

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
"МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)"

На правах рукописи



УДК 531.384

Авдюшкин Андрей Николаевич

**Нелинейный анализ устойчивости коллинеарной  
точки либрации в ограниченной  
фотогравитационной задаче трёх тел**

1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент

Бардин Борис Сабирович

Москва – 2023

# Оглавление

Введение . . . . .	4
<b>Глава 1. Исследование существования и бифуркации коллинеарных точек либрации в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел . . . . .</b>	<b>10</b>
1.1. Уравнения движения в фотогравитационной задаче трёх тел . . . . .	10
1.2. Коллинеарные точки либрации . . . . .	15
1.3. Область существования и единственность коллинеарной точки либрации $L_3$ . . . . .	16
1.4. Область существования и единственность коллинеарной точки либрации $L_2$ . . . . .	18
1.5. Области существования и бифуркация коллинеарных точек либрации типа $L_1$ . . . . .	20
<b>Глава 2. Анализ устойчивости коллинеарных точек либрации в плоской круговой ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел . . . . .</b>	<b>39</b>
2.1. Гамильтониан уравнений возмущенного движения . . . . .	39
2.2. Линейный анализ устойчивости коллинеарных точек либрации . . . . .	41
2.3. Нелинейный анализ устойчивости в нерезонансном случае . . . . .	48
2.4. Анализ устойчивости при резонансах третьего и четвёртого порядков . . . . .	51
2.5. Анализ устойчивости в случае резонанса первого порядка . . . . .	58
2.6. Анализ устойчивости в случае резонанса второго порядка . . . . .	61
<b>Глава 3. Анализ устойчивости коллинеарной точки либрации <math>L_1</math> в плоской эллиптической ограниченной фотогравитационной</b>	

<b>задаче трех тел</b> . . . . .	66
3.1. Гамильтониан задачи . . . . .	66
3.2. Линейный анализ устойчивости . . . . .	67
3.3. Нелинейный анализ устойчивости в случае равных масс и интенсивностей излучения притягивающих тел . . . . .	78
<b>Глава 4. Анализ устойчивости положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова</b> . . . . .	85
4.1. Постановка задачи . . . . .	85
4.2. Линейный анализ устойчивости . . . . .	87
4.3. Линейный анализ устойчивости при малых значениях эксцентриситета . . . . .	90
4.4. Нелинейный анализ устойчивости . . . . .	93
<b>Заключение</b> . . . . .	97
<b>Приложение А. Границы области параметрического резонанса</b>	100
<b>Список литературы</b> . . . . .	101

## Введение

**Актуальность задачи.** При изучении движения небесных тел и космических аппаратов помимо гравитационных сил нередко приходится учитывать и силы светового давления. В этом случае хорошей математической моделью для описания динамики космических объектов может служить так называемая ограниченная фотогравитационная задача трёх тел. В данной задаче рассматривается движение тела малой массы, на которое со стороны двух излучающих тел действуют как силы гравитационного притяжения, так и отталкивающие силы светового давления. Тело малой массы не влияет на движение массивных излучающих тел, которые движутся по известным кеплеровским орбитам.

Впервые влияние силы светового давления в ограниченной задаче трёх тел исследовалось в работе В. В. Радзиевского [37]. Им была рассмотрена система Солнце-планета-частица, в которой излучающим принято только одно из двух притягивающих тел. Он ввёл коэффициент редукции массы, который является показателем уменьшения силы притяжения из-за действующей отталкивающей (репульсивной) силы светового давления, и показал, что уравнения движения фотогравитационной задачи допускают замечательные частные решения, описывающие движения тела малой массы, при которых оно расположено на прямой, соединяющей излучающие тела. В небесной механике такие движения давно известны. Впервые они были открыты Л. Эйлером [73] в классической задаче трех тел и к настоящему времени хорошо изучены (см. например, [12, 29, 93]). По аналогии с классической задачей трех тел в фотогравитационной задаче указанные движения называют коллинеарными (или прямолинейными) точками либрации. Они соответствуют положениям равновесия в системе координат, вращающейся вместе с излучающими телами. В упомянутой работе В. В. Радзиевского рассматривался вопрос о влиянии сил светового давления на расположение точек либрации. В частности, было установлено, что увеличение репульсив-

ной силы светового давления или, что тоже самое, уменьшение коэффициента редукции приводит к смещению коллинеарных точек  $L_1$  и  $L_2$  ближе к излучающему телу (Солнцу).

В отличие от классической задачи трёх тел в фотогравитационной задаче количество и расположение коллинеарных точек либрации относительно излучающих тел существенно зависит от параметров задачи. Поэтому актуальным является вопрос о существовании и бифуркации коллинеарных точек либрации. Данный вопрос исследовался в работах [17, 21], где показано, что в зависимости от коэффициентов редукции массы коллинеарные точки либрации могут менять своё положение относительно притягивающих тел или даже сливаться в одну точку.

Большой интерес как с теоретической точки зрения, так и для возможных приложений представляет вопрос об устойчивости точек либрации в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел. Исследование круговой ограниченной фотогравитационной задачи трёх тел с двумя излучающими телами впервые было проведено в работах [95, 96], в которых в первом приближении была проанализирована устойчивость точек либрации. В работе [17] было впервые обнаружено, что в отличие от классической задачи трёх тел в фотогравитационной задаче коллинеарная точка либрации  $L_1$ , располагающаяся между притягивающими телами, может быть устойчива. Подробно была рассмотрена симметричная система, когда оба притягивающих тела обладают равными массами и интенсивностями излучения, характеризующими силу светового давления, и определена область значений коэффициента редукции массы, в которой коллинеарная точка либрации устойчива в линейном приближении. В работах [22, 83] для круговой задачи был рассмотрен случай, когда основные тела имеют различную интенсивность излучения. Были рассмотрены области как положительных, так и отрицательных значений коэффициентов редукции и построены диаграммы устойчивости.

Помимо исследования существования и устойчивости коллинеарных точек либрации проводились исследования треугольных точек либрации, которые также существуют в классической задаче трёх тел. Для системы с одним излучающим телом необходимые условия устойчивости в круговой задаче были получены в работе [48], а с двумя излучающими телами – в работах [19, 86, 100]. В работах [33–35, 76, 78–80, 82, 94, 102] на основе метода нормальных форм и теории КАМ рассматривалась нелинейная задача об устойчивости треугольных точек либрации.

Аналізу устойчивости коллинеарных и треугольных точек либрации в эллиптической ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел посвящены работы [13, 24, 43, 44], где исследование выполнялось в рамках линейного приближения. Для всех допустимых значений значений коэффициентов редукции были численно построены диаграммы устойчивости.

В фотогравитационной задаче трех тел был обнаружен новый тип точек либрации. Так называемые компланарные точки либрации, которые не существуют в классической задаче трёх тел. Они располагаются в плоскости, содержащей основные тела и проходящей перпендикулярно плоскости их вращения [20, 38]. В работах [18, 23, 32, 34, 36] исследовалась устойчивость этих точек в линейной и нелинейной постановках.

В работе [103] исследовался вопрос о существовании всех упомянутых выше типов точек либрации ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел в зависимости от значений параметров.

В работе [84] был дан подробный обзор и анализ результатов проведенных на тот момент исследований в задаче о существовании, бифуркации и устойчивости коллинеарных, треугольных и компланарных точек либрации фотогравитационной задаче трёх тел. Дальнейшие исследования устойчивости коллинеарных и треугольных точек либрации для нерассмотренных ранее значений параметров были проведены в [15, 16, 55]. Обзор результатов более поздних ис-

следований устойчивости треугольных точек либрации дан в [55].

Необходимо отметить, что, несмотря на большое количество исследований в данной области, вопрос об устойчивости по Ляпунову точек либрации ограниченной фотогравитационной задачи трёх тел до сих пор не закрыт. Наиболее полные результаты к настоящему времени получены для случая плоской круговой задачи, т.е. в предположении, что излучающие и притягивающие тела движутся по круговым орбитам, а возмущения не выводят малое тело из этой плоскости. Однако, и в этом наиболее простом случае задача об устойчивости точек либрации по Ляпунову решена не для всех значений параметров.

Было проведено множество исследований задачи о существовании, бифуркации и устойчивости точек либрации для различных обобщений фотогравитационной задачи тех тел. В частности, было выполнено исследование существования точек либрации и рождающихся из них периодических движений при наличии различных возмущений фотогравитационной задачи тех тел [89–91]. В работах [81] рассматривалась задача о движении малого тела в поле двух массивных притягивающих тел, одно из которых представляет собой сплюснутое сферическое тело, а другое тело – излучающая материальная точка. Исследовались условия существования и устойчивость точек либрации в данной задаче.

В работах [69–72] исследовалась задача о существовании точек либрации фотогравитационной задачи тех тел с учетом геометрии масс малого тела. В работах [50–52, 98, 101] предполагалось, что притягивающие и излучающие тела являются сплюснутыми сферами, и задача существования и устойчивости точек либрации рассматривалась с учетом комбинированных эффектов сил светового давления сил и геометрии тел. В частности, возможные положения коллинеарных точек либрации  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  были построены в виде рядов по малому параметру, а вопрос об их устойчивости рассмотрен в линейном приближении. Аналогичное исследование было проведено в работах [53, 54, 56, 77, 97] в предположении, что массивные притягивающие тела являются динамически

симметричными или даже имеют произвольную геометрию масс.

В работах [58–60] рассмотрена ограниченная задача трёх тел в предположении, что на малое тело действуют электростатическим полем для удержания его в коллинеарной точке либрации. Показано, что это приводит к появлению новых точек либрации, которые являются неустойчивыми. В работах [6, 57] исследуется возможность развёртывания тросовой системы, которая удерживается в одной из коллинеарных точек либрации с помощью двигателя малой тяги. Получены уравнения движения тросовой системы, указаны положения ее равновесия и исследован характер колебаний в окрестности равновесия.

Стоит отметить, что большинство исследований устойчивости точки либрации  $L_1$  были выполнены в линейном приближении. Однако, исследования устойчивости линеаризованной системы недостаточно для определения устойчивости исходной нелинейной системы. В частности, устойчивая в линейном приближении точка либрации в резонансных случаях может быть неустойчивой. В [46, 47] рассматривалась задача об устойчивости коллинеарной точки либрации в круговой ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел при резонансах третьего и четвёртого порядка.

Интересным частным случаем ограниченной задачи трёх тел является задача Ситникова [39]. Предполагается, что притягивающие тела обладают равными массами и движутся по кеплеровским орбитам относительно их центра масс, а малое тело движется по прямой, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения массивных тел. Устойчивость по Ляпунову точки либрации  $L_1$ , т.е. положения равновесия, расположенного в центре масс этой системы, была изучена в работах [88]. В работах [14, 45] была рассмотрена фотогравитационная задача Ситникова, в которой притягивающие тела обладают излучением равной интенсивности. Были указаны некоторые из областей неустойчивости данного положения равновесия в линейном приближении.

В данной диссертационной работе исследуется фотогравитационная зада-



ча трех тел в ее классической постановке, т.е. рассматривается движение тела малой массы в силовом поле двух массивных излучающих тел, двигающихся в одной плоскости вокруг их общего центра масс. Целью работы является проведение нелинейного анализа и получение строгих выводов об устойчивости коллинеарной точки либрации  $L_1$ .

В первой главе сформулирована постановка задачи и получены канонические уравнения движения тела малой массы. Подробно рассмотрен вопрос о существовании и бифуркации коллинеарных точек либрации.

Во второй главе проведен анализ устойчивости коллинеарных точек либрации в круговой ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел. Для коллинеарной точки  $L_1$ , расположенной между притягивающими телами, на основе метода нормальных форм и теории КАМ проведён нелинейный анализ устойчивости. Рассмотрен нерезонансный и все резонансные случаи до четвертого порядка включительно. Результаты проведенного исследования представлены в виде диаграмм устойчивости.

В третьей главе исследована плоская эллиптическая ограничена фотогравитационная задача трех тел. В случае слабоэллиптических орбит массивных тел аналитически построены границы областей неустойчивости (параметрического резонанса). Вне указанных областей имеет место устойчивость в линейном приближении. В случае равных масс и равных интенсивностей излучения массивных тел был проведён нелинейный анализ и получены строгие выводы о формальной устойчивости.

В четвёртой главе выполнен анализ устойчивости положения равновесия (точки  $L_1$ ) в фотогравитационной задаче Ситникова. Численно построена диаграмма устойчивости в линейном приближении. При малых значениях эксцентриситета орбит притягивающих тел аналитически найдены границы областей параметрического резонанса. На основе метода симплектических отображений выполнен нелинейный анализ устойчивости положения равновесия.

## Глава 1

# Исследование существования и бифуркации коллинеарных точек либрации в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел

## 1.1. Уравнения движения в фотогравитационной задаче трёх тел

Рассмотрим движение тела  $P$  под влиянием гравитационных сил и репульсивных сил светового давления, действующих со стороны двух массивных тел  $P_1$  и  $P_2$ . Предполагается, что масса  $m$  тела  $P$  пренебрежимо мала по сравнению с массами  $m_1$  и  $m_2$  тел  $P_1$  и  $P_2$ , поэтому тело  $P$  не влияет на движение этих массивных тел. Тела  $P_1$  и  $P_2$  движутся, взаимодействуя друг с другом по закону всемирного тяготения. Данная задача называется ограниченной фотогравитационной задачей трех тел [37].

Для описания движения малого тела  $P$  введём подвижную систему координат  $Oxyz$ , вращающуюся вместе с телами  $P_1$  и  $P_2$ . Начало этой системы координат находится в центре масс  $O$  тел  $P_1$  и  $P_2$  (см. Рис. 1.1). Ось  $Ox$  направлена по прямой  $P_1P_2$  с положительным направлением в сторону тела  $P_2$ . Ось  $Oy$  лежит в плоскости движения тел, а кратчайший поворот от оси  $Ox$  к оси  $Oy$  совпадает с направлением вращения тела  $P_2$  по орбите. Ось  $Oz$  дополняет систему координат до правой тройки векторов.

Далее предполагается, что массивные тела  $P_1$  и  $P_2$  движутся по кеплеровским эллиптическим орбитам, которые определяются из решения задачи двух тел. Пусть  $r$  – расстояние между телами  $P_1$  и  $P_2$ ,  $p$  и  $e$  – параметр и эксцентриситет их орбит,  $\nu$  – истинная аномалия,  $c$  – константа интеграла площадей и  $\gamma$

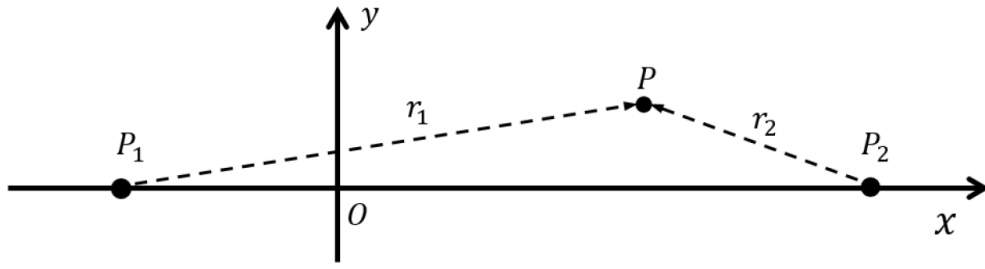


Рис. 1.1: Система координат.

