

О влиянии полюсного прилива на установившееся движение земного полюса

Мью Зо Аунг

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия
e-mail: myozawaung53@gmail.com*

Статья поступила 25.12.2020

Аннотация

Для модели вязкоупругой Земли определены выражения вариаций коэффициентов тессеральной гармоники геопотенциала, обусловленных полюсным приливом модели вязкоупругой Земли. Проведено сравнение полученных выражений полюсного прилива с общепринятыми выражениями, рекомендованными Международной службой вращения Земли. Исследовано влияние структуры диссипативных слагаемых на установившееся движение земного полюса. Показано, что выбор модели полюсного прилива существенно влияет на параметры установившегося колебательного процесса земного полюса и амплитуду необходимого возмущения с чандлеровской частотой для возбуждения наблюдаемого чандлеровского колебания полюса.

Ключевые слова: земной полюс, чандлеровское колебание, параметры вращения Земли, геопотенциал.

Введение

Исследование свойств полюсного прилива, наблюдаемого в деформируемой среде мантии вязкоупругой Земли, представляет существенный интерес для построения модели движения Земли относительно центра масс и, в частности, для построения модели движения земного полюса. Одним из основных условий решения задачи о возбуждении и поддержании чандлеровского колебания является учет полюсного прилива в модели его движения. Определяющим для установившегося движения оказывается точность модели полюсного прилива. Так, для моделей деформируемой Земли с различной реологией установившийся колебательный процесс земного полюса может существенно различаться при одном и том же внешнем воздействии. Или, если речь идет о восстановлении возмущающей функции на основе данных наблюдений, то из последнего следует, что при разной реологии мантии Земли необходимое внешнее возмущение для возбуждения наблюдаемого колебания полюса будет разным.

Полюсный прилив Земли является следствием переменности во времени центробежного потенциала, возникающей из-за перемещения мгновенной оси вращения в теле самой Земли [1-3]. Переменность центробежного потенциала приводит к изменению потенциала Земли (геопотенциала). Из-за смещения главных осей инерции деформируемой Земли происходит изменение ее центробежных моментов инерции [3]. При этом деформации вязкоупругой мантии сопровождаются диссипацией энергии, что отражается на структурном свойстве модели полюсного

прилива, определяемого вариациями центробежных моментов инерции или вариациями коэффициентов тессеральной гармоники геопотенциала [4, 5].

Если мантия Земли обладает только упругими свойствами и диссипации энергии не происходит, то вариации центробежных моментов инерции Земли, возникающие вследствие полюсного прилива, будут когерентны колебаниям земного полюса.

Рассмотрим полюсный прилив, обусловленный упругими свойствами модели деформируемой Земли. Прилив, возникающий вследствие переменности во времени центробежного потенциала, приводит к вариации ускорения силы тяжести. Сила тяжести \mathbf{g} в некоторой точке поверхности Земли является результатом сложения двух сил – силы тяготения и центробежной силы, возникающей при вращении Земли вокруг своей оси. Центробежный потенциал и изменение ускорение силы тяжести g из-за центробежной силы определяются выражениями:

$$U = \frac{1}{2} \left(\omega_0^2 r^2 \cos^2 \theta - 2\omega_0^2 r^2 \cos \theta \sin \theta (x_p \cos \lambda + y_p \sin \lambda) \right). \quad (1)$$

$$\delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^2}$$

Здесь r , θ , λ - сферические координаты, ω_0 - средняя угловая скорость осевого вращения Земли.

Наличие силы инерции, меняющей свое направление в пространстве, приводит к вариациям ускорения силы тяжести \mathbf{g} , радиальная составляющая δg_ω которой зависит от движения земного полюса [6]:

$$\delta g_\omega = \omega_0^2 R_E \sin 2\theta [x_p \cos \lambda - y_p \sin \lambda]. \quad (2)$$

Здесь R_E - радиус Земли, x_p , y_p - координаты земного полюса. Вариации вертикальной составляющей \mathbf{g} из-за дополнительного потенциала Земли определяются тессеральными слагаемыми второй зональной гармоники геопотенциала V_2 :

$$\delta g_{pt} = -\nabla_R \delta V_2. \quad (3)$$

$$\delta V_2 = \frac{Gm_E R_E^2}{R^3} \sum_{m=0}^2 [\delta c_{2m} \cos m\lambda + \delta s_{2m} \sin m\lambda] P_{2m}(\cos \theta).$$

Здесь $P_{mm}(\cos \theta)$ - присоединенные функции Лежандра, а $Gm_E = 3.98600442 \times 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$.

Однако, вариации \mathbf{g} в некоторой точке на поверхности Земли когерентные движению полюса обусловлены тремя факторами – центробежным ускорением, дополнительным потенциалом Земли и отклонением высоты точки поверхности Земли от среднего ее положения.

Слагаемое вследствие изменения высоты точки поверхности Земли в первом приближении имеет вид [7]:

$$\delta g_h \approx -\frac{10\chi Gm_E}{3gR_E^3} \left(1 + 6\delta c_{20} P_{20}(\cos \theta) - \frac{3h_0}{R_E} \right) \delta V_{21} \quad (4)$$

h_0 - постоянная (средняя) высота пункта наблюдения, коэффициент $\chi = 1$ для модели однородной упругой Земли и 0.843 для реальной Земли.

Таким образом, вариации вертикальной составляющей \mathbf{g} в некоторой точке поверхности Земли на широте θ вследствие возмущения полюсного прилива определяется выражением:

$$\delta \hat{g}_{pt} = \left(1 - \frac{10\chi Gm_E}{gR_E^4} \left[1 + 6\delta c_{20} P_{20}(\cos \theta) - \frac{3h_0}{R_E} \right] \right) \delta g_{pt}. \quad (5)$$

Если учитывать только упругие свойства мантии Земли, то изменения силы тяжести $\delta \hat{g}_{pt}$ должны происходить пропорционально δg_{ω} , а сдвиг фазы отсутствует из-за отсутствия вязкости. В этом случае вариации тессеральной гармонике геопотенциала когерентны колебаниям полюса и, согласно [1], имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \delta c_{21} \\ \delta s_{21} \end{bmatrix} = 1.333 \times 10^{-9} \begin{bmatrix} -x_p \\ y_p \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Следствием вязкости мантии Земли будет являться малое смещение полюсного прилива и сдвиг фазы колебаний коэффициентов тессеральной гармонике геопотенциала относительно колебаний земного полюса. Это смещение достаточно мало и для практических задач, например, для задач спутниковой навигации не существенно. Однако, для исследования колебаний земного полюса оно представляет значительный интерес, т.к. определяет установившийся режим чандлеровских колебаний, а также амплитуду необходимого внешнего возмущения для возбуждения чандлеровского движения земного полюса.

