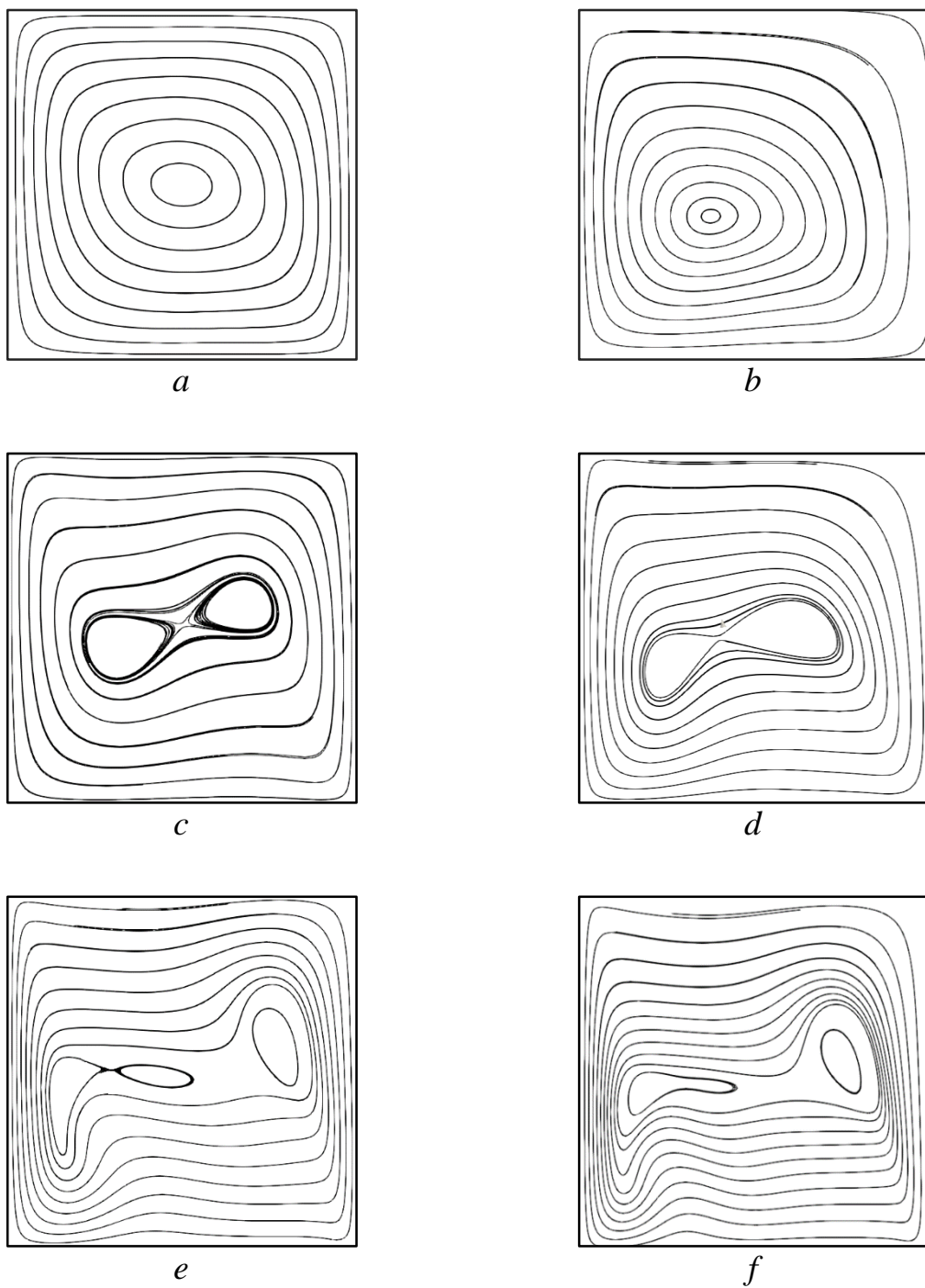


Рисунок 22. Линии тока ($Ra=10^4$, $a - A=0.01$, $b - A=1.2$; $Ra=10^5$, $c - A=0.01$, $d - A=1.2$; $Ra=10^6$, $e - A=0.01$, $f - A=1.2$)

Из представленных на Рисунках 23 и 24 данных видно, что при увеличении характерного перепада температуры наблюдается деформация течения по сравнению с пределом Буссинеска. Данная деформация выражается в сжатии пограничного слоя у холодной стенки и утолщению у горячей. В работе [97] дается следующее обобщение расчетных данных по положению максимумов скорости, под которым понимается расстояние от ближайшей стенки до положения максимума по оси x , полученное для конвекции Буссинеска:

$$\delta_H = \delta_C = \frac{1.22}{Ra^{0.25}} \quad (3.2.21)$$

В рамках рассматриваемой в данной работе постановки будем искать положение максимумов скорости у горячей и холодной стенок с той же, что и в [97], зависимостью от числа Рэлея в следующем виде:

$$\delta_H = \frac{a_1}{Ra^{0.25}} (1 + b_1 A) \quad (3.2.22)$$

$$\delta_C = \frac{a_2}{Ra^{0.25}} (1 - b_2 A) \quad (3.2.23)$$

Здесь a_1 , b_1 , a_2 и b_2 – неизвестные коэффициенты. Обобщение расчетных данных дает следующие значения коэффициентов:

$$\delta_H = \frac{1.3}{Ra^{0.25}} (1 + 0.51A) \quad (3.2.24)$$

$$\delta_C = \frac{1.3}{Ra^{0.25}} (1 - 0.38A) \quad (3.2.25)$$

Из (3.2.24) и (3.2.25) можно заключить, что при $A \leq 0.5$ погрешность полученных в пределе Буссинеска положений максимумов не превышает 30% по сравнению результатами, полученными для сжимаемого газа. Похожие результаты были получены в [69] для воздуха. Определяющее значение правильного задания свойств среды для задачи о свободно-конвективном пограничном слое на пластине и задачи о конвекции бесконечного слоя

водорода между вертикальными разогретыми стенками было продемонстрировано в работах [98, 99].

Проведенный в данном разделе анализ показывает, что при описании конвекции в газах при больших перепадах температуры можно значительно уменьшить погрешность определения основных параметров задачи даже в рамках модели Буссинеска, правильно задав свойства среды, которые в случае описанной в представленном разделе постановки задаются реперной температурой T_0 . При этом, характеристики динамического пограничного слоя существенно меняются при росте характерного температурного перепада.

3.3 Свободная-конвективный теплообмен газа в цилиндрической емкости с изотермической нижней границей

Как уже было отмечено во второй главе, результаты модельных и натуральных экспериментов по хранению жидкого водорода показывают, что в паровой подушке бака могут реализовываться достаточно большие перепады температуры между зеркалом жидкости и верхней частью бака, достигающие десятков градусов Кельвина.

В случае модельных опытов, которые проводятся в земных условиях на баках меньшего масштаба, одной из проблем является сложность воспроизведения такой же, как в натурном изделии, толщины стенки бака. Существенной проблемой при подготовке опытов на баках уменьшенных пропорций является невозможность выдержать масштаб толщины стенки. В итоге обычно отношение толщины стенки модельной установки к характерному размеру бака оказывается значительно больше, чем в натурном изделии.

Например, толщина стальной стенки бака в эксперименте [9] составляла порядка 1.0 мм при радиусе цилиндрической части бака 0.05 м. В случае эллипсоидного бака, использовавшегося для опытов в работе [10] стенка бака

была сделана из алюминиевого сплава, а ее толщина составляла 2 мм, тогда как диаметр бака был равен 1.1 м. Таким образом, в экспериментах с уменьшенными моделями баков теплоемкость стенки обычно завышена по сравнению с натурными условиями. При этом основные работы по изучению влияния стенки бака на процесс хранения касались лишь ее части, смоченной жидкостью. Чтобы заполнить данный пробел, в данном разделе на примере модельной задачи о нестационарной конвекции газа в цилиндрическом сосуде с изотермической нижней границей рассмотрено влияние теплоемкости стенки на температурное расслоение, интенсивность конвекции и рост давления.

3.3.1 Постановка задачи

На Рисунке 23 представлена схема рассматриваемой модельной задачи:

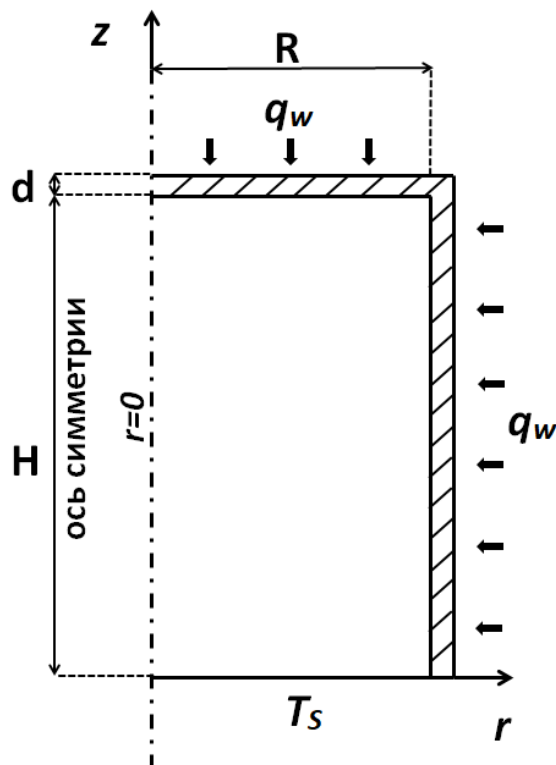


Рисунок 23. Схема рассматриваемой задачи о конвекции в цилиндре

Рассматривается прогрев газа в цилиндрическом сосуде от некоторого начального состояния с однородным распределением температуры, равной температуре изотермической стенки. Будем рассматривать калорически неидеальный газ. Систему уравнений конвекции в приближении малых чисел Маха для осесимметричного случая (5.5.9 – 5.5.12), приведенную в Приложении 1, необходимо дополнить уравнением теплопроводности для стенки:

$$K_{WW}^E c_W \frac{\partial T}{\partial t} = K_{WW}^\lambda \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_W r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_W \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (3.3.1)$$

Граничные условия:

Температура:

$$K_{WW}^\lambda \lambda_W \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1+\delta} = A; \quad K_{WW}^\lambda \lambda_W \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=B+\delta} = A; \quad T \Big|_{z=0} = 1.0; \quad \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0; \quad (3.3.2)$$

Скорость:

$$u \Big|_{r=0} = 0; \quad u \Big|_{r=1} = 0; \quad u \Big|_{z=0} = 0; \quad u \Big|_{z=B} = 0; \quad (3.3.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0; \quad w \Big|_{r=1} = 0; \quad w \Big|_{z=0} = 0; \quad w \Big|_{z=B} = 0; \quad (3.3.4)$$

Начальные условия:

$$u(r, z) = 0; \quad w(r, z) = 0; \quad T(r, z) = 1.0; \quad \rho(r, z) = 1.0, \quad P = 0 \quad (3.3.5)$$

Здесь высота сосуда и безразмерная толщина стенки сосуда введена следующим образом:

$$\delta = \frac{d}{R}, \quad B = \frac{H}{R}$$

Также необходимо отметить, что температура и тепловой поток на границе раздела стенки и пара должны быть непрерывны.

Для оценки влияния стенки на энергетический баланс и рост давления в емкости проинтегрируем уравнения энергии для пара и стенки по объему цилиндра с учетом уравнения состояния и теоремы Гаусса. Получим

следующее соотношение для роста термодинамического давления в сосуде, выбросив члены порядка δ^2 :

$$C_V \frac{dP}{dt} = \gamma_{T_0} A \left[2 + \frac{1 + \delta(2 + B) - \overline{Nu}_S}{B} \right] - \Delta E_W \quad (3.3.6)$$

Здесь:

$$C_V = \frac{\int_0^1 \int_0^B \frac{1}{\gamma_T} r dr dz}{B/2\gamma_{T_0}}$$

$$\Delta E_W = K_{WV}^E \frac{\int_0^{1+\delta} \int_B^{B+\delta} c_W \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz + \int_1^{1+\delta} \int_0^B c_W \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz}{B/2\gamma_{T_0}}$$

$$\overline{Nu}_S = \overline{Nu}_{VS} + \overline{Nu}_{WS}$$

$$\overline{Nu}_{VS} = \frac{2}{A} \int_0^1 r \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} dr \quad (3.3.7)$$

$$\overline{Nu}_{WS} = \frac{2K_{WV}^{\lambda}}{A} \int_1^{1+\delta} r \lambda_W \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} dr \quad (3.3.8)$$

Из соотношения (3.3.6) видно, что наличие металлической стенки вносит существенные изменения в теплообмен, приводя к увеличению теплоемкости системы, а также являясь тепловым мостом, по которому часть тепла отводится от сосуда.

Для решения уравнений (2.4.5-2.4.9) совместно с (3.3.1-3.3.5) дополним не консервативный метод, описанный во второй главе, решением уравнения теплопроводности стенки. Аппроксимацию данного уравнения проведем с использованием схемы с центральными разностями для диффузионных слагаемых и схемы Эйлера для производной по времени. Решать данное уравнение будем методом переменных направлений [96].

Рассмотрим сначала случай со стальной стенкой, как в эксперименте [9]. Свойства материала стенки при водородных температурах приводятся в [101]. Будем использовать следующую аппроксимацию справочных данных зависимости коэффициентов теплопроводности и теплоемкости:

$$\lambda_W = 1 + 0.0194 \cdot (T - 1)^3 - 0.11004 \cdot (T - 1)^2 + 0.56324 \cdot (T - 1); \quad K_{WW}^E = 4.76 \quad (3.3.9)$$

$$c_W = 1 + 0.14149 \cdot (T - 1)^3 + 0.38151 \cdot (T - 1)^2 + 3.30122 \cdot (T - 1); \quad K_{WW}^\lambda = 246.67 \quad (3.3.10)$$

Для численного решения уравнений использовался метод с разделением задачи на тепловую и динамическую части, где временные производные аппроксимировались схемой Эйлера, диффузионные члены – центральными разностями, а конвективные – противопоточной схемой.

3.3.2 Результаты расчетов

На Рисунках 24 и 25 представлены данные расчетов по росту давления и изменению максимума модуля скорости в сосуде при различных значениях толщины стенки и $B=1$, $Ra=10^8$, $A=12.66$ и $\gamma_0=1.667$.

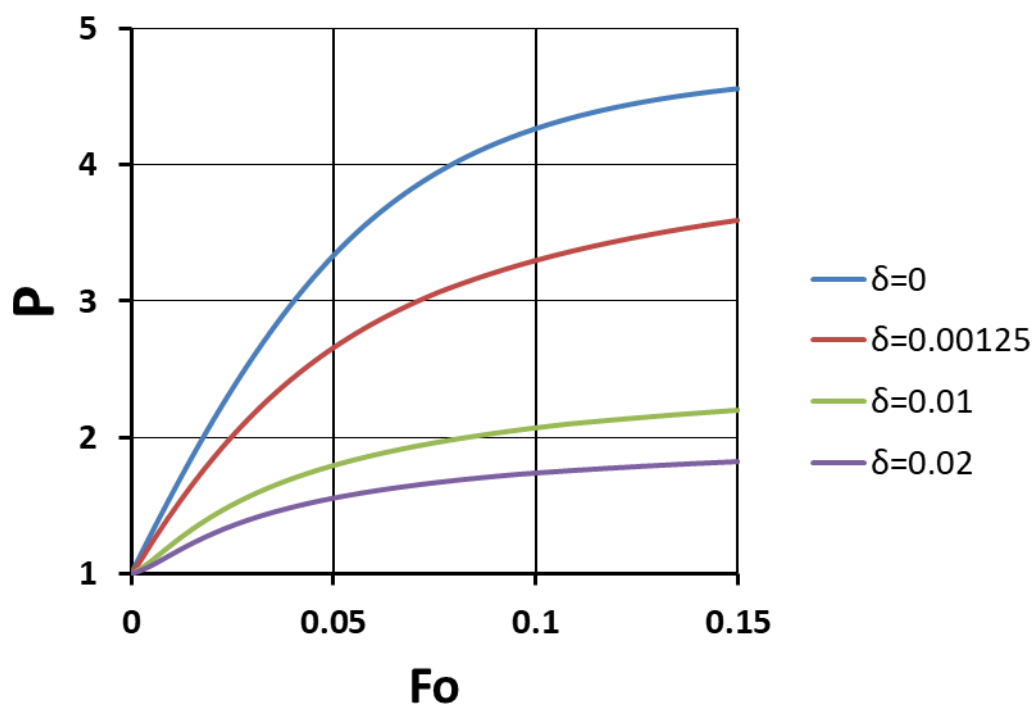


Рисунок 24. Изменение термодинамического давления по времени для различных толщин стенки

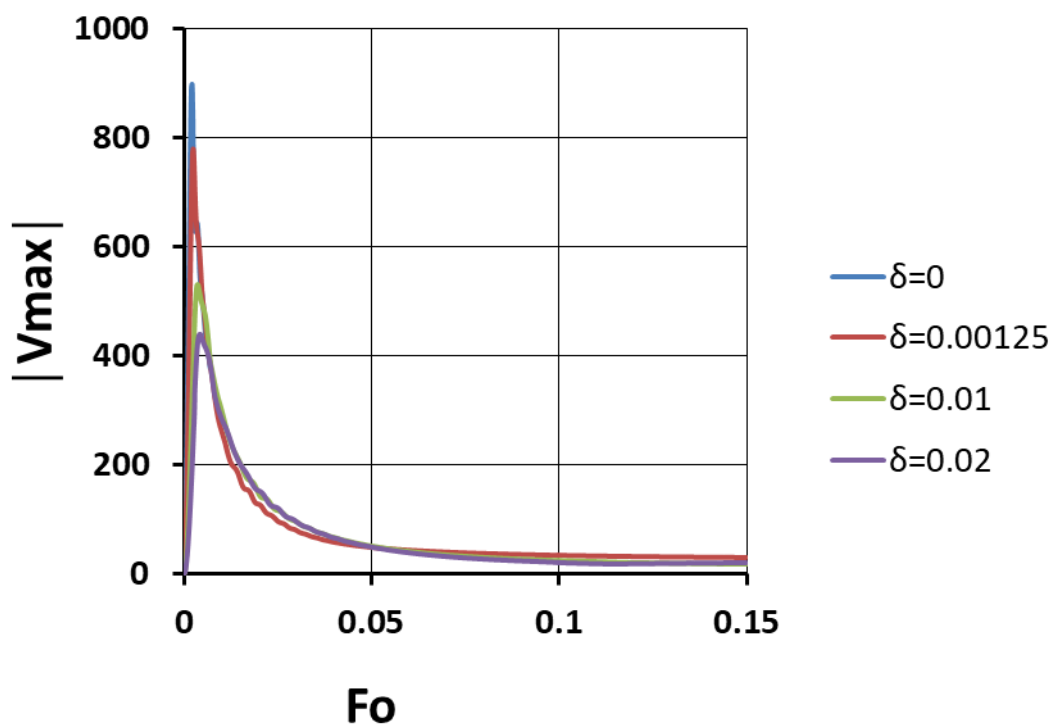


Рисунок 25. Изменение модуля максимума скорости по времени для различных толщин стенки

Из представленных данных видно, что даже при достаточно малых значениях параметра δ значительная часть тепла расходуется на нагрев стенки, снижая темпы роста давления и интенсивность конвекции газа в сосуде.