– гравитационная постоянная. Тогда

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad c^2 = \gamma (m_1 + m_2) p, \quad \frac{d\nu}{dt} = \frac{c}{r^2}. \quad (1.1)$$

Следуя методике, изложенной в монографии [29], получим дифференциальные уравнения, определяющие движение малого тела  $P$  в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел.

Кинетическая энергия  $T$  тела  $P$  вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}m \left[ (\dot{x} - \dot{\nu}y)^2 + (\dot{y} + \dot{\nu}x)^2 + \dot{z}^2 \right]. \quad (1.2)$$

Здесь и далее точкой обозначается дифференцирование по времени  $t$ .

Если при изучении движения тела малой массы наряду с силами гравитационного притяжения учитывать и влияние светового давления, то сила  $F_i$ , действующая на малое тело  $P$  со стороны массивного излучающего тела  $P_i$ , является результирующей двух коллинеарных сил: гравитационной силы  $F_i^{gr}$  и репульсивной силы светового давления  $F_i^{rep}$

$$F_i = F_i^{gr} - F_i^{rep} = F_i^{gr} \left( 1 - \frac{F_i^{rep}}{F_i^{gr}} \right) = Q_i F_i^{gr} \quad (i = 1, 2) \quad (1.3)$$

В (1.3) через  $Q_i$  обозначен так называемый коэффициент редукции массы, характеризующий силу светового давления [37]. Коэффициент редукции массы  $Q_i$  задается формулой

$$Q_i = 1 - \frac{F_{rad}}{F_{gr}} = 1 - \frac{E_i}{\gamma m_i} \cdot \frac{A}{m},$$

где  $E_i$  – интенсивность излучения тела  $P_i$ ,  $A$  – площадь поперечного сечения тела  $P$ . Величину  $\frac{A}{m}$  иногда называют парусностью тела  $P$ . В рассматриваемой задаче мы считаем ее постоянной величиной.

Таким образом, результирующая сила  $F_i$  отличается от гравитационной силы лишь поправкой на массу малого тела – коэффициентом редукции массы  $Q_i$ . Коэффициенты  $Q_i$  могут принимать значения из области  $(-\infty; 1]$ . Если  $Q_i < 0$ , то репульсивные силы светового давления больше сил притяжения, а при  $Q_i = 1$  силы светового давления равны нулю.

Если в задаче трёх тел оба массивных тела являются излучающими, то силовая функция  $U$  примет вид

$$U = \gamma m \left( \frac{Q_1 m_1}{r_1} + \frac{Q_2 m_2}{r_2} \right). \quad (1.4)$$

Величины  $r_1$  и  $r_2$  в (1.4) – расстояния тела  $P$  от тел  $P_1$  и  $P_2$  соответственно:

$$r_1 = \sqrt{\left( x + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \right)^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\left( x - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \right)^2 + y^2 + z^2}.$$

Дифференциальные уравнения движения тела  $P$ , записанные в форме уравнений Лагранжа второго рода с лагранжианом  $L = T + U$ , имеют вид

$$\ddot{x} - 2\dot{\nu}\dot{y} - \ddot{\nu}y - \dot{\nu}^2 x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (1.5)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{\nu}\dot{x} + \ddot{\nu}x - \dot{\nu}^2 y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad (1.6)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (1.7)$$

где через  $W$  обозначена силовая функция (1.4), умноженная на  $m^{-1}$ .

Сделаем в уравнениях (1.5)-(1.7) замену переменных, введённую Нехвиллом [12]:

$$x = r\xi, \quad y = r\eta, \quad z = r\zeta, \quad (1.8)$$

где  $r$  определяется формулами кеплеровского движения (1.1).

Перейдём теперь к новой независимой переменной – истинной аномалии  $\nu$ . С этой целью выпишем сначала следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{c^2}{p^3} [(1 + e \cos \nu) \xi'' + e \cos \nu \xi'] (1 + e \cos \nu)^3, \\ \dot{y} &= \frac{c}{p} [(1 + e \cos \nu) \eta' + e \sin \nu \eta], \\ \dot{\nu} &= \frac{c}{p^2} (1 + e \cos \nu)^2, \\ \ddot{\nu} &= \frac{2c^2 e}{p^4} \sin \nu (1 + e \cos \nu)^3, \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{p^2} \frac{\partial W}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где штрихами обозначены производные по  $\nu$ , а в выражении для функции  $W$ , входящей в правую часть последнего равенства, величины  $r_1$  и  $r_2$  вычисляются по формулам

$$r_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad r_2 = \sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Подставляя (1.9) в уравнение (1.5), имеем

$$\xi'' - 2\eta' - \frac{1}{1 + e \cos \nu} \xi = \frac{p}{c^2(1 + e \cos \nu)} \frac{\partial W}{\partial \xi}. \quad (1.10)$$

Аналогично можно преобразовать уравнения (1.6) и (1.7), в результате чего получаем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' - \frac{1}{1 + e \cos \nu} \xi &= \frac{1}{1 + e \cos \nu} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' - \frac{1}{1 + e \cos \nu} \eta &= \frac{1}{1 + e \cos \nu} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \eta}, \\ \zeta'' + \frac{e \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \zeta &= \frac{1}{1 + e \cos \nu} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$\widetilde{W} = \frac{Q_1(1-\mu)}{r_1} + \frac{Q_2\mu}{r_2}.$$

Уравнения движения (1.11) можно переписать в более компактной форме

$$\begin{aligned}\xi'' - 2\eta' &= \frac{1}{1+e\cos\nu} \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ \eta'' + 2\xi' &= \frac{1}{1+e\cos\nu} \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}, \\ \zeta'' &= \frac{1}{1+e\cos\nu} \frac{\partial\Omega}{\partial\zeta},\end{aligned}\tag{1.12}$$

где функция  $\Omega$  введена по формуле

$$\Omega = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2}e\cos\nu\zeta^2 + \widetilde{W}.$$

Уравнения (1.12) имеют форму уравнений Лагранжа второго рода с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + (\eta'\xi - \eta\xi') + \frac{\Omega}{(1+e\cos\nu)}.$$

Введем обобщённые импульсы, соответствующие координатам  $\xi, \eta, \zeta$

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \xi'} = \xi' - \eta, \quad p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \eta'} = \eta' + \xi, \quad p_\zeta = \frac{\partial L}{\partial \zeta'} = \zeta',$$

В переменных  $\xi, \eta, \zeta, p_\xi, p_\eta, p_\zeta$  уравнения движения тела  $P$  записываются в форме системы канонических уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\xi}, & \frac{d\eta}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\eta}, & \frac{d\zeta}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\zeta}, \\ \frac{dp_\xi}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi}, & \frac{dp_\eta}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta}, & \frac{dp_\zeta}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \zeta}\end{aligned}\tag{1.13}$$

со следующей функцией Гамильтона

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + p_\xi\eta - p_\eta\xi + \frac{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)e\cos\nu}{2(1+e\cos\nu)} - \\ &- \frac{1}{1+e\cos\nu} \left( \frac{Q_1(1-\mu)}{r_1} + \frac{Q_2\mu}{r_2} \right).\end{aligned}\tag{1.14}$$

## 1.2. Коллинеарные точки либрации

Уравнения движения (1.13) допускают частное решение

$$\xi = \xi_*, \quad \eta = \zeta = 0, \quad p_\xi = p_\zeta = 0, \quad p_\eta = \xi_*, \quad (1.15)$$

где  $\xi_*$  – действительный корень уравнения

$$\xi - \frac{Q_1(1-\mu)}{(\xi+\mu)|\xi+\mu|} - \frac{Q_2\mu}{(\xi+\mu-1)|\xi+\mu-1|} = 0. \quad (1.16)$$

Решение (1.15) описывает такое движение малого тела, при котором оно всё время находится на прямой, проходящей через массивные излучающие тела.

В классической задаче трех тел (когда  $Q_1 = Q_2 = 1$ ) уравнение (1.16) при любых допустимых значениях параметра  $\mu$  имеет три решения [73]. Эти решения описывают движения тела малой массы, при которых оно расположено на прямой, проходящей через массивные тела  $P_1$  и  $P_2$ . В подвижной системе координат этим решениям отвечают положения относительного равновесия, которые называют коллинеарными точками либрации. Данные точки либрации обозначаются  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  (см. Рис. 1.2), а их координаты находятся соответственно в интервалах  $(-\mu; 1-\mu)$ ,  $(1-\mu; +\infty)$  и  $(-\infty; -\mu)$  [12, 29].

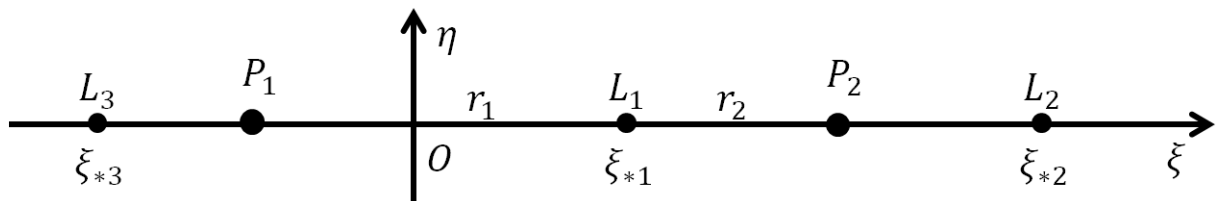


Рис. 1.2: Расположение точек либрации в классической задаче трех тел

В фотогравитационной задаче трех тел в зависимости от значений параметров  $Q_1, Q_2, \mu$  уравнение (1.16) может иметь одно, два или три решения [17, 21]. В данной главе будет рассмотрен вопрос о существовании и бифуркации коллинеарных точек либрации в фотогравитационной задаче трёх тел при всех допустимых значениях параметров  $Q_1, Q_2$  и  $\mu$ . При этом для точек либрации

фотогравитационной задачи мы будем применять обозначения аналогичные общепринятым обозначениям классической задачи трёх тел. В частности, точки либрации, координаты которых расположены в интервалах  $(1 - \mu; +\infty)$  и  $(-\infty; -\mu)$  будем называть соответственно точками либрации  $L_2$  и  $L_3$ . Как будет показано ниже, в этих интервалах может существовать не более одной точки либрации. В интервале же  $(-\mu; 1 - \mu)$  в зависимости от значений параметров может существовать от одной до трех коллинеарных точек либрации, которые далее мы будем называть коллинеарными точками либрации типа  $L_1$ . Последовательно рассмотрим каждый из указанных выше интервалов.

### 1.3. Область существования и единственность коллинеарной точки либрации $L_3$

Исследуем сначала вопрос о существовании решений уравнения (1.16) в интервале  $(-\infty; -\mu)$ , т.е. вопрос о существовании точки либрации  $L_3$ . На указанном интервале выполняются неравенства  $\xi + \mu < 0$  и  $\xi - 1 + \mu < 0$ , что позволяет однозначно раскрыть модули в выражении (1.16).

Введём обозначение

$$F_3(\xi) = \xi + \frac{Q_1(1 - \mu)}{(\xi + \mu)^2} + \frac{Q_2\mu}{(\xi + \mu - 1)^2}. \quad (1.17)$$

Тогда уравнение для координаты точки либрации  $L_3$  примет вид

$$F_3(\xi) = 0. \quad (1.18)$$

Покажем, что при  $Q_1 < 0$  уравнение (1.18) не имеет решений на промежутке  $(-\infty; -\mu)$ . Действительно, при  $Q_1 < 0$  второе слагаемое в левой части (1.18) отрицательно. Рассмотрим сумму первого и третьего слагаемых левой части уравнения (1.18). Учитывая, что  $(\xi + \mu - 1)^2 > 1$  и, следовательно,



$\xi(\xi + \mu - 1)^2 < \xi$ , имеем

$$\xi + \frac{Q_2\mu}{(\xi + \mu - 1)^2} = \frac{\xi(\xi + \mu - 1)^2 + Q_2\mu}{(\xi + \mu - 1)^2} < \frac{\xi + Q_2\mu}{(\xi + \mu - 1)^2}.$$

Поскольку  $\xi < -\mu$  и  $Q_2 < 1$ , то выполняется неравенство  $\xi + Q_2\mu < 0$ . Таким образом, при  $Q_1 < 0$  все три слагаемых функции  $F_3(\xi)$  отрицательны, а значит и сама функция  $F_3$  принимает только отрицательные значения и не может обратиться в нуль на промежутке  $(-\infty; -\mu)$ . Аналогично, нетрудно показать, что в предельном случае  $Q_1 = 0$  уравнение (1.18) не имеет решений, если  $Q_2 \neq 1$ .