В данной работе с помощью методов нелинейной механики с бесконечным числом степеней свободы найдены выражения вариаций коэффициентов тессеральной гармонике геопотенциала, обусловленных полюсным приливом модели вязкоупругой Земли. Эти выражения сравниваются с выражениями, рекомендуемыми к учету Международной службой вращения Земли (МСВЗ) [1]. На основе динамических уравнений Эйлера-Лиувилля с учетом вариаций коэффициентов геопотенциала, обусловленных приливными деформациями мантии Земли, исследуется установившийся режим колебаний земного полюса. Показано, что выбор модели полюсного прилива существенно влияет на параметры установившегося колебательного процесса земного полюса и на амплитуду необходимого возмущения с чандлеровской частотой для возбуждения наблюдаемого чандлеровского колебания полюса.

Вариации коэффициентов тессеральной гармонике геопотенциала

Для построения модели полюсного прилива необходимо определить вариации δc_{21} , δs_{21} коэффициентов тессеральной гармонике геопотенциала. Вариации коэффициентов δc_{21} , δs_{21} связаны с центробежными моментами инерции J_{pr} , J_{qr} следующим образом [8]:

$$\delta c_{21} = \frac{J_{pr}}{m_E R_E^2}, \quad \delta s_{21} = \frac{J_{qr}}{m_E R_E^2} \quad (7)$$

В качестве упрощенной модели Земли рассматривается вязкоупругое твердое тело, состоящее из осесимметричного твердого ядра и вязкоупругой осесимметричной (в недеформированном состоянии) оболочки, подчиняющейся деформированию согласно модели Кельвина – Фойгта. На внутренней границе оболочки перемещения отсутствуют, а внешняя граница свободна. Предполагается, что процесс деформаций Земли можно считать квазистационарным. С ядром Земли жестко связывается система координат $C_1x_1x_2x_3$, оси которой направлены по главным центральным осям инерции планеты в недеформированном состоянии, а также принимается, что точка C_1 совпадает с центром масс Земли в недеформированном состоянии. Определим деформации вязкоупругого слоя осесимметричной Земли, возникающие при ее движении по инерции вокруг центра масс с помощью модального подхода [9, 10].

Вектор упругого смещения \mathbf{u} представляется в виде бесконечного ряда по собственным формам упругих колебаний Земли:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,m=0}^{\infty} [q_{km}(t)\mathbf{V}_{km} + p_{km}(t)\mathbf{W}_{km}] \quad (8)$$

где q_{km}, p_{km} - нормальные координаты, а векторы $\mathbf{V}_{km}, \mathbf{W}_{km}$ - собственные формы.

Собственные формы представляют собой ортонормированный базис и в цилиндрических координатах записываются в виде [11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{km}(\rho, \varphi, z) &= (U_{km}(\rho, z) \sin k\varphi, V_{km}(\rho, z) \cos k\varphi, W_{km}(\rho, z) \sin k\varphi) \\ \mathbf{W}_{km}(\rho, \varphi, z) &= (U_{km}(\rho, z) \cos k\varphi, -V_{km}(\rho, z) \sin k\varphi, W_{km}(\rho, z) \cos k\varphi) \end{aligned} \quad (9)$$

Выбирая $\delta u = V_{ij}$ или $\delta u = W_{ij}$, получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для модальных переменных q_{km} и p_{km} .

Для вычисления вариаций тензора инерции воспользуемся уравнениями, описывающими деформации Земли в виде [9, 10]:

$$\begin{aligned} D(Q + \chi b \dot{Q}) &= P, \quad Q = (p_{0m}, q_{1m}, p_{1m}, q_{2m}, p_{2m})^T \\ D &= \text{diag}(v_{0m}^2, v_{1m}^2, v_{1m}^2, v_{2m}^2, v_{2m}^2) \\ P &= ((\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2)c_{0m11} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)c_{0m33}, -2\omega_2\omega_3b_{1m32}, \\ & -2\omega_1\omega_3c_{1m13}, -2\omega_1\omega_2b_{1m12}, (\omega_1^2 + \omega_2^2)c_{2m11})^T \end{aligned} \quad (10)$$

В этих уравнениях $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - компоненты угловой скорости Земли; v_{km}^2 - частота собственных колебаний, соответствующая формам V_{km}, W_{km} ; $c_{0m11}, c_{0m33}, c_{1m13}, c_{2m11}, b_{1m12}, b_{1m32}$ - постоянные коэффициенты, зависящие от геометрии области Ω , то есть от фигуры Земли; χ - безразмерный диссипативный коэффициент, $\chi \ll 1$; b - положительная константа, такая что χb - время релаксации.

Для переменных p_{km}, q_{km} при $k > 2$ уравнения имеют вид, аналогичный (10), где в правой части стоит нуль, поэтому в квазистатическом приближении имеем

$$q_{km} = p_{km} = 0, \quad k > 2$$

Приближенное решение системы (10) представляется в виде:

$$\begin{aligned}
p_{0m} &= v_{0m}^{-2} [(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2)c_{0m11} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)c_{0m33}] - \\
&- \chi b v_{0m}^{-2} 2(\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 + 2\omega_3 \dot{\omega}_3)c_{0m11} + 2(\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2)c_{0m33} \\
q_{1m} &= -v_{1m}^{-2} 2\omega_2 \omega_3 b_{1m32} + \chi b v_{1m}^{-2} 2b_{1m32} (\dot{\omega}_2 \omega_3 + \omega_2 \dot{\omega}_3) \\
p_{1m} &= -v_{1m}^{-2} 2\omega_1 \omega_3 c_{1m13} + \chi b v_{1m}^{-2} 2c_{1m13} (\dot{\omega}_1 \omega_3 - \omega_1 \dot{\omega}_3) \\
q_{2m} &= -v_{2m}^{-2} 2\omega_1 \omega_3 b_{1m12} + \chi b v_{1m}^{-2} 2b_{1m12} (\dot{\omega}_1 \omega_2 + \omega_1 \dot{\omega}_2) \\
p_{2m} &= -v_{2m}^{-2} (\omega_1^2 - \omega_2^2)c_{2m11} + \chi b v_{2m}^{-2} 2c_{2m11} (\dot{\omega}_1 \omega_1 - \omega_1 \dot{\omega}_1)
\end{aligned} \tag{11}$$