Влияние теплоемкости стенки на температурное расслоение пара демонстрируется на Рисунках 26-28.

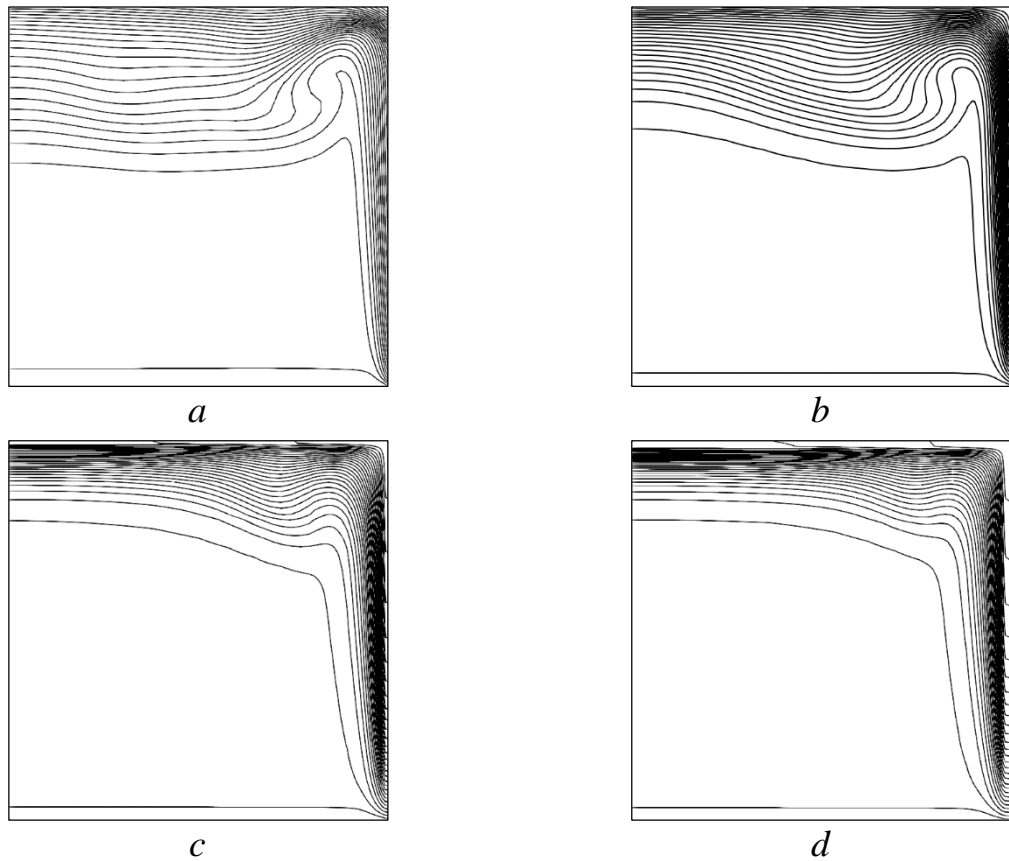


Рисунок 26. Изолинии температуры для различных толщин стенки, $Fo=0.003$, $T_{min}=1$: *a* – $\delta=0$, $T_{MAX}=6.64$; *b* – $\delta=0.00125$, $T_{MAX}=4.74$; *c* – $\delta=0.01$, $T_{MAX}=2.86$; *d* – $\delta=0.02$, $T_{MAX}=3.13$

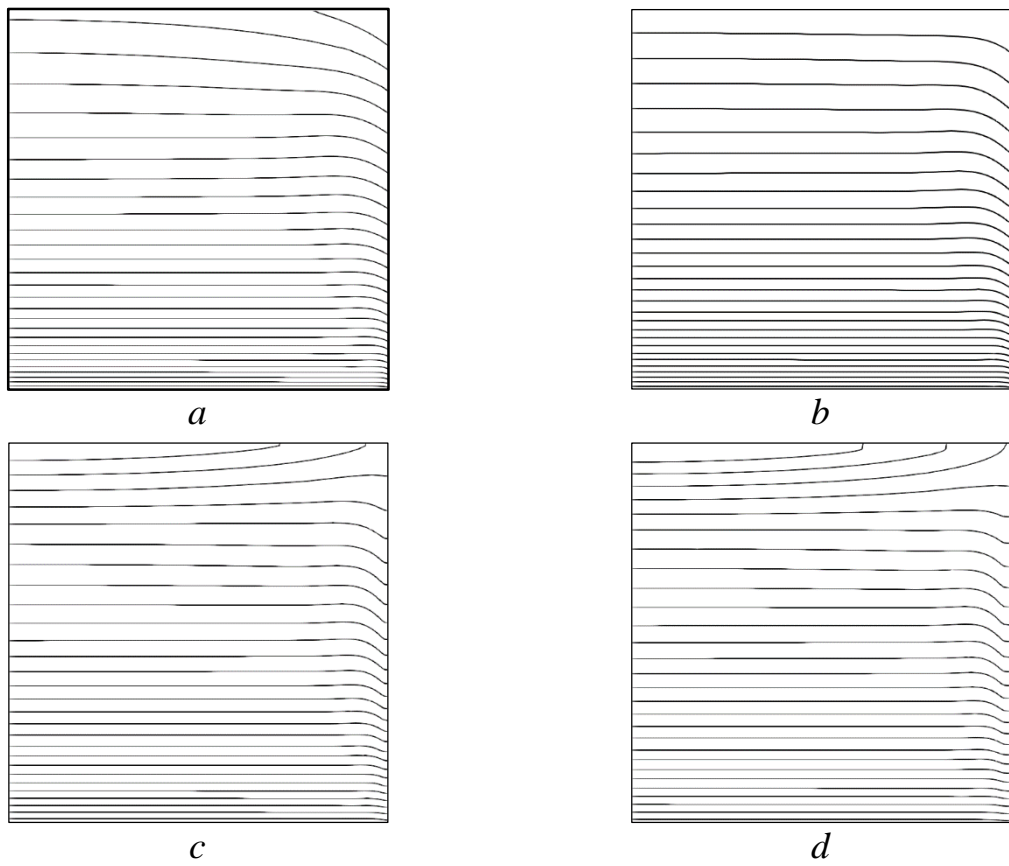


Рисунок 27. Изолинии температуры для различных толщин стенки, $Fo=0.075$, $T_{min}=1$: $a - \delta=0$, $T_{MAX}=2.25$; $b - \delta=0.00125$, $T_{MAX}=1.75$; $c - \delta=0.01$, $T_{MAX}=1.39$; $d - \delta=0.02$, $T_{MAX}=1.12$

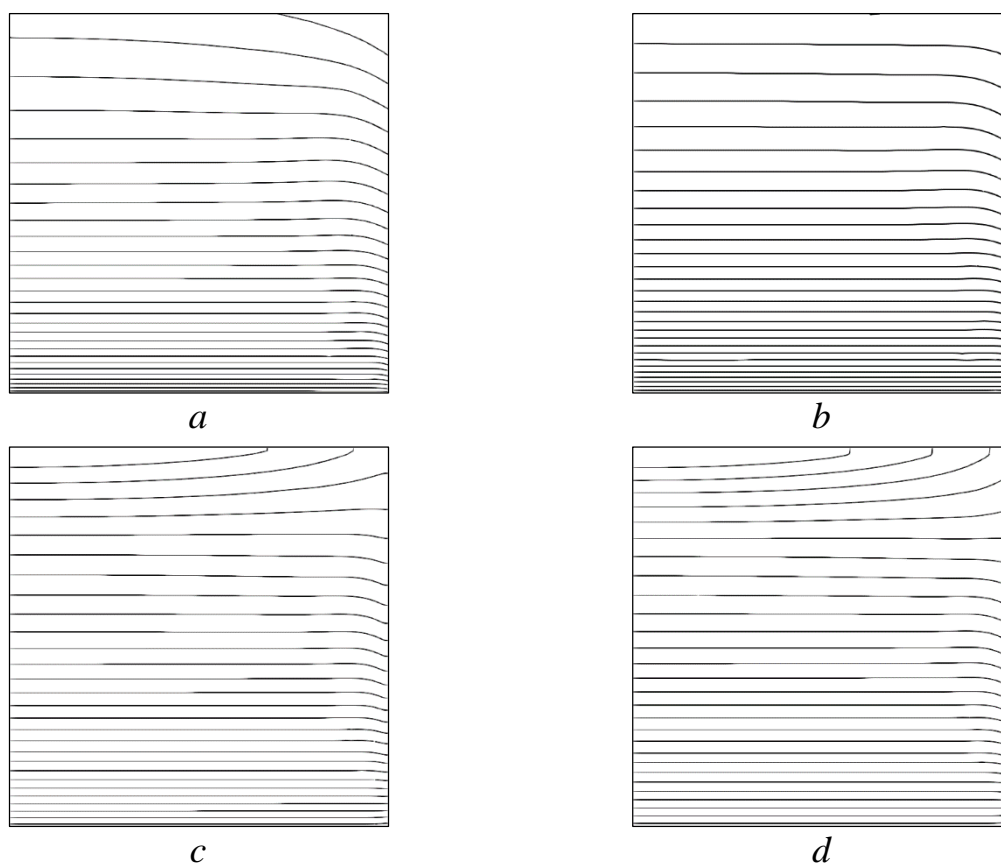


Рисунок 28. Изолинии температуры для различных толщин стенки, $Fo=0.15$, $T_{min}=1$: $a - \delta=0$, $T_{MAX}=7.53$; $b - \delta=0.00125$, $T_{MAX}=5.67$; $c - \delta=0.01$, $T_{MAX}=3.37$; $d - \delta=0.02$, $T_{MAX}=2.68$

Как видно из представленных на рисунках 26-28 результатов расчетов, увеличение толщины стенки приводит к снижению температурного расслоения, а также меняет структуру поля температуры. Необходимо отметить, при достаточно больших временах прогрева наблюдается вертикальная температурная стратификация для любых δ .

Так как интенсивность конвекции и величина температурного расслоения максимальна при нулевой толщине стенки, влияние конвекции на температурную стратификацию изучалось для случая $\delta=0$. На рисунках 29-32 представлено сравнение температурного расслоения, и структуры течения в различные моменты времени в случае отсутствия перегрузки и при достаточно интенсивной конвекции.

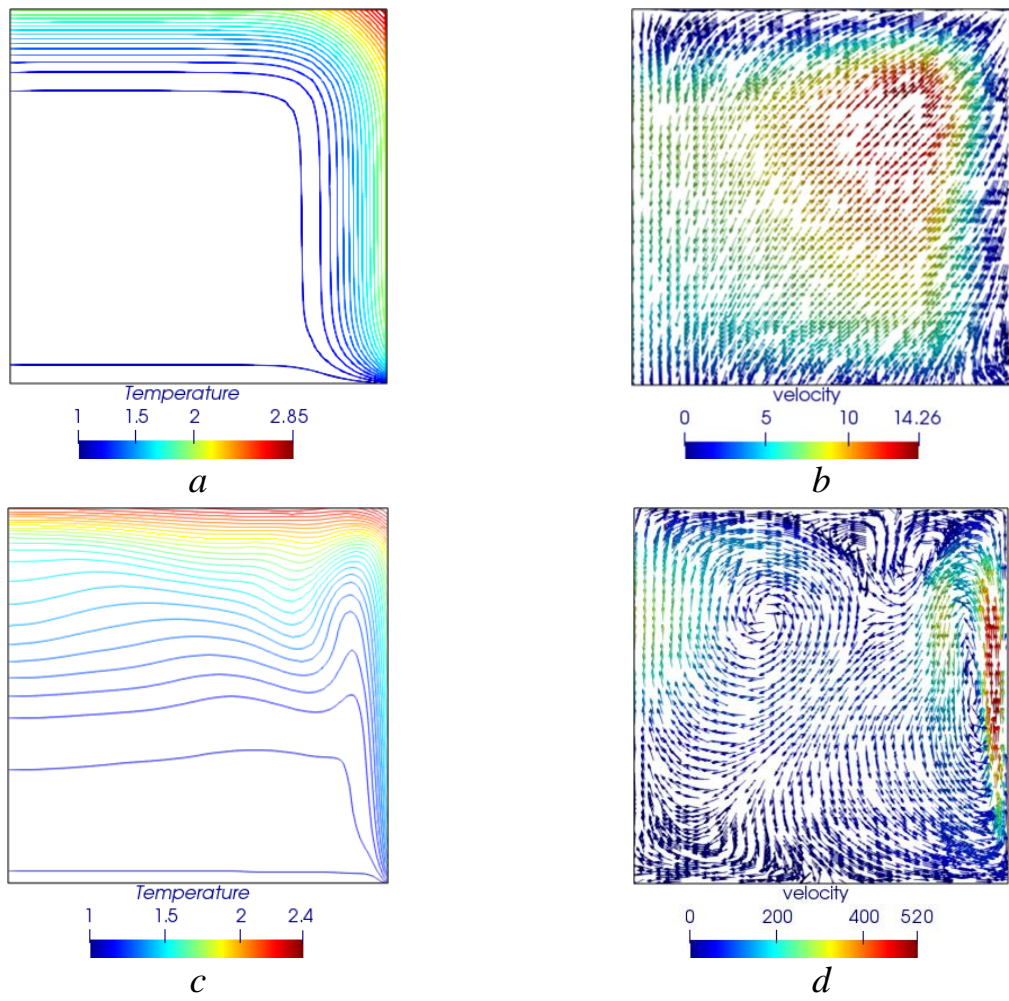


Рисунок 29. Изолинии температуры и векторы скорости; $Fo=0.0045$, $A=12.66$, $\delta=0$, $B=1$: *a* и *b* - $Ra=0$, *c* и *d* - $Ra=10^8$

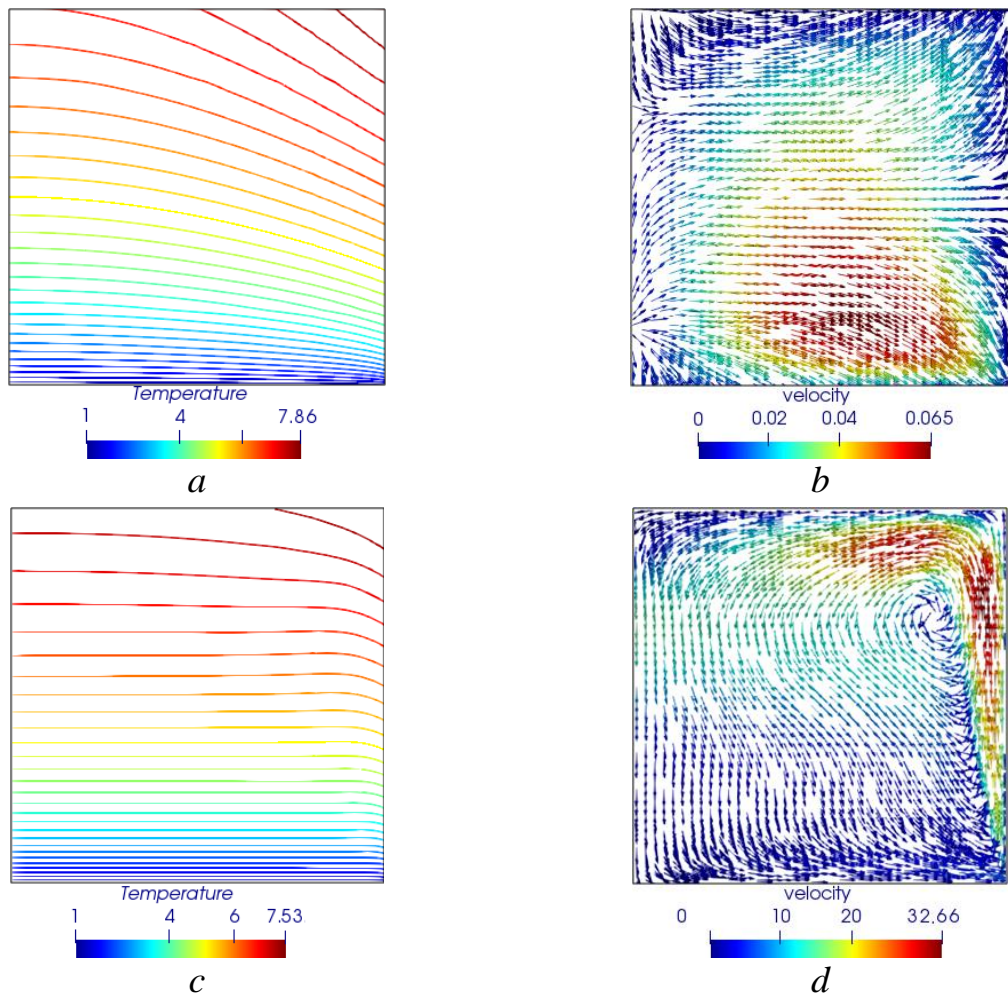


Рисунок 30. Изолинии температуры и векторы скорости; $Fo=0.15$, $A=12.66$, $\delta=0$, $B=1$: *a* и *b* - $Ra=0$, *c* и *d* - $Ra=10^8$