Покажем теперь, что при  $0 < Q_1 \leq 1$  уравнение (1.18) на промежутке  $(-\infty; -\mu)$  имеет единственное решение. Действительно, при  $0 < Q_1 \leq 1$  непрерывная на промежутке  $(-\infty; -\mu)$  функция  $F_3(\xi)$  принимает как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому она обращается в нуль по крайней мере в одной точке указанного промежутка. Эту точку далее мы будем обозначать  $\xi_{*3}$ . Чтобы показать единственность такой точки, вычислим в ней производную функции  $F_3$

$$\frac{dF_3}{d\xi}(\xi_{*3}) = 1 - \frac{2Q_1(1 - \mu)}{(\xi_{*3} + \mu)^3} - \frac{2Q_2\mu}{(\xi_{*3} + \mu - 1)^3}. \quad (1.19)$$

Выражая  $Q_2$  из (1.18) и подставляя полученное выражение в (1.19), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dF_3}{d\xi}(\xi_{*3}) &= 1 - \frac{2Q_1(1 - \mu)}{(\xi_{*3} + \mu)^3} + \frac{2\xi_{*3}}{\xi_{*3} + \mu - 1} + \frac{2Q_1(1 - \mu)}{(\xi_{*3} + \mu)^2(\xi_{*3} + \mu - 1)} = \\ &= 1 + \frac{2Q_1(1 - \mu)}{(\xi_{*3} + \mu)^3(\xi_{*3} + \mu - 1)} + \frac{2\xi_{*3}}{\xi_{*3} + \mu - 1}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Несложный анализ показывает, что выражение (1.20) положительно при  $0 < Q_1 \leq 1$  и  $\xi_{*3} \in (-\infty; -\mu)$ . Это означает что, производная функции  $F_3(\xi)$  вычисленная в нуле этой функции, всегда положительна. Последнее, в силу непрерывности  $F_3(\xi)$ , возможно лишь в случае когда эта функция обращается в ноль лишь в одной точке рассматриваемого промежутка. Таким образом,

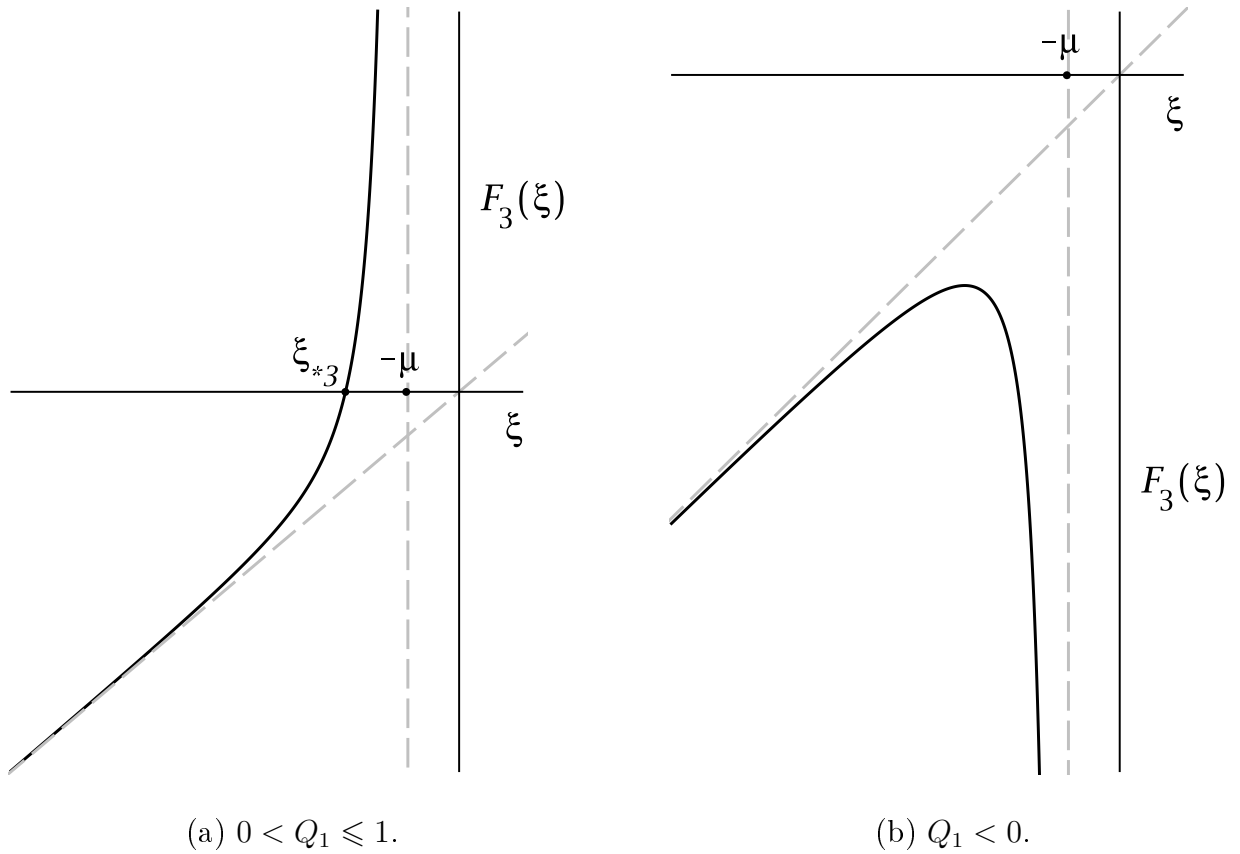


Рис. 1.3: График функции  $F_3(\xi)$  на интервале  $(-\infty; -\mu)$ .

на промежутке  $(-\infty; -\mu)$  уравнение (1.16) может иметь только один корень. Качественный характер поведения функции  $F_3(\xi)$  показан на Рис. 1.3.

Таким образом, приходим к следующему выводу: *при  $0 < Q_1 \leq 1$  в ограниченной круговой фотогравитационной задаче трех тел существует единственная точка либрации  $L_3$ , а при  $Q_1 < 0$  точки либрации  $L_3$  в данной задаче не существует.*

#### 1.4. Область существования и единственность коллинеарной точки либрации $L_2$

Рассмотрим теперь вопрос о существовании решений уравнения (1.16) на интервале  $(1 - \mu; +\infty)$ . Решение из данного интервала задает коллинеарную точку  $L_2$ . В этом случае выполняются неравенства  $\xi + \mu > 0$  и  $\xi + \mu - 1 > 0$ .

Учитывая последние неравенства, можно однозначно раскрыть знаки модуля в левой части (1.16) и записать уравнение для определения координаты точки либрации  $L_2$  в следующем виде

$$F_2(\xi) = 0, \quad (1.21)$$

где

$$F_2(\xi) = \xi - \frac{Q_1(1 - \mu)}{(\xi + \mu)^2} - \frac{Q_2\mu}{(\xi + \mu - 1)^2}. \quad (1.22)$$

Покажем, что при  $Q_2 < 0$  уравнение (1.21) не имеет решений на промежутке  $(1 - \mu; +\infty)$ . Действительно, при  $Q_2 < 0$  третье слагаемое в (1.22) положительно. Рассмотрим теперь отдельно сумму первого и второго слагаемых

$$\xi - \frac{Q_1(1 - \mu)}{(\xi + \mu)^2} = \frac{\xi(\xi + \mu)^2 - Q_1(1 - \mu)}{(\xi + \mu)^2}. \quad (1.23)$$

Поскольку мы рассматриваем решения на промежутке  $\xi \in (1 - \mu; +\infty)$ , то  $\xi + \mu > 1 - \mu + \mu = 1$ . Учитывая, также, что  $Q_1 < 1$ , имеем следующую цепочку неравенств

$$\xi(\xi + \mu)^2 - Q_1(1 - \mu) > \xi - Q_1(1 - \mu) > \xi - (1 - \mu) > 0,$$

из которой следует, что выражение (1.23) положительно при  $\xi \in (1 - \mu; +\infty)$ . Таким образом, при  $\xi > 1 - \mu$  и  $Q_2 < 0$  функция  $F_2(\xi)$  принимает только положительные значения, а значит она не может обратиться в нуль на указанном промежутке.

Покажем теперь, что при  $0 < Q_2 \leq 1$  уравнение (1.21) на промежутке  $(1 - \mu; +\infty)$  имеет единственное решение. Действительно, при  $0 < Q_2 \leq 1$  непрерывная на промежутке  $(1 - \mu; +\infty)$  функция  $F_2(\xi)$  принимает как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому на указанном промежутке она обращается в нуль как минимум в одной точке, которую далее будем обозначать  $\xi_{*2}$ . Чтобы показать единственность такой точки, вычислим в ней

производную функции  $F_2(\xi)$

$$\frac{dF_2}{d\xi}(\xi_{*2}) = 1 + \frac{2Q_1(1-\mu)}{(\xi_{*2} + \mu)^3} + \frac{2Q_2\mu}{(\xi_{*2} + \mu - 1)^3}, \quad (1.24)$$

Выражая теперь  $Q_1$  из (1.21) и подставляя полученное выражение в (1.24), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dF_2}{d\xi}(\xi_{*2}) &= 1 + \frac{2\xi_{*2}}{\xi_{*2} + \mu} - \frac{2Q_2\mu}{(\xi_{*2} + \mu)(\xi_{*2} + \mu - 1)^2} + \frac{2Q_2\mu}{(\xi_{*2} + \mu - 1)^3} = \\ &= 1 + \frac{2\xi_{*2}}{\xi_{*2} + \mu} + \frac{2Q_2\mu}{(\xi_{*2} + \mu)(\xi_{*2} + \mu - 1)^3}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Несложный анализ показывает, что выражение (1.25) положительно при  $0 < Q_2 \leq 1$  и  $\xi_{*2} \in (1 - \mu; +\infty)$ . Последнее означает, что на промежутке  $(1 - \mu; +\infty)$  функция  $F_2(\xi)$  в силу своей непрерывности обращается в нуль только в одной точке указанного промежутка. Таким образом, на промежутке  $(1 - \mu; +\infty)$  уравнение (1.16) может иметь только один корень. Далее мы будем обозначать этот корень через  $\xi_{*2}$ . Качественный характер поведения функции  $F_2(\xi)$  показан на Рис. 1.4.

Таким образом, имеет место следующее утверждение: *при  $0 < Q_2 \leq 1$  в ограниченной круговой фотогравитационной задаче трех тел существует единственная точка либрации  $L_2$ , а при  $Q_2 < 0$  точки либрации  $L_2$  в данной задаче не существует.*

## 1.5. Области существования и бифуркация коллинеарных точек либрации типа $L_1$

Перейдем к анализу корней уравнения (1.16) на интервале  $(-\mu; 1 - \mu)$ . В отличие от классической задачи трех тел, когда  $Q_1 = Q_2 = 1$ , в фотогравитационной задаче трех тел при определенных значениях параметров  $Q_1, Q_2, \mu$  уравнение (1.16) на указанном интервале может иметь несколько решений [17, 21].

В данном параграфе мы подробно исследуем этот вопрос.

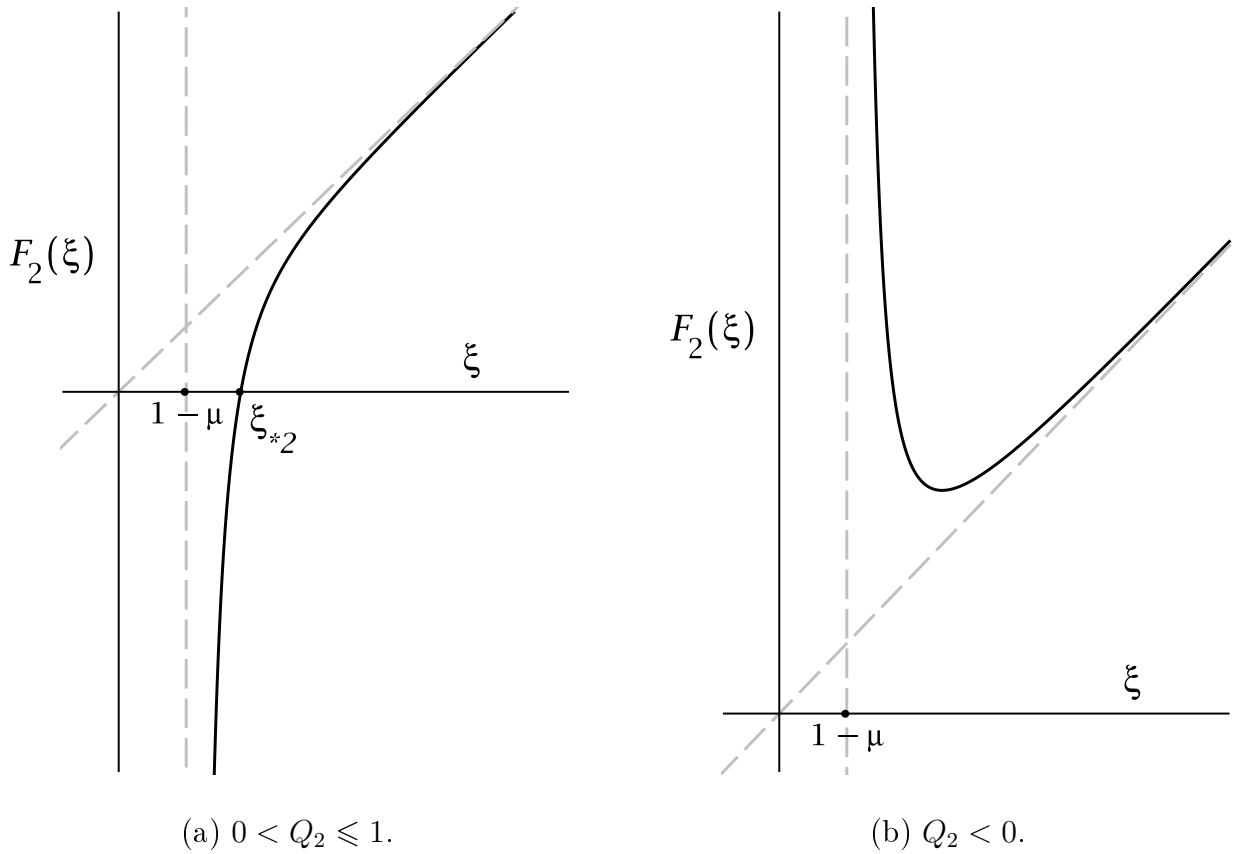


Рис. 1.4: График функции  $F_2(\xi)$  на интервале  $(1 - \mu; +\infty)$  при различных значениях  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Введём обозначение

$$F_1(\xi) = \xi - \frac{Q_1(1 - \mu)}{(\xi + \mu)^2} + \frac{Q_2\mu}{(\xi + \mu - 1)^2}. \quad (1.26)$$

Учитывая, что на рассматриваемом интервале выполняются неравенства  $-\mu < \xi < 1 - \mu$ , уравнение (1.16) для определения безразмерной координаты  $\xi$  коллинейрной точки либрации принимает вид

$$F_1(\xi) = 0. \quad (1.27)$$

Прежде всего заметим, что при  $Q_1 \geq 0$  и  $Q_2 \geq 0$  уравнение (1.27) имеет единственное решение. Действительно, в этом случае производная функции  $F_1(\xi)$

$$\frac{dF_1}{d\xi} = 1 + \frac{2Q_1(1 - \mu)}{(\xi + \mu)^3} - \frac{2Q_2\mu}{(\xi + \mu - 1)^3}, \quad (1.28)$$

положительна на интервале  $(-\mu; 1 - \mu)$ . Кроме того, значение функции  $F_1(\xi)$  стремится к  $-\infty$  на левой границе этого интервала и к  $+\infty$  на правой границе. Следовательно, на этом интервале непрерывная функция  $F_1(\xi)$  возрастает, пробегая все действительные значения. Поэтому она обращается в нуль лишь в одной точке данного интервала.