Тензор инерции Земли будет зависеть от вектора перемещений \mathbf{u} , то есть $J=J[\mathbf{u}]$ и без учета квадратичных членов по \mathbf{u} представляется в виде:

$$J[\mathbf{u}] = J_0^{-1} - J_0^{-1} J_1[\mathbf{u}] J_0^{-1}, J_0 = \text{diag}\{A, A, C\}$$

где $J_1[\mathbf{u}]$ - линейная по \mathbf{u} компонента тензора инерции деформированной Земли:

$$J_1[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} J_{pp} & -J_{pq} & -J_{pr} \\ -J_{pq} & J_{qq} & -J_{qr} \\ -J_{pr} & -J_{qr} & J_{rr} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$J_{pp} = 2 \int_{\Omega} (x_2 u_2 + x_3 u_3) \rho_0 dx, \quad J_{qq} = 2 \int_{\Omega} (x_1 u_1 + x_3 u_3) \rho_0 dx$$

$$J_{rr} = 2 \int_{\Omega} (x_1 u_1 + x_2 u_2) \rho_0 dx, \quad J_{pq} = 2 \int_{\Omega} x_1 u_2 \rho_0 dx$$

$$J_{pr} = 2 \int_{\Omega} x_1 u_3 \rho_0 dx, \quad J_{qr} = 2 \int_{\Omega} x_2 u_3 \rho_0 dx$$

Наибольшими по величине будут центробежные моменты инерции J_{pr} , J_{qr} , которые, используя формулы (11), можно представить в виде:

$$J_{13} = a\omega_1 + b\dot{\omega}_1, \quad J_{23} = a\omega_2 + b\dot{\omega}_2, \quad a < 0, \quad b > 0 \tag{13}$$

Коэффициенты в выражении (13) определяются вязкоупругими свойствами Земли. Таким образом, дифференциальные уравнения движения земного полюса содержат малые диссипативные слагаемые, определяемые полюсным приливом.

Уравнения движения земного полюса

Согласно [12, 13] дифференциальные уравнения модели движения земного полюса получаются из динамических уравнений Эйлера-Лиувилля с переменным тензором инерции:

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega = M - \dot{J}\omega \quad (14)$$

Здесь J - матрица переменного тензора инерции, M – вектор возмущений.

Уравнения движения полюса в первом приближении запишутся в виде [14-16]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - 2\pi N_x y_p &= j_{qr}^0 + \mu_x, & x_p(t_0) &= x_0 \\ \dot{y}_p + 2\pi N_y x_p &= j_{pr}^0 + \mu_y, & y_p(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (15)$$

где приливные "выступы" j_{pr}^0 , j_{qr}^0 пропорциональны центробежным моментам инерции J_{pr} , J_{qr} (они определяют диссипативные слагаемые модели движения земного полюса), величины μ_x , μ_y - внешнее возмущение с годичной и чандлеровской частотами [17-19], а $N_x \approx N_y$ - собственная частота колебаний [10 - 21].

Рассмотрим, как влияет структура диссипативных слагаемых в (15) на установившийся режим чандлеровских колебаний. Рекомендуемые МСВЗ выражения вариаций коэффициентов тессеральной гармонике геопотенциала из-за перемещения мгновенной оси вращения зависят от координат земного полюса x_p , y_p [1]:

$$\begin{bmatrix} \delta c_{21} \\ \delta s_{21} \end{bmatrix} = 1.333 \times 10^{-9} \left(\begin{bmatrix} -x_p \\ y_p \end{bmatrix} + 0.0115 \begin{bmatrix} y_p \\ x_p \end{bmatrix} \right) \quad (16)$$

Вариации центробежных моментов инерции вследствие влияния полюсного прилива, согласно (16), можно представить в виде:

$$\hat{J}_{13} = a\omega_1 - c\omega_2, \quad \hat{J}_{23} = a\omega_2 + c\omega_1, \quad a < 0, \quad c > 0 \quad (17)$$

Эти выражения отличаются от (13) слагаемыми с коэффициентами b и c , обусловленными диссипативными свойствами мантии Земли. Диссипативные слагаемые в (13) приводят и к «запаздыванию» полюсного прилива, и к наличию малой составляющей, некогерентной колебанию полюса, в то время как соответствующие слагаемые из (17) приводят только к «запаздыванию» полюсного прилива.

Приближенная зависимость от времени компонент ω_1 , ω_2 вектора мгновенной угловой скорости получается из уравнений основного двухчастотного движения земного полюса и имеет вид [22]:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_{ch} \cos \alpha_{ch} + a_h \cos \alpha_h \\ \omega_2 &= a_{ch} \sin \alpha_{ch} + a_h \sin \alpha_h \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь a_{ch} , a_h – амплитуды чандлеровского и годичного колебаний соответственно, а α_{ch} , α_h – их фазы, которым соответствуют чандлеровская ($N=0.843$ цикл/год) и годичная (1 цикл/год) частоты.

Амплитуда результирующего движения земного полюса получается из (18) и имеет вид:

$$A = \sqrt{a_{ch}^2 + a_h^2 + 2a_{ch}a_h \cos(\alpha_{ch} - \alpha_h)} \quad (19)$$

Если $\alpha_{ch} = 2\pi Nt + \alpha_{ch}^0$, $\alpha_h = 2\pi t + \alpha_h^0$, то постоянная составляющая фазы амплитудной модуляции равна $\alpha_{ch}^0 - \alpha_h^0$.