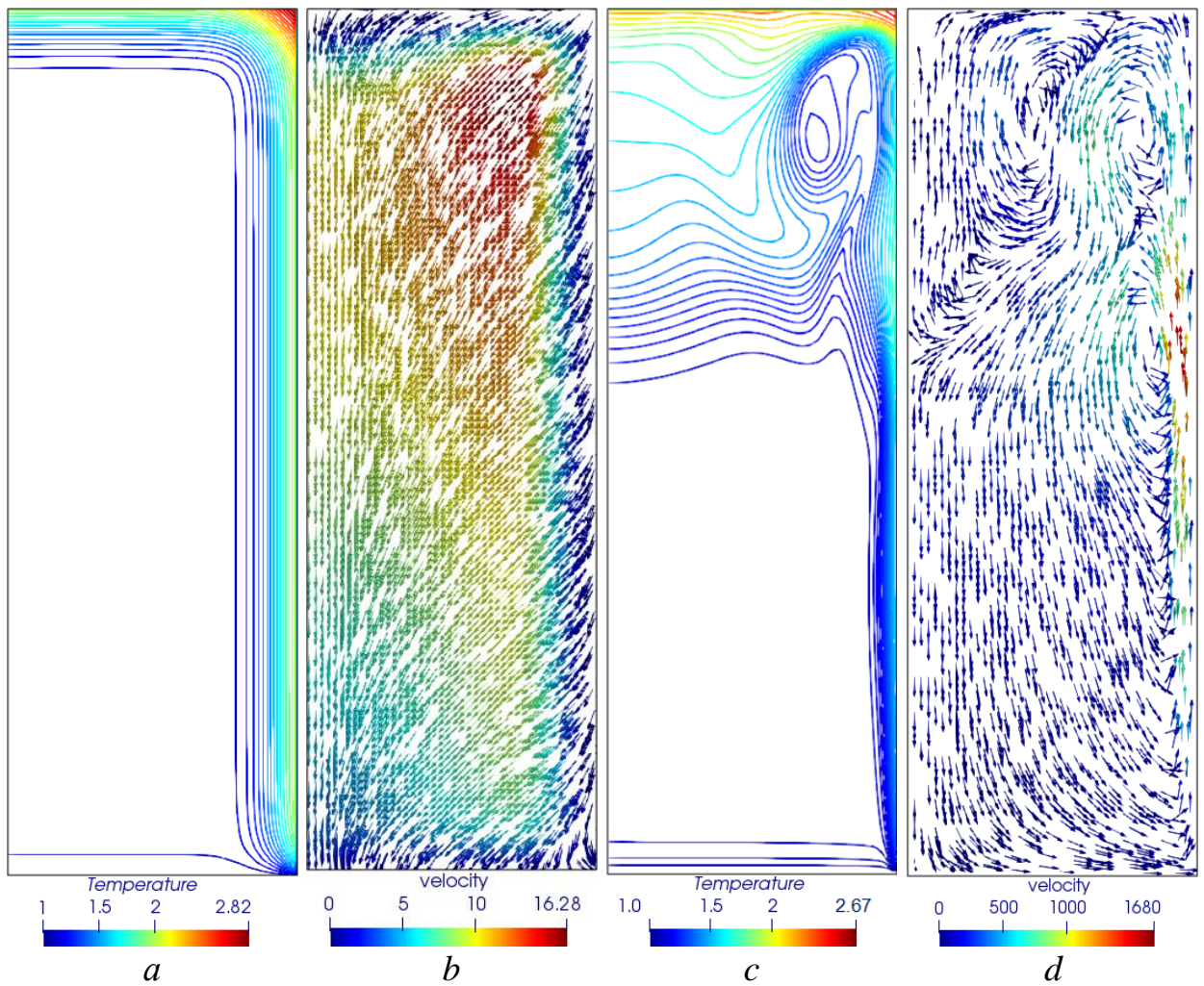


Рисунок 31. Изолинии температуры и векторы скорости; $Fo=0.0045$, $A=12.66$, $\delta=0$, $B=3$: *a* и *b* - $Ra=0$, *c* и *d* - $Ra=10^8$

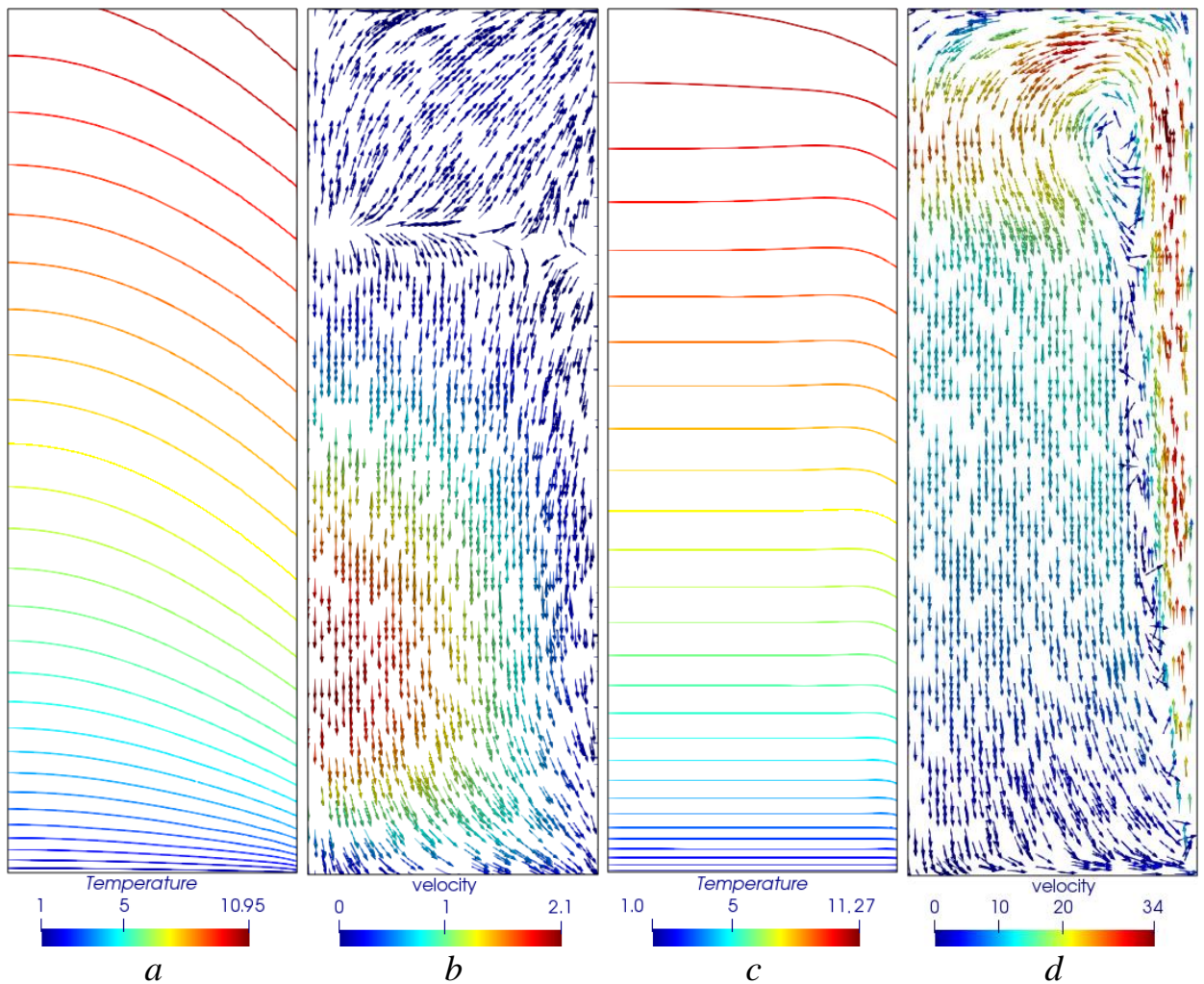


Рисунок 32. Изолинии температуры и векторы скорости; $Fo=0.15$, $A=12.66$, $\delta=0$, $B=3$: a и b - $Ra=0$, c и d - $Ra=10^8$

Из приведенных данных видно, что при наличии конвекции в газе, как и в случае жидкости, формируется вертикальная температурная стратификация, когда градиенты температуры в вертикальном направлении значительно больше, чем в горизонтальном. В Таблице 6 представлены расчётные данные по давлению в момент времени $Fo=0.15$ при различных значениях Ra и B .

Таблица 6. Термодинамическое давление в сосуде, рассчитанное при $\delta=0$ в момент времени $Fo=0.15$ при различных значениях Ra и A

| Ra | B | | |
|--------|------|------|------|
| | 1 | 2.0 | 3.0 |
| 0 | 4.58 | 5.98 | 6.25 |
| 10^6 | 4.56 | 6.15 | 6.44 |
| 10^8 | 4.56 | 6.07 | 6.37 |

Из представленных в Таблице 6 данных можно сделать вывод, что интенсивность конвекции в рамках данной задачи слабо влияет на величину прироста давления.

В некоторых модельных экспериментах [9, 10] наблюдалось установление поля температуры в паре. В случае представленной модельной задачи выход на стационарный режим течения и теплообмена зависит от числа Фурье, параметра B и параметров стенки. Интенсивность конвекции мало влияет на время установления теплообмена в сосуде. Например, в случае совершенного газа с постоянным коэффициентом теплоемкости и показателем адиабаты, тепловой баланс определяется следующим соотношением:

$$\frac{dP}{dt} = \gamma A \left(2 + \frac{1 - \overline{Nu}_{VS}}{B} \right) \quad (3.3.11)$$

На Рисунках 33-34 представлены результаты расчета для цилиндра без учета стенки со следующими значениями определяющих параметров: $B=1$, $Ra=10^8$, $A=12.66$ и $\gamma_0=1.667$.

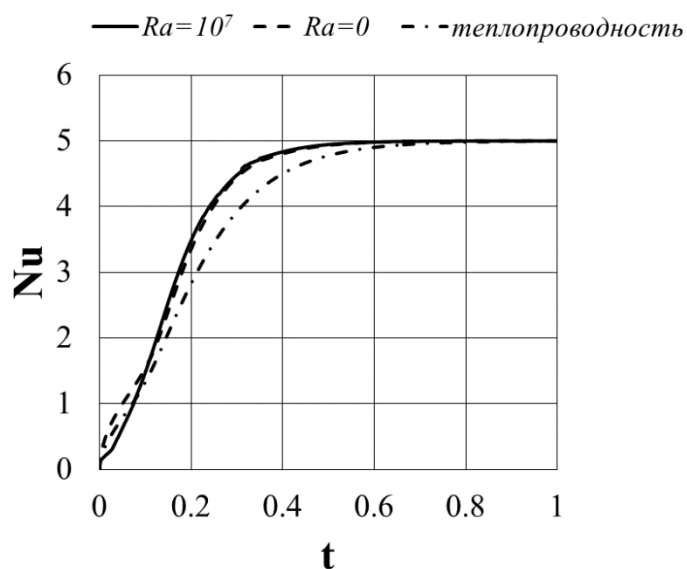


Рисунок 33. Установление среднего числа Нуссельта на изотермической границе в емкости $B=2$, $Ra=10^7$, 0.

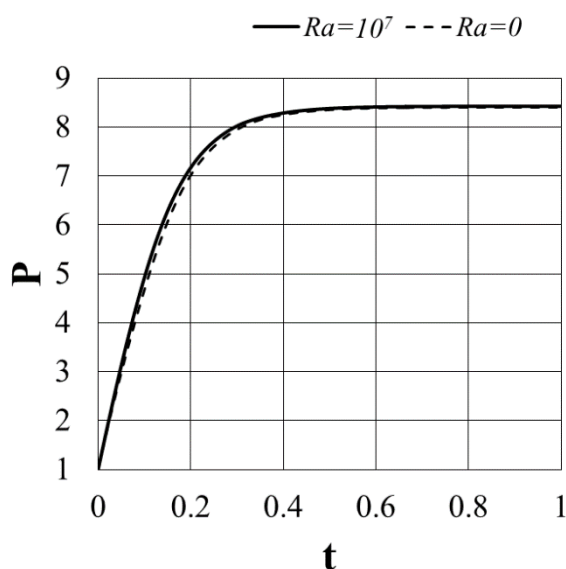


Рисунок 34. Установление давления в емкости $B=2$, $Ra=10^7$, 0

Из (3.3.11) легко получить стационарное значение среднего числа Нуссельта на изотермической поверхности:

$$\overline{Nu}_{VS_{ST}} = 2 \cdot B + 1 \quad (3.3.12)$$

Полученное в расчетах значение хорошо совпадает с теоретическим, задаваемым соотношением (3.3.12). Как видно из приведенных на Рисунке 34

данных, эволюция давления по времени для случая достаточно интенсивной конвекции и случая полной невесомости отличаются очень слабо. При этом, сравнение с расчетом для несжимаемой среды, когда процесс установления теплообмена определяется только теплопроводностью, представленный на Рисунке 33, показывает, что в среде с переменной плотностью стационарный режим наступает быстрее.

Выводы по главе 3

- Проведен расчетно-теоретический анализ погрешностей в определении характеристик теплообмена в газообразном водороде для различных моделей теплофизических свойств на примере модельных задач о прогреве одномерного слоя газа с теплоизолированной и изотермической нижней границей.
- Показано, что наибольшую погрешность по сравнению с моделью реального газа дает модель совершенного газа с постоянными значениями коэффициентов теплопроводности и теплоемкости. В диапазоне значений безразмерного теплового потока $A=1-12.5$ и максимальном числе Фурье $Fo=0.2$ максимальное отклонение давления от модели реального газа составляло более 30% для всех типов граничных условий. По температуре максимальная ошибка составила менее 10%. Наименьшую погрешность продемонстрировала модель совершенного газа с учетом температурных зависимостей коэффициентов теплопроводности и теплоемкости. Максимальное отклонение по температуре от модели реального газа составило 10%, по давлению – менее 4%.
- На примере модельной задачи о конвекции в квадратной ячейке проанализирована погрешность применения модели Буссинеска при наличии существенных перепадов температуры на примере задачи о конвекции паров водорода в квадратной ячейке с разнонагретыми

стенками. Показано, что наименьшая погрешность в описании тепловых и динамических характеристик достигается при задании свойств жидкости Буссинеска при температуре, близкой к среднемассовой. В данном случае результаты расчетов показали, что погрешность определения среднего числа Нуссельта на вертикальных стенках в пределе Буссинеска составляет менее 1% по сравнению с результатами, полученными в приближении гомобаричности. Получено, что при $A \leq 0.5$ погрешность полученных в пределе Буссинеска положений максимумов скорости не превышает 30% по сравнению с результатами, полученными для сжимаемого газа.

- Проведено расчетное исследование тепломассообмена при нагреве газообразного водорода в вертикальном цилиндрическом сосуде с изотермической нижней границей. Показано существенное уменьшение скорости роста давления и интенсивности течения при учете теплоемкости металлической стенки. Результаты расчета модельной задачи с характерными размерами, тепловым потоком и временем нагрева, близкими к эксперименту В.С. Войтешонка [9] показали, что при изменении безразмерной толщины стенки от 0 до 0.02 прирост давления замедлился в 4.5 раза, а максимальная разница температур уменьшилась в 2.5 раза. Для всего диапазона толщин стенки расчеты показали наличие вертикальной температурной стратификации. Приведенные данные однозначно указывают на необходимость учета теплообмена пара со стенкой бака для адекватного определения величины давления и температурного расслоения в паровой подушке бака.
- Расчеты при различных значениях высоты сосуда продемонстрировали существенное влияние данного фактора на рост давления. Максимальное давление при значении $B=1$ составило 70% максимального давления при $B=3$ в случае бесконечно малой толщины стенки. При этом наибольшее отличие давления от максимального при фиксированных значениях B в диапазоне чисел Рэлея $0 - 10^8$ оказалось менее 4%.

4. Моделирование сопряженного тепломассообмена в криогенном топливном баке на режиме бездренажного хранения

В данной части работы строится математическая модель и метод численного моделирования сопряженной конвекции в жидкости и паре на режиме бездренажного хранения с учетом теплоемкости стенки. Проводится сравнение результатов расчета с экспериментальными данными. Приводится анализ влияния распределения теплового потока и наличия начальной неоднородности температуры пара на скорость роста давления.

4.1 Математическая модель и метод расчета для моделирования сопряженного тепломассообмена при бездренажном хранении

Во второй главе была сформулированная физико-математическая модель для описания пара и жидкости, а также переноса тепла в металлической стенке. Необходимо отметить, что постановка условий на границе раздела жидкости и стенки аналогичным пару способом может привести к тому, что температура на поверхности контакта металла и жидкости может существенно превысить температуру на поверхности раздела фаз. При этом известно [102], что кипение криогенных жидкостей наступает уже при небольших перегревах относительно температуры насыщения. Чтобы учесть возможность кипения жидкости, будем задавать условия для температуры на смоченной части стенки при помощи приближенной модели. Предположим, что при достижении температурой на смоченной поверхности стенки некоторого значения выше температуры насыщения мгновенно наступает кипение, а весь образовавшийся таким образом пар мгновенно попадает в подушку через поверхность раздела, причем образованный им поток массы равномерно распределен по площади зеркала жидкости.

