

# АНАЛИЗ СХЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО МАНЕВРА У ЛУНЫ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ВЕКТОРА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИЗБЫТКА СКОРОСТИ ОТЛЕТА ОТ ЗЕМЛИ

КОНСТАНТИНОВ Михаил Сергеевич, профессор Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н.  
E-mail: mkonst@bk.ru

KONSTANTINOV Mikhail S., Moscow Aviation Institute, Professor, Doctor of Sciences (technical) (Dr. Sci. Tech.).  
E-mail: mkonst@bk.ru

*Исследуется возможность использования гравитационного маневра у Луны при реализации траектории межпланетного перелета. Исследуется схема полета, при которой за счет импульса скорости на базовой околоземной орбите космический аппарат, прежде чем выйти на гелиоцентрическую траекторию полета, попадает в окрестность Луны. Благодаря гравитационному маневру он приобретает дополнительную скорость, которая позволяет достичь планеты назначения с меньшими затратами характеристической скорости разгонного блока. В работе даны подробный анализ схемы полета и строгое доказательство возможного существования нескольких типов траекторий космического аппарата с лунным гравитационным маневром.*

*The opportunity of use of Moon swingby is researched at realization of a trajectory of interplanetary flight. It is researched the flight plan at which due to a velocity impulse at low Earth circular orbit a spacecraft (SC) gets in a vicinity of the Moon, before to insert into a heliocentric trajectory of flight. Due to Moon's swingby a spacecraft gets additional velocity, which allows reaching a planet of destination with smaller expenses of characteristic velocity of a chemical upper stage. In work the detailed analysis of the scheme of flight and the strict proof of possible existence of several types of trajectories of a space vehicle with lunar gravitational maneuver is given.*

**Ключевые слова:** космический аппарат, межпланетные полеты, гравитационный маневр, схема полета, лунный гравитационный маневр.

**Key words:** spacecraft, interplanetary flight, swingby, Moon's swingby.

## Введение

При анализе современных космических межпланетных проектов (проектов исследования планет, астероидов и других небесных тел) существует проблема дефицита массы космического аппарата, доставляемого к исследуемому небесному телу. Реализовать научный проект к Марсу или Венере с использованием тяжелого носителя типа «Протон», как это было в прошлом веке, практически нереально. Разработчики межпланетных проектов ориентируются на ракеты-носители среднего класса, например типа «Союз», и даже на конверсионные ракеты-носители. В этих условиях становится еще более важной проблема уменьшения требуемой характеристической скорости космических разгонных блоков, обеспечивающих межпланетный перелет.

Известно, что при реализации траектории межпланетного перелета может быть использован гравитационный маневр у Луны и этот маневр может уменьшить требуемую для межпланетного переле-

та характеристическую скорость. Траектория с использованием лунного гравитационного маневра очень чувствительна к ошибкам реализации всей схемы полета, и в частности гравитационного маневра. Поэтому многие специалисты считают, что преодоление трудностей реализации гравитационного маневра сводит на нет небольшой выигрыш в характеристической скорости, получающийся благодаря гравитационному маневру. С уважением относясь к такому мнению, не следует забывать, что:

- в практике космических полетов гравитационный маневр был использован многократно, и трудности его реализации удавалось преодолеть;
- гравитационный маневр можно считать решающим фактором, позволившим существенно расширить рамки межпланетных перелетов.

В настоящее время упоминание о возможности использования лунного гравитационного маневра можно найти в большом числе публикаций. Наиболее полный анализ этой проблемы дан в нескольких работах В.В. Ивашкина и его коллег [1, 2]. В этих

работках предложен подход к анализу лунного гравитационного маневра при полете к планетам и астероидам. Там же приведены интересные численные результаты такого анализа.

Ни в коем случае не ставя под сомнения результаты этих и некоторых других работ (например, [3]), посвященных анализу возможности использования лунного гравитационного маневра при межпланетных перелетах, мы не можем считать анализируемую проблему до конца решенной. Оставались без ответа некоторые вопросы:

- всегда ли существует возможность реализации лунного гравитационного маневра;
- в случае, если такая возможность есть, сколько существует решений этой задачи (типов таких маневров).

В настоящей работе мы хотим ответить на эти вопросы. Рассматривается следующая общая задача. Дана базовая околоземная орбита (своим наклоном и радиусом), дан вектор гиперболического избытка скорости КА отлета из околоземной окрестности. Предполагается, что химический разгонный блок может обеспечить разгонный импульс скорости при старте с базовой околоземной орбиты. Требуется найти все возможные схемы реализации лунного гравитационного маневра (если такие схемы существуют).

Мы постарались так подробно пояснить нашу методику, чтобы читатель мог воспроизвести наш алгоритм, чтобы были понятны причины возможного существования нескольких решений или отсутствия решений.

### Общая постановка проблемы

Предполагается, что выход из гравитационного поля Земли обеспечивается химическим разгонным двигателем. Этот двигатель при запуске на промежуточной орбите искусственного спутника Земли за счет одного импульса скорости (этот импульс может быть реализован одним или несколькими включениями двигателя) обеспечивает переход на траекторию полета КА в окрестность Луны. КА пролетает окрестность Луны, совершает лунный гравитационный маневр и покидает окрестность Земли с заданным вектором гиперболического избытка скорости.

Пусть склонение гиперболического избытка скорости меньше наклона базовой орбиты искусственного спутника Земли. Тогда для схемы полета без использования гравитационного маневра у Луны существует такая долгота восходящего узла базовой орбиты, такая точка на этой орбите (она характеризуется аргументом широты), что, сообщая КА в этой точке трансверсальный импульс скоро-

сти, КА выводится на гиперболу отлета от Земли с заданным вектором гиперболического избытка скорости. Этот импульс скорости с точностью до потерь в скорости есть характеристическая скорость химического разгонного блока, обеспечивающего межпланетный перелет без использования гравитационного маневра у Луны. Задача заключается в оценке возможного уменьшения записанного импульса скорости за счет гравитационного маневра у Луны.