Сравнительный анализ моделей полюсного прилива

Фаза амплитудной модуляции полюсного прилива согласно (17) совпадает с фазой амплитудной модуляции колебаний полюса:

$$\sqrt{(\hat{J}_{13})^2 + (\hat{J}_{23})^2} = \sqrt{a^2 + c^2} A.$$

Теперь вычислим амплитуду полюсного прилива из выражений (13):

$$\sqrt{(J_{13})^2 + (J_{23})^2} \approx \left[\left(a^2 + (b\pi(N+1))^2 \right) A^2 - 4ab\pi(N-1)a_{ch}a_h \sin(\alpha_{ch} - \alpha_h) \right]^{1/2} \quad (20)$$

Как следует из (20), фаза амплитудной модуляции полюсного прилива не совпадает с фазой амплитудной модуляции колебаний полюса. Чтобы определить сдвиг фазы амплитудной модуляции необходимо оценить коэффициент b , входящий в (13). Из рассмотренной простейшей модели деформируемой Земли следует, что выражения (17) являются менее точным описанием полюсного прилива, т.к. не описывают сдвиг фазы амплитудной модуляции. Поэтому даже в рамках простейшей модели деформирования мантии в квазистатическом приближении следует применять выражения вида (13). Таким образом, общепринятые выражения (16) нужно рассматривать как аппроксимацию полюсного прилива. То есть, если предположить, что оценка параметров в (16) оптимальна в среднеквадратическом

смысле, то выражения (16) наилучшим образом (в том же смысле) аппроксимируют наблюдаемые вариации коэффициентов δc_{21} , δs_{21} в рамках модели (17). В этом случае выражения (17) центробежных моментов инерции, значения коэффициентов которых определяются из (7) и (16), можно рассматривать как аппроксимацию выражений (13) и для нахождения оценки коэффициента b можно воспользоваться условием:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (J_{13} - \hat{J}_{13})^2 dt \rightarrow \min_b \quad (21)$$

Сделаем некоторые пояснения, связанные с условием (21). Выражения (13), используя ω_1 , ω_2 из (18), можно привести к сумме, содержащей линейную комбинацию ω_1 , ω_2 вида (17), и периодические слагаемые. Такое представление не единственное и может быть записано различными способами. Например, для трех частных случаев они запишутся в виде:

$$\begin{aligned} J_{13} &= a\omega_1 - b\pi(N+1)\omega_2 - b\pi(N-1)[a_{ch} \sin \alpha_{ch} - a_h \sin \alpha_h] = \\ &= a\omega_1 - 2b\pi\omega_2 + 2b\pi(N-1)a_h \sin \alpha_h = \\ &= a\omega_1 - 2bN\pi\omega_2 - 2b\pi(N-1)a_{ch} \sin \alpha_{ch} \quad (22) \\ J_{23} &= a\omega_2 + b\pi(N+1)\omega_1 + b\pi(N-1)[a_{ch} \cos \alpha_{ch} - a_h \cos \alpha_h] = \\ &= a\omega_2 + 2b\pi\omega_1 - 2b\pi(N-1)a_h \cos \alpha_h = \\ &= a\omega_2 + 2bN\pi\omega_1 + 2b\pi(N-1)a_{ch} \cos \alpha_{ch} \end{aligned}$$

Однако, таких представлений бесконечно много и в общем случае можно записать:

$$\begin{aligned}
J_{13} &= a\omega_1 - b\pi((1+\xi)N+1-\xi)\omega_2 - \\
&- b\pi(N-1)[(\xi+1)a_{ch}\sin\alpha_{ch} - (\xi-1)a_h\sin\alpha_h] \\
J_{23} &= a\omega_2 + b\pi((1+\xi)N+1-\xi)\omega_1 + \\
&+ b\pi(N-1)[(\xi+1)a_{ch}\cos\alpha_{ch} - (\xi-1)a_h\cos\alpha_h]
\end{aligned} \tag{23}$$

Выписанные в (22) три частных случая получаются из (23) при $\xi = 1$, $\xi = 0$, $\xi = -1$.

Обозначим через $\sigma(T, t)$ среднеквадратическое отклонение \hat{J}_{13} от J_{13} (для J_{23} аналогично) [14]:

$$\sigma(T, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (J_{13} - \hat{J}_{13})^2 dt. \tag{24}$$

Теперь коэффициент b можно найти из соответствия коэффициентов при ω_2 в выражениях (23) и (17), которое приводит к равенству $c = b\pi((1+\xi)N+1-\xi)$ и условия (21), которое перепишем в виде:

$$\sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma(T, t) \rightarrow \min_{\xi} \tag{25}$$

Действительно, нахождение коэффициента b из условия (21) минимума по b в силу взаимно однозначного соответствия ξ и b можно заменить условием (25) минимума по ξ . Условие минимизации в (25) означает, что ищется минимум по ξ функций

$$\begin{aligned}
&(b\pi(N-1)[(\xi+1)a_{ch}\sin\alpha_{ch} - (\xi-1)a_h\sin\alpha_h])^2, \\
&(b\pi(N-1)[(\xi+1)a_{ch}\cos\alpha_{ch} - (\xi-1)a_h\cos\alpha_h])^2
\end{aligned}$$

и обуславливает наилучшее в среднеквадратическом смысле приближение выражений (23), а значит и (13), выражениями модели (17).

Кроме того очевидно, что условие (25) справедливо и при решении обратной задачи – приближения \hat{J}_{i3} к J_{i3} , то есть нахождения коэффициента c по коэффициенту b . Именно в силу взаимно однозначного соответствия этих коэффициентов в работе предполагается, что \hat{J}_{i3} является аппроксимацией J_{i3} , но оценке подлежит диссипативный коэффициент b , содержащийся в J_{i3} .