При отрицательных значениях параметров  $Q_1$  и  $Q_2$  уравнение (1.27) может иметь не единственное решение. В частности, может иметь место явление бифуркации решений уравнения (1.27). Множество значений параметров задачи, для которых имеет место бифуркация, определяется из условия существования у уравнения (1.27) кратного корня. Это условие имеет вид

$$F_1(\xi) = 0, \quad \frac{dF_1}{d\xi}(\xi) = 0. \quad (1.29)$$

Выражая  $Q_1$  и  $Q_2$  из (1.29) имеем

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{(3\xi + \mu - 1)(\xi + \mu)^3}{2(1 - \mu)}, \\ Q_2 &= \frac{(3\xi + \mu)(\xi + \mu - 1)^3}{2\mu}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Соотношения (1.30) в параметрической форме задают уравнение поверхности в трехмерном пространстве параметров задачи  $\mu, Q_1, Q_2$ . Далее эту поверхность будем называть бифуркационной поверхностью, а значения параметров  $\mu, Q_1, Q_2$  на этой поверхности – бифуркационными значениями. При фиксированном значении  $\mu$  формулы (1.30) представляют собой уравнения кривой в плоскости  $Q_1, Q_2$ , записанные в параметрической форме, где параметр  $\xi$  принимает значения из интервала  $(-\mu; 1 - \mu)$ . Эту кривую далее будем называть бифуркационной кривой. При  $\mu = 0.45$  вид данной кривой представлен на Рис. 1.5. Бифуркационная кривая и координатные оси разделяют множество значений параметров  $Q_1, Q_2$  на семь областей (см. Рис. 1.5). Внутри каждой из этих областей число корней уравнения (1.27) постоянно. При изменении значения параметра  $\mu$  происходит деформация указанных областей, но качественно

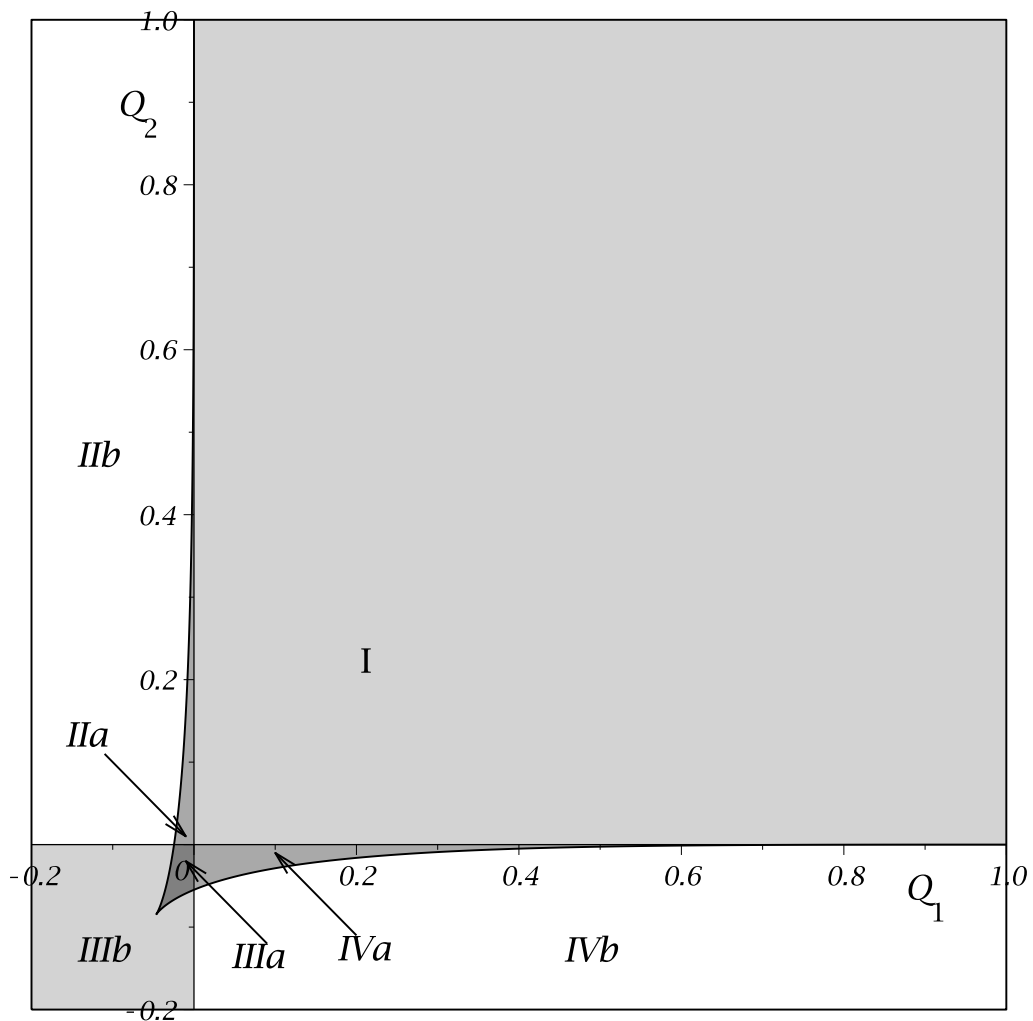


Рис. 1.5: Бифуркационная кривая и области существования решений уравнения (1.27) при  $\mu = 0.45$ .

картина их расположения не изменяется. Последнее означает, что аналогичная ситуации имеет место и во всем трехмерном пространстве параметров  $\mu, Q_1, Q_2$ : бифуркационная поверхность и координатные плоскости  $Q_1 = 0, Q_2 = 0$  разделяют все множество значений параметров на семь областей, внутри каждой из которых число корней уравнения (1.27) неизменно.

Для исследования вопроса о существовании и бифуркации решений уравнения (1.27) изучим качественный характер поведения функции  $F_1(\xi)$  на интервале  $(-\mu; 1 - \mu)$  отдельно для каждой из указанных областей.

Область I. Как было отмечено выше в области I функция  $F_1(\xi)$  возрастает

на всём интервале  $(-\mu; 1-\mu)$ , принимая при этом все действительные значения. Это означает, что в данной области уравнение (1.27) имеет единственное решение, которое далее мы будем обозначать  $\xi_{*1}$ . График функции  $F_1(\xi)$  в области I изображён на Рис. 1.6а.

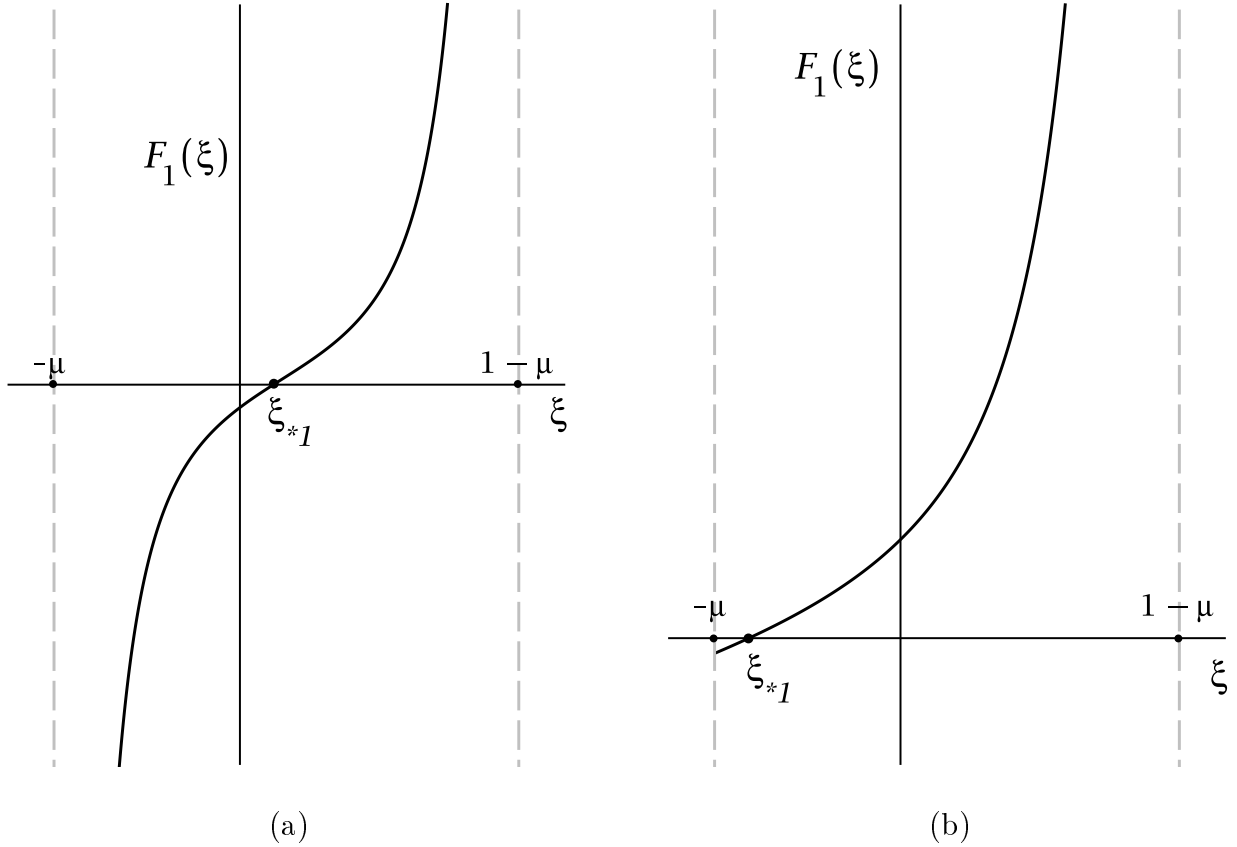


Рис. 1.6

Граница, разделяющая области I и IIa. Рассмотрим предельный случай  $Q_1 = 0, Q_2 > 0$ . В этом случае функция  $F_1(\xi)$  также возрастает на всём интервале  $[-\mu; 1-\mu)$ , принимая значения из промежутка  $[-\mu(1-Q_2); +\infty)$ . Таким образом, в этом предельном случае уравнение (1.27) также имеет единственный корень. График функции  $F_1(\xi)$  в данном случае имеет вид, представленный на Рис. 1.6б.

Области IIa и IIb ( $Q_1 < 0, Q_2 > 0$ ). Прежде всего отметим, что в областях IIa и IIb производная функции  $F_1(\xi)$  монотонно возрастает на всём интервале



$(-\mu; 1 - \mu)$ . Действительно, вторая производная функции  $F_1(\xi)$

$$\frac{d^2 F_1}{d\xi^2}(\xi) = -\frac{6Q_1(1 - \mu)}{(\xi + \mu)^4} + \frac{6Q_2\mu}{(\xi + \mu - 1)^4} \quad (1.31)$$

при значениях параметров из областей IIa и IIb принимает только положительные значения. Таким образом, учитывая, что область значений непрерывной на интервале  $(-\mu; 1 - \mu)$  функции  $\frac{dF_1}{d\xi}(\xi)$  является множеством всех действительных чисел, приходим к выводу о существовании и единственности решения уравнения  $\frac{dF_1}{d\xi}(\xi) = 0$ . Другими словами, производная функции  $F_1(\xi)$  обращается в ноль только в одной точке интервала  $(-\mu; 1 - \mu)$ , которая является точкой минимума функции  $F_1(\xi)$  на указанном интервале. Обозначим эту точку через  $\xi_{**}$ , т.е. выполняется равенство

$$\frac{dF_1}{d\xi}(\xi_{**}) = 0. \quad (1.32)$$

Отметим ещё, что на границе областей IIa и IIb точка минимума  $\xi_{**}$  функции  $F_1(\xi)$  является корнем уравнения (1.27).

Для фиксированных значений  $Q_2$  и  $\mu$  равенство (1.32) задаёт зависимость  $\xi_{**}$  от  $Q_1$ . В силу единственности решения уравнения (1.32), эта зависимость является взаимнооднозначной функцией  $\xi_{**}(Q_1)$ .

Рассмотрим теперь функцию  $G(Q_1) = F_1(\xi_{**}(Q_1))$ , которая задает значение функции  $F_1(\xi)$  в точке минимума. Её полная производная по  $Q_1$  имеет вид

$$\frac{dG}{dQ_1} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} + \frac{\partial F_1}{\partial \xi_{**}} \cdot \frac{\partial \xi_{**}}{\partial Q_1} \right) \Big|_{\xi=\xi_{**}(Q_1)} = \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} = -\frac{1 - \mu}{(\xi_{**}(Q_1) + \mu)^2} < 0.$$

Выше мы учли, что  $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_{**}} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi}(\xi_{**}(Q_1)) = 0$ . Итак,  $G(Q_1)$  является монотонно убывающей функцией аргумента  $Q_1$ . Эта функция непрерывна по  $Q_1$  и обращается в ноль на границе областей IIa и IIb, поэтому она положительна в области IIb и отрицательна в области IIa. Таким образом, функция  $F_1(\xi)$  в точке минимума  $\xi_{**}$  положительна, если значения параметров  $Q_1$  и  $Q_2$  лежат

в области IIb, и отрицательна, если значения этих параметров лежат в области IIa. Последнее означает, что в области IIa уравнение (1.27) на интервале  $(-\mu; 1 - \mu)$  имеет два решения, а в области IIb – не имеет решений. На границе областей IIa и IIb уравнение (1.27) на указанном интервале имеет единственное решение. График функции  $F_1(\xi)$  в областях IIa, IIb и на их границе представлен на Рис. 1.7.

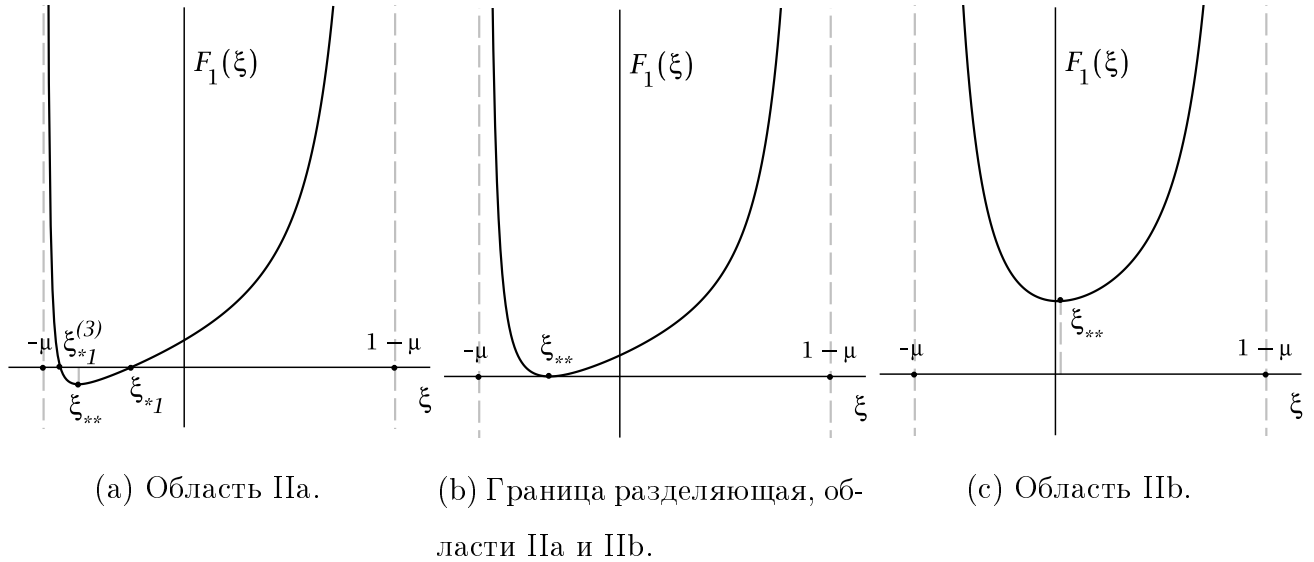


Рис. 1.7: График функции  $F_1(\xi)$  в областях IIa, IIb и на их границе.