### Анализируемая схема полета

Предполагается, что в выбираемой точке базовой орбиты ИСЗ КА сообщается трансверсальный импульс скорости, который обеспечивает перелет КА в окрестность Луны. Благодаря гравитационному маневру у Луны геоцентрическая траектория КА изменяется, и он начинает двигаться по гиперболе отлета от Земли с заданным вектором гиперболического избытка скорости.

Выбираемыми характеристиками схемы полета являются:

- долгота восходящего узла промежуточной орбиты;
- положение точки старта (точки приложения импульса скорости) на промежуточной орбите;
- трансверсальный импульс скорости (он минимизируется).

Требуется найти эти три характеристики, чтобы обеспечить заданную величину и направление гиперболического избытка скорости выхода из грависферы Земли. Математически задача представляет собой решение системы трех трансцендентных уравнений относительно трех неизвестных. Из физических соображений ясно, что решение рассматриваемой задачи существует. Действительно, пролетая достаточно далеко от Луны, всегда можно найти гиперболу отлета от Земли, так как мы предположили, что склонение гиперболического избытка скорости меньше наклона промежуточной орбиты. Но каково число решений у сформулированной задачи, совершенно неясно. Следует найти все эти решения и выбрать из них такое, в котором используется наименьший импульс скорости.

Исследовать пространство трех выбираемых параметров и выбирать такие из них, которые удовлетворяют трем уравнениям, без хорошего начального приближения достаточно сложно. По нашему мнению, качественный анализ задачи целесообразно провести для более простой модели движения КА с использованием метода грависфер.

Геоцентрическая траектория рассматривается состоящей из двух частей (дуг). Каждая из этих дуг

есть кеплеровская орбита (траектория в задаче двух тел: Земля и КА). Первая дуга начинается в выбранной точке промежуточной орбиты и заканчивается в окрестности Луны (точнее, в точке, в которой в момент гравитационного маневра находится Луна). Вторая дуга начинается в конечной точке первой дуги и представляет собой гиперболу с заданным вектором гиперболического избытка скорости относительно Земли.

### Исследование геоцентрической траектории КА после лунного гравитационного маневра

Анализ начнем с исследования второй из перечисленных дуг геоцентрической траектории. При этом полагаем известными: вектор гиперболического избытка скорости отлета от Земли  $\mathbf{V}_{\infty}$  и радиус-вектор Луны относительно Земли в момент лунного гравитационного маневра  $\mathbf{r}_2$ . Плоскость гиперболы отлета от Земли определяется перечисленными векторами. Покажем, как, зная векторы  $\mathbf{V}_{\infty}$  и  $\mathbf{r}_2$ , можно найти анализируемую дугу траектории отлета от Земли — геоцентрическую траекторию КА после гравитационного маневра. В общем случае решений может быть несколько. Общая идея исследования данного участка заключается в следующем. Считая эксцентриситет рассматриваемого участка траектории основным неизвестным параметром этого участка, получим два разных выражения для фокального параметра этого участка (из условий движения в начальной и конечной точках траектории). Приравняв эти выражения, получим уравнение относительно эксцентриситета.

Предварительно определим угол  $\phi$  между направлением гиперболического избытка скорости  $\mathbf{V}_{\infty}$  и радиусом-вектором Луны  $\mathbf{r}_2$  в момент гравитационного маневра. Считаем, что этот угол (как угол между двумя векторами в пространстве) находится в диапазоне  $0-180^\circ$  и определяется по скалярному произведению векторов  $\mathbf{V}_{\infty}$  и  $\mathbf{r}_2$ :

$$\phi = \arccos\left(\frac{r_2 V_{\infty}}{|\mathbf{r}_2| |\mathbf{V}_{\infty}|}\right).$$

Величина геоцентрической скорости КА относительно Земли после лунного гравитационного маневра  $V_2$  находится из соотношения

$$V_2 = \sqrt{V_{\infty}^2 + \frac{2fM}{r_2}}.$$

Предельная истинная аномалия гиперболы отлета от Земли есть функция эксцентриситета гео-

центрической траектории отлета от Земли. Будем считать значение этого угла положительным и находящимся в диапазоне  $90-180^\circ$ . Тогда этот угол определяется так:

$$v_{\text{Lim}} = \arccos\left(\frac{-1}{e}\right).$$

Введем в рассмотрение отрицательный угол  $\eta$ , равный разности предельной истинной аномалии и  $180^\circ$  ( $\eta = v_{\text{Lim}} - \pi < 0$ ). Истинная аномалия КА в начальной точке геоцентрической траектории после пролета Луны  $v_2$  связана с предельной истинной аномалией некоторым соотношением. Оно имеет различный вид в зависимости от положения КА на гиперболе отлета. Мы назвали случаем **a** такой случай, когда истинная аномалия  $v_2$  (она может быть как положительной, так и отрицательной) больше угла  $\eta$  ( $v_2 > \eta$ ), при этом справедливо следующее условие:  $v_2 = v_{\text{Lim}} - \phi$ .

Для случая **b**, когда истинная аномалия  $v_2$  меньше угла  $\eta$  ( $v_2 < \eta < 0$ ) и КА после лунного гравитационного маневра находится на нисходящей ветви траектории, справедливо другое геометрическое условие:  $v_2 = v_{\text{Lim}} + \phi - 2\pi$ .