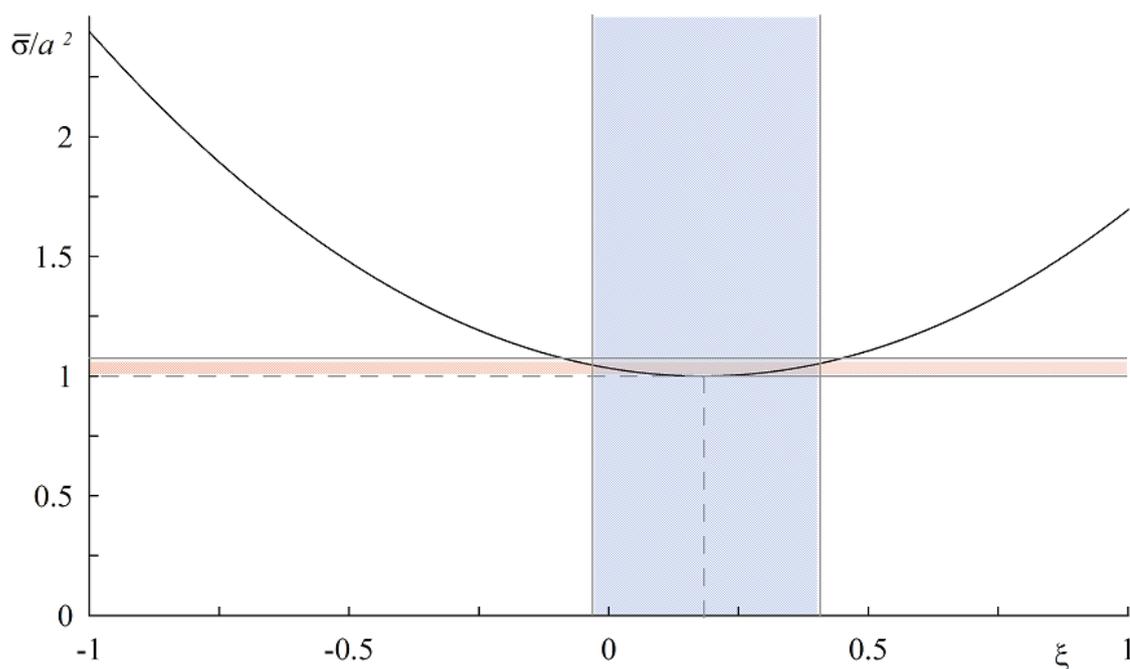


Рис. 1 График зависимости $\bar{\sigma}(\xi)/a^2$. Синяя и красная области соответствуют допустимому разбросу в пределах выбранной точности отношения c/a

Величина σ после предельного перехода в (25) оказывается независимой от параметров t, T , а ξ будет найдена из условия минимизации $\sigma_* = \min_{\xi} \sigma$. Таким

образом, уравнение $\sigma_* = \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma(T, t)$ эквивалентно уравнению $c = b\pi((1 + \xi)N + 1 - \xi)$

при найденном ξ и будет содержать только одну неизвестную b .

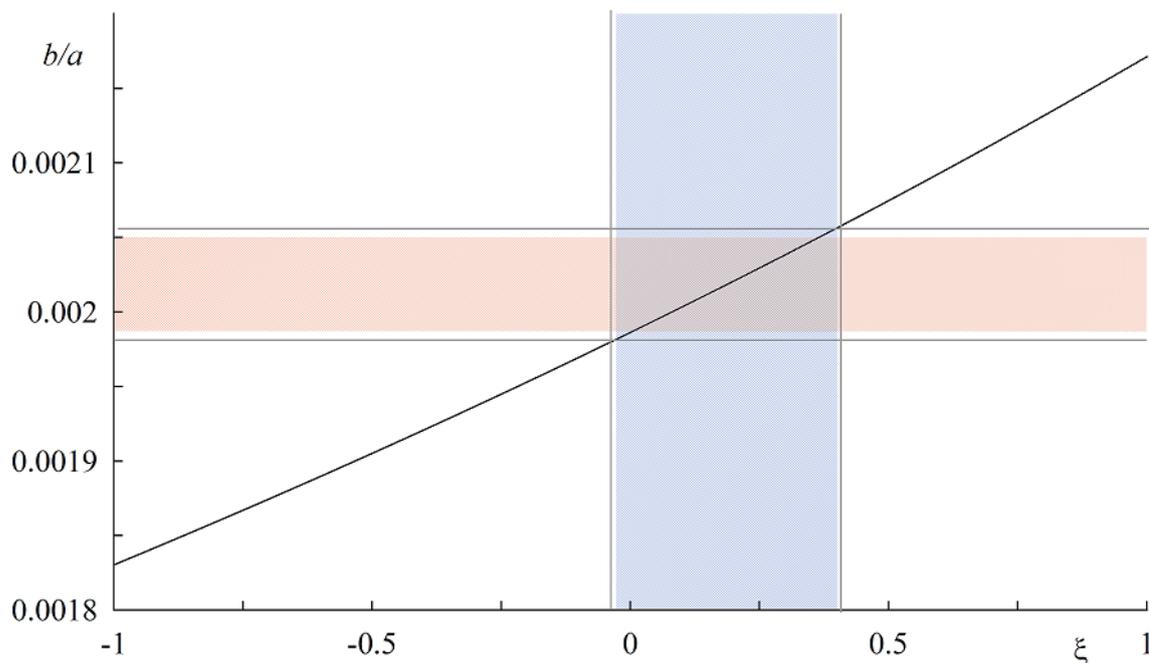


Рис. 2 График отношения b/a в зависимости от параметра ξ . Синяя и красная области соответствуют допустимому разбросу в пределах выбранной точности отношения c/a

Подставляя в условие (21) выражения J_{i3} из (13) и \hat{J}_{i3} из (17) с учетом $c = b\pi((1 + \xi)N + 1 - \xi)$, функция σ окажется квадратичной по параметру ξ . На рис. 1 приводится график нормированной величины $\bar{\sigma}(\xi)$, отнесенной к a^2 . Нормировка выполнена по минимальному ее значению. На рис. 2 дан график значений отношения b/a в зависимости от ξ .