Проведенный выше анализ позволяет описать процесс бифуркации и эволюции решений уравнения (1.16) в областях I, IIa, IIb. Пусть параметры  $\mu$  и  $Q_2$  фиксированы, причем  $Q_2 > 0$ . Будем непрерывно изменять значение параметра  $Q_1$  от некоторого положительного значения, отвечающего области I, до некоторого отрицательного значения, отвечающего области IIb. В области I уравнение (1.16) имеет три решения  $\xi_{*1}, \xi_{*2}, \xi_{*3}$ . Эти решения лежат соответственно в интервалах  $(-\mu; 1 - \mu)$ ,  $(1 - \mu; +\infty)$  и  $(-\infty; -\mu)$ . При приближении к границе областей I и IIa решение уравнения (1.18) из интервала  $(-\infty; -\mu)$  приближается к значению  $\xi = -\mu$  и исчезает на этой границе при переходе в область IIa. В области же IIa у уравнения (1.27) на интервале  $(-\mu; 1 - \mu)$  появляется ещё одно решение, близкое к значению  $\xi = -\mu$ . Таким образом, при непрерывном

изменении параметра  $Q_1$  от некоторого положительного значения к некоторому отрицательному значению решение  $\xi_{*3}$  уравнения (1.16) непрерывно перемещается из интервала  $(-\infty; -\mu)$  в интервал  $(-\mu; 1-\mu)$ . Такой процесс перемещения решения уравнения (1.16) из одного интервала в другой далее мы будем называть *эволюцией* решения уравнения (1.16). Решение, появившееся на интервале  $(-\mu; 1-\mu)$  в результате такой эволюции, будем обозначать  $\xi_{*1}^{(3)}$ , в отличие от второго решения, для которого мы сохраняем обозначение  $\xi_{*1}$ . Коллинеарная точка либрации, соответствующая решению  $\xi_{*1}^{(3)}$  обозначается далее  $L_1^{(3)}$ .

Отметим еще, что переходе из области IIb в область IIa имеет место бифуркация решений уравнения (1.16), которая происходит по следующему сценарию. В области IIb уравнение (1.16) имеет единственное решение, которое принадлежит интервалу  $(1-\mu; +\infty)$ . На интервале  $(-\mu; 1-\mu)$  уравнение (1.16) решений не имеет. На границе областей IIa и IIb у этого уравнения появляется решение – кратный корень на интервале  $(-\mu; 1-\mu)$ , который в области IIa распадается на два решения  $\xi_{*1}^{(3)}$  и  $\xi_{*1}$ , принадлежащих данному интервалу.

Области IIIa, IIIb ( $Q_1 < 0, Q_2 < 0$ ). В областях IIIa, IIIb, функция  $F_1(\xi)$  на интервале  $(-\mu; 1-\mu)$  принимает все действительные значения и, следовательно, обращается в нуль по крайней мере в одной точке этого интервала.

Третья производная функции  $F_1(\xi)$

$$\frac{d^3 F_1}{d\xi^3}(\xi) = \frac{24Q_1(1-\mu)}{(\xi+\mu)^5} - \frac{24Q_2\mu}{(\xi+\mu-1)^5} \quad (1.33)$$

отрицательна на интервале  $(-\mu; 1-\mu)$ . Поэтому вторая производная функции  $F_1(\xi)$  монотонно убывает на этом интервале, пробегая все действительные значения, и, следовательно, обращается в нуль в единственной точке этого интервала, которая является точкой максимума первой производной функции  $F_1(\xi)$  и единственной её экстремальной точкой. Если производная функции  $F_1(\xi)$  отрицательна в этой точке максимума, то она отрицательна и на всем интервале  $(-\mu; 1-\mu)$ , и поэтому не обращается в нуль на указанном интервал. В этом

случае функция  $F_1(\xi)$  не имеет экстремумов и монотонно убывает на данном интервале, а уравнение (1.27) имеет единственное решение. Если же производная функции  $F_1(\xi)$  положительна в точке своего максимума, то она обращается в нуль в двух точках интервала  $(-\mu; 1 - \mu)$ . В этом случае функция  $F_1(\xi)$  имеет две экстремальные точки: точку минимума и точку максимума. Как следствие, в данном случае в зависимости от значений параметров уравнение (1.27) может иметь один, два или три корня.

Рассмотрим предельную ситуацию, когда в точке максимума производная функции  $F_1(\xi)$  обращается в нуль. Эта ситуация возникает при выполнении условий

$$\frac{dF_1}{d\xi}(\xi) = 0, \quad \frac{d^2F_1}{d\xi^2}(\xi) = 0. \quad (1.34)$$

Выражая  $Q_1$  и  $Q_2$  из равенств (1.34), имеем

$$Q_1 = -\frac{(\xi + \mu)^4}{2(1 - \mu)}, \quad Q_2 = -\frac{(\xi + \mu - 1)^4}{2\mu}. \quad (1.35)$$

Формулы (1.35) параметрически задают кривую в плоскости  $Q_1, Q_2$ , на которой производная функции  $F_1(\xi)$  обращается в нуль в точке своего максимума. На Рис. 1.8 эта кривая обозначена через  $\gamma$  и изображена пунктирной линией. Для значений параметров  $Q_1$  и  $Q_2$  из области, расположенной ниже этой пунктирной линии, производная функции  $F_1(\xi)$  меньше нуля, а сама функция монотонно убывает на промежутке  $(-\mu; 1 - \mu)$ . Это означает, что в указанной области уравнение (1.27) имеет единственное решение  $\xi_{*1}$ , на котором производная функции  $F_1(\xi)$  отрицательна. Сразу отметим, что знак производной функции  $F_1(\xi)$  в точке  $\xi = \xi_{*1}$  играет важную роль при исследовании устойчивости коллинеарной точки либрации, соответствующей данному решению. Это будет показано в главе 2.

Исследуем теперь поведение функции  $F_1(\xi)$  для значений параметров из области, расположенной выше пунктирной кривой. Исследование начнём с рассмотрения предельного случая, который имеет место на границе, разделяющей

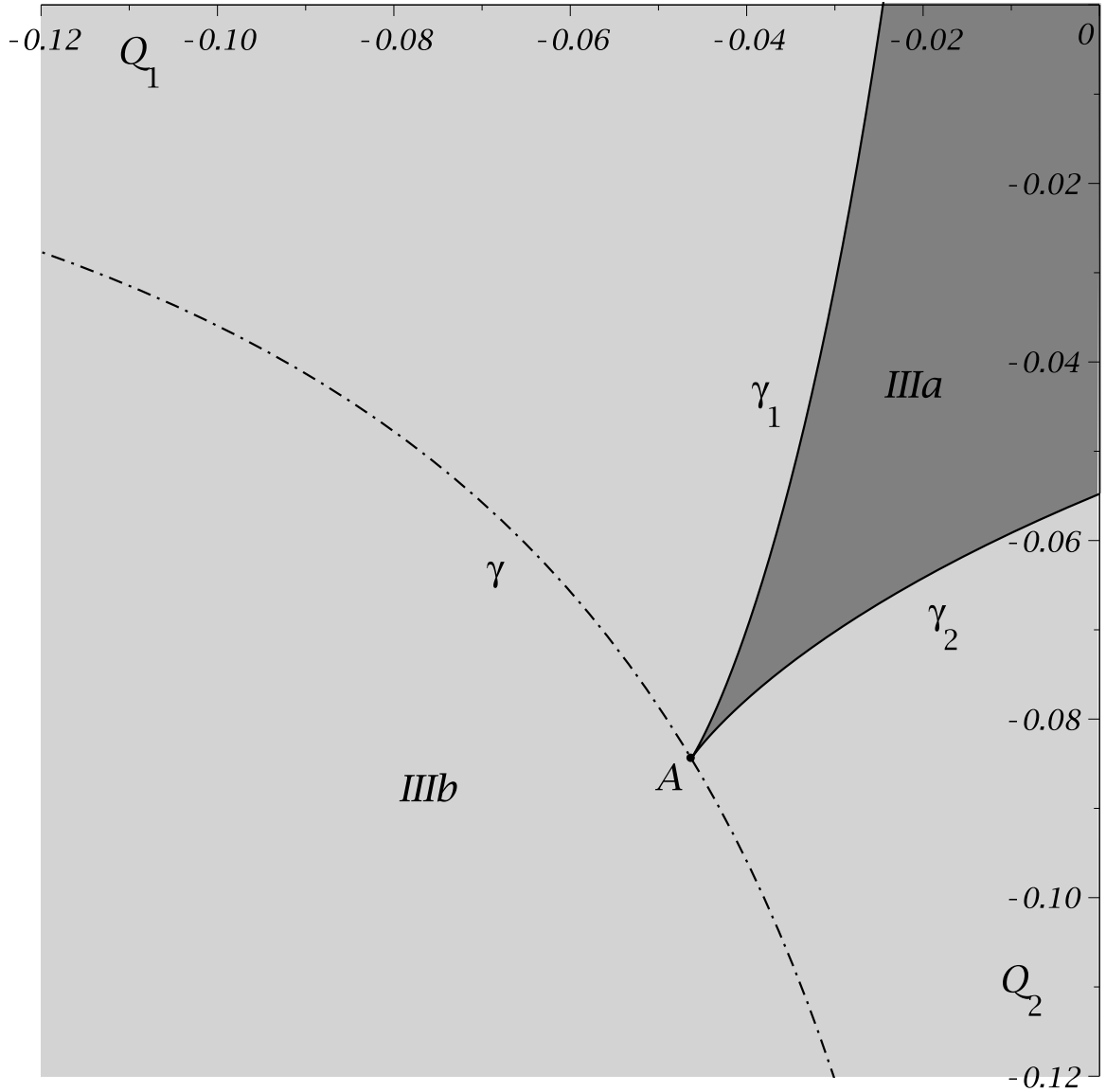


Рис. 1.8: График кривой, задаваемой формулами (1.35).

области IIIa и IIIb. На этой границе функция  $F_1(\xi)$  имеет экстремальную точку  $\xi_{**}$ , которая является кратным корнем уравнения (1.27). Исследуем характер экстремума функции  $F_1(\xi)$  в данной точке. С этой целью напомним, что на рассматриваемой границе выполняются равенства (1.30). Подставляя эти равенства в (1.31), имеем

$$\frac{d^2 F_1}{d\xi^2}(\xi_{**}) = \frac{3(2\mu + 3\xi_{**} - 1)}{(\xi_{**} + \mu)(\xi_{**} + \mu - 1)}. \quad (1.36)$$

Из (1.36) следует, что при  $\xi_{**}^{(0)} = \frac{1-2\mu}{4}$  вторая производная функции  $F_1(\xi)$

обращается в нуль. На плоскости  $Q_1, Q_2$  это соответствует точке  $A$  (см. Рис. 1.8) с координатами  $Q_1 = -\frac{(1+2\mu)^4}{512(1-\mu)}$ ,  $Q_2 = -\frac{(3-2\mu)^4}{512\mu}$ . Эта точка делит границу между областями IIIa и IIIb на две части  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

Нетрудно заметить, что на граничной кривой  $\gamma_1$  выполняется неравенство  $\xi_{**} < \xi_{**}^{(0)}$ , и поэтому выражение (1.36) положительно. Следовательно, на данной части границы  $\xi_{**}$  является точкой минимума. В силу непрерывной зависимости функции  $F_1(\xi)$  от параметра  $Q_1$  решение  $\xi_{**}$  уравнения  $\frac{dF_1}{d\xi}(\xi) = 0$  можно продолжить по этому параметру в области IIIa и IIIb. Продолженное таким образом решение можно рассматривать как функцию аргумента  $Q_1$ , которую далее будем обозначать  $\xi_{**}^{(1)}(Q_1)$ . Значения этой функции задают точку локального экстремума функции  $F_1(\xi)$ .

На граничной кривой  $\gamma_1$  этот экстремум является локальным минимумом функции  $F_1(\xi)$ . Поскольку в областях IIIa и IIIb  $\frac{d^2F_1}{d\xi^2}(\xi_{**}) \neq 0$ , то характер экстремума не изменится при переходе как в область IIIa, так и в область IIIb. Итак, функция  $\xi_{**}^{(1)}(Q_1)$  задаёт точку локального минимума функции  $F_1(\xi)$  в областях IIIa и IIIb.

Рассмотрим теперь функцию  $F_1(\xi_{**}^{(1)}(Q_1))$ . Её полная производная по  $Q_1$  имеет вид

$$\frac{dF_1(\xi_{**}^{(1)}(Q_1))}{dQ_1} = \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} \Big|_{\xi=\xi_{**}^{(1)}} + \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_{**}^{(1)}} \cdot \frac{\partial \xi_{**}^{(1)}}{\partial Q_1} = \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} \Big|_{\xi=\xi_{**}^{(1)}} = -\frac{1-\mu}{(\xi_{**}^{(1)}(Q_1) + \mu)^2} < 0. \quad (1.37)$$

Выше мы учли, что  $\frac{\partial F_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_{**}^{(1)}} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi}(\xi_{**}^{(1)}(Q_1)) \equiv 0$ .

Заметим, что функция  $F_1(\xi_{**}^{(1)}(Q_1))$  задаёт значение функции  $F_1(\xi)$  в точке локального минимума. В силу неравенства (1.37) эта функция монотонно убывает по своему аргументу  $Q_1$ . Поскольку  $F_1(\xi_{**}^{(1)}(Q_1))$  обращается в нуль на границе областей IIIa и IIIb, то при переходе в область IIIa она становится отрицательной, а при переходе в область IIIb – положительной. Из последнего следует, что в подобласти области IIIb, расположенной между кривой  $\gamma$  и

границной кривой  $\gamma_1$  (см. Рис. 1.8), функция  $F_1(\xi)$  на интервале  $(-\mu; 1 - \mu)$  обращается в нуль только в одной точке. График этой функции для значений параметров из указанной подобласти представлен на Рис. 1.9а.