Случаи **a** и **b** отличаются друг от друга направлением облета Земли. При анализе не следует забывать о необходимости выполнения следующего естественного ограничения:

$$-v_{\text{Lim}} < v_2 < v_{\text{Lim}}. \quad (1)$$

Косинус истинной аномалии КА после пролета Луны связан с углом  $\phi$  (углом между гиперболическим избытком скорости отлета от Земли и радиусом-вектором Луны в момент гравитационного маневра) и эксцентриситетом рассматриваемой геоцентрической траектории следующими соотношениями:

$$\text{для случая a} \quad \cos(v_2) = \frac{-\cos(\phi) + \sin(\phi)\sqrt{e^2 - 1}}{e};$$

$$\text{для случая b} \quad \cos(v_2) = \frac{-\cos(\phi) - \sin(\phi)\sqrt{e^2 - 1}}{e}.$$

По косинусу истинной аномалии КА после пролета Луны  $v_2$ , величине радиуса-вектора КА в этот момент времени  $\mathbf{r}_2$  и величине скорости КА в этот момент времени  $V_2$  определяем косинус угла накло-

на геоцентрической скорости  $V_2$  к местному (земному) горизонту  $\theta_2$ :

$$\cos(\theta_2) = \frac{1 + e \cdot \cos(v_2)}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cdot \cos(v_2)}}.$$

Фокальный параметр рассматриваемой дуги геоцентрической траектории может быть найден как квадрат модуля векторного произведения радиуса-вектора  $\mathbf{r}_2$  и вектора скорости  $\mathbf{V}_2$ , деленный на гравитационную константу Земли. После преобразований удалось получить следующие зависимости фокального параметра от эксцентриситета орбиты:

для случая **a**

$$p_2 = \frac{r_1^2 V_2^2 (1 - \cos(\phi) + \sin(\phi) \sqrt{e^2 - 1})}{fM [1 + e^2 - 2(\cos(\phi) - \sin(\phi) \sqrt{e^2 - 1})]}; \quad (2)$$

для случая **b**

$$p_2 = \frac{r_1^2 V_2^2 (1 - \cos(\phi) - \sin(\phi) \sqrt{e^2 - 1})}{fM [1 + e^2 - 2(\cos(\phi) + \sin(\phi) \sqrt{e^2 - 1})]}. \quad (3)$$

Другое выражение для фокального параметра получим, используя известную величину гиперболического избытка скорости:

$$p_2 = \frac{fM}{V_{\infty}^2} (e^2 - 1). \quad (4)$$

Приравняв правые части равенств (2) и (4), а также равенств (3) и (4), получим два уравнения (одно для случая **a**, второе для случая **b**) относительно эксцентриситета. Используя то обстоятельство, что эксцентриситет входит в эти уравнения достаточно специфично, удастся введением вспомогательного неизвестного параметра  $y = \sqrt{e^2 - 1}$  ( $y > 0$ ) упростить уравнения. Они оказываются алгебраическими уравнениями четвертого порядка относительно  $y$ . Проблема их решения сводится к нахождению положительных корней двух полиномов четвертого порядка относительно  $y$ .

Приведем выражения для коэффициентов этих полиномов. Для случая **a** они имеют следующий вид (индекс коэффициента соответствует степени введенного аргумента  $y$  в полиноме):

$$a_4 = \frac{fM^2}{r_1^2 V_2^2 V_{\infty}^2}; \quad a_3 = \frac{2fM^2 \sin(\phi)}{r_1^2 V_2^2 V_{\infty}^2};$$

$$a_2 = \frac{2fM^2(1 - \cos(\phi))}{r_1^2 V_2^2 V_{\infty}^2} - \sin(\phi)^2; \quad (5)$$

$$a_1 = -2\sin(\phi)(1 - \cos(\phi)); \quad a_0 = -(1 - \cos(\phi))^2.$$

Для случая **b** коэффициенты отличаются от уже приведенных коэффициентов только знаками при нечетных степенях аргумента:  $a_1$  и  $a_3$ .

Нами строго доказано, что для каждого из введенных двух полиномов всегда существует единственный положительный корень, которому соответствует истинная аномалия  $v_2$ , удовлетворяющая условию (1). Доказано, что положительный корень, при котором удовлетворяется условие (1), всегда принадлежит диапазону  $0 \div \text{tg}(\phi/2)$ .

Регулярные алгоритмы нахождения корней полиномов 4-го порядка хорошо известны. При этом наша задача сводилась к нахождению положительного корня каждого из двух полиномов. Подчеркнем еще раз, что такой положительный корень каждого полинома является единственным корнем, и он принадлежит диапазону  $0 \div \text{tg}(\phi/2)$ .

Таким образом, мы доказали, что всегда (для всех значений гиперболического избытка скорости, длины радиуса-вектора КА в момент гравитационного маневра и угла  $\phi$  между гиперболическим избытком скорости и радиусом-вектором КА в момент гравитационного маневра) существуют два решения рассмотренной задачи. Одно решение соответствует вышеописанному случаю **a**, другое случаю **b**. На рис. 1 и 2 для двух значений угла  $\phi$  ( $160^\circ$  и  $90^\circ$ )

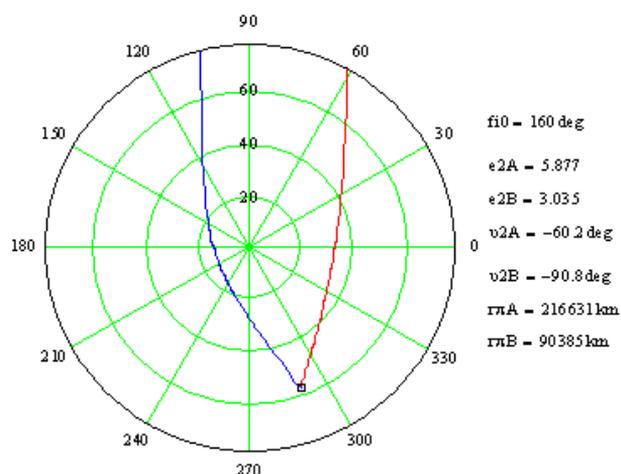


Рис. 1. Две геоцентрические траектории отлета от Земли после гравитационного маневра у Луны (отмечена квадратом) обеспечивают гиперболический избыток скорости 3 км/с, направленный вертикально вверх. Угол  $\phi$  равен  $160^\circ$