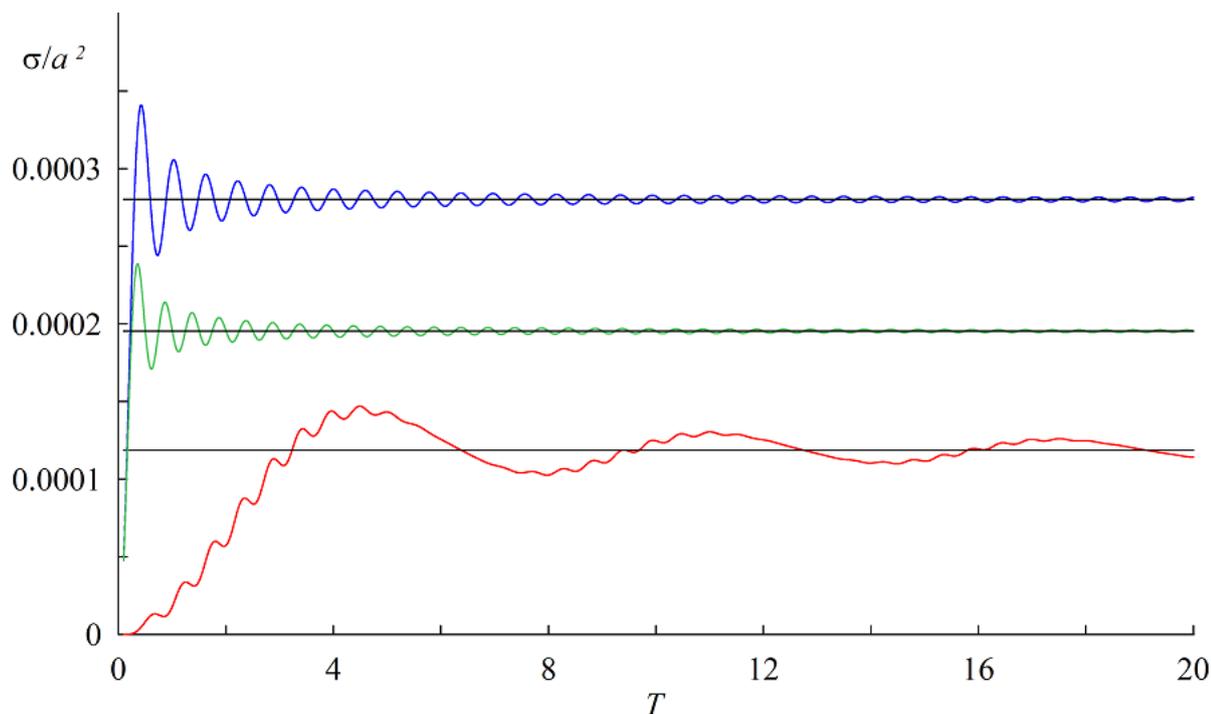


Рис. 3 Графики $\sigma(T,0)/a^2$ в зависимости от интервала усреднения T для $\xi = 1$ (синяя линия), $\xi = 0$ (красная линия), $\xi = -1$ (зеленая линия). Горизонтальными линиями отмечены их предельные значения при $T \rightarrow \infty$

Для иллюстрации того, как меняется поведение $\sigma(T,t)$ при изменении интервала усреднения T и значения параметра ξ , на рис. 3 приведем сравнения зависимостей

$\sigma(T,0)/a^2$ и их предельных значений $\sigma/a^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma(T,0)}{a^2}$ для $\xi = 1$, $\xi = 0$, $\xi = -1$.

Как видно из графика на рис. 1, условие (21) выполняется при значении $\xi = 0.18$.

Однако, если зафиксировать отношение $b/a = c/\pi((1+0.18)N+1-0.18)a$ и, затем, принять $\xi = 0$, то отношение коэффициентов $c/a = b\pi((1+\xi)N+1-\xi)/a$ изменится на величину порядка 2×10^{-4} , что соответствует изменению отношения $c/a = 0.0115$ в

четвертом знаке. То есть, изменение ξ на относительно малую величину в окрестности минимума функции $\bar{\sigma}(\xi)/a^2$ приводит к сравнительно малому изменению коэффициента c . Этим изменением дальше пренебрежем, приняв $\xi = 0$, тем самым понизив точность задания коэффициента c , но упростив некоторые выражения. Сделанное допущение не отразится на полученных далее выводах.

Теперь, приближенно можно определить отношение $b/a \cong 0.002$. Используя это значение, легко найти и сдвиг фазы амплитудной модуляции, которая запаздывает примерно на 8 часов.

Заметим, что на практике при использовании общепринятой модели полюсного прилива (16) и оценки коэффициента диссипации c на основе косвенных данных измерений предельного перехода при $T \rightarrow \infty$, описанного выше, выполнить невозможно. В этом случае, выбрав конечный интервал усреднения $T(\xi)$ из условия

$$\int_t^{t+T} (J_{13} - \hat{J}_{13}) dt = 0, \text{ придем используя } \sigma(T, t) \rightarrow \min_{\xi}, \text{ к аналогичному результату -}$$

близкой к наилучшей оценке коэффициента c при $\xi = 0$ в пределах точности задания отношения c/a . Таким образом, на интервале $T(0)$ оценка диссипативного коэффициента общепринятой модели полюсного прилива (17) будет близкой к наилучшей в среднеквадратическом смысле.

Наконец, рассмотрим, как изменятся уравнения (15) установившегося чандлеровского колебания при учете диссипативных функций двух видов [23-24]:

$$j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_2 y_p, \quad j_{qr}^0 = -s_1 y_p - s_2 x_p, \quad \text{полученных из выражений (17) и}$$

$j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p$, найденных из новых выражений (13). Здесь коэффициенты s_1 , s_2 , s_3 строго положительные.

После преобразования уравнений движения полюса (15) функции

$j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p$ можно формально заменить функциями

$j_{pr}^0 = s_1 x_p - \tilde{s}_3 \dot{x}_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p - \tilde{s}_3 \dot{x}_p$ при соотношении:

$$\tilde{s}_3 = \frac{s_3(2\pi N - s_1)}{1 + s_3^2} \quad (26)$$

Сделанная замена $j_{pr}^0 = s_1 x_p - \tilde{s}_3 \dot{x}_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p - \tilde{s}_3 \dot{x}_p$ в (15) не будет являться аппроксимацией функций $j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p$, а является формальным переобозначением величин j_{pr}^0 , j_{qr}^0 после преобразования дифференциальных уравнений (15). Для определения коэффициентов s_3 и \tilde{s}_3 можно воспользоваться рассмотренной выше оценкой. На интервале модуляции чандлеровской и годичной гармоник найдем

$$s_2 = s_3 \pi(N + 1), \quad \tilde{s}_3 = \frac{s_3(2\pi N - s_1)}{1 + s_3^2} \approx 0.9s_2. \quad (27)$$

Из (27) следует, что для общепринятой модели полюсного прилива вида (16) амплитуда стационарного режима чандлеровских колебаний может существенно отличаться от реальной, и зависит это не только от структуры модели полюсного прилива, но и от длительности интервала оценки коэффициента диссипации, если коэффициент диссипации определяется на основе обработки косвенных данных измерений.