Приведем математическое описание данной модели кипения жидкости, для осесимметричного бака в цилиндрической системе координат:

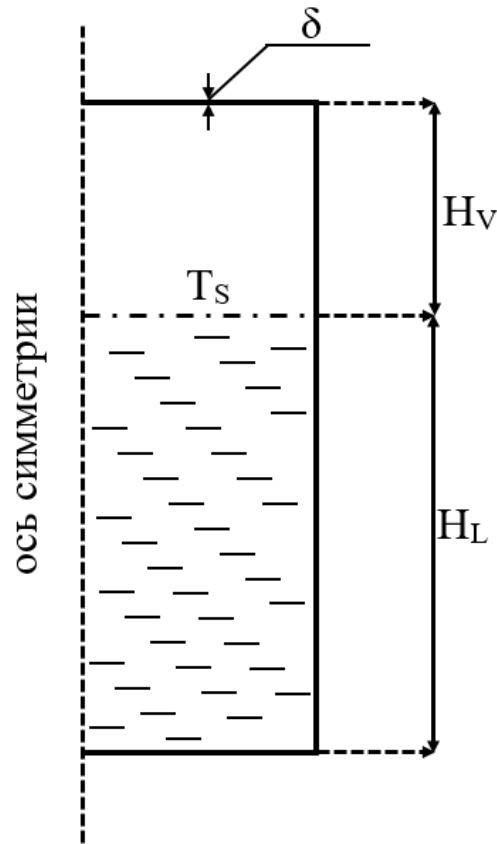


Рисунок 35. Схема сопряженной задачи

$$\begin{aligned}
 & T_D < T_s + \Delta T_{MS} \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & K_{VL}^{\lambda} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{DL} = K_{VW}^{\lambda} \left(\lambda_w \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{WD} \\
 & \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{VS} - K_{VL}^{\lambda} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{SL} = K_{VL}^r r_{VL} \rho_s w_s
 \end{aligned} \right. \quad (4.1.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
T_D \geq T_S + \Delta T_{MS} \\
K_{VL}^\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{DL} + q_L A = K_{VW}^\lambda \left(\lambda_w \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{WD} \\
\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{VS} - K_{VL}^\lambda \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{SL} = K_{VL}^r r_{VL} \rho_S (w_{S0} + \bar{w}_{SL}) \\
\bar{w}_{SL} = 2 \frac{A \int_0^{B_L} q_L dz}{K_{VL}^r r_{VL} \rho_S}, \quad w_S = w_{S0}(r, t) + \bar{w}_{SL}(t)
\end{cases} \quad (4.1.2)$$

Здесь T_D -температура на смоченной жидкостью поверхности стенки, ΔT_{MS} -величина допустимого перегрева жидкости у стенки, тепловой поток с индексом DL -от смоченной поверхности стенки в жидкость, тепловой поток с индексом WD -от стенки в смоченную поверхность стенки, VS -от пара в поверхность раздела фаз, SL -от поверхности раздела в жидкость, w_{SL} -скорость движения пара на поверхности раздела, вызванного кипением жидкости у стенки, w_{S0} - скорость движения пара на поверхности раздела, вызванного перетоком тепла через межфазную поверхность, q_L -тепловой поток, расходуемый на испарение жидкости у стенки. Следует также отметить, что температура в сосуде, его стенках и на границах раздела меняется непрерывно.

Скорость движения пара на поверхности раздела, вызванного перетоком тепла через межфазную поверхность, определяется из условия сопряжения на межфазной границе:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{VS} - K_{VL}^\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{SL} = K_{VL}^r r_{VL} \rho_S w_{S0} \quad (4.1.3)$$

Интегральный баланс массы в данном случае задается следующим соотношением:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_{F_S} \rho_S w_S dF \quad (4.1.4)$$

Разностный аналог данного соотношения позволяет рассчитать массу пара на новом временном шаге:

$$M^{n+1} = M^n + \sum_{i=0}^{I-1} \rho_S w_{Si} r_i^P \Delta r_i^U \quad (4.1.5)$$

Далее, следует задать граничные условия для скорости на поверхности раздела фаз. Потребуем отсутствия проскальзывания на межфазной поверхности и равенства касательных напряжений сил трения. Математическая модель в случае описанной на рисунке 36 постановки включает в себя уравнения (2.4.5–2.4.8) для пара, уравнения (2.4.9–2.4.12) для жидкости, уравнение теплопроводности для стенки (3.3.1) с равномерно распределенным тепловым потоком на внешней границе. Кроме того, математическую модель следует дополнить условиями сопряжения (4.1.1)–(4.1.5). Пар предполагается калорически неидеальным, с температурной зависимостью коэффициентов теплопроводности, вязкости и теплоемкости (3.1.5, 3.1.8). Удельная теплота фазового перехода, теплоемкость и теплопроводность стенки считается зависящей от температуры. Температура и давление на кривой насыщения считаются связанными по кривой насыщения.

Метод численного расчета строится на основе неконсервативного алгоритма для газа и метода SIMPLE для расчета скорости и давления в паре и жидкости:

- 1) Начало расчета, задаем распределения температуры, плотности газа, скорости на нулевом шаге по времени;
- 2) Начало итерационного процесса для расчета следующего временного шага. Задаем значения температуры пара и жидкости, плотности пара, скорости жидкости, динамического давления, термодинамического давления и температуры поверхности раздела на (m) итерации с предыдущего временного шага. Рассчитываем потоки массы на гранях

расчетных ячеек, используя значения плотности и скорости с предыдущего временного шага;

- 3) Начало энергетического цикла. Рассчитываем $(m+1)$ значения температуры пара явным образом из уравнения (2.7.9);
- 4) Рассчитываем температуру контактирующей с паром части стенки по неявной схеме, в качестве граничных условий на внутренней поверхности используя значения температуры с предыдущей итерации.
- 5) Рассчитываем новое значение термодинамического давления из (2.7.11), используя температуру с $(m+1)$ шага итерации и значение массы пара с m итерации;
- 6) Рассчитываем новую плотность из уравнения состояния;
- 7) Решаем уравнение для дивергенции скорости в форме (2.7.10);
- 8) Рассчитываем новую температуру поверхности раздела фаз по кривой насыщения;
- 9) Решаем с использованием неявной схемы уравнение переноса тепла в жидкости и стенке (5.5.16) и (3.3.1) на $m+1$ временном шаге, используя новое значение температуры поверхности раздела, с учетом разностных аналогов уравнений (4.1.1, 4.1.2);
- 10) Из условий сопряжения (4.1.2) и (4.1.3) находим скорость испарения на межфазной поверхности;
- 11) Проверяем сходимость температуры в паре, жидкости и стенке, если температура сошлась, переходим к расчету скорости и давления в паре и жидкости, если не сошлась, обновляем значения на предыдущей итерации рассчитанными, и переходим к п. 3.
- 12) Рассчитываем скорость и давление в паре и жидкости с использованием метода SIMPLE, с учетом условий сопряжения на межфазной границе.
- 13) Обновляем значения параметров задачи на предыдущем временном шаге, переходим к следующему временному шагу (п. 3).

Временные производные во всех расчетах аппроксимируются схемой Эйлера, диффузионные члены – центральными разностями, конвективные слагаемые – противопоточной схемой.

4.2 Валидация модели на экспериментальных данных

В данном разделе представлены результаты расчетов бездренажного хранения криогенных компонентов топлива при помощи предложенной модели и численного метода. Полученные данные сравниваются с экспериментами по бездренажному хранению водорода и азота.

4.2.1 Бездренажное хранение водорода в баке малого размера

В эксперименте [9] изучалось бездренажное хранение водорода в цилиндрическом баке с полусферическими днищами, радиуса 0.05 м, остальные размеры которого указаны на Рисунке 36:

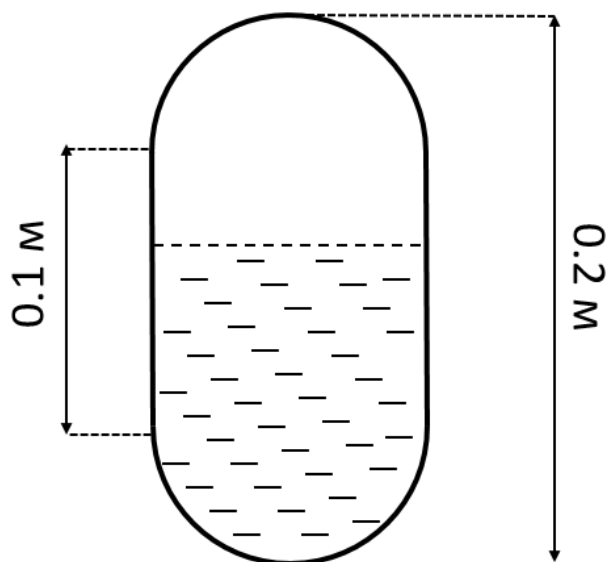


Рисунок 36. Схема модельного бака, рассматриваемого в работе [9]

Проводились расчеты по представленной сопряженной модели для цилиндрической модели данного бака с таким же радиусом и высотой, с таким же тепловым потоком в стенку бака $q_w=80$ Вт/м². Толщина стенки бралась равной 1 мм, материал стенки–сталь. В качестве модели среды для пара рассматривался случай совершенного газа с зависящими от температуры коэффициентами теплоемкости и теплопроводности согласно уравнениям (3.1.5, 3.1.8). Зависимости теплоемкости и теплопроводности стенки от температуры задавались согласно (3.3.10, 3.3.11). Кривая насыщения и удельная теплота фазового перехода аппроксимируют данные [7] следующими полиномами:

$$T_S = 1 + 0.001222 (P - 1)^3 - 0.019799 (P - 1)^2 + 0.149263 (P - 1) \quad (4.2.1)$$

$$r_{VL} = 1 - 1.19601 (T_S - 1)^3 - 0.31561 (T_S - 1)^2 - 0.21121 (T_S - 1) \quad (4.2.2)$$

Безразмерны значения определяющих параметров брались следующими:

$$\begin{aligned} A &= 12.66; \quad Ra_V = 10^9; \quad Ra_L = 10^9; \quad Pr_V = 1.0; \\ Pr_L &= 1.1; \quad \gamma_0 = 1.667; \quad K_{VL}^\rho = 0.0172; \quad K_{VL}^\lambda = 8.0; \\ K_{VL}^E &= 53.3; \quad K_{VL}^r = 2.2; \quad K_{VW}^\lambda = 234; \quad K_{VW}^E = 7.08 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Максимальное время хранения–300 с., соответствует значению числа Фурье $Fo=0.15$.

На Рисунке 37 представлены кривые роста давления, полученные в условиях эксперимента, и рассчитанные для моделирующего условия эксперимента цилиндрического бака:

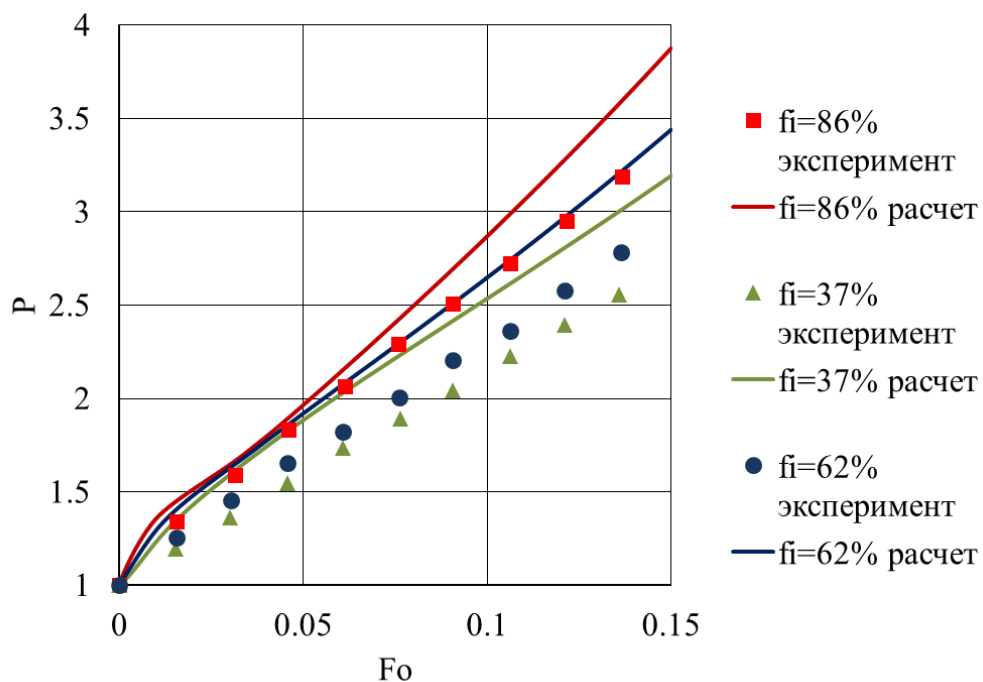


Рисунок 37. Рост давления при различных значениях степени заполнения, рассчитанный предложенным методом

На следующем рисунке показано сравнение расчетного и экспериментального профилей температуры в момент времени $Fo=0.15$ для степени заполнения 80%, соответствующей высоте уровня жидкости $z=3$ в случае модельного бака:

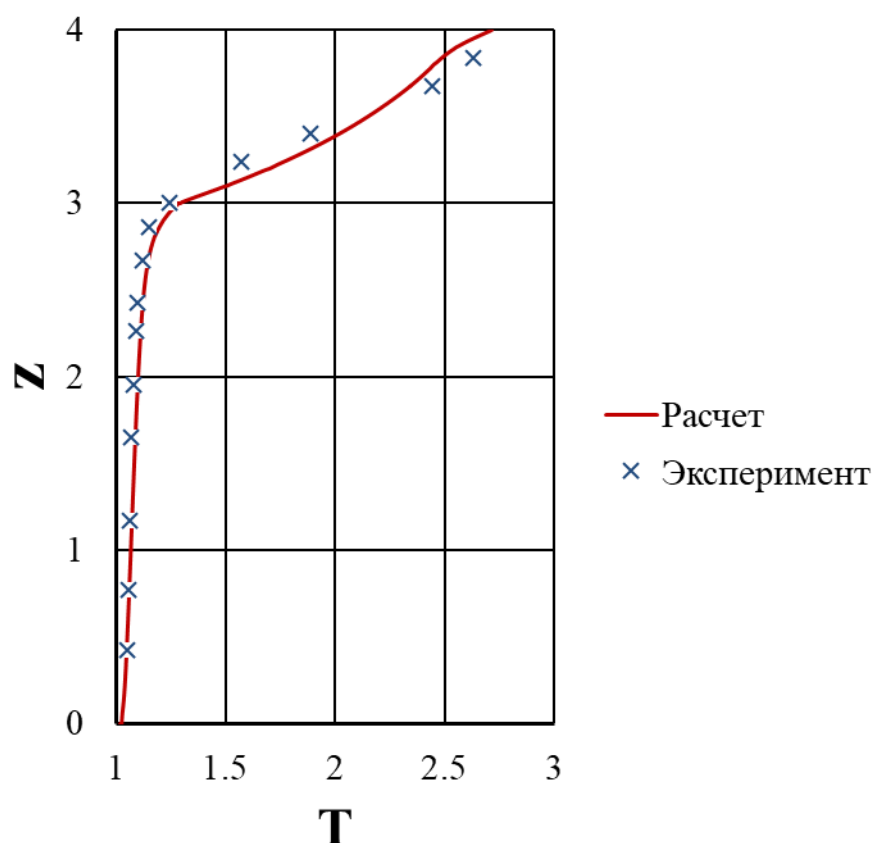


Рисунок 38. Расчетный и экспериментальный профили температуры в момент времени $Fo=0.15$ в случае зеркала жидкости, расположенного на высоте, равной 3 радиусам

Из представленных на Рисунках 36 и 37 данных видно, что предложенная сопряженная модель адекватно описывает рост давления при бездренажном хранении криогенных компонентов. Максимальное отклонение по приросту давления составило 25% по сравнению с данными эксперимента. Необходимо отметить, что, в отличие от упрощенных методик [12, 13], данная модель правильно отражает тенденцию к уменьшению скорости роста давления при уменьшении степени заполнения бака, наблюдаемую в эксперименте. Кроме того, рассчитанный в рамках данной модели профиль температуры хорошо совпадает с данными опыта (Рисунок 38).

4.2.2 Бездренажное хранение азота

Хранение азота в стальном цилиндрическом баке при различных степенях заполнения и уровнях теплоподвода рассматривалось в работе [15]. Схема используемого в данном эксперименте бака приведена на Рисунке 39:

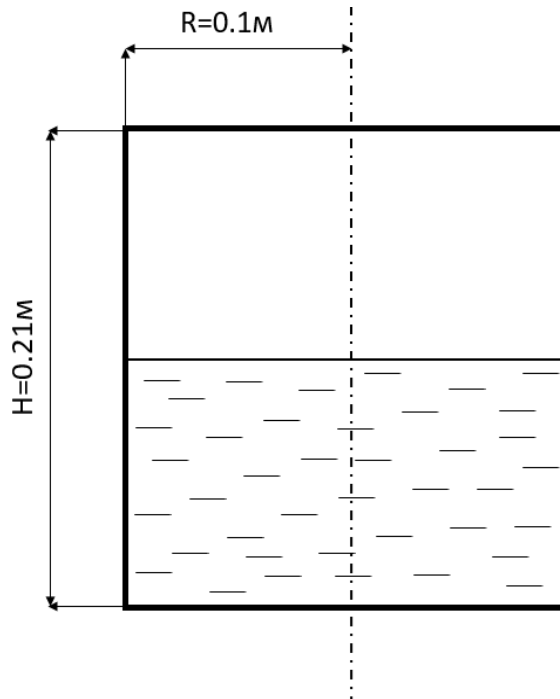


Рисунок 39. Схема азотного бака.