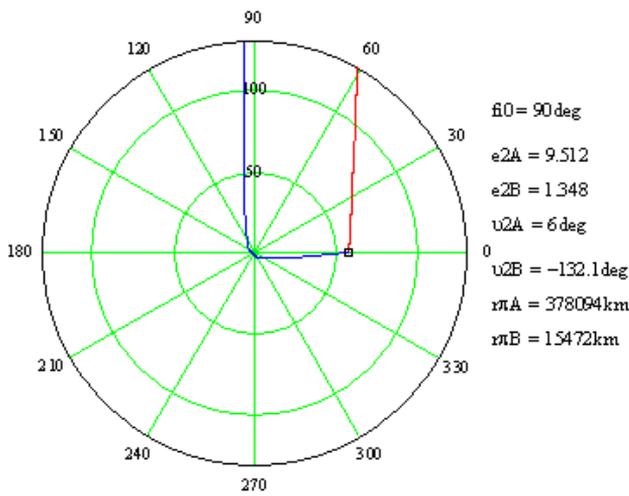


Рис. 2. Две геоцентрические траектории отлета от Земли после гравитационного маневра у Луны (отмечена квадратом) обеспечивают гиперболический избыток скорости 3 км/с, направленный вертикально вверх. Угол  $\varphi$  равен  $90^\circ$

приведены геоцентрические траектории КА после гравитационного маневра, обеспечивающие гиперболический избыток скорости 3 км/с, направленный вертикально вверх на рисунках. Направление движение на этих траекториях противоположно: КА облетает Землю с разных сторон.

На рисунках справа приведены значения эксцентриситета, истинной аномалии в начальной точке рассматриваемого участка траектории и радиуса перигея для обоих случаев **a** и **b**.

Интересно и то, что по крайней мере для одного из корней полинома истинная аномалия КА после лунного гравитационного маневра оказывается отрицательной (истинная аномалия КА после гравитационного маневра может оказаться отрицательной и для обоих решений, например случай, представленный на рис. 1). Поэтому каждое из таких решений необходимо проверить на возможность попадания КА после осуществления лунного гравитационного маневра в земную атмосферу. Проверяется высота перигея гиперболы отлета от Земли. Она должна быть больше минимально возможной (например, более 200 км) для случая отрицательного значения истинной аномалии КА после гравитационного маневра.

Алгоритмически анализ может быть построен так. Находится положительный корень, лежащий в диапазоне  $0 \div \text{tg}(\varphi/2)$ , каждого из двух полиномов. Для полученных двух решений находятся значения эксцентриситета  $e = \sqrt{1 + y^2}$ , предельной истинной аномалии, значения истинной аномалии КА после пролета Луны  $\nu_2$ . После этого находится фокаль-

ный параметр рассматриваемой геоцентрической траектории (3) и, наконец, радиус перигея орбиты

$$r_p = \frac{p}{1 + e}.$$

Если  $\nu_2$  оказывается отрицательным, должна осуществляться проверка условия достаточной высоты перигея геоцентрической траектории. Если радиус перигея недостаточно большой, решение отбраковывается. Принципиально возможны все три варианта:

- может оказаться, что оба полученных решения осуществимы;
- может быть осуществимым только одно из полученных решений;
- в общем случае может случиться и так, что ни одно из решений нельзя осуществить, так как для них истинная аномалия  $\nu_2$  отрицательна и высота перигея орбиты недостаточно высока или находится внутри Земли.

В качестве примера была рассмотрена задача полета на Марс. На рис. 3 представлены изолинии требуемого гиперболического избытка скорости на плоскости дата старта (варьируется от 22 октября до 11 декабря 2011 года) — время полета (варьируется от 200 до 350 суток). Видно, что минимум гиперболического избытка соответствует полету по второму полувитку. Для оптимальных даты старта (7 или 6 ноября 2011) и времени полета (297 суток) требуемый гиперболический избыток скорости немого меньше 3 км/с.

Для рассмотренного примера на рис. 4 показаны области существования разного числа решений:

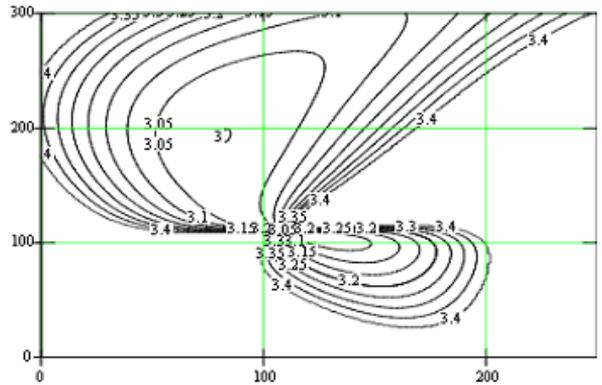


Рис. 3. Изолинии требуемых гиперболических избытков скорости при полете к Марсу на плоскости дата старта (ось абсцисс, в 0,2 суток, отсчитанных от 22 октября 2011 года) — время полета к Марсу (ось ординат в полусутках — метка 0 соответствует времени полета 200 суток; метка 300 соответствует 350 суткам полета)