Выводы

Для модели вязкоупругой Земли выражения вариаций коэффициентов тессеральной гармоники геопотенциала, обусловленных полюсным приливом, содержат слагаемые некогерентные колебаниям полюса. Эти слагаемые определяются не положением полюса, а скоростью его движения. Вследствие этого амплитудная модуляция полюсного прилива должна быть сдвинута по фазе, что является физически естественным в отличие модели полюсного прилива, когерентного движению полюса.

Показано, что даже, если общепринятая модель полюсного прилива является оптимальной аппроксимацией наблюдаемого прилива, то неучет слагаемых, зависящих от скорости движения полюса, приводит к существенному искажению параметров установившегося чандлеровского колебания.

Библиографический список

1. International Earth Rotation and Reference Systems Service. IERS Annual Reports. URL: <http://www.iers.org>
2. Манк У., Макдональд Г. Вращение Земли. - М.: Мир, 1964. - 384 с.
3. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В. Колебательно-вращательные процессы в движении Земли относительно центра масс: интерполяция и прогноз // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 6. С. 6 - 29.

4. Акуленко Л.Д., Перепелкин В.В. Динамический анализ возмущенного чандлеровского колебания земного полюса // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 6. С. 4 - 12. DOI: [10.31857/S057232990002536-9](https://doi.org/10.31857/S057232990002536-9)
5. Перепёлкин В.В. Моделирование и анализ вращательно-колебательных движений деформируемой Земли // Труды МАИ. 2007. № 26. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34044>
6. Schubert G. Treatise on Geophysics, 2007, Amsterdam, Elsevier. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01003376643>
7. Hu X.-G., Liu L.-T., Ducarme B., Xu H.J., Sun H.P. Estimation of the pole tide gravimetric factor at the chandler period through wavelet filtering // Geophysical Journal International, 2007, vol. 169 (3), pp. 821 – 829. DOI: [10.1111/j.1365-246X.2007.03330.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03330.x)
8. Перепелкин В.В. Модель движения земного полюса с учетом лунно-солнечных возмущений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 3. С. 118 - 123. DOI: [10.1134/S0572329919030127](https://doi.org/10.1134/S0572329919030127)
9. Марков Ю.Г., Миняев И.С. О влиянии внутренних степеней свободы на движение осесимметричного упругого тела вокруг центра масс // Известия РАН. Механика твердого тела. 1991. № 1. С. 12 – 18.
10. Скоробогатых И.В., До Чунг Бо. О влиянии упругих деформаций на поступательно-вращательное движение тела в центральном гравитационном поле сил // Космонавтика и ракетостроение. 2015. № 1(80). С. 106 – 113.
11. Вильке В.Г. Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. - М.: Изд-во МГУ, 1986. - 192 с.

12. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Кумакшев С.А. Основные свойства и особенности движения Земли относительно центра масс // Доклады РАН. 2014. Т. 458. № 5. С. 547 - 550.
13. Акуленко Л.Д., Перепелкин В.В. Движение земного полюса при нестационарных возмущениях // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 5. С. 142 – 149. DOI: [10.1134/S0572329919050039](https://doi.org/10.1134/S0572329919050039)
14. Ву Виет Чунг. Прогноз возмущенного движения полюса Земли на коротком интервале времени // Труды МАИ. 2013. № 69. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=43147>
15. Ву Виет Чунг. Оценка влияния параметров вращения Земли в задаче координатно-временного обеспечения навигационных спутников // Труды МАИ. 2013. № 69. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=43104>
16. Barkin M.Yu., Krylov S.S., Perepelkin V.V. Modeling and analysis of the Earth pole motion with nonstationary perturbations // Journal of Physics: Conference Series, 2019, vol. 1301, issue 1. DOI: [10.1088/1742-6596/1301/1/012005](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1301/1/012005)
17. Bizouard C., Remus F., Lambert S., Seoane L., Gambis D. The Earth's variable Chandler wobble // Astronomy and astrophysics, 2011, vol. 526 (13), DOI: [10.1051/0004-6361/201015894](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015894)
18. Zotov L., Bizouard C. On modulations of the Chandler wobble excitation // Journal of Geodynamics, 2012, no. 62, pp. 30 - 34. DOI: [10.1016/j.jog.2012.03.010](https://doi.org/10.1016/j.jog.2012.03.010)

19. Zotov L., Bizouard C., Shum C.K. A possible interrelation between Earth rotation and climatic variability at decadal time-scale // *Geodesy and Geodynamics*, 2016, no. 7. DOI: [10.1016/j.geog.2016.05.005](https://doi.org/10.1016/j.geog.2016.05.005)
20. Сидоренков Н.С. Физика неустойчивостей вращения Земли. - М.: Наука, 2002. - 376 с.
21. Zhou Y.H., Salstein D.A, Chen J.L. Revised atmospheric excitation function series related to Earth's variable rotation under consideration of surface topography // *Journal of Geophysical Research*, 2006, vol. 111, D12108. DOI: [10.1029/2005JD006608](https://doi.org/10.1029/2005JD006608)
22. Климов Д.М., Акуленко Л.Д., Шматков А.М. Сепарация и спектральный анализ колебаний полюса земли // *Доклады РАН*. 2015. Т. 464. № 3. С. 288 - 292. DOI: [10.7868/S0869565215270092](https://doi.org/10.7868/S0869565215270092)
23. Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Крылов С.С. Колебания полюса Земли с учетом флуктуационно-диссипативных возмущений // *Доклады РАН*. 2016. Т. 471. № 6. С. 665 - 670. DOI: [10.7868/S0869565216360111](https://doi.org/10.7868/S0869565216360111)
24. Bondarenko V.V., Krylov S.S., Perepelkin V.V. The fluctuation perturbations in the model of the Chandler wobble // *IOP Conference series: materials science and engineering*, 2018, pp. 12 - 16. DOI: [10.1088/1757-899X/468/1/012016](https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012016)

On the polar tide impact on the Earth pole steady-state movement

Myo Zaw Aung

Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI, 4, Volokolamskoe shosse,

Moscow, A-80, GSP-3, 125993, Russia

e-mail: myozawaung53@gmail.com

Abstract

A small displacement of polar tide and a phase shift of coefficients of the tesseral harmonic of geopotential relative to the Earth pole oscillations is the result of the Earth mantle viscosity. This displacement is quite small, and insignificant for practical tasks, such as satellite navigation. However, it presents considerable interest for studying the Earth pole since it determines the steady-state mode of Chandler wobbles, as well as amplitude of the necessary external disturbance for Chandler wobble excitation of the Earth pole.