Расчеты проводились предложенным сопряженным методом. Толщина стенки бралась равной 1 мм. Теплоемкость газообразного азота при низких температурах хорошо описывается моделью идеального газа, поэтому в расчетах величина c_p бралась постоянной и равной $3.5R_V$. Зависимость теплопроводности пара в безразмерном виде аппроксимировалась следующим полиномом:

$$\tilde{\lambda} = 1 - 0.02733(\tilde{T} - 1)^3 + 0.07773(\tilde{T} - 1)^2 + 0.82087(\tilde{T} - 1), \quad (4.2.4)$$
$$\tilde{T} = \frac{T}{T^*}, \quad T^* = 77.35 \text{ K}, \quad \lambda = \frac{\lambda}{\lambda^*}, \quad \lambda^* = 0.00766 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$$

Зависимости теплоемкости и теплопроводности стенки от температуры аппроксимировались следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_W &= 1 + 0.09423 (\tilde{T} - 1)^3 - 0.22645 (\tilde{T} - 1)^2 + 0.49988 (\tilde{T} - 1), \\ \tilde{T} &= \frac{T}{T^*}, \quad T^* = 77.35 \text{ K}, \quad \tilde{\lambda}_W = \frac{\lambda}{\lambda_W^*}, \quad \lambda_W^* = 8.2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_W &= 1 + 0.00694 (\tilde{T} - 1)^3 - 0.25380 (\tilde{T} - 1)^2 + 1.08772 (\tilde{T} - 1), \\ \tilde{T} &= \frac{T}{T^*}, \quad T^* = 77.35 \text{ K}, \quad \tilde{c}_W = \frac{c}{c_W^*}, \quad c_W^* = 202 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Значения определяющих параметров брались следующими:

$$\begin{aligned} \text{Pr}_V &= 0.75; \quad \text{Pr}_L = 2.1; \quad \gamma = 1.4; \quad K_{VL}^\rho = 0.00546; \\ K_{VL}^\lambda &= 17.75; \quad K_{VL}^E = 344.4; \quad K_{VL}^r = 2.459; \quad K_{VW}^\lambda = 1070.5; \\ K_{VW}^E &= 346.0; \quad Fo_{\max} = 0.6 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

В эксперименте рассматривались степени заполнения бака жидкостью 70%, 50% и 30%. Интегральный тепловой поток Q_W в бак измерялся по расходу пара при открытом дренажном клапане на стационарном режиме. Для максимального заполнения бака он составлял 2.5 Вт, для степени заполнения 50% - 1.2 Вт, для минимального уровня – 1.0 Вт. Необходимый для расчетов удельный тепловой поток пересчитывался путем деления интегрального теплового потока общую площадь стенки бака. Ниже в таблице приведены значения параметра A и чисел Рэлея для пара и жидкости для рассматриваемых опытов, используемые в расчетах:

Таблица 7. Значения тепловых потоков и чисел Рэлея, используемые в расчетах

| Степень заполнения, % | 30 | 50 | 70 |
|--------------------------|-----|-----|-----|
| Q_W , Вт | 1.0 | 1.2 | 2.5 |

| | | | |
|------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| $q_w, \text{Вт/м}^2\text{К}$ | 5.13 | 6.16 | 12.84 |
| A | 0.87 | 1.04 | 2.17 |
| Ra_v | $5.3 \cdot 10^7$ | $6.3 \cdot 10^7$ | $1.3 \cdot 10^8$ |
| Ra_L | $1.9 \cdot 10^8$ | $2.3 \cdot 10^8$ | $4.7 \cdot 10^8$ |

В ходе экспериментов перекрытие дренажного клапана осуществлялось при достижении постоянного расхода пара из бака. Поэтому на момент начала хранения в паре реализовывались существенные градиенты температуры. Расчеты проводились для двух типов начальных условий для параметров пара. В первом случае задавалась однородная температура, равная температуре насыщения при начальном давлении. Во втором случае градиент температуры, реализовывавшийся в эксперименте, моделировался численно.

Для этого проводились расчеты нагрева паровой области с постоянным давлением и температурой поверхности раздела, соответствующим начальным условиям из эксперимента. Расчеты проводились представленным в разделе 2.7.2 методом. Условие окончания расчета задавалось исходя из данных эксперимента. Для этого в ходе вычислений контролировалось значение температуры в точке, в которой реализовывалась максимальная начальная температура по данным опыта. Расчет завершался либо при достижении этой температуры, либо при установлении стационарного режима. Пример сравнения данных эксперимента и расчетного профиля температуры, полученного предложенным способом, представлен на Рисунке 40.

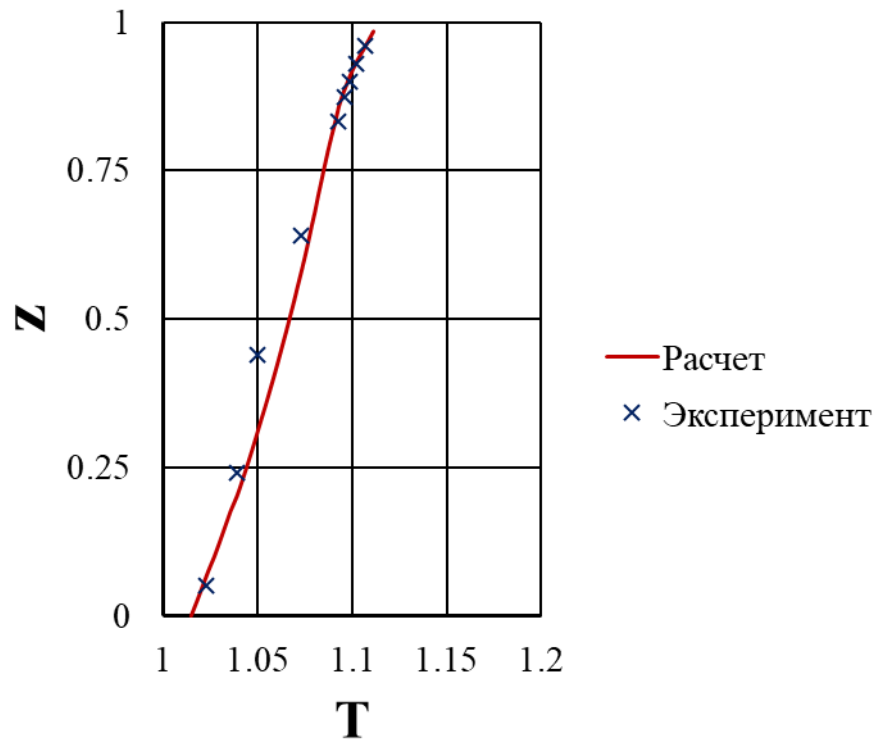


Рисунок 40. Сравнение расчетного начального профиля температуры с опытными данными, степень заполнения 50%, $Q=1.2$ Вт

На Рисунках 41 и 42 показано сравнения расчетных данных по росту давления с экспериментом для двух указанных выше типов задания начальных условий.

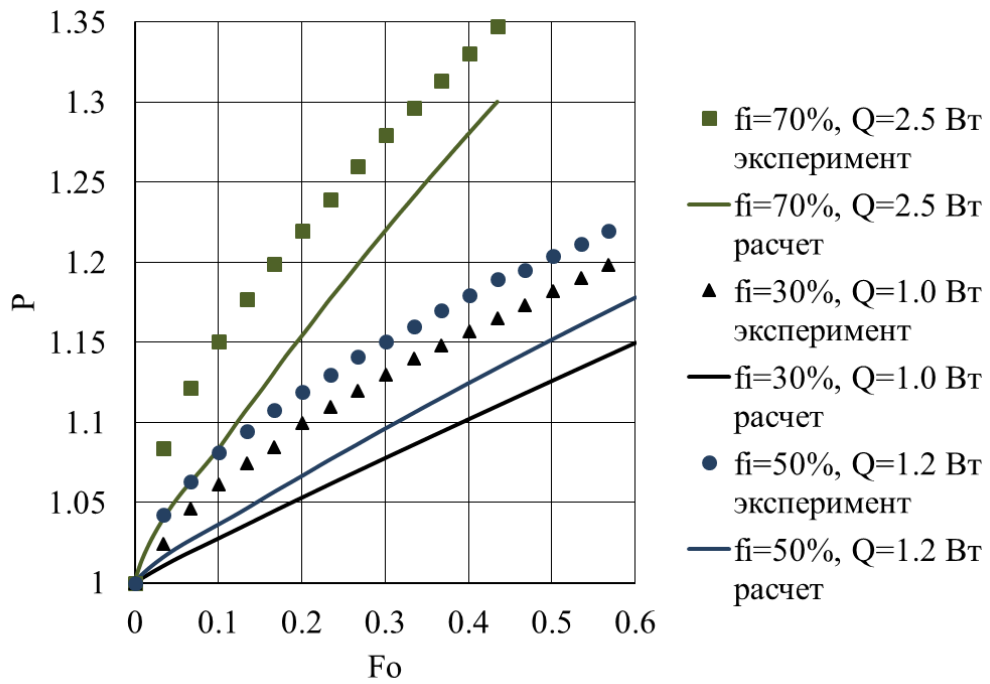


Рисунок 41. Расчетные данные по росту давления, полученные при однородных начальных условиях, и экспериментальные точки

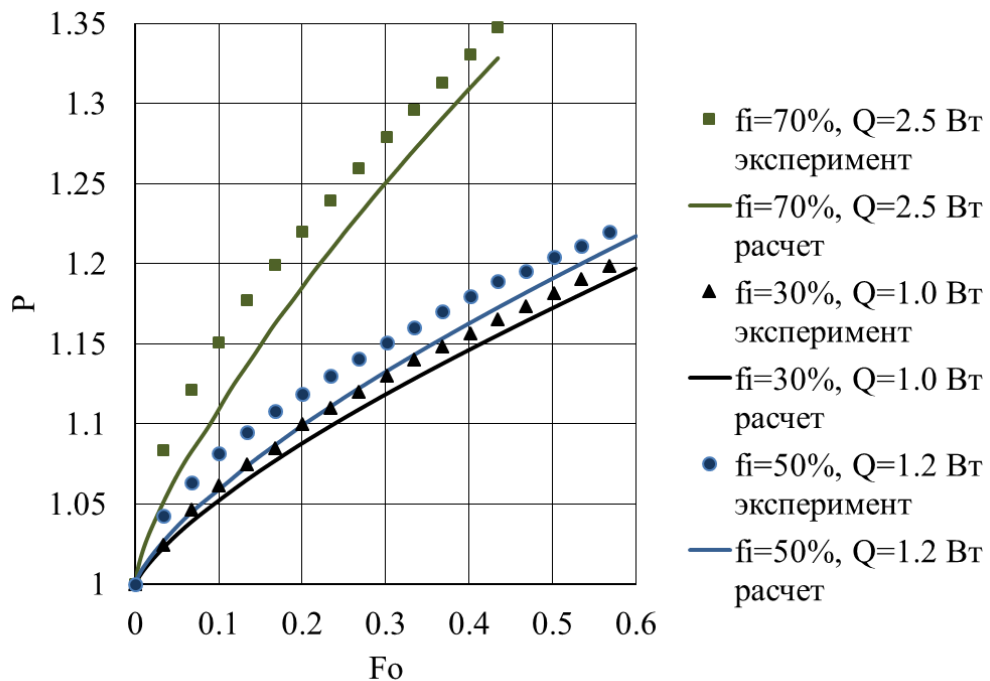


Рисунок 42. Расчетные данные по росту давления, полученные при неоднородных начальных условиях, и экспериментальные точки

Как видно из представленных на Рисунках 41 и 42 данных, использование в расчетах неоднородных начальных условий существенно уменьшает погрешность в определении темпа роста давления. Расчетная величина темпов роста давления в случае неоднородных начальных условий хорошо согласуется с экспериментальными данными.

На Рисунках 43, 44 и 45 представлено сравнение расчетных и экспериментальных профилей температуры для различных степеней заполнения бака жидким азотом на момент окончания бездренажного хранения, полученное для неоднородных начальных условий:

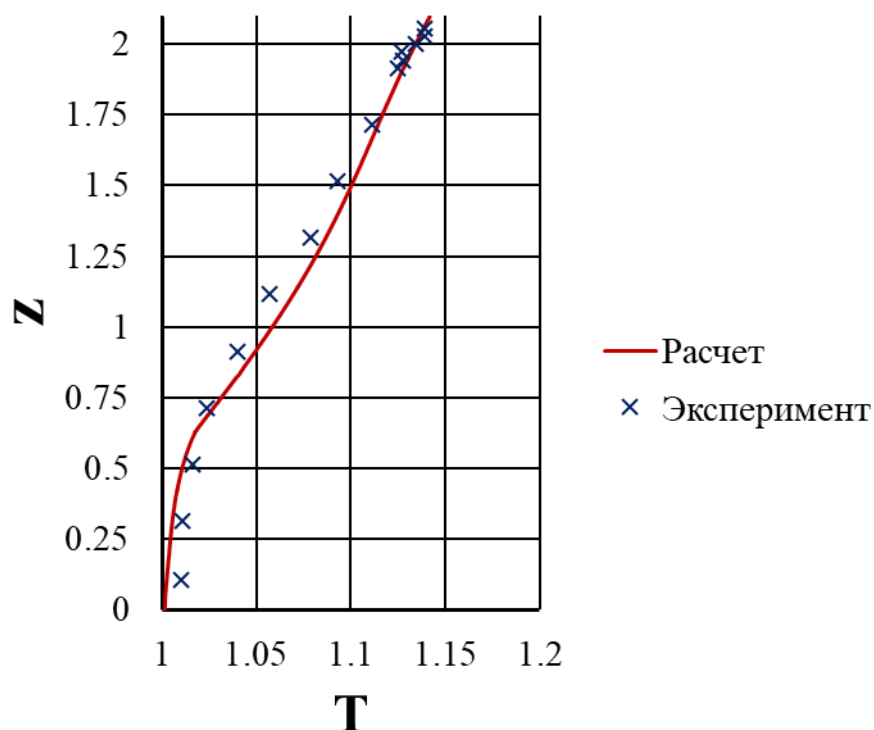


Рисунок 43. Расчетные и экспериментальные данные по температурному расслоению в баке при степени заполнения 30%

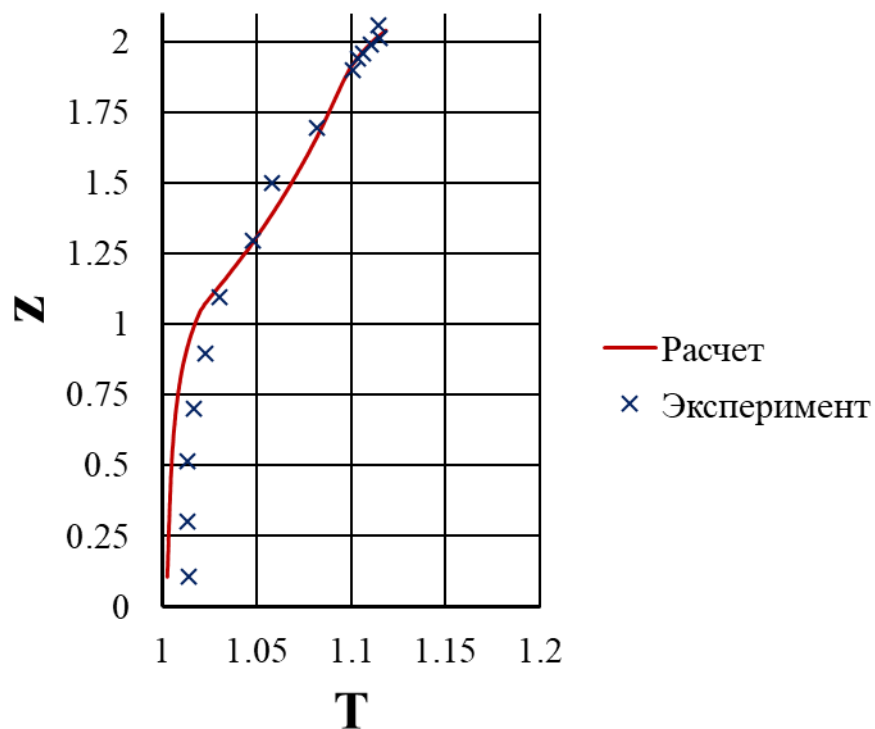


Рисунок 44. Расчетные и экспериментальные данные по температурному расслоению в баке при степени заполнения 50%

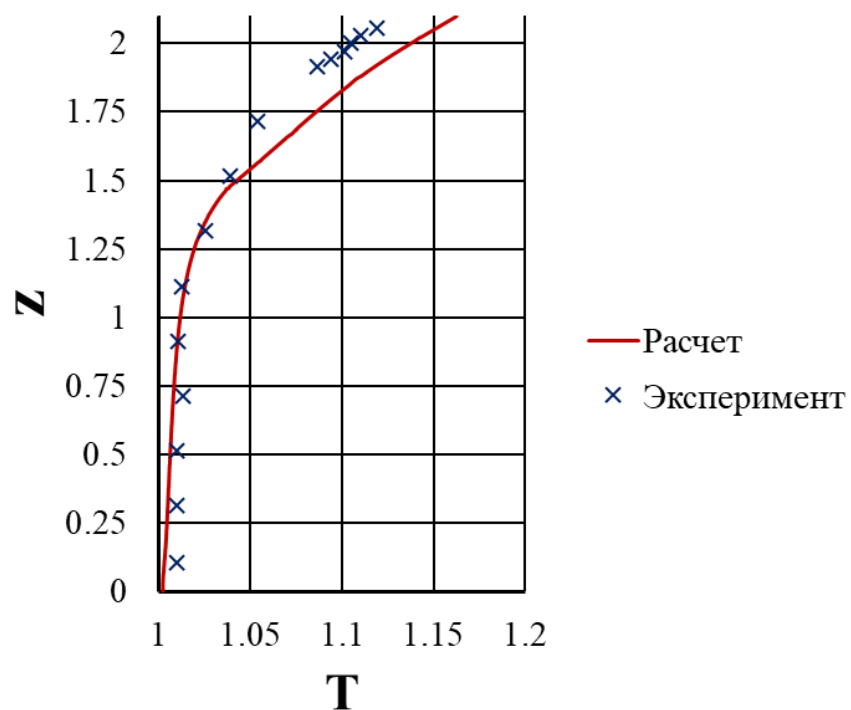


Рисунок 45. Расчетные и экспериментальные данные по температурному расслоению в баке при степени заполнения 70%

Из представленных данных видно, что расчётные и экспериментальные профили температуры в баке достаточно хорошо согласуются между собой. Максимальное расхождение рассчитанных значений температуры по сравнению с экспериментальными данными составило 22%.

4.2.3 Сравнение результатов расчета с данными эксперимента МНТВ по бездренажному хранению водорода

В экспериментах, описанных в [103, 104] рассматривалось бездренажное хранение водорода в крупном алюминиевом баке в условиях внешнего нагрева. Используемый в экспериментах бак представлял из себя цилиндр с полу эллипсоидальными днищами с соотношением радиуса к высоте 2:1. Радиус бака составлял 1.525 м, высота бака – 3.05 м. Толщина стенки 1.27 см. В работе [105] данный эксперимент моделировался при помощи программного пакета ANSYS Fluent. В данном исследовании задача решалась в сопряженной постановке с учетом фазовых переходов между жидкостью и газом, без учета перетоков тепла по стенке, с использованием модели турбулентности и в ламинарной постановке.