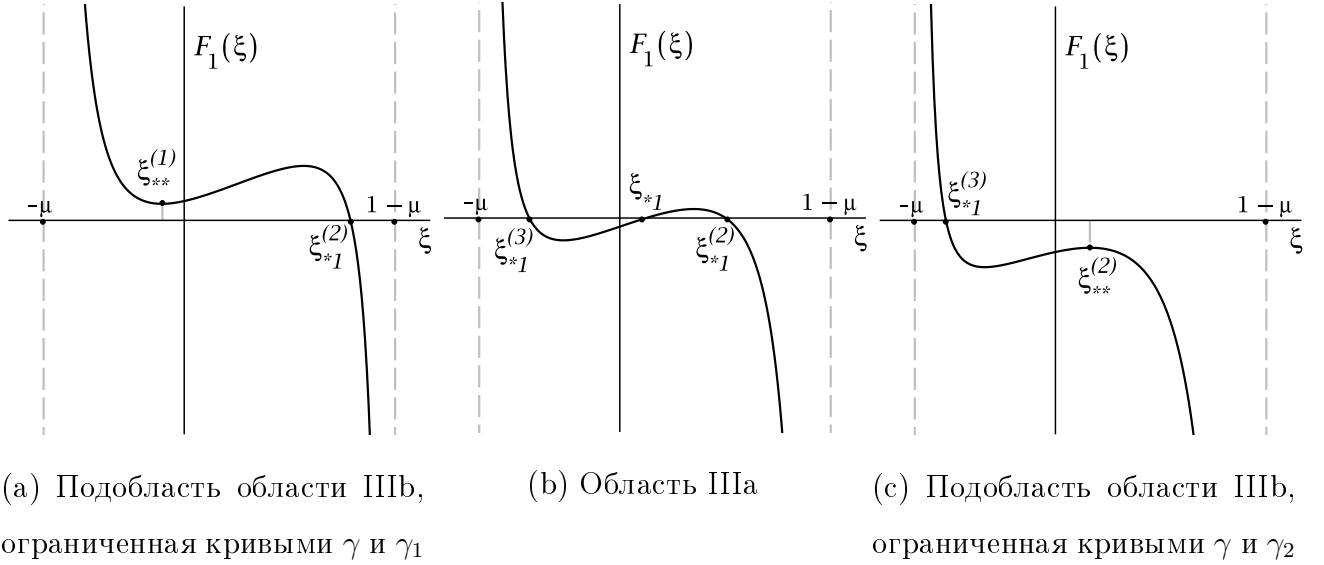


Рис. 1.9: График функции  $F_1(\xi)$  в областях Ша и Шб

Рассмотрим граничную кривую  $\gamma_2$ . На этой части границы  $\xi_{**} > \xi_{**}^{(0)}$ , и поэтому выражение (1.36) отрицательно, т.е. на граничной кривой  $\gamma_2$  корень  $\xi_{**}$  является точкой локального максимума функции  $F_1(\xi)$ . Аналогично тому, как это было сделано выше, продолжим решение  $\xi_{**}$  уравнения  $\frac{dF_1}{d\xi}(\xi) = 0$  в области Ша и Шб, т.е. рассмотрим функцию  $\xi_{**}^{(2)}(Q_2)$ , аргументом которой является параметр  $Q_2$ . Значения этой функции задаёт точку локального максимума функции  $F_1(\xi)$ . Рассмотрим теперь функцию  $F_1(\xi_{**}^{(2)}(Q_2))$ . Её полная производная по  $Q_2$  имеет вид

$$\frac{dF_1(\xi_{**}^{(2)}(Q_2))}{dQ_2} = \left. \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} \right|_{\xi=\xi_{**}^{(2)}} + \left. \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_{**}^{(2)}} \cdot \frac{\partial \xi_{**}^{(2)}}{\partial Q_2} = \left. \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} \right|_{\xi=\xi_{**}^{(2)}} = \frac{\mu}{(\xi_{**}^{(2)}(Q_2) + \mu - 1)^2} > 0. \quad (1.38)$$

Как и ранее, в (1.38) мы учли, что  $\left. \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_{**}^{(2)}} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi}(\xi_{**}^{(2)}(Q_2)) \equiv 0$ .

Функция  $F_1(\xi_{**}^{(2)}(Q_2))$  задаёт значения функции  $F_1(\xi)$  в точке локального максимума. Из (1.38) следует, что функция  $F_1(\xi_{**}^{(2)}(Q_2))$  монотонно возрастает

по своему аргументу  $Q_2$ , поэтому в области IIIa она принимает положительные значения, а в области IIIb – отрицательные. Поэтому в подобласти области IIIb, расположенной между кривой  $\gamma$  и граничной кривой  $\gamma_2$  (см. Рис. 1.8), функция  $F_1(\xi)$  обращается в нуль только в одной точке интервала  $(-\mu; 1 - \mu)$ . График этой функции для значений параметров из указанной подобласти представлен на Рис. 1.9с.

Таким образом, всюду в области IIIb функция  $F_1(\xi)$  имеет на интервале  $(-\mu; 1 - \mu)$  единственный корень, в котором производная функции  $F_1(\xi)$  отрицательна. Последнее имеет важное значение для анализа устойчивости точки либрации, отвечающей данному корню.

Рассмотрим теперь область IIIa. Как было показано выше в этой области  $F_1(\xi_{**}^{(1)}(Q_1)) < 0$  и  $F_1(\xi_{**}^{(2)}(Q_2)) > 0$ , т.е. функция  $F_1(\xi)$  в области IIIa принимает отрицательное значение в точке своего локального минимума и положительное значение в точке локального максимума. Из этого следует, что уравнение (1.27) в области IIIa имеет три корня, которые обозначим  $\xi_{*1}^{(3)}$ ,  $\xi_{*1}$ ,  $\xi_{*1}^{(2)}$ . График функции  $F_1(\xi)$  для значений параметров из области IIIa изображён на Рис. 1.9б.

Отметим еще, что при  $\xi = \xi_{*1}^{(2)}$  и  $\xi = \xi_{*1}^{(3)}$  производная функции  $F_1(\xi)$  отрицательна, а при  $\xi = \xi_{*1}$  – положительна.

Исследуем теперь вопрос о существовании решений уравнения (1.27) на границе, разделяющей области IIa и IIIa, а также на границе областей IIb и IIIb, т.е. при  $Q_2 = 0$ ,  $Q_1 < 0$ .

Прежде всего заметим, что в этом случае функция  $F_1(\xi)$  имеет единственную точку экстремума

$$\xi_{**} = -\mu + \sqrt[3]{2Q_1(\mu - 1)}, \quad (1.39)$$

которая является точкой локального минимума. Кроме того, на правой границе интервала  $(-\mu; 1 - \mu]$  функция  $F_1(\xi)$  принимает положительное значение:  $F_1(1 - \mu) = (1 - \mu)(1 - Q_1) > 0$ .



Вычислим значение  $F_1(\xi)$  в точке минимума

$$F_1(\xi_{**}) = \frac{-2\mu + 3\sqrt[3]{2Q_1(\mu - 1)}}{\sqrt[3]{2Q_1(\mu - 1)}}. \quad (1.40)$$

При  $Q_1 > -\frac{4\mu^3}{27(1-\mu)}$  выражение (1.40) отрицательно. В этом случае уравнение (1.27) имеет два решения. Такая ситуация имеет место на границе, разделяющей области IIa и IIIa.

При  $Q_1 < -\frac{4\mu^3}{27(1-\mu)}$  выражение (1.40) положительно и уравнение (1.27) не имеет решений. Этот случай соответствует границе, разделяющей области IIb и IIIb. График функции  $F_1(\xi)$  для каждого из рассмотренных выше случаев представлен на Рис.10. Как и в области IIa, на границе, разделяющей IIa и IIIa, корни уравнения (1.27) обозначены через  $\xi_{*1}^{(3)}$ ,  $\xi_{*1}$ . Производная функции  $F_1(\xi)$  при  $\xi_{*1}^{(3)}$  отрицательна, а при  $\xi_{*1}$  – положительна.

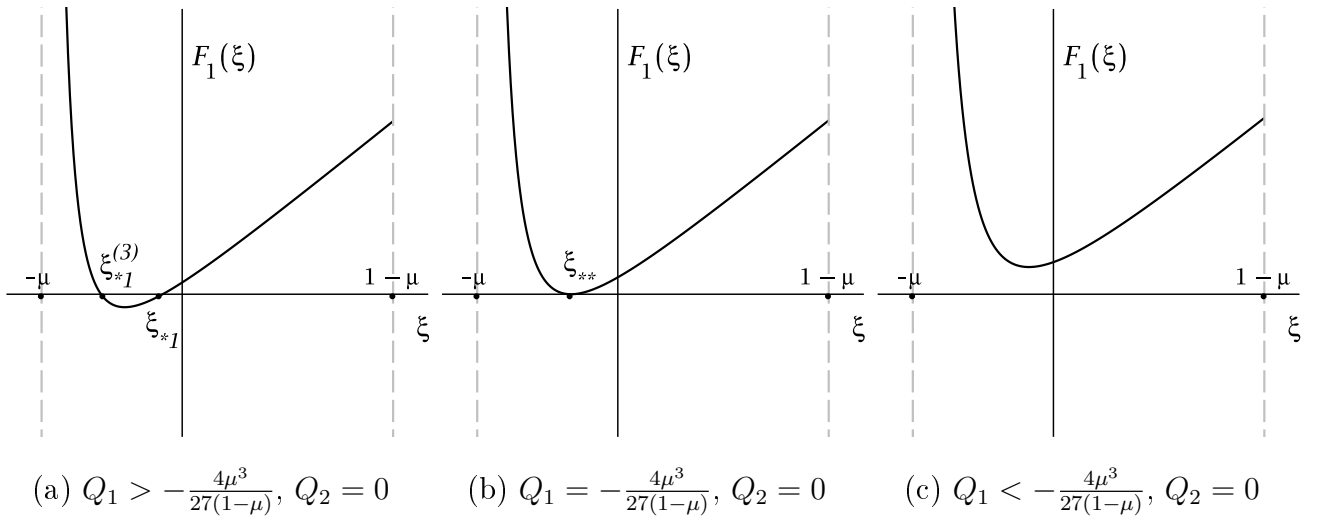


Рис. 1.10: График функции  $F_1(\xi)$  при  $Q_1 < 0, Q_2 = 0$

Проведенное выше исследование позволяет сделать следующие выводы о бифуркации решений уравнения (1.27).

В области IIIa уравнение (1.27) имеет три решения:  $\xi_{*1}^{(3)}$ ,  $\xi_{*1}$ ,  $\xi_{*1}^{(2)}$ . При приближении к граничной кривой  $\gamma_1$  решения  $\xi_{*1}^{(3)}$  и  $\xi_{*1}$  сближаются, совпадают на этой кривой и исчезают в области IIIb. При приближении к граничной кривой

$\gamma_2$  решения  $\xi_{*1}$ ,  $\xi_{*1}^{(2)}$  сближаются, совпадают на ней и исчезают при переходе в область IIIб. Заметим, что при переходе из области IIб в область IIIб имеет место эволюция решений уравнения (1.16), которая происходит по следующему сценарию. В области IIб уравнение (1.16) имеет единственное решение  $\xi_{*2}$ , которое принадлежит промежутку  $(1 - \mu; +\infty)$ . При приближении к границе с областью IIIб (т.е. при  $Q_2 \rightarrow 0$ ) это решение приближается к значению  $(1 - \mu)$  и исчезает на этой границе. При переходе в область IIIб у уравнения (1.16) появляется решение на промежутке  $(-\mu; 1 - \mu)$ . При  $|Q_2| \ll 1$  это решение близко к значению  $(1 - \mu)$ . Аналогичная эволюция решения уравнения (1.16) имеет место при переходе из области IIа в область IIIа. Решение  $\xi_{*2}$  из промежутка  $(1 - \mu; +\infty)$  исчезает при переходе в область IIIа, но на промежутке  $(-\mu; 1 - \mu)$  появляется третье решение – корень  $\xi_{*1}^{(2)}$ .

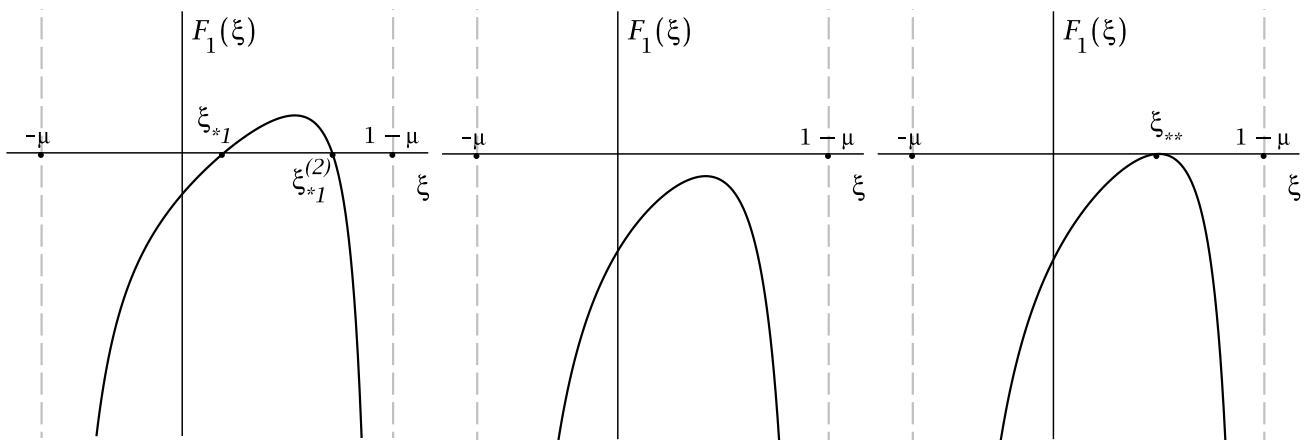
Области IVа и IVб ( $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 < 0$ ). Исследование вопроса о существовании и бифуркации решений уравнения (1.27) при значениях параметров из областей IVа и IVб можно выполнить аналогично тому, как это было сделано для областей IIа и IIб. Заметим, что при значениях параметров из областей IVа и IVб вторая производная функции  $F_1(\xi)$  отрицательна. Это сразу следует из вида выражения (1.31). Первая же производная функции  $F_1(\xi)$  убывает на интервале  $(-\mu; 1 - \mu)$ , пробегая все действительные значения. Таким образом, на указанном интервале функция  $F_1(\xi)$  имеет единственную экстремальную точку  $\xi = \xi_{**}$ , которая является точкой максимума.

Рассмотрим функцию  $\xi_{**}(Q_2)$ , которая получается обращением равенства  $\frac{dF_1}{d\xi}(\xi_{**}) = 0$  при фиксированных значениях  $Q_1$  и  $\mu$ . Вычислим теперь полную производную функции  $F_1(\xi_{**}(Q_2))$

$$\frac{dF_1(\xi_{**}(Q_2))}{dQ_2} = \left. \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} \right|_{\xi=\xi_{**}} + \left. \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_{**}} \cdot \frac{\partial \xi_{**}}{\partial Q_2} = \left. \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} \right|_{\xi=\xi_{**}} = \frac{\mu}{(\xi_{**}(Q_2) + \mu - 1)^2} > 0. \quad (1.41)$$

Функция  $F_1(\xi_{**}(Q_2))$  задает значение  $F_1(\xi)$  в точке максимума и, в силу

(1.41), является монотонно возрастающей функцией аргумента  $Q_2$ . Эта функция непрерывна по  $Q_2$  и обращается в нуль на границе областей IVa и IVb, поэтому в области IVa она принимает положительные значения, а в области IVb – отрицательные. Поскольку в рассматриваемых областях функция  $F_1(\xi)$  неограниченно убывает на границах промежутка  $(-\mu; 1 - \mu)$ , то принимая в точке максимума положительное значение, она обратится в нуль в двух точках данного промежутка. Если же в точке максимума  $F_1(\xi)$  отрицательна, то она, очевидно, не обращается в нуль на указанном интервале. Таким образом, в области IVa уравнение (1.27) имеет два корня, а в области IVb – не имеет корней. График функции  $F_1(\xi)$  для значений параметров из областей IVa и IVb, а также на их границе представлен на Рис. 1.11.