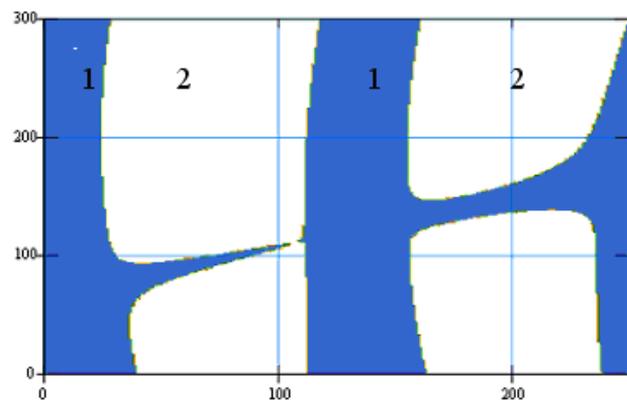


Рис. 4. Области существования разного числа решений на плоскости дата старта (ось абсцисс, в 0,2 суток, отсчитанных от 22 октября 2011 года) — время полета к Марсу (ось ординат в полусутках — метка 0 соответствует времени полета 200 суток; метка 300 соответствует 350 суткам полета)

- двух решений (четыре самые светлые области, разделенные относительно узкими более темными областями);
- одного решения (более темные области, обрамляющие светлые области).

Точек рассматриваемой плоскости, в которых решений не существует, нет. Рассмотрение других эпох запуска КА к Марсу, рассмотрение траекторий полета к Венере подтвердили этот результат численного анализа. Во всех случаях при любых рассматриваемых датах старта и временах полета всегда удается найти хотя бы одну траекторию выхода из грависферы Луны после лунного гравитационного маневра. Конечно, такой анализ не может служить доказательством того, что в общем случае не могут встретиться такие условия (такая величина и направление гиперболического избытка скорости), что решение может не существовать. Поэтому был проведен дополнительный анализ.

Вся траектория на рассмотренном участке зависит от трех чисел: величины гиперболического избытка скорости относительно Земли  $V_\infty$ , величины радиуса-вектора Луны (относительно Земли) в момент гравитационного маневра  $r_2$  и, наконец, угла между гиперболическим избытком скорости и радиусом-вектором КА в момент гравитационного маневра  $\varphi$ .

Так как орбита Луны не сильно эллиптическая, то  $r_2$  можно считать равной большой полуоси лунной орбиты. Влияние на траекторию двух других величин было проанализировано. Рассматривался очень широкий диапазон гиперболических избытков скорости — от нуля до 150 км/с — и общий диапазон углов  $\varphi$  — 0—180°. Легко увидеть (рис. 5),

что радиус перигея решения типа **a** при отрицательной истинной аномалии  $\nu_2$  минимален тогда, когда угол  $\varphi = 180^\circ$ . Это минимальное значение при небольших гиперболических избытках скорости существенно больше радиуса Земли. При  $V_\infty = 0,75$  км/с минимальный радиус перигея почти в 50 раз превышает радиус Земли. Если  $V_\infty = 4,5$  км/с, минимальный радиус перигея в 15 раз превышает радиус Земли. При  $V_\infty = 67,5$  км/с минимальный радиус перигея в 1,22 раза превышает радиус Земли.

На рис. 6 приведена зависимость радиуса перигея решения типа **a** как функции величины гиперболического избытка скорости для случая, когда векторы гиперболического избытка скорости и радиусы-векторы Луны антиколлинеарны (угол  $\varphi = 180^\circ$ ). Видно, что при гиперболическом избытке скорости 83,034 км/с радиус перигея оказывается равен радиусу базовой орбиты. То есть лунный гравитационный маневр невозможен только тогда, когда гиперболический избыток скорости очень большой (более 83,034 км/с). Это нереально большая скорость, которая не встречается в практике межпланетных перелетов. Отсюда можно сделать вывод.

Для любого расположения вектора гиперболического избытка скорости и его величины, для любого радиуса вектора Луны в момент осуществления гравитационного маневра существует по крайней мере одно решение для рассматриваемого участка геоцентрической траектории выхода из грависферы Земли. Решений может быть и два (одно для варианта **a**, второе для варианта **b**). Два решения имеют место, если угол  $\varphi$  между вектором гиперболического избытка скорости и радиусом-вектором Луны в момент гравитационного манев-

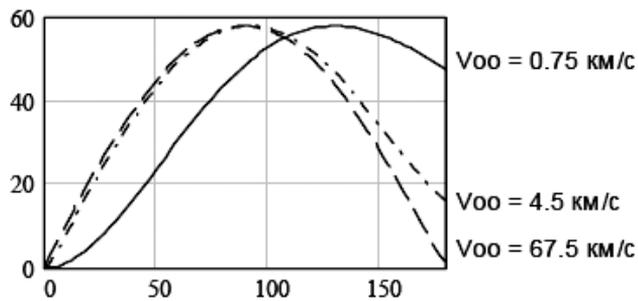


Рис. 5. Зависимость радиуса перигея в безразмерных единицах (вариант **a**) от угла  $\varphi$  (градусы) для нескольких значений гиперболического избытка скорости (0,75, 4,5 и 67,5 км/с). За единицу принят радиус базовой околоземной орбиты (6751 км)

ра больше некоторого критического, зависящего от гиперболического избытка скорости. Зависимость этого критического угла от гиперболического избытка скорости показана на рис. 7. При малых скоростях он немного больше  $10^\circ$ . С увеличением гиперболического избытка скорости этот критический угол монотонно растет и при 5 км/с близок к  $90^\circ$ .