Для валидации предложенной модели бездренажного хранения данные эксперимента и расчетов в при помощи программного пакета сравниваются с результатами расчета упрощенного модельного бака цилиндрической геометрии с таким же, что и в эксперименте радиусом и высотой с учетом влияния стенки. Схема натурального и модельного баков представлена на Рисунке 46:

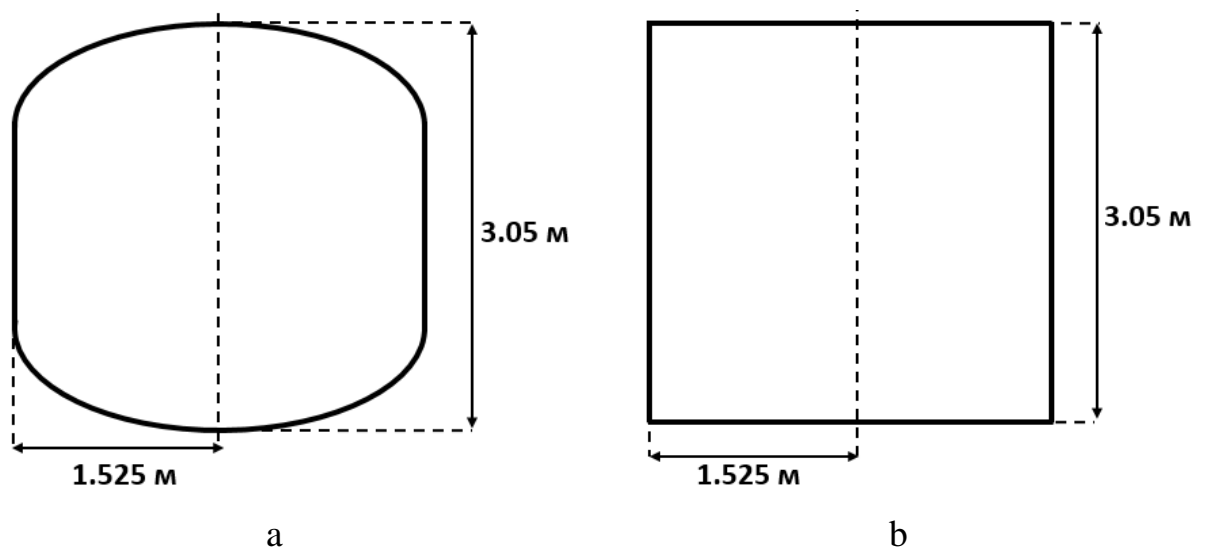


Рисунок 46. Схема натурального (а) и модельного (b) баков

Значения теплопритока в сухую и смоченную жидкостью части стенки брались аналогично работе [105]. Тепловой поток в сухую часть стенки составлял $0.9 \text{ Вт/м}^2\text{К}$, в смоченную жидкостью – $2.05 \text{ Вт/м}^2\text{К}$. Числа Рэлея для газа и жидкости брались меньшими, чем в эксперименте, и не моделировались точно. Степень заполнения бака жидкостью – 50%, время хранения – 45000 с, начальное давление – 1.116 бар. Рассматривались два типа начальных условий, задаваемых аналогично азотному баку из предыдущего раздела. В Таблице 8 представлены значения безразмерных параметров, используемые в расчетах:

Таблица 8. Значения тепловых потоков и чисел Рэлея, используемые в расчетах

| | |
|-------------------------------|------------------|
| $q_G, \text{ Вт/м}^2\text{К}$ | 0.89 |
| $q_L, \text{ Вт/м}^2\text{К}$ | 2.05 |
| A_G | 4.28 |
| A_L | 9.75 |
| Ra_v | $1.0 \cdot 10^9$ |
| Ra_L | $1.0 \cdot 10^9$ |

В случае данного эксперимента задание начальных условий было существенно осложнено недостатком экспериментальных данных. Поэтому расчеты проводились либо при однородных начальных условиях, либо с использованием профиля температуры на стационарном режиме. Данный профиль рассчитывался из решения задачи для паровой подушки с фиксированным давлением, равным начальному давлению в эксперименте, и переменной массой пара.

На Рисунках 47 и 48 представлено сравнение данных расчета давления по предложенной модели при однородных и неоднородных начальных условиях с результатами эксперимента и расчета из работы [105]:

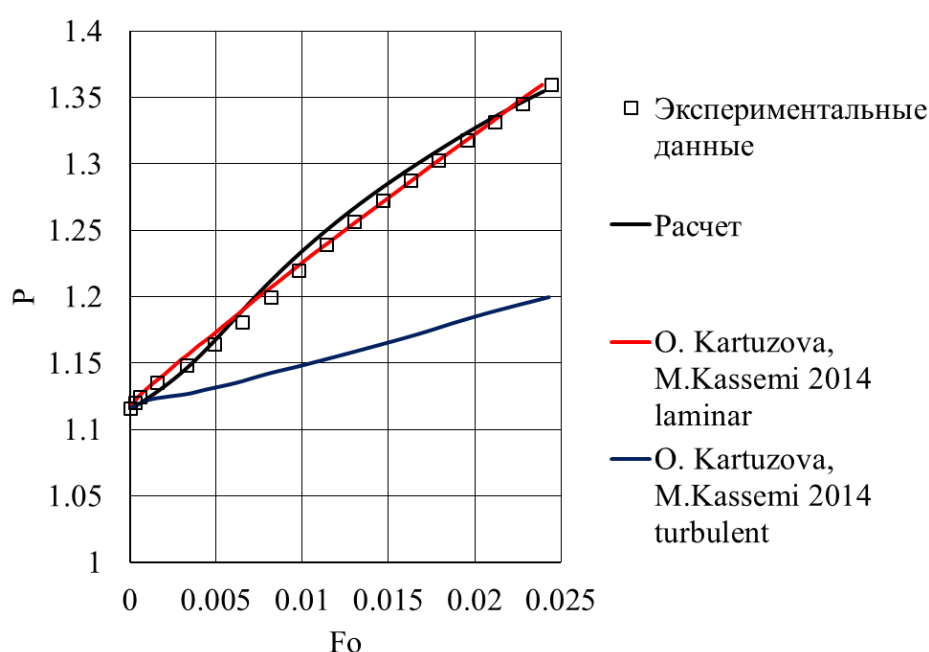


Рисунок 47. Сравнение результатов расчета давления при однородных начальных условиях с экспериментом и данными работы [103]

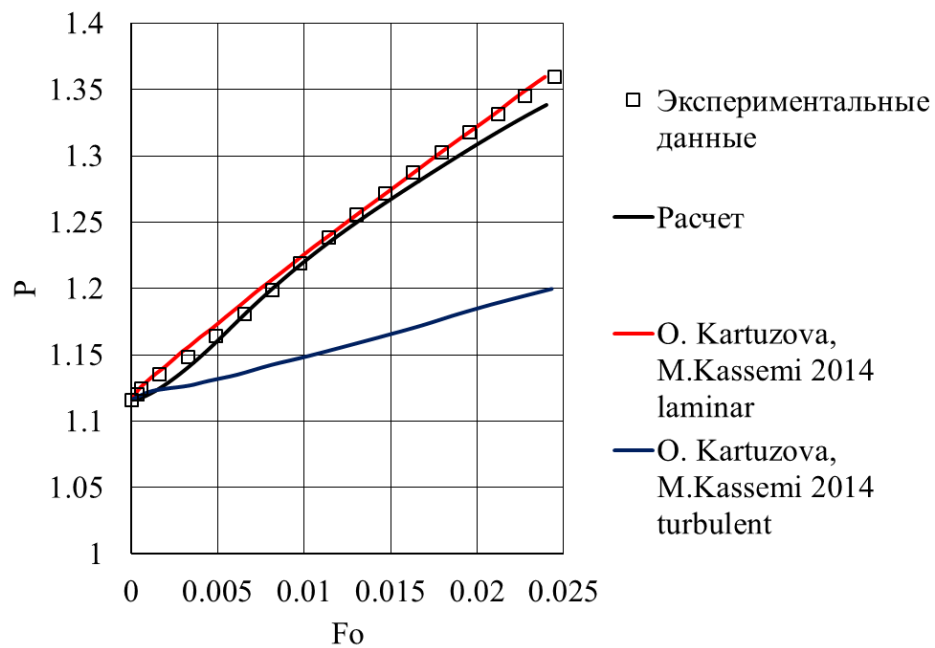


Рисунок 48. Сравнение результатов расчета давления при неоднородных начальных условиях с экспериментом и данными работы [105]

На рисунке 49 представлено сравнение расчетных и экспериментальных профилей температуры на момент окончания режима хранения:

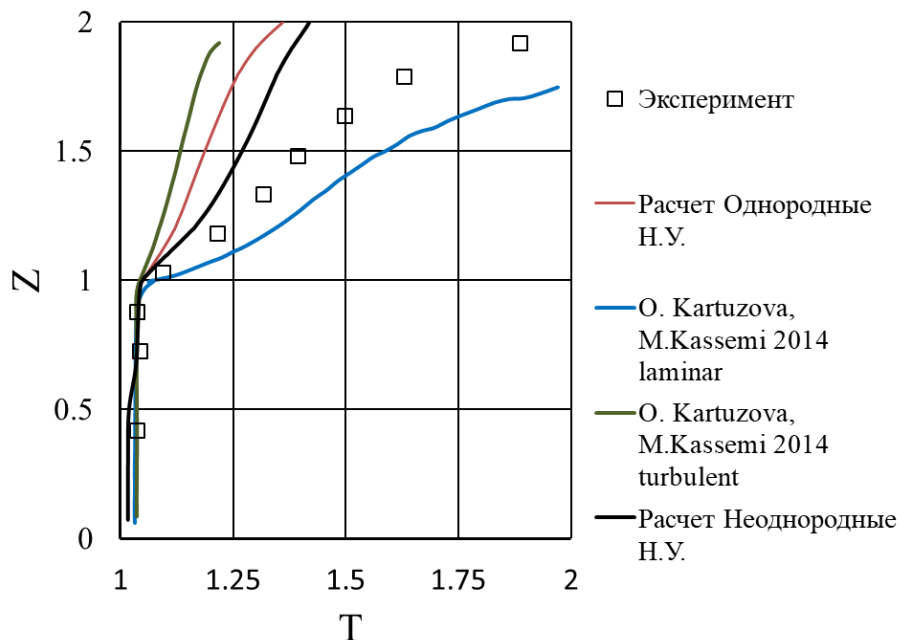


Рисунок 49. Сравнение расчетных и экспериментальных данных по температуре

Как видно из представленных результатов расчета, погрешность в определении давления при обоих способах задания начальных условий в газе достаточно мала. В случае работы [105] ламинарный расчет также хорошо совпадает с экспериментальными данными по давлению, а применение модели турбулентности дает значительную погрешность.

Необходимо отметить, что ошибка в определении температуры в рамках предложенной модели при однородных и неоднородных начальных условиях оказалась весьма значительной, как видно из рисунка 49. Максимальное значение температуры, рассчитанное при неоднородных начальных условиях оказалось в 2.2 раза ниже результатов эксперимента. При этом, ламинарный расчет при помощи программного пакета из работы [105] значительно завышает температуру газа. Данный факт хорошо объясняется не учетом теплоемкости металлической стенки бака, которая, как было показано в Главе 2, может существенно понижать температурное расслоение в паре.

Также, необходимо отметить нелинейность кривой роста давления, полученной в расчете по предложенной модели (Рисунки 47, 48). Данная особенность вызвана существенной нестационарностью расхода пара через межфазную поверхность. На Рисунке 50 показано изменение расхода через межфазную поверхность, рассчитанное для однородных и неоднородных начальных условий по предложенной модели:

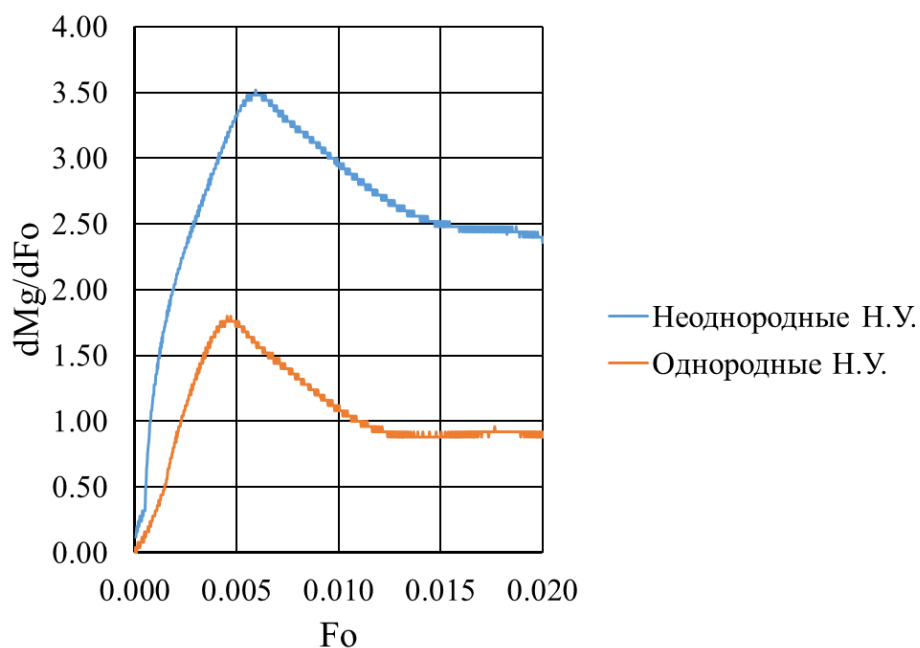


Рисунок 50. Массовый расход водорода через межфазную поверхность, рассчитанный для однородных и неоднородных начальных условий

Как видно из Рисунка 50, практически все время хранения межфазный расход остаётся нестационарным, причем в случае нестационарных граничных условий он существенно выше за счет наличия начальной вертикальной температурной неоднородности пара, приводящей к увеличенному по сравнению с однородными начальными условиями тепловому потоку из пара в поверхность раздела. Более подробно влияние данного фактора будет рассмотрено в следующем разделе.

4.3 Анализ тепломассообмена при бездренажном хранении

В данном разделе с использованием полученных при решении валидационных задач результатов и дополнительных расчетов будет рассмотрено влияние таких факторов, как распределение теплового потока и

наличие неоднородности профиля температуры пара в начальный момент времени.

4.3.1 Влияние распределения теплового потока на скорость роста давления

Одним из важных факторов, определяющих скорость роста давления в баке при бездренажном хранении является распределение теплового потока по стенке бака. Рассмотрим в качестве примера цилиндрический бак, заполненный на половину жидким водородом, радиусом 1 м и высотой 2 м. К верхней, боковой и нижней поверхностям бака может подводиться равномерно распределенный тепловой поток, равный 3.5 Вт/м^2 . Сила тяжести равна 10^{-3} м/с^2 , и направлена по оси симметрии бака. Влияние теплообмена со стенкой бака рассматривать не будем. Схема данной модельной задачи представлена на Рисунке 51.

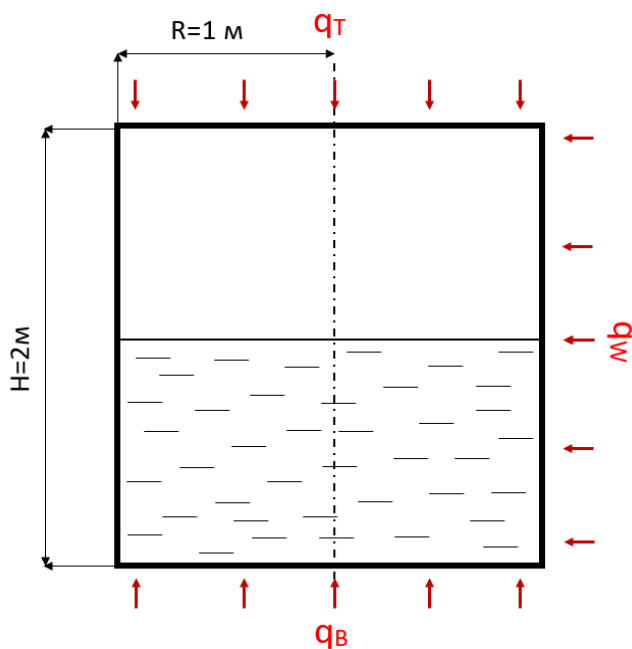


Рисунок 51. Схема задачи

Рассмотрим три варианта подвода тепла к баку. В первом случае ко всем поверхностям бака подводится равномерно распределенный по площади тепловой поток. Во втором случае нижнее днище бака теплоизолировано. В последнем случае теплоизолирована крышка бака.

Для решения задачи воспользуемся предложенным в данной работе подходом. Для описания свойств водорода и кривой насыщения воспользуемся теми же соотношениями, что и в разделе 4.2.1. Начальные условия зададим однородными, с температурой $T_0=20.28$ К, и давлением $P_0=101500$ Па.

Результаты расчета скорости роста давления для различных типов теплоподвода представлены на Рисунке 52.