(a) График  $F_1(\xi)$  в области IVa. (b) График  $F_1(\xi)$  в области IVb. (c) График  $F_1(\xi)$  на границе областей IVa и IVb.

Рис. 1.11: График функции  $F_1(\xi)$  в областях IVa, IVb и на их границе.

Решения уравнения (1.27) в области IVa обозначим  $\xi_{*1}$  и  $\xi_{*1}^{(2)}$ . Бифуркация этих решений происходит по следующему сценарию. При приближении значений параметров к границе с областью IVb указанные решения приближаются друг к другу, совпадают на самой границе и исчезают при переходе значений параметров в область IVb. Опишем ещё эволюцию решений уравнения (1.16) при переходе значения параметра  $Q_1$  через ноль при  $Q_2 < 0$ , что соответствует

переходу через границу, разделяющую области IIIa и IVa, а также области IIIb и IVb. С этой целью исследуем вопрос о существовании решений уравнения (1.16) на самой этой границе, т.е. при  $Q_1 = 0$ ,  $Q_2 < 0$ .

В этом случае функция  $F_1(\xi)$  имеет единственную экстремальную точку

$$\xi_{**} = 1 - \mu + \sqrt[3]{2Q_2\mu}, \quad (1.42)$$

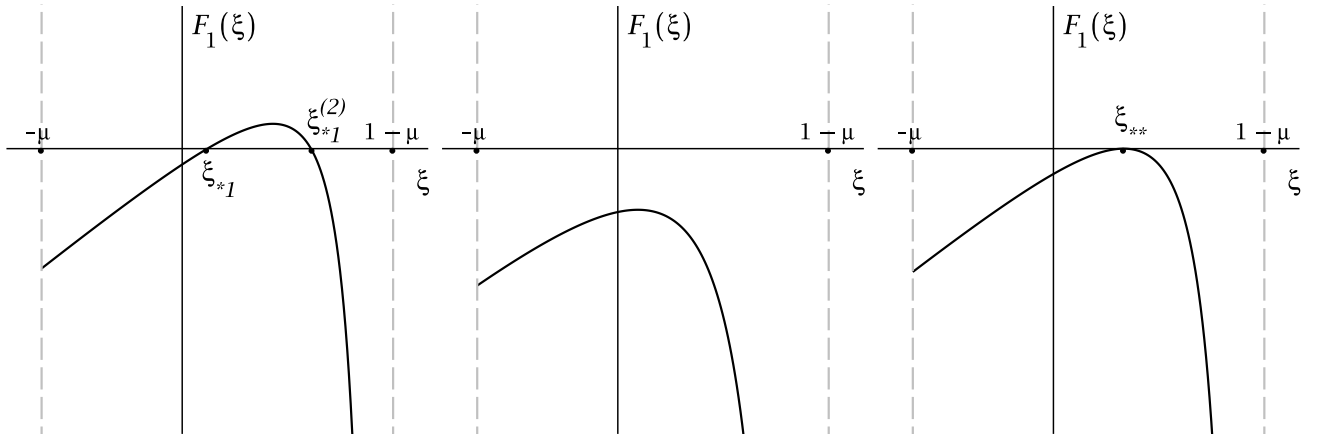
которая является точкой максимума. Кроме того, на левой границе интервала  $[-\mu; 1 - \mu)$  функция  $F_1(\xi)$  принимает отрицательное значение  $F_1(-\mu) = \mu(Q_2 - 1) < 0$ , а на правой границе неограниченно убывает.

Вычислим значение  $F_1(\xi)$  в точке максимума

$$F_1(\xi_{**}) = \frac{2(1 - \mu) + 3\sqrt[3]{2Q_2\mu}}{\sqrt[3]{Q_2\mu}}. \quad (1.43)$$

При  $\frac{4(\mu-1)^3}{27\mu} < Q_2 < 0$  выражение (1.43) положительно. В этом случае уравнение (1.27) имеет два корня. Такая ситуация соответствует на границе областей IIIa и IVa. При  $Q_2 < \frac{4(\mu-1)^3}{27\mu}$  выражение (1.43) отрицательно и уравнение (1.27) не имеет решений. Этот случай отвечает границе областей IIIb и IVb. График функции  $F_1(\xi)$  для каждого из рассмотренных случаев представлен на Рис. 1.12. Как и в области IVa корни уравнения на границе областей IIIa и IVa будем обозначать  $\xi_{*1}$  и  $\xi_{*1}^{(2)}$ . Производная функции  $F_1(\xi)$  при  $\xi = \xi_{*1}^{(2)}$  отрицательна, а при  $\xi = \xi_{*1}$  — положительна.

Таким образом, можно сделать следующие выводы об эволюции решений уравнения (1.16) при переходе из области IIIa в область IVa. В области IIIa уравнение (1.16) имеет три решения на промежутке  $(-\mu; 1 - \mu)$  и не имеет решений на промежутках  $(-\infty; -\mu)$  и  $(1 - \mu; +\infty)$ . При переходе через границу областей IIIa и IVa решение  $\xi_{*1}^{(3)}$  приближается к значению  $-\mu$  и исчезает на границе этих областей. В области IVa уравнение (1.16) имеет два решения  $\xi_{*1}$  и  $\xi_{*1}^{(2)}$  на промежутке  $(-\mu; 1 - \mu)$  и одно решение  $\xi_{*3}$  на промежутке  $(-\infty; -\mu)$ , которое близко к значению  $-\mu$  вблизи границы областей IIIa и IVa. Такая же



(а) График функции  $F_1(\xi)$  при  $Q_1 = 0, \frac{4(\mu-1)^3}{27\mu} < Q_2 < 0$ . (б) График функции  $F_1(\xi)$  при  $Q_1 = 0, Q_2 > \frac{4(\mu-1)^3}{27\mu}$ . (с) График функции  $F_1(\xi)$  при  $Q_1 = 0, Q_2 = \frac{4(\mu-1)^3}{27\mu}$ .

Рис. 1.12

эволюция решений имеет место при переходе через границу областей IIIb и IVb. В области IIIb уравнение (1.16) имеет единственное решение  $\xi_{*1}^{(3)}$  на интервале  $(-\mu; 1 - \mu)$  и не имеет решений на промежутках  $(-\infty; -\mu)$  и  $(1 - \mu; +\infty)$ . При переходе из области IIIb в область IVb это решение приближается к значению  $-\mu$  и исчезает на границе этих областей. В области IVb уравнение (1.16) имеет единственное решение  $\xi_{*3}$  на промежутке  $(-\infty; -\mu)$ , которое близко к значению  $-\mu$  вблизи границы областей IIIb и IVb. Решений на промежутках  $(-\mu; 1 - \mu)$  и  $(1 - \mu; +\infty)$  уравнение (1.16) в области IVb не имеет.

Остаётся рассмотреть эволюцию решений уравнения (1.16) при переходе из области IVa в область I. С этой целью исследуем сначала предельный случай, отвечающий границе этих областей, т.е.  $Q_2 = 0, 0 < Q_1 \leq 1$ . В этом случае функция  $F_1(\xi)$  возрастает на всём интервале  $(-\mu; 1 - \mu]$ , принимая значения из промежутка  $(-\infty; (1 - \mu)(1 - Q_2)]$ . Поэтому функция  $F_1(\xi)$  обращается в нуль в одной точке интервала  $(-\mu; 1 - \mu]$ . Функция  $F_2(\xi)$  возрастает на всём интервале  $[1 - \mu; +\infty)$ , принимая значения из промежутка  $[(1 - \mu)(1 - Q_2); +\infty)$ . Поэтому она не обращается в нуль на данном промежутке. Функция  $F_3(\xi)$  при  $Q_1 > 0$ , как показано выше, на промежутке  $(-\infty; -\mu)$  обращается в нуль в

единственной точке. Проведенный анализ позволяет сделать следующий вывод об эволюции решений уравнения (1.16) при переходе из области IVa в область I. В области IVa уравнение (1.16) имеет один корень  $\xi_{*3}$  на промежутке  $(-\infty; -\mu)$  и два корня  $\xi_{*1}$  и  $\xi_{*1}^{(2)}$  на промежутке  $(-\mu; 1-\mu)$ . На промежутке  $(1-\mu; +\infty)$  это уравнение корней не имеет. При приближении к границе с областью I корень  $\xi_{*1}^{(2)}$  из промежутка  $(-\mu; 1-\mu)$  приближается к значению  $1-\mu$  и исчезает на границе областей I и IVa. В области I уравнение (1.16) имеет три корня:  $\xi_{*3}$ ,  $\xi_{*1}$ ,  $\xi_{*2}$ , принадлежащие промежуткам:  $(-\infty; -\mu)$ ,  $(-\mu; 1-\mu)$  и  $(1-\mu; +\infty)$  соответственно. Вблизи данной границы корень  $\xi_{*2}$  из промежутка  $(1-\mu; +\infty)$  принимает значение близкое к  $(1-\mu)$ .

## Глава 2

# Анализ устойчивости коллинеарных точек либрации в плоской круговой ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел

## 2.1. Гамильтониан уравнений возмущенного движения

В этой главе мы будем рассматривать плоскую круговую фотогравитационную задачу трёх тел, т.е. частный случай движения, когда оба массивных тела движутся по круговым орбитам и все три тела  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P$  находятся в одной плоскости. В этом случае  $\zeta = 0$ ,  $p_\zeta = 0$  и  $e = 0$ , а уравнения движения тела  $P$  имеют вид

$$\frac{d\xi}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_\eta}, \quad \frac{dp_\xi}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \frac{dp_\eta}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad (2.1)$$

где

$$H = \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi - \frac{Q_1(1-\mu)}{r_1} - \frac{Q_2\mu}{r_2}. \quad (2.2)$$

Величины  $r_1$ ,  $r_2$  вычисляются по формулам

$$r_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2}, \quad r_2 = \sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2}. \quad (2.3)$$

Для решения задачи об устойчивости точки либрации необходимо исследовать движение в ее малой окрестности. С этой целью в окрестности частного решения (1.15) введем локальные координаты (возмущения)  $q_i$ ,  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ) по формулам

$$\xi = \xi_* + q_1, \quad \eta = q_2, \quad p_\xi = p_1, \quad p_\eta = \xi_* + p_2,$$

где  $\xi_*$  – корень уравнения (1.16), однозначно определяющий точку либрации.

Разложим гамильтониан (2.2) в ряд по степеням  $q_i, p_i$

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (2.4)$$

Постоянный член в разложении (2.4) опущен, а необходимые для дальнейшего анализа устойчивости члены этого разложения имеют вид

$$H_2 = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - a q_1^2 + \frac{a}{2} q_2^2, \quad (2.5)$$

$$H_3 = b q_1^3 - \frac{3b}{2} q_1 q_2^2, \quad (2.6)$$

$$H_4 = -c q_1^4 + 3c q_1^2 q_2^2 - \frac{3c}{8} q_2^4. \quad (2.7)$$

Величины  $a, b, c$  входящие в выражения для коэффициентов форм (2.5)-(2.7) вычисляются по формулам

$$a = \frac{Q_1(1-\mu)}{|\xi_* + \mu|^3} + \frac{Q_2\mu}{|\xi_* + \mu - 1|^3}, \quad (2.8)$$

$$b = \frac{Q_1(1-\mu)}{|\xi_* + \mu|(\xi_* + \mu)^3} - \frac{Q_2\mu}{|\xi_* + \mu - 1|(\xi_* + \mu - 1)^3}, \quad (2.9)$$

$$c = \frac{Q_1(1-\mu)}{|\xi_* + \mu|^5} + \frac{Q_2\mu}{|\xi_* + \mu - 1|^5}. \quad (2.10)$$

В переменных  $q_i, p_i$  задача об устойчивости точки либрации сводится к задаче об устойчивости положения равновесия  $q_i = p_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) канонической системы с гамильтонианом (2.4).

Далее будет представлен строгий анализ устойчивости тривиального решения системы с гамильтонианом (2.4) и сделаны выводы об устойчивости коллинеарных точек либрации по Ляпунову. Основные результаты данной главы опубликованы в [63–65].



## 2.2. Линейный анализ устойчивости коллинеарных точек либрации

Исследование устойчивости коллинеарных точек либрации начнем с анализа линейной системы с гамильтонианом  $H_2$ . Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\lambda^4 + (2 - a)\lambda^2 - 2a^2 + a + 1 = 0. \quad (2.11)$$

Величина  $a$  в (2.11) определяется выражением (2.8), которое содержит все три параметра задачи  $\mu, Q_1, Q_2$  и корень  $\xi_*$  уравнения (1.16), т.е. безразмерную координату исследуемой на устойчивость точки либрации.

При  $a \notin [-\frac{1}{2}; 0] \cup [\frac{8}{9}; 1]$  уравнение (2.11) имеет корни с ненулевой действительной частью. В этом случае положение равновесия линейной системы неустойчиво. Отсюда на основании теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению [25] следует неустойчивость положения равновесия и в полной нелинейной системе с гамильтонианом (2.4). Последнее означает неустойчивость по Ляпунову соответствующей коллинеарной точки либрации.

Если же  $a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{8}{9}; 1)$ , то уравнение (2.11) имеет две пары чисто мнимых корней и линейная система устойчива, т.е. соответствующая коллинеарная точка либрации устойчива в линейном приближении.

Исследуем сначала вопрос об устойчивости точки  $L_3$ , координата которой по оси  $\xi$  задается корнем  $\xi_{*3}$  уравнения (1.16), принадлежащем промежутку  $(-\infty; -\mu)$ . Как было показано в параграфе 1.3, при  $Q_1 < 0$  уравнение (1.16) на указанном интервале не имеет корней, а при  $0 < Q_1 \leq 1$  – имеет единственный корень.