Исследование рассматриваемого участка траектории заканчивается тем, что по найденным характеристикам ( $e_2$  — эксцентриситету,  $v_2$  — истинной аномалии начальной точки этой траектории,  $p_2$  — фокальному параметру) определяется вектор геоцентрической скорости после лунного гравитационного маневра. И, наконец, используя знание геоцентрической скорости Луны в момент лунного гравитационного маневра, можно найти гиперболический избыток скорости КА при выходе из лунной окрестности.

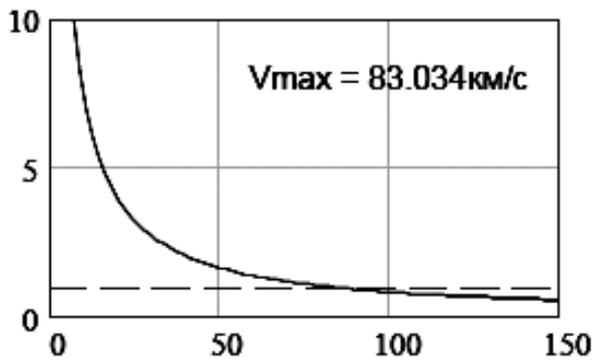


Рис. 6. Зависимость радиуса перигея в безразмерных единицах (вариант а) от гиперболического избытка скорости (км/с). За единицу принят радиус базовой околоземной орбиты (6751 км);  $\varphi = 180^\circ$

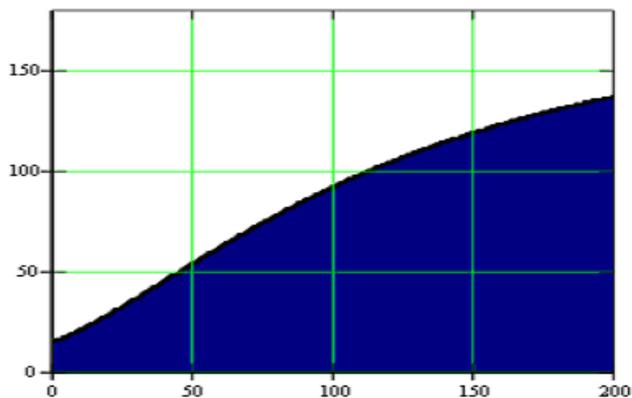


Рис. 7. Области существования разного числа решений на плоскости гиперболический избыток скорости (ось абсцисс, единица равна 50 м/с) — угол  $\varphi$  (градусы). Темная область соответствует одному решению, светлая двум решениям

### Исследование геоцентрической траектории полета к Луне

Проанализируем геоцентрическую траекторию полета к Луне. Полагаем известной конечную точку этой траектории — это точка, в которой располагается Луна в момент гравитационного маневра  $r_1 = [r_x, r_y, r_z]$ . Так как мы полагаем, что наклонение  $i$  плоскости геоцентрической траектории полета к Луне нам известно (оно равно наклонению низкой базовой орбиты, например  $51,6^\circ$ ), то можно определить:

два значения долготы восходящего узла рассматриваемого участка траектории:

$$\Omega_1 = \alpha + \arccos \left[ \frac{r_z}{\tan(i) \sqrt{(r_x)^2 + (r_y)^2}} \right];$$

$$\Omega_2 = \alpha - \arccos \left[ \frac{r_z}{\tan(i) \sqrt{(r_x)^2 + (r_y)^2}} \right],$$

где  $\alpha$  — вспомогательный угол,

$$\alpha = \begin{cases} -\arccos \left( \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \right) & \text{if } r_x \geq 0; \\ \arccos \left( \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \right) & \text{otherwise;} \end{cases}$$

два значения проекций орта бинормали к рассматриваемой траектории КА:

$$b_1^0 = \begin{pmatrix} \sin(\Omega) \cdot \sin(i) \\ -\cos(\Omega) \cdot \sin(i) \\ \cos(i) \end{pmatrix};$$

два значения проекций орта трансверсали в конечной точке рассматриваемого участка геоцентрической траектории КА  $n_1^0 = b_1^0 \times r_1^0$ .

В орбитальной системе координат, для которой найдены радиаль, трансверсаль и бинормаль, зафиксируем геоцентрическую скорость Луны, поместив начало этой скорости в начало орбитальной системы координат. В эту же точку поместим начало вектора геоцентрической скорости КА при подлете к Луне. Вектор скорости Луны в рассматриваемой системе координат можно найти, вычис-

для скалярные произведения скорости Луны и орт рассматриваемой системы координат:

$$\begin{pmatrix} V_{\text{MoonR}} \\ V_{\text{MoonN}} \\ V_{\text{MoonB}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{\text{Moon}} \cdot r_1^0 \\ V_{\text{Moon}} \cdot n_1^0 \\ V_{\text{Moon}} \cdot b_1^0 \end{pmatrix}.$$

Вектор гиперболического избытка скорости при полете от Луны в исследуемой орбитальной системе координат имеет компоненты, которые можно вычислить как скалярные произведения этого вектора на орты исследуемой системы координат:

$$V_{\text{ooPlus}} = \begin{pmatrix} V_{\text{ooPlusR}} \\ V_{\text{ooPlusN}} \\ V_{\text{ooPlusB}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{\text{ooPlus}} \cdot r_1^0 \\ V_{\text{ooPlus}} \cdot n_1^0 \\ V_{\text{ooPlus}} \cdot b_1^0 \end{pmatrix}.$$