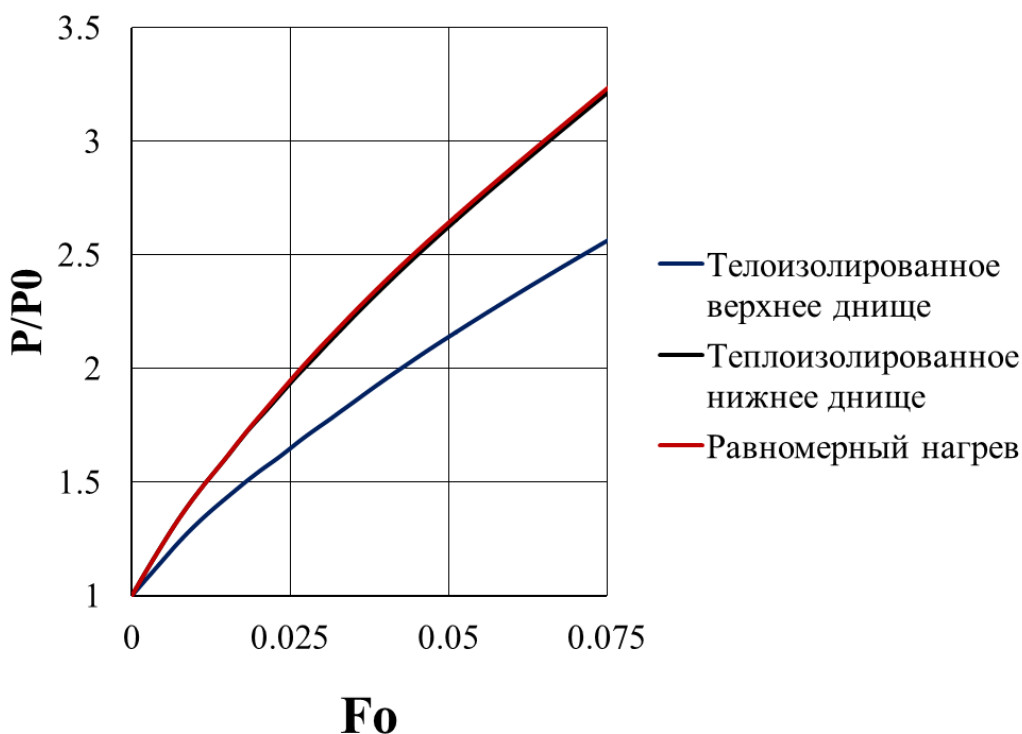


Рисунок 52. Рост давления при различных способах подвода тепла

Представленные на Рисунке 51 данные показывают, что подвод тепла к баку снизу значительно меньше влияет на рост давления, чем подвод тепла

сверху. Разница между максимальным приростом давления, рассчитанным для случая равномерного нагрева и случаем, когда верхняя часть бака теплоизолирована, составила 30%. При этом, для случая теплоизолированного нижнего днища бака, отличие давления, рассчитанного для случая равномерного нагрева, оказалось порядка 1%.

Проведенные расчеты показывают, что перегрев верхней части бака более опасен с точки зрения скорости роста давления, чем подвод тепла к жидкости снизу. Данную особенность необходимо учитывать при разработке активных и пассивных систем тепловой защиты бака.

4.3.2 Влияние начальной неоднородности температуры пара

В разделе 4.2 при решении валидационных задач было продемонстрировано, что наличие начальной неоднородности температуры в паровой подушке может существенно влиять на скорость роста давления в баке. Для упрощения выкладок рассмотрим случай совершенного газа с постоянной удельной изобарной теплоемкостью, а бак будем считать цилиндрическим. Пусть также толщина стенки много меньше радиуса бака.

Рассмотрим уравнение энергии для пара (5.5.12). Проинтегрируем данное уравнение по объему подушки. С учетом сделанных допущений, учитывая уравнение состояния и граничные условия, отбрасывая члены порядка δ^2 , для скорости роста давления можно получить следующее соотношение:

$$\frac{dP}{dt} = 2\gamma_0 A \left[1 + \Delta C_W + \frac{1 + 4\delta}{2B} - \frac{Nu_S + Nu_{WS} - \rho_S T_S W_S}{2B} \right] \quad (4.3.1)$$

В формуле (4.3.1) введены следующие обозначения:

$$\Delta C_W = \frac{K_{WV}^E}{AB} \left[\int_0^{B+\delta} \int_1^{1+\delta} c_W \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz + \int_0^1 \int_B^{B+\delta} c_W \frac{\partial T}{\partial t} r dr dz \right] \quad (4.3.2)$$

$$Nu_S = \frac{2}{A} \int_0^1 r \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} dr \quad (4.3.3)$$

$$Nu_{WS} = \frac{2K_{wv}^\lambda}{A} \int_1^{1+\delta} r \lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} dr \quad (4.3.4)$$

$$W_S = \frac{2}{A} \int_0^1 r w \Big|_{z=0} dr \quad (4.3.5)$$

В соотношении (4.3.1) величина, задаваемая формулой (4.3.2) характеризует изменение теплоемкости стенки, величина задаваемая (4.3.3) определяет тепловой поток из пара в поверхность раздела фаз, формула (4.3.4) задает переток тепла из контактирующей с паром части стенки, а величина, определяемая соотношением (4.3.5), задает скорость испарения жидкости.

Очевидно, что при наличии начального температурного расслоения в паровой подушке увеличивается тепловой поток из газа в поверхность раздела, а скорость роста давления, согласно (4.3.1), должна уменьшаться. Однако, согласно граничным условиям на межфазной поверхности (4.1.3), увеличение теплового потока из пара в поверхность раздела также ведет к росту скорости испарения жидкости.

Определим скорость изменения массы пара следующим образом:

$$dM/dt = \int_0^B \int_0^1 \frac{\partial \rho}{\partial t} r dr dz \quad (4.3.6)$$

Из уравнения неразрывности (5.5.9) очевидна связь между (4.3.6) и (4.3.5):

$$dM/dt = \frac{1}{2} A \rho_S W_S \quad (4.3.7)$$

В разделе (4.2.2) приводились результаты по давлению, рассчитанные для однородных и неоднородных начальных условиях. На Рисунке 53 демонстрируется скорость изменения массы пара для случая $Q=1.2$ Вт.

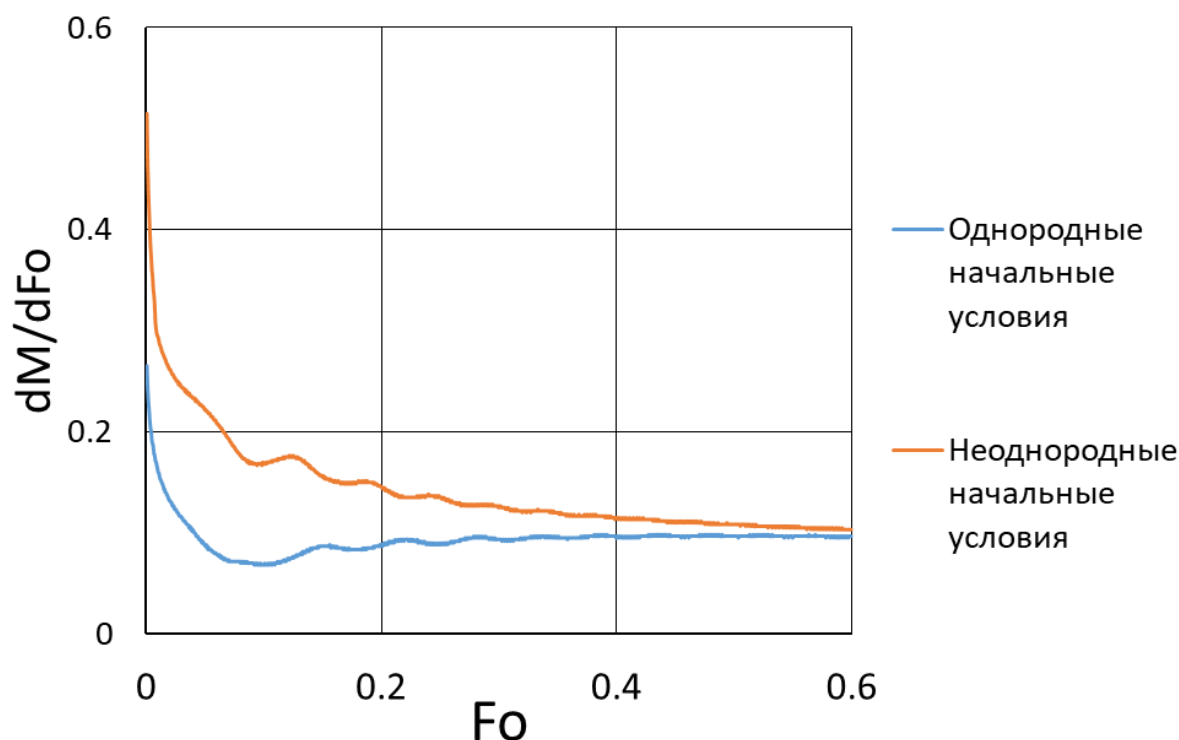


Рисунок 53. Скорость изменения массы пара в баке с жидким азотом, рассчитанная для однородных и неоднородных начальных условий, $Q=1.2$ Вт, степень заполнения 50%

Как видно из представленных на Рисунке 53 данных, при наличии температурной неоднородности в начальный момент времени скорость испарения жидкости может существенно расти. В конечном итоге, данный эффект может с запасом компенсировать увеличенный по сравнению с однородным начальным профилем температуры отток тепла из пара в поверхность раздела, как показывают приведенные на Рисунках 41 и 42 результаты расчета давления.

Выводы по главе 4.

- Приведено описание физико-математической модели бездренажного хранения криогенного топлива в баке с учетом сопряженного свободно-

конвективного теплопереноса в паре и жидкости, теплоемкости стенки бака, фазовых переходов на границе раздела и на смоченной жидкостью стенке бака. Приведен алгоритм расчета по предложенной модели.

- Предложен способ задания неоднородных начальных условий, обеспечивающих выполнение основных уравнений модели, заключающийся в предварительном решении задачи о конвекции пара с фиксированным давлением и переменной массой.
- Валидация модели на экспериментальных данных по бездренажному хранению водорода, полученных В.С. Войтешонком показала хорошее совпадение результатов расчета скорости роста давления с данными экспериментов. Максимальная погрешность составила не более 25%. Показано, что предложенная модель правильно описывает наблюдаемую в экспериментах тенденцию к снижению скорости роста давления при уменьшении степени заполнения. Сравнение расчетных и экспериментальных профилей температуры в жидкости и газе показало малое отклонение результатов моделирования от опытных данных. Отличие температуры в паре, измеренное в верхней точке, от результатов расчета составило менее 10%.
- Проведено численное моделирование эксперимента по бездренажному хранению азота в цилиндрическом баке при различных уровнях теплоподвода и степенях заполнения при двух типах задания начальных условий. Максимальное отклонение расчётного значения прироста давления от данных эксперимента при однородных начальных условиях составило 28%. Учет неоднородности начальных условий для температуры пара в расчете значительно уменьшил погрешность в определении прироста давления. Максимальное отклонение расчётного значения прироста давления от данных эксперимента составило 5%. Максимальная

погрешность при расчете прироста температуры при этом составила 12% по сравнению с данными эксперимента.

- Сравнение результатов численного моделирования эксперимента МНТВ по бездренажному хранению водорода с данными работы [105] показало хорошее соответствие по давлению.
- Проведенные в рамках данной работы расчеты демонстрируют адекватность сформулированной модели, качественно правильное описание основных параметров задачи о бездренажном хранении, таких как давление и распределение температуры.
- Расчеты модельной задачи о хранении водорода при различном распределении теплового потока показали, что подвод тепла к паровой подушке вызывает наибольший прирост давления по сравнению с нагревом пара и жидкости сбоку и нагревом жидкости снизу. В рамках рассмотренной постановки скорость роста давления в водородном цилиндрическом баке при теплоизолированной крышке оказалась на 30% меньше, чем в случае равномерного нагрева, а при теплоизолированном дне разница составила всего порядка 1%.

Заключение

В результате проведенных исследований были получены следующие наиболее важные результаты:

1. Разработан и протестирован эффективный численный алгоритм для решения уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха в плоской и осесимметричной постановках.
2. На примере модельной задачи о прогреве слоя газообразного водорода путем сравнения с моделью реального газа показана применимость модели совершенного газа с учетом температурных зависимостей теплофизических характеристик для описания теплообмена.

3. При численном решении задачи о конвекции водорода в квадратной ячейке с разнонагретыми вертикальными стенками продемонстрировано, что в случае больших относительных перепадов температуры картина течения отличается от типичной для конвекции Буссинеска картины. Данное изменение выражается в утолщении пограничного слоя у горячей стенки и сужению у холодной, причем величина этого отличия линейно зависит от характерного относительного температурного перепада.
4. Выявлено существенное влияние теплоемкости и теплопроводности стенки на свободно-конвективный тепломассообмен в паровой подушке на примере задачи о нагреве вертикального цилиндрического сосуда. Расчеты продемонстрировали, что пренебрежение теплоемкостью и теплопроводностью стенки может приводить к завышению скорости роста давления и величины температуры в несколько раз.
5. На основании полученных для газа результатов разработана физико-математическая модель и метод расчета тепломассообмена при бездренажном хранении криогенного компонента топлива в баке с учетом неоднородности параметров жидкости, газа, перетоков тепла по стенке бака и свободно-конвективных течений. Произведена валидация модели и метода расчета на экспериментальных данных по бездренажному хранению азота и водорода.
6. Показано, что, в отличие от упрощенных одномерных методик, предложенная модель корректно воспроизвела эффект уменьшения скорости роста давления при уменьшении степени заполнения, наблюдавшийся в экспериментах по хранению водорода.
7. Также было выявлено, что наличие начальной неоднородности температуры существенно влияет на скорость роста давления при бездренажном хранении. Для учета данного эффекта предложен способ получения начальных полей температуры, плотности и скорости в паре, обеспечивающий удовлетворение основных уравнений модели.

8. Результаты расчетов модельной задачи о бездренажном хранении водорода при различных распределениях теплового потока, поступающего из стенки бака в пар и жидкость показали, что наибольший вклад в рост давления вносит нагрев бака сверху.

Список использованной литературы

1. Смоленцев А.А., Соколов Б.А., Туманин Е.Н. Длительное хранение жидкого кислорода в баке объединенной двигательной установки орбитального корабля «Буран». Космическая техника и технологии № 2.6013. С. 47-56.
2. Федоров В.И. Исследование тепломассообмена в баках кислородно-углеводородных и кислородно-водородных ракет-носителей во время работы двигательной установки. Изв. РАН. 2012. Энергетика, том 2, С. 43-53.
3. Бершадский В.А., Соколов Б.А., Туманин Е.Н. Моделирование тепломассообмена в топливном баке при автономных испытаниях системы наддува ракетной двигательной установки. Изв. РАН. Энергетика. 2016. Том 5, С. 91-97.
4. Иванов В.П. Партола И.С. Комбинированная система управления расходом топлива кислородно-водородного разгонного блока. Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2011, №3, С. 28-34.
5. Данилюк А.Ю., Ключников В.Ю., Кузнецов И.И., Осадченко А.С. Проблемы создания перспективных сверхтяжелых ракет-носителей. Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2015, №1, С. 10-18.
6. Ефимочкин А. Ф., Хрисанфов С. П., Голубятник В. В., Кафарена П. В., Елисеев А. В. Разработка жидкостного ракетного двигателя на компонентах топлива сжиженный природный газ и кислород для многофазной ракетно-космической системы. Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2012, №3, С. 253-258.
7. Н.Б. Варгафтик. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.

8. Ward, W.D., et al, "Evaluation of AS-203 Low-Gravity Orbital Experiment," NASA CR 94045 (Chrysler Corp. Space Div. Technical Report BB-3.4.3-5-101), 13 January 1967.
9. Belyayev A.Yn., Ivanov A.V., Egorov S.D., Voyteshonok V.S., Mironov V.M. Pathways to solve the problem of cryogenic rocket propellant long storage in space. Proc. Int. Aerospace Congress. Moscow. Russia. August 15-19. 1994. V.1. P. 558-562.
10. Van Dresar N.T., Lin C.S., Hasan M.M. Self_pressurization of a flightweight liquid hydrogen tank: Effect of fill level at low wall heat flux // AIAA Paper_92_0818. 1992.
11. Barsi S., Alexander J.I.D., Kassemi M., Panzarella C.H. A tank self-pressurization experiment using a model fluid in normal gravity. 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, Nevada, 10 - 13 January 2005.
12. Черкасов С.Г., Миронов В.В., Миронова Н.А., Моисеева Л.А. Метод расчета скорости роста давления при бездренажном хранении жидкого водорода в емкостях. Изв. РАН, 2010, Энергетика, том 4, С. 155-161.
13. Амирханян Н.В., Черкасов С.Г. Теоретический анализ и методика расчета теплофизических процессов, протекающих в криогенной емкости в режиме бездренажного хранения. ТВТ, 2001, том 39, выпуск 6, С. 970-976.
14. Gursu S., Sherif S.A., Veziroglu T.N., Sheffield J.W. Analysis and optimization of thermal stratification and self-pressurization effects in liquid hydrogen storage systems—part 2: model results and conclusions. Journal of Energy Resources Technology. September 1993., Vol. 115., pp. 228-231.
15. M Seo, S Jeong. Analysis of self-pressurization phenomenon of cryogenic fluid storage tank with thermal diffusion model. Cryogenics. 2010, Vol. 50, №9, pp. 549-555.
16. Hochstein J.I., Ji H.-C., Aydelott J.C. Prediction of self-pressurization rate in cryogenic propellant tankage. J. Propulsion. 1990, Vol. 6, №1, pp. 11-17.