The expressions of the tesseral harmonic coefficients variations, stipulated by the polar tide of the viscoelastic Earth model, were obtained in this work by methods of nonlinear mechanics with infinite number of degrees of freedom. A viscoelastic solid body, consisting of the axisymmetric hard core and viscoelastic axisymmetric (in non-deformed state) shell, being subjected to deformation according to the Kelvin-Voigt model, is being considered as a simplified model of Earth. There are no displacements on the inner boundary of the shell, and the outer boundary one is free. It is supposed that the deformation process of the Earth can be assumed as quasi-stationary.

These expressions are being compared with the ones recommended for accounting by the International Earth Rotation Service. The steady-state oscillations mode of the Earth pole

are being studied based on the Euler-liouville dynamic equations, with account for variations in geopotential coefficients due to the tidal deformations of the Earth mantle. The article demonstrates that the polar tide model selection significantly affects the parameters of the steady-state oscillatory process of the Earth pole and the amplitude of the necessary disturbance with the Chandler frequency to excite the observed Chandler oscillation of the pole.

Keywords: Earth pole, Earth rotation parameters, geopotential.

References

1. *International Earth Rotation and Reference Systems Service*. IERS Annual Reports. URL: <http://www.iers.org>
2. Mank U., Makdonal'd G. *Vrashchenie Zemli* (Rotation of the Earth), Moscow, Mir, 1964, 384 p.
3. Akulenko L.D., Klimov D.M., Markov Yu.G., Perepelkin V.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2012, no. 6, pp. 6 - 29.
4. Akulenko L.D., Perepelkin V.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2018, no. 6, pp. 4 - 12. DOI: [10.31857/S057232990002536-9](https://doi.org/10.31857/S057232990002536-9)
5. Perepelkin V.V. *Trudy MAI*, 2007, no. 26. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34044>
6. Schubert G. *Treatise on Geophysics*, 2007, Amsterdam, Elsevier. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01003376643>

7. Hu X.-G., Liu L.-T., Ducarme B., Xu H.J., Sun H.P. Estimation of the pole tide gravimetric factor at the Chandler period through wavelet filtering, *Geophysical Journal International*, 2007, vol. 169 (3), pp. 821 – 829. DOI: [10.1111/j.1365-246X.2007.03330.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2007.03330.x)
8. Perepelkin V.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2019, no. 3, pp. 118 - 123. DOI: [10.1134/S0572329919030127](https://doi.org/10.1134/S0572329919030127)
9. Markov Yu.G., Minyaev I.S. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 1991, no. 1, pp. 12 – 18.
10. Skorobogatykh I.V., Do Chung Bo. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2015, no. 1 (80), pp. 106 – 113.
11. Vil'ke V.G. *Analiticheskie i kachestvennyye metody mekhaniki sistem s beskonechnym chislom stepeni svobody* (Analytical and qualitative methods of systems mechanics with infinite number of degrees of freedom), Moscow, Izd-vo MGU, 1986, 192 p.
12. Akulenko L.D., Klimov D.M., Kumakshev S.A. *Doklady RAN*, 2014, vol. 458, no. 5, pp. 547 - 550.
13. Akulenko L.D., Perepelkin V.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2019, no. 5, pp. 142 – 149. DOI: [10.1134/S0572329919050039](https://doi.org/10.1134/S0572329919050039)
14. Vu Viet Chung. *Trudy MAI*, 2013, no. 69. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=43147>
15. Vu Viet Chung. *Trudy MAI*, 2013, no. 69. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=43104>

16. Barkin M.Yu., Krylov S.S., Perepelkin V.V. Modeling and analysis of the Earth pole motion with nonstationary perturbations, *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1301, issue 1. DOI: [10.1088/1742-6596/1301/1/012005](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1301/1/012005)
17. Bizouard C., Remus F., Lambert S., Seoane L., Gambis D. The Earth's variable Chandler wobble, *Astronomy and astrophysics*, 2011, vol. 526 (13), DOI: [10.1051/0004-6361/201015894](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015894)
18. Zotov L., Bizouard C. On modulations of the Chandler wobble excitation, *Journal of Geodynamics*, 2012, no. 62, pp. 30 - 34. DOI: [10.1016/j.jog.2012.03.010](https://doi.org/10.1016/j.jog.2012.03.010)
19. Zotov L., Bizouard C., Shum C.K. A possible interrelation between Earth rotation and climatic variability at decadal time-scale, *Geodesy and Geodynamics*, 2016, no. 7. DOI: [10.1016/j.geog.2016.05.005](https://doi.org/10.1016/j.geog.2016.05.005)
20. Sidorenkov N.S. *Fizika nestabil'nostei vrashcheniya Zemli* (Physics of instability of the earth's rotation), Moscow, Nauka, 2002, 376 p.
21. Zhou Y.H., Salstein D.A, Chen J.L. Revised atmospheric excitation function series related to Earth's variable rotation under consideration of surface topography, *Journal of Geophysical Research*, 2006, vol. 111, D12108. DOI: [10.1029/2005JD006608](https://doi.org/10.1029/2005JD006608)
22. Klimov D.M., Akulenko L.D., Shmatkov A.M. *Doklady RAN*, 2015, vol. 464, no. 3, pp. 288 - 292. DOI: [10.7868/S0869565215270092](https://doi.org/10.7868/S0869565215270092)
23. Markov Yu.G., Perepelkin V.V., Krylov S.S. *Doklady RAN*, 2016, vol. 471, no. 6, pp. 665 - 670. DOI: [10.7868/S0869565216360111](https://doi.org/10.7868/S0869565216360111)

24. Bondarenko V.V., Krylov S.S., Perepelkin V.V. The fluctuation perturbations in the model of the Chandler wobble, *IOP Conference series: materials science and engineering*, 2018, pp. 12 - 16. DOI: [10.1088/1757-899X/468/1/012016](https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012016)