Геометрическим местом концов вектора геоцентрической скорости КА при подлете к Луне является дуга окружности. Ее центр и сама окружность в выбранной орбитальной системе координат принадлежат орбитальной плоскости (радиаль — трансверсаль). Центр окружности находится в точке с координатами:

$$\begin{pmatrix} r_{\text{Center}} \\ n_{\text{Center}} \\ b_{\text{Center}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{\text{MoonR}} \\ V_{\text{MoonN}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Радиус этой окружности равен длине катета треугольника, гипотенуза которого равна величине гиперболического избытка скорости относительно Луны, а второй катет равен бинормальной проекции скорости Луны  $V_{\text{MoonB}}$ :

$$\rho_{\text{Circular}} = \sqrt{|V_{\text{ooPlus}}|^2 - V_{\text{MoonB}}^2}.$$

Точки этой окружности можно перебрать, изменяя вводимый полярный угол  $\nu$  от 0 до 360°. При этом их координаты будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} r_{\text{Circ}} \\ n_{\text{Circ}} \\ b_{\text{Circ}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{\text{Center}} + \rho_{\text{Circular}} \cdot \cos(\nu) \\ n_{\text{Center}} + \rho_{\text{Circular}} \cdot \sin(\nu) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эти координаты и есть проекции вектора геоцентрической скорости КА в момент его подлета к Луне в орбитальной системе координат. Перебирая значения полярного угла, можно получить все воз-

можные векторы геоцентрической скорости подлета к Луне, удовлетворяющие заданному наклонению геоцентрической траектории полета к Луне. Среди этих возможных векторов геоцентрической скорости подлета к Луне нам следует выделить такие, которые удовлетворяют двум условиям:

- 1) высота перигея геоцентрической траектории полета к Луне должна быть равна заданной высоте базовой низкой околоземной орбиты;
- 2) угол поворота асимптоты гиперболы должен быть меньше максимально допустимого (высота периселения траектории пролета Луны должна быть больше радиуса Луны).

Первое условие есть условие типа равенства. Оно сводится к решению алгебраического уравнения 4-й степени относительно  $u = \text{tg}(\nu/2)$ .

Второе условие (если оно может быть удовлетворено) выделяет из описанной окружности некую дугу. Границы этой дуги можно найти, но, пожалуй, проще и потому целесообразнее поступать по-другому: найти точки окружности, в которых удовлетворяется первое из сформулированных условий. Так как это условие есть условие типа равенства, то, как мы покажем ниже, существует ограниченное число решений, удовлетворяющих этому условию (максимум четыре решения). После нахождения этих решений достаточно будет для каждого из них проверить, удовлетворяется ли второе условие.

Последуем такой логике. Запишем два выражения для фокального параметра геоцентрической траектории полета к Луне, используя условия движения КА в двух крайних точках рассматриваемого участка траектории (в точке старта с базовой орбиты и в точке подлета к Луне). Геоцентрическая скорость подлета к Луне есть следующая функция угла  $\nu$ :

$$V_1 = \sqrt{(r_{\text{Center}} + \rho_{\text{Circular}} \cos(\nu))^2 + (n_{\text{Center}} + \rho_{\text{Circular}} \sin(\nu))^2}.$$

Скорость в начальной точке геоцентрической траектории полета КА к Луне можно найти, используя интеграл энергии:

$$V_1 = \left( 2 \frac{fM}{r_0} (r_{\text{Center}} + \rho_{\text{Circular}} \cdot \cos(\nu))^2 + (n_{\text{Center}} + \rho_{\text{Circular}} \cdot \sin(\nu))^2 - 2 \frac{fM}{r_{\text{Moon}}} \right)^{1/2}.$$

Здесь  $r_{\text{Moon}}$  — длина радиуса-вектора Луны в момент лунного гравитационного маневра ( $r_{\text{Moon}} = |\mathbf{r}_2|$ );  $r_0$  — радиус базовой околоземной орбиты. Фокальный

параметр геоцентрической траектории полета к Луне по условиям движения в начальной точке геоцентрической траектории полета к Луне определяется как

$$p_1 = \frac{r_o^2 V^2}{fM}.$$

Тот же фокальный параметр можно определить из условий движения КА при подлете к Луне:

$$p_1 = \frac{r_{Moon}^2 (n_{Center} + \rho_{Circular} \cdot \sin(v))^2}{fM}.$$

Приравняв последние два выражения, получаем уравнение относительно неизвестного параметра — угла  $v$ . В результате преобразований это уравнение сводится к алгебраическому уравнению четвертого порядка относительно тангенса половинного угла  $v$ :

$$\text{Polinom} = b_4 \cdot \text{tg}\left(\frac{v}{2}\right)^4 + b_3 \cdot \text{tg}\left(\frac{v}{2}\right)^3 + b_2 \cdot \text{tg}\left(\frac{v}{2}\right)^2 + b_1 \cdot \text{tg}\left(\frac{v}{2}\right) + b_0,$$

где коэффициенты полинома имеют следующие значения:

$$b_4 = \frac{2fM}{r_o} - \frac{2fM}{r_{Moon}} +$$

$$+ (r_{Center} + \rho_{Circular})^2 + n_{Center}^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_{Moon}}{r_o} \right)^2 \right];$$

$$b_3 = 4n_{Center}\rho_{Circular} \left[ 1 - \left( \frac{r_{Moon}}{r_o} \right)^2 \right];$$

$$b_2 = 2 \left[ \frac{2fM}{r_o} - \frac{2fM}{r_{Moon}} + r_{Center}^2 + n_{Center}^2 + \rho_{Circular}^2 - \left( \frac{r_{Moon}}{r_o} \right) (n_{Center}^2 + 2\rho_{Circular}^2) \right];$$

$$b_1 = b_3;$$

$$b_0 = \frac{2fM}{r_o} - \frac{2fM}{r_{Moon}} +$$

$$+ (r_{Center} - \rho_{Circular})^2 + n_{Center}^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_{Moon}}{r_o} \right)^2 \right].$$

При этом остается найти корни полинома 4-й степени. Поэтому мы остановились на алгоритме, при котором находятся все корни полинома, выделяются действительные корни, которые и исследуются в дальнейшем. Провести аналитическое исследование числа действительных корней полиномов и их знаков не удалось. При анализе полетов к Марсу во всех рассмотренных случаях оказалось, что все коэффициенты полинома отрицательны и полином имеет четыре действительных отрицательных корня. В общем случае это может быть не так.