17. Panzarella C.H., Kassemi M. Self-pressurization of large cryogenic tank in space. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2005, Vol. 42, №2, pp. 299-308.
18. Grayson G., Lopez A., Chandler F., Hastings L., Hedayat A., Brethour J. CFD modelling of helium pressurant effect on cryogenic tank pressure rise rates in normal gravity. 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 5524, 2007.
19. Roh S., Son G. Numerical study of natural convection in liquefied gas tank. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2012, Vol. 26, pp. 3133-3140.
20. Kartuzova O., Kassemi M. Modeling interfacial turbulent heat transfer during ventless pressurization of a large scale cryogenic storage tank in microgravity. 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 6037, 2007.
21. J. Fu, B. Sunden, X. Chen, Y. Huang, Influence of phase change on selfpressurization in cryogenic tanks under microgravity. *Applied Thermal Engineering*. 2015.
22. Liu Z., Li Y., Jin Y. Pressurization performance and temperature stratification in cryogenic final stage propellant tank. *Applied Thermal Engineering*. 2016, Vol. 106, pp. 211-220.
23. Солдатов Е.С. Моделирование процессов тепломассообмена в криогенном резервуаре долговременного хранения сжиженного природного газа. *Научные ведомости: Серия: Экономика. Информатика*. 2019. Том 46, № 1, С. 92-98.
24. Choi S.W, Lee W.I., Kim H.S. Numerical analysis of convective flow and thermal stratification in a cryogenic storage tank. *Numerical Heat Transfer*. 2017. Vol 71, №4, pp. 402-422.
25. Костюк В.В., Фирсов В.П. Теплообмен и гидродинамика в криогенных двигательных установках. М.: Наука, 2015.
26. Черкасов С.Г., Суслов Я.А. Двухпараметрический интегральный метод расчета турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя

- //Тепловые процессы в технике. 2014. Т.6, № 8. С. 338-342.
27. Черкасов С.Г., Лаптев И.В. Упрощенный расчет ламинарного свободно-конвективного слоя в газе. Тепловые процессы в технике. 2017. № 4. С. 146-153.
 28. Eckert E.R.G., Jackson T.W. Analysis of turbulent free convection boundary layer on flat plate, National Advisory Committee for Aeronautics Report No. 1015.1951.
 29. Влит Л. Экспериментальное исследование турбулентных пограничных слоёв в условиях естественной конвекции // Теплопередача. Серия С. 1969. Т. 91, № 4. С. 73-95.
 30. Yu C.M., Aydemir N.U., Venart J.E.S. Transient free convection and thermal stratification in uniformly-heated partially-filled horizontal cylindrical and spherical vessels. J. of Thermal Science. 1992. Vol. 1, № 2. Pp. 114-122.
 31. Arnett R.W., Voth R.O. A computer program for the calculation of thermal stratification and self-pressurization in a liquid hydrogen tank. Constructor report CR-2026, NASA Lewis Research Center. 1972.
 32. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том IV. Гидродинамика, М. Наука, 1986.
 33. Полежаев В.И., Грязнов В.Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье-Стокса в переменных “вихрь-функция тока”. // ДАН СССР, 1974, т. 219, №2, с. 301-304.
 34. Черкасов С.Г. Модифицированный численный метод для расчета тепловой конвекции в вертикальном цилиндрическом сосуде.// Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984, т. 15, ;№5, с 144-153.
 35. Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
 36. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. J. of Comp. Physics. 1986, V. 63, pp. 40-65.

37. De Vahl Davis G., Jones I.P. Natural convection of air in a square cavity: a comparison exercise. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1983, №3, pp. 227–248.
38. Christon M.A., Gresho P.M., Sutton S.B. Computational predictability of time-dependent natural convection flows in enclosures (including a benchmark solution). *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 2002, №40, pp. 953-980.
39. Barakos G., Mitsoulis E., Assimacopoulos D. Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall functions. *Int. J. for numerical methods of fluids*. 1994, Vol, 18, pp. 695-719.
40. Mohamad A.A. *Lattice Boltzmann method. Fundamentals and engineering applications with computer codes*. Springer. 2011.
41. Dixit H.N., Babu V. Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method. *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 2006. Vol. 49. Pp. 727-739.
42. Gibanov N.S., Miroshnichenko I.V., Sheremet M.A. Comparison of two numerical approaches for natural convection in cavities with energy sources. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1382, 2019.
43. Miroshnichenko I.V., Sheremet M. A. Turbulent natural convection combined with thermal surface radiation inside an inclined cavity having local heater // *International Journal of Thermal Sciences*. – 2018. – Vol. 124. – P. 122–130
44. Bondareva N.S., Sheremet M.A., Pop I. Magnetic field effect on the unsteady natural convection in a right-angle trapezoidal cavity filled with a nanofluid: Buongiorno's mathematical model // *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. – 2015. – Vol. 25. – Issue 8. – Pp. 1924–1946.
45. Miroshnichenko I.V., Sheremet M. A. Turbulent natural convection combined with thermal surface radiation inside an inclined cavity having local heater // *International Journal of Thermal Sciences*. – 2018. – Vol. 124. – P. 122–130.
46. Martyushev S.G., Sheremet M.A. Conjugate natural convection combined with surface thermal radiation in a three-dimensional enclosure with a heat source //

- International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2014. – Vol. 73. – P. 340–353.
47. Mezrhab A., Bouali H., Amaoui H., Bouzidi M., Computation of combined natural-convection and radiation heat-transfer in a cavity having a square body at its center // Applied Energy. – 2006. – Vol. 83. – P. 1004–1023.
48. Zeng Z., Chen J., Mizuseki H., Shimamura K., Fukuda T., Kawazoe Y. Three-dimensional oscillatory convection of LiCaAlF_6 melts in Czochralski crystal growth // J. Crystal Growth. 2003. V. 252. № 4. P. 538–549.
49. Бессонов О.А. Конвективные взаимодействия и устойчивость течений в модели метода Чохральского при вращении кристалла. // Изв. РАН. МЖГ. 2015, №3, с. 44-54.
50. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Вerezуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса. М.:Наука, 1987.
51. Полежаев В.И., Черкасов С.Г. Нестационарная тепловая конвекция в цилиндрическом сосуде при боковом подводе тепла. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. №4, с. 148-157.
52. Полежаев В.И. Эффект максимума температурного расслоения и его приложения. //ДАН СССР. 1974. Т. 218, №4, с. 783-786.
53. Полежаев В.И. Конвективное взаимодействие в цилиндрическом сосуде, частично заполненном жидкостью, при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям и дну. // Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, №4, с. 77-88.
54. Моисеева Л.А., Черкасов С.Г. Математическое моделирование естественной конвекции в вертикальном цилиндрическом баке при знакопеременном распределении теплового потока на стенке. // Изв. РАН. МЖГ. 1996, №2, с. 66-72.
55. Lin W., Armfield S.W. Direct simulation of natural convection cooling in a vertical circular cylinder. International Journal of Heat and Mass Transfer. 42. 1999.

56. Вальциферов Ю.В., Дронов В.П. Численное моделирование конвективного теплообмена в тонкостенном цилиндрическом сосуде с полусферическими днищами при различных распределениях потока тепла по контуру. // ТВТ. 1985, т. 23, №1, с. 106-111.
57. Вальциферов Ю.В., Дронов В.П. Численное моделирование конвективного теплообмена в тонкостенном цилиндрическом сосуде с полусферическими днищами, полностью заполненном жидкостью. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. №5, с. 204-207.
58. Вальциферов Ю.В., Полежаев В.И. Конвективный теплообмен и температурное расслоение в сфере, полностью заполненной жидкостью, при заданном потоке тепла. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975, №5, с. 150-155.
59. Gray D.D., Giorgini A. The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 19, pp. 545-551, Pergamon Press, 1976.
60. Нехамкина О.А., Никулин Д.А., Стрелец М.Х. Об иерархии моделей тепловой естественной конвекции совершенного газа. // ТВТ. 1989, Т. 27, №6 с. 1115-1125.
61. Polezhaev V.I. Numerical solution of system of two-dimensional non-steady Navier-Stokes equations for compressible gas in closed cavity. Fluid Dyn. 1967, №2, p. 103.
62. Агафонов Д.В., Черкасов С.Г. Влияние переменности плотности на распространение тепла в газе. ТВТ. 2002. Т. 40. № 4. С. 617-622.
63. Черкасов С.Г., Черкасова А.С. Одномерный теплоперенос в газе с учетом эффектов, обусловленных тепловым расширением. Известия РАН. Энергетика. 2007. № 1. С. 47-54.
64. Никулин Д. А., Стрелец М. Х. Численное моделирование нестационарной естественной конвекции однородного сжимаемого газа в замкнутой неадиабатической области. ТВТ, Т. 22, С. 906–912, 1984.

65. Patterson J., Imberger J. Unsteady natural convection in a rectangular cavity. *J. Fluid Mech.* 1980, Vol. 100, pp. 65-86.
66. Paolucci S. On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations. Sandia National Laboratories Rep. SAND824257. December 1982.
67. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 368 с.
68. Черкасов С.Г. О некоторых особенностях описания тепловых и динамических процессов в газах в приближении гомобаричности // ТВТ. 2010. Т. 48. № 3. С. 444-448.
69. Chenoweth D. R., Paolucci S. Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature difference. *J. Fluid Mech.*, vol. 169., pp. 173-210, 1986.
70. Chenoweth D. R., Paolucci S. Gas flow in vertical slots with large horizontal temperature difference. *Phys. Fluids*, vol. 28., №8, 1985, pp. 2365-2374.
71. Черкасов С.Г., Лаптев И.В. Упрощенный расчет ламинарного свободно-конвективного слоя в газе. *Тепловые процессы в технике*. 2017. № 4. С. 146-153.
72. Cherkasov S. G., Anan'ev A. V., Moiseeva L. A. Limitations of the Boussinesq Model on the Example of Laminary Natural Convection of Gas between Vertical Isothermal Walls. *High Temperature*, 2018, Vol. 56, No. 6, pp. 878–883.
73. Соболева Е.Б. Численное моделирование динамики околосферической жидкости в твердой пористой матрице. ИПМ РАН. Препринт №817. Москва, 2006.
74. Beysens D., Chatain D., Nikolayev V.S., Ouazzani J., Garrabos Y. Possibility of long-distance heat transport in weightlessness using supercritical fluids. *Phys. Rev. E*. 2010, Vol. 82., Iss. 6.
75. Hyunik Yang, Desyatov A.V., Cherkasov S.G., Il'mov D.N., McConnell D.B. Numerical simulation of the single spherical vapor bubble on a basis of the uniform model. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 51, Iss. 13-14, pp. 3615-3622.

76. Суржигов С.Т. Вычислительная модель излучающего термика в нестационарных динамических переменных // Матем. моделирование. 1995. Т. 7. № 8. С. 344
77. Quazzani J., Garrabos Y. A new numerical algorithm for low Mach number supercritical fluid / Preprint Elsevier, 23 Apr. 2007. 10 p.
78. Соболева Е.Б. Моделирование естественной конвекции на основе уравнений Навье-Стокса в приближении дозвукового течения. ИПМ РАН. Препринт №602. Москва, 1997.
79. R. Becker, M. Braack, Solution of a stationary benchmark problem for natural convection with high temperature difference. *Int. J. Thermal Sci.* 41 (2002) 428–439.
80. Park H.K., Nourgaliev R.R., Martineau R. C., Knoll D. A. On physics-based preconditioning of the Navier–Stokes equations. *J. of Comp. Physics*, 2009, 228, pp. 9131–9146.
81. Qu’er’e P. L. Modelling of natural convection flows with large temperature differences: a benchmark problem for low mach number solvers. part 1, reference solutions. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. vol. 39. №.3, p. 609–616. 2005.
82. H. Paillère, P. Le Quéré, C. Weisman, J. Vierendeels, E. Dick, M. Braack, F. Dabbene, A. Beccantini, E. Studer, T. Kloczko, C. Corre, V. Heuveline, M. Darbandi, S.F. Hosseinizadeh, Modelling of natural convection flows with large temperature differences: a benchmark problem for low Mach number solvers. Part 2. Contributions to the june 2004 conference, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 39 (3) (2005) 617.
83. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Ч.1 М.: Наука, 1976. 584 с.
84. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. –600 с.
85. Гершуни Г.З., Жуховецкий Е.М. Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972, 392 с.

86. Черкасов С.Г., Миронов В.В., Глевцежев В.В. Теоретическое исследование нестационарного теплообмена в закнужтом газовом объеме при отсутствии массовых сил. Изв. РАН, Энергетика. 2012, том 4, С. 139-150.
87. Barnett D.O. Liquid Nitrogen Stratification Analysis and Experiments in a Partially Filled, Spherical Container. Advances in Cryogenic Engineering, vol 13, pp. 174-187.
88. A. Tim, D. Michael, B. Philipp, W. Mike, v. Arnold, Cryogenic Sloshing Tests in a Pressurized Cylindrical Reservoir, in: 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 2009.
89. Cornish R.E., Eastman E.D. The specific heat of hydrogen gas at low temperatures from the velocity of sound; and a precision method of measuring the frequency of an oscillating circuit. Contribution from the chemical laboratory of the University of California. 1928, pp. 627-652.
90. Гурвич Л.В. и др., Термодинамические свойства индивидуальных веществ: Справ. Изд. М.: Наука, 1982.
91. Goodwin R.D., Diller D.E., Roder H.M., Weber L.A. Second and third virial coefficients of hydrogen. J. of research of the NBS – A. Physics and Chemistry. 1964, Vol. 68A, №1, pp. 121-126.
92. Болтачев Г.Ш., Байдаков В.Г. Второй и третий вириальные коэффициенты простых флюидов. Теплофизика высоких температур. 2006, Т. 44, №1, с. 82-89.
93. Wagner W., Ewers J., Schmidt R. An equation of state for oxygen vapour – second and third virial coefficients. Cryogenics. 1984.
94. Goodwin R.D. Thermophysical properties of methane: virial coefficients, vapor and melting pressures. J. of research of the NBS – A. Physics and Chemistry. 1970, Vol. 74A, №5, pp. 655-660.
95. Versteeg H.K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method. – N.Y.: Wiley, 1995. – 257 p.
96. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

97. Roux B., Grondin J. C., Bontoux P., Gilly B. On a high-order accurate method for the numerical study of natural convection in a vertical square cavity. *Numer. Heat Transfer* 1, 331-349. 1978
98. Черкасов С.Г., Лаптев И.В. Упрощенный расчет ламинарного свободно-конвективного слоя в газе. *Тепловые процессы в технике*. 2017. № 4. С. 146-153.
99. Cherkasov S.G., Anan'ev A.V., Moiseeva L.A. Limitations of the boussinesq model on the example of laminary natural convection of gas between vertical isothermal walls. *High Temperature*. 2018. V. 56. N 6. P. 878–883.
100. Черкасов С.Г. Естественная конвекция в вертикальном цилиндрическом сосуде при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям // *Известия АН СССР. МЖГ*. 1984. № 6. С. 51–56.
101. Григорьев И.С., Мелихов Е.З. *Физические величины*. М.: Энергоатомиздат. 1991, 1232 с.
102. Веркин Б.И., Кириченко Ю.А., Русанов КВ. *Теплообмен при кипении в полях массовых сил различной интенсивности*. Киев: Наукова думка, 1988. 254 с
103. Martin J., Hastings L. Large-Scale Liquid Hydrogen Testing of a Variable Density Multilayer insulation with a Foam Substrate. NASA TM-2001-211089. Marshall Space Flight Center. AL, June 2001.
104. Hastings L.J., Flachbart R.H., Martin J.J., Hedayat A., Fazah M., Lak T., Nguyen H., Bailey J.W. Spray Bar Zero-Gravity Vent System for On-Orbit Liquid Hydrogen Storage. NASA TM-2006-212926. 2006.
105. Kartuzova O., Kassemi M., Agui J., Moder J. Self-Pressurization and Spray Cooling Simulation of the Multipurpose Hydrogen Test Bed (MHTB) Ground-Based Experiment. 50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference. Cleveland, 2014, July 28-30.

Приложение. Уравнения Навье-Стокса в различных системах координат.

Для численного решения уравнений конвекции в жидкой и паровой фазе необходимо конкретизировать их вид в соответствии с рассматриваемыми в данной работе типами геометрии модельных задач. В рамках излагаемого в диссертации материала будут рассматриваться несколько типов замкнутых объемов, имеющих плоскую, цилиндрическую и сферическую геометрии. Уравнения будем приводить в безразмерном виде, безразмерные масштабы для газа и жидкости введем в соответствии с соотношениями (2.2.11).

Один из разделов данной работы посвящен исследованию конвекции газа в плоской квадратной ячейке. Целесообразно представить уравнения Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха и в приближении Буссинеска в декартовых координатах.

Уравнения неразрывности, движения и переноса тепла в газе в рамках данной постановки можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial y} = 0 \quad (5.5.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (5.5.2)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho w u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w w}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \quad (5.5.3)$$

$$+ \text{Pr} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{Ra \text{ Pr}}{A} (1 - \rho)$$

$$c_P \left(\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \frac{\partial \rho u T}{\partial x} + \frac{\partial \rho w T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + K_{ID} \beta_T T \frac{dP}{dt} \quad (5.5.4)$$

Уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска вместе с уравнением переноса тела в жидкости можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (5.5.5)$$

$$K_{VL}^E \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial wu}{\partial y} \right) = -K_{VL}^\rho \frac{\partial p}{\partial x} + K_{VL}^\lambda \text{Pr}_L \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (5.5.6)$$

$$K_{VL}^E \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial wu}{\partial x} + \frac{\partial ww}{\partial y} \right) = -K_{VL}^\rho \frac{\partial p}{\partial y} + K_{VL}^\lambda \text{Pr}_L \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{Ra_L \text{Pr}_L K_{VL}^{\lambda^3}}{A K_{VL}^E} (T-1) \quad (5.5.7)$$

$$K_{VL}^E \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial wT}{\partial y} \right) = K_{VL}^\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (5.5.8)$$

Уравнения в цилиндрической системе координат.

Для газа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho u}{\partial r} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (5.5.9)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho uu}{\partial r} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \text{Pr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{u}{r} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (5.5.10)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho uw}{\partial r} + \frac{\partial \rho ww}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{u}{r} \right) \right] + \text{Pr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + (1-\rho) \frac{Ra \cdot \text{Pr}}{A} \quad (5.5.11)$$

$$\frac{1}{\gamma_T} \frac{\partial \rho T}{\partial t} + c_P \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r \rho u T}{\partial r} + \frac{\partial \rho w T}{\partial z} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (5.5.12)$$

Для жидкости:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.5.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial ruu}{\partial r} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -K_{VL}^{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \text{Pr}_L \frac{K_{VL}^{\lambda}}{K_{VL}^E} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (5.5.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial ruw}{\partial r} + \frac{\partial ww}{\partial z} = & -K_{VL}^{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \text{Pr}_L \frac{K_{VL}^{\lambda}}{K_{VL}^E} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \\ & + \frac{Ra_L \text{Pr}_L}{A} \frac{K_{VL}^{\lambda 3}}{K_{VL}^E 2} (T - 1) \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

$$K_{VL}^E \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial ruT}{\partial r} + \frac{\partial wT}{\partial z} \right] \right) = K_{VL}^{\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) \quad (5.5.16)$$