Покажем сначала, что условие  $Q_2 \leq 1$  накладывает ограничение на область возможных значений корня  $\xi_{*3}$  уравнения (1.16). А именно, при выполнении данного условия значение корня  $\xi_{*3}$  принадлежит некоторому конечному

интервалу. Действительно, в силу уравнения (1.18) выполняется равенство

$$\xi_{*3} + \frac{Q_1(1 - \mu)}{(\xi_{*3} + \mu)^2} + \frac{Q_2\mu}{(\xi_{*3} + \mu - 1)^2} = 0. \quad (2.12)$$

Выразим  $Q_2$  из равенства (2.12)

$$Q_2 = \frac{(Q_1(\mu - 1) - \xi_{*3}(\xi_{*3} + \mu)^2)(\xi_{*3} + \mu - 1)^2}{\mu(\xi_{*3} + \mu)^2}. \quad (2.13)$$

Получим достаточное условие, при котором правая часть (2.13) превосходит единицу. С этой целью рассмотрим выражение

$$Q_2 - 1 = \frac{(Q_1(\mu - 1) - \xi_{*3}(\xi_{*3} + \mu)^2)(\xi_{*3} + \mu - 1)^2 - \mu(\xi_{*3} + \mu)^2}{\mu(\xi_{*3} + \mu)^2}. \quad (2.14)$$

Поскольку  $(\xi_{*3} + \mu - 1)^2 > 1$ , то учитывая (2.14) имеем следующее неравенство

$$Q_2 - 1 > \frac{(Q_1(\mu - 1) - \xi_{*3}(\xi_{*3} + \mu)^2)(\xi_{*3} + \mu - 1)^2 - \mu(\xi_{*3} + \mu)^2(\xi_{*3} + \mu - 1)^2}{\mu(\xi_{*3} + \mu)^2}, \quad (2.15)$$

которое после несложных преобразований можно переписать в виде

$$Q_2 - 1 > \frac{(Q_1(\mu - 1) - (\xi_{*3} + \mu)^3)(\xi_{*3} + \mu - 1)^2}{\mu(\xi_{*3} + \mu)^2}. \quad (2.16)$$

Если

$$Q_1(\mu - 1) - (\xi_{*3} + \mu)^3 > 0, \quad (2.17)$$

то правая часть неравенства (2.16) положительна. Поэтому при выполнении условия (2.17) правая часть (2.13) превосходит единицу, т.е. будет выполнено неравенство  $Q_2 > 1$ . Рассуждая от противного, приходим к выводу, что при выполнении условия  $Q_2 \leq 1$  имеет место неравенство противоположное неравенству (2.17), т.е. неравенство

$$Q_1(\mu - 1) - (\xi_{*3} + \mu)^3 \leq 0, \quad (2.18)$$

которое можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$\xi_{*3} \geq \sqrt[3]{Q_1(\mu - 1)} - \mu. \quad (2.19)$$

Следовательно, корень  $\xi_{*3}$  уравнения (2.12) принадлежит промежутку  $[\sqrt[3]{Q_1(\mu-1)} - \mu; -\mu)$ .

Заметим теперь, что для точки либрации  $L_3$  величина  $a$ , входящая в выражения для коэффициентов характеристического уравнения (2.11), может быть представлена в виде

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{dF_3}{d\xi}(\xi_{*3}) - 1 \right), \quad (2.20)$$

где функция  $F_3(\xi)$  имеет вид (1.17).

Учитывая (2.18) и выражение (1.20), имеем следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \frac{dF_3}{d\xi}(\xi_{*3}) &= 1 + \frac{2Q_1(1-\mu)}{(\xi_{*3} + \mu)^3(\xi_{*3} + \mu - 1)} + \frac{2\xi_{*3}}{\xi_{*3} + \mu - 1} \geq \\ &\geq 1 + \frac{-2(\xi_{*3} + \mu)^3}{(\xi_{*3} + \mu)^3(\xi_{*3} + \mu - 1)} + \frac{2\xi_{*3}}{\xi_{*3} + \mu - 1} = 1 + \frac{2(\xi_{*3} - 1)}{\xi_{*3} + \mu - 1} > 3. \end{aligned}$$

Таким образом, производная  $\frac{dF_3}{d\xi}$ , вычисленная в точке  $\xi = \xi_{*3}$ , удовлетворяет неравенству  $\frac{dF_3}{d\xi}(\xi_{*3}) > 3$ . Из последнего неравенства с учётом выражения (2.20), имеем  $a > 1$ . Что и доказывает неустойчивость по Ляпунову коллинеарной точки либрации  $L_3$ .

Аналогично исследуется вопрос об устойчивости коллинеарной точки либрации  $L_2$ . Как было показано в параграфе 1.4, при  $Q_2 < 0$  не существует коллинеарной точки либрации  $L_2$ , т.к. уравнение (1.16) не имеет корней на промежутке  $(1 - \mu; +\infty)$ . При  $0 < Q_2 \leq 1$  существует единственная коллинеарная точка либрации  $L_2$ , безразмерная координата  $\xi_{*2}$  которой принадлежит промежутку  $(1 - \mu; +\infty)$  и удовлетворяет уравнению

$$\xi_{*2} - \frac{Q_1(1-\mu)}{(\xi_{*2} + \mu)^2} - \frac{Q_2\mu}{(\xi_{*2} + \mu - 1)^2} = 0. \quad (2.21)$$

В силу неравенства  $Q_1 \leq 1$ , область возможных значений  $\xi_{*2}$  ограничена некоторым конечным интервалом. Оценим этот интервал. С этой целью выра-

зим  $Q_1$  из равенства (2.21)

$$Q_1 = \frac{(\xi_{*2}(\xi_{*2} + \mu - 1)^2 - Q_2\mu)(\xi_{*2} + \mu)^2}{(1 - \mu)(\xi_{*2} + \mu - 1)^2}. \quad (2.22)$$

Найдём теперь достаточное условие, при котором правая часть (2.22) превосходит единицу. Для этого рассмотрим выражение

$$Q_1 - 1 = \frac{(\xi_{*2}(\xi_{*2} + \mu - 1)^2 - Q_2\mu)(\xi_{*2} + \mu)^2 - (1 - \mu)(\xi_{*2} + \mu - 1)^2}{(1 - \mu)(\xi_{*2} + \mu - 1)^2}. \quad (2.23)$$

Поскольку  $\xi_{*2} + \mu > 1$ , то из выражения (2.23) следует неравенство

$$Q_1 - 1 > \frac{(\xi_{*2}(\xi_{*2} + \mu - 1)^2 - Q_2\mu)(\xi_{*2} + \mu)^2 - (1 - \mu)(\xi_{*2} + \mu - 1)^2(\xi_{*2} + \mu)^2}{(1 - \mu)(\xi_{*2} + \mu - 1)^2}, \quad (2.24)$$

которое можно переписать в виде

$$Q_1 - 1 > \frac{((\xi_{*2} + \mu - 1)^3 - Q_2\mu)(\xi_{*2} + \mu)^2}{(1 - \mu)(\xi_{*2} + \mu - 1)^2}. \quad (2.25)$$

При выполнении условия

$$(\xi_{*2} + \mu - 1)^3 - Q_2\mu > 0 \quad (2.26)$$

правая часть неравенства (2.25) положительна, а это означает, что при выполнении условия (2.26) правая часть (2.22) превосходит единицу, т.е. будет выполнено неравенство  $Q_1 > 1$ . Рассуждая от противного, приходим к выводу, что при выполнении условия  $Q_1 \leq 1$  имеет место неравенство противоположное неравенству (2.26), т.е.

$$(\xi_{*2} + \mu - 1)^3 - Q_2\mu \leq 0, \quad (2.27)$$

которое можно переписать в следующем эквивалентном виде

$$\xi_{*2} \leq \sqrt[3]{Q_2\mu} + 1 - \mu. \quad (2.28)$$

Следовательно, корень  $\xi_{*2}$  уравнения (2.21) принадлежит промежутку  $(1 - \mu; \sqrt[3]{Q_1\mu} + 1 - \mu]$ .

Для точки либрации  $L_2$  величина  $a$ , может быть представлена в виде

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{dF_2}{d\xi}(\xi_{*2}) - 1 \right), \quad (2.29)$$

где функция  $F_2(\xi)$  имеет вид (1.22).

Учитывая (2.27) и выражение (1.25), имеем следующую цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \frac{dF_2}{d\xi}(\xi_{*2}) &= 1 + \frac{2\xi_{*2}}{\xi_{*2} + \mu} + \frac{2Q_2\mu}{(\xi_{*2} + \mu)(\xi_{*2} + \mu - 1)^3} \geq \\ &\geq 1 + \frac{2\xi_{*2}}{\xi_{*2} + \mu} + \frac{2(\xi_{*2} + \mu - 1)^3}{(\xi_{*2} + \mu)(\xi_{*2} + \mu - 1)^3} = 1 + \frac{2(\xi_{*2} + 1)}{\xi_{*2} + \mu} > 3. \end{aligned}$$

Таким образом, производная  $\frac{dF_2}{d\xi}$ , вычисленная в точке  $\xi = \xi_{*2}$ , удовлетворяет неравенству  $\frac{dF_2}{d\xi}(\xi_{*2}) > 3$ . Из последнего неравенства с учётом выражения (2.29), имеем  $a > 1$ . Что и доказывает неустойчивость по Ляпунову коллинеарной точки либрации  $L_2$ .

Исследуем теперь вопрос об устойчивости коллинеарных точек либрации типа  $L_1$ , безразмерные координаты  $\xi$  которых определяются как решения уравнения (1.16) на интервале  $(-\mu; 1 - \mu)$ . Для этих точек либрации величина  $a$ , может быть представлена в виде

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{dF_1}{d\xi}(\xi_*) - 1 \right), \quad (2.30)$$

где функция  $F_1(\xi)$  имеет вид (1.26). В главе 1 было показано, что производная функции  $F_1(\xi)$  в точках  $\xi_{*1}^{(2)}$  и  $\xi_{*1}^{(3)}$  отрицательна. Следовательно, величина  $a$ , вычисленная для коллинеарных точек либрации  $L_1^{(2)}$  и  $L_1^{(3)}$ , удовлетворяет неравенству  $a < -\frac{1}{2}$ . Поэтому указанные коллинеарные точки либрации неустойчивы по Ляпунову.

Лишь для коллинеарной точки либрации  $L_1$  при определенных значениях параметров выполняется условие  $a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{8}{9}; 1)$ , при котором уравнение

(2.11) имеет две пары чисто мнимых корней:  $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ , где

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \left(1 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{9a^2 - 8a}\right)^{1/2}, \\ \omega_2 &= \left(1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{9a^2 - 8a}\right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

В этом случае коллинеарная точка либрации  $L_1$  устойчива в линейном приближении [44]. Условие  $a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{8}{9}; 1)$  определяет две области в трёхмерном пространстве параметров  $\mu, Q_1, Q_2$ . Границы этих областей задаются уравнениями  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $a = 0$  и  $a = \frac{8}{9}$ ,  $a = 1$ , где  $a$  определяется выражением (2.8). Совместно с уравнением (1.16) каждое из этих уравнений можно однозначно разрешить относительно  $Q_1$  и  $Q_2$ . В результате на границах областей устойчивости в линейном приближении имеем следующие зависимости  $Q_1$  и  $Q_2$  от  $\mu$  и  $\xi_*$ :

$$\text{при } a = -\frac{1}{2}: \quad Q_1 = \frac{(3\xi_* + \mu - 1)(\xi_* + \mu)^3}{2(1 - \mu)}, \quad Q_2 = \frac{(3\xi_* + \mu)(\xi_* + \mu - 1)^3}{2\mu};\tag{2.32}$$

$$\text{при } a = 0: \quad Q_1 = \frac{\xi_*(\xi_* + \mu)^3}{1 - \mu}, \quad Q_2 = \frac{\xi_*(\xi_* + \mu - 1)^3}{2\mu};\tag{2.33}$$

$$\text{при } a = \frac{8}{9}: \quad Q_1 = \frac{(\xi_* - 8\mu + 8)(\xi_* + \mu)^3}{9(1 - \mu)}, \quad Q_2 = \frac{(\xi_* - 8\mu)(\xi_* + \mu - 1)^3}{9\mu};\tag{2.34}$$

$$\text{при } a = 1: \quad Q_1 = (\xi_* + \mu)^3, \quad Q_2 = -(\xi_* + \mu - 1)^3.\tag{2.35}$$

Соотношения (2.32)-(2.35) задают уравнения границ областей устойчивости в параметрической форме, где параметры  $\mu$  и  $\xi_*$  принимают значения из интервалов  $(0; 1)$  и  $(-\mu; 1 - \mu)$  соответственно.

Заметим, что граница области устойчивости, заданная равенством  $a = -\frac{1}{2}$ , совпадает с бифуркационной поверхностью (1.30).

На Рис. 2.1 представлено сечение областей устойчивости в пространстве па-

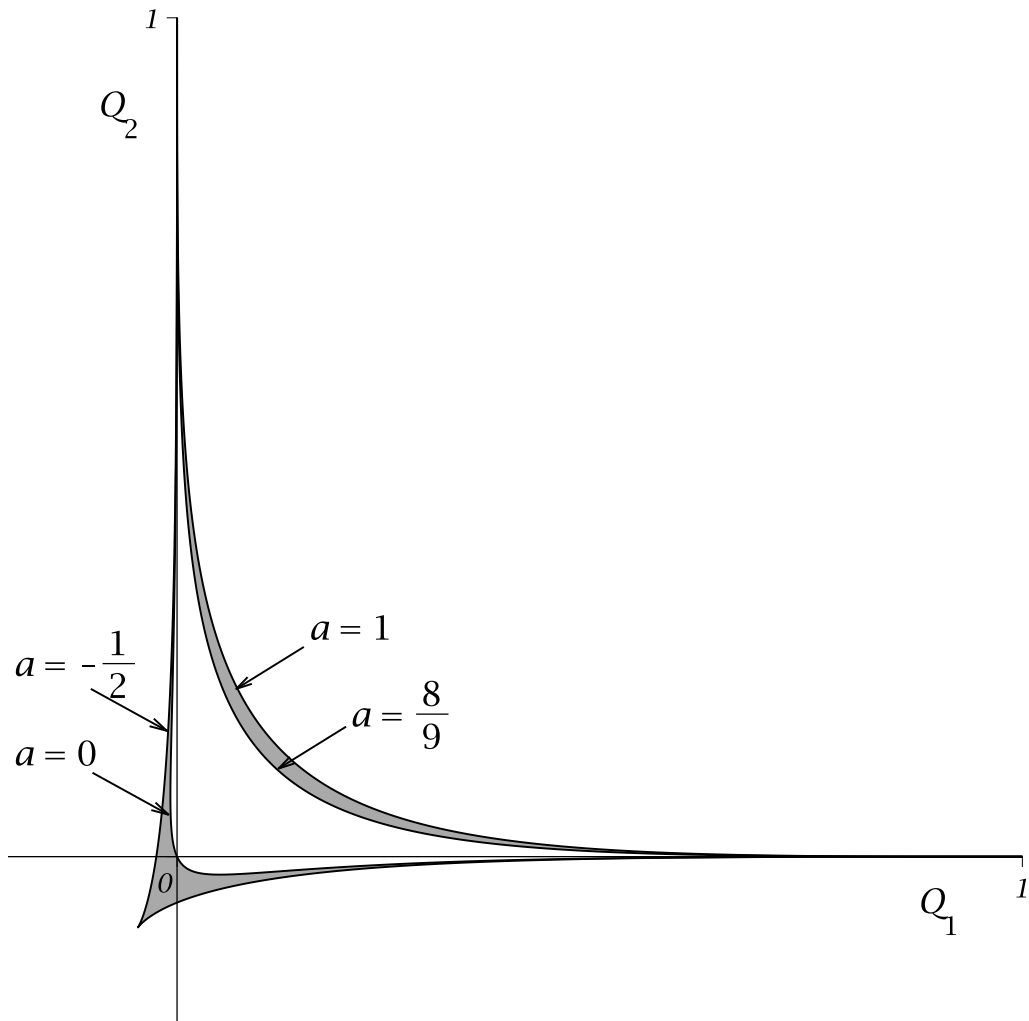