Численный анализ показал, что для рассматриваемого интересного диапазона дат старта и времени полета к Марсу все коэффициенты полинома оказались отрицательными. В таком случае в соответствии с теоремой Декарта такой полином четвертой степени не может иметь положительных действительных корней, а количество отрицательных корней должно быть четным (равно 4, 2 или 0). Во всех рассмотренных случаях количество отрицательных действительных корней оказалось равно 4. Такой результат не может служить основанием для вывода о том, что всегда существует 4 действительных корня полинома и тем более что они отрицательны. Это может быть связано со свойствами рассматриваемого маневра, конкретной эпохой полета к Марсу.

Для каждого найденного корня полинома определяются:

$$\text{полярный угол } v_o = 2 \cdot \text{arctg}\left(\frac{\text{tg}(v)}{2}\right);$$

радиальная и трансверсальная скорость КА на геоцентрической траектории при подлете КА к Луне

$$V_{r1} = V_{moonR} + \rho \cos(v); \quad V_{n1} = V_{moonN} + \rho \sin(v);$$

геоцентрическая скорость КА при его подлете

$$\text{к Луне: } V_1 = \sqrt{V_{r1}^2 + V_{n1}^2};$$

гиперболический избыток скорости при подлете КА к Луне в орбитальной геоцентрической системе координат:

$$V_{ooMinus} = \begin{pmatrix} V_{r1} - V_{MoonR} \\ V_{n1} - V_{MoonN} \\ -V_{MoonB} \end{pmatrix}.$$

Используя скалярное произведение векторов гиперболического избытка скорости подлета и отлета от Луны, находим требуемый угол поворота асимптоты гиперболы при лунном гравитационном маневре:

$$\beta = a \cos \left( \frac{V_{\infty \text{Minus}} V_{\infty \text{Plus}}}{\text{Modul } V_{\infty}^2} \right).$$

Угол поворота асимптоты гиперболы  $\beta$  может изменяться в пределах от нуля до некоторого максимального значения. Это максимальное значение  $\beta_{\max}$  определяется величиной гиперболического избытка скорости относительно Луны  $\text{Modul } V_{\infty}$  и величиной минимальной высоты пролета Луны (минимального радиуса периселения гиперболы пролета Луны  $R_{\text{Moon}}$ ):

$$\beta_{\max} = 2a \sin \left[ \left( 1 + \frac{R_{\text{Moon}} \text{Modul } V_{\infty}^2}{f_{\text{Moon}}} \right)^{-1} \right].$$

В последнем равенстве  $f_{\text{Moon}}$  — гравитационный параметр Луны.

Для каждого из полученных решений проверяем удовлетворение условия  $\beta \leq \beta_{\max}$ . Решения, не удовлетворяющие этому неравенству, отбраковываем. Оставшиеся решения сравниваем по значению требуемого импульса скорости, требуемому при отлете КА с базовой орбиты на траекторию полета к Луне. Для этого определяем скорость в перигее траектории полета к Луне:

$$V_p = \sqrt{\frac{2fM}{r_0} + (V_1)^2 - \frac{2fM}{r_{\text{Moon}}}}$$

и импульс скорости  $\Delta V = \sqrt{\frac{fM}{r_0}}$ .

Выбираем такое решение, которое обеспечивает минимальное значение импульса скорости. Это решение рассматриваем, как оптимальное для межпланетного полета с использованием лунного гравитационного маневра.

## Выводы

1. Разработан метод исследования траекторий межпланетного перелета с лунным гравитационным маневром.

2. Проведен качественный анализ возможных схем использования лунного гравитационного маневра. Получены и проанализированы все возмож-

ные решения при использовании лунного гравитационного маневра.

3. При исследовании геоцентрической траектории после лунного гравитационного маневра удалось выявить и исследовать два типа лунного гравитационного маневра. Один из этих типов всегда соответствует отрицательному значению радиальной геоцентрической скорости после гравитационного маневра. Для другого типа гравитационного маневра знак этой радиальной скорости может быть как положительным, так и отрицательным.

4. При исследовании геоцентрической траектории полета к Луне удалось выявить и исследовать восемь принципиально возможных решений. Это связано с тем, что уравнение, описывающее принадлежность геоцентрического радиуса-вектора Луны в момент гравитационного маневра плоскости базовой околоземной, имеет два решения. И для каждого из них могут существовать четыре решения уравнения, описывающего равенство радиуса перигея траектории полета к Луне радиусу базовой околоземной орбиты.

*Работа выполнена в Московском авиационном институте (государственном техническом университете) при частичной поддержке РФФИ гранты № 09-08-01140-а, 09-08-01228-а.*

## Библиографический список

1 *Ивашкин В.В., Баум Ф.И.* Использование гравитационного маневра у Луны для полета космического аппарата к сближающемуся с Землей астероиду. — М.: Препринт ИПМ им. Келдыша РАН, 2000. № 67.

2. *Ивашкин В.В.* Об оптимальных траекториях полета КА к Луне в системе Земля—Луна—Солнце. — М.: Препринт ИПМ им. Келдыша РАН, 2001.

3. *Константинов М.С.* Анализ возможности и целесообразности использования гравитационного маневра у Луны при реализации траекторий межпланетного полета к небесному телу // Труды Российско-Китайской международной конференции по проектированию аэрокосмической техники. М.: ИД «ИНФОРМИЗДАТ», 2007. С. 81—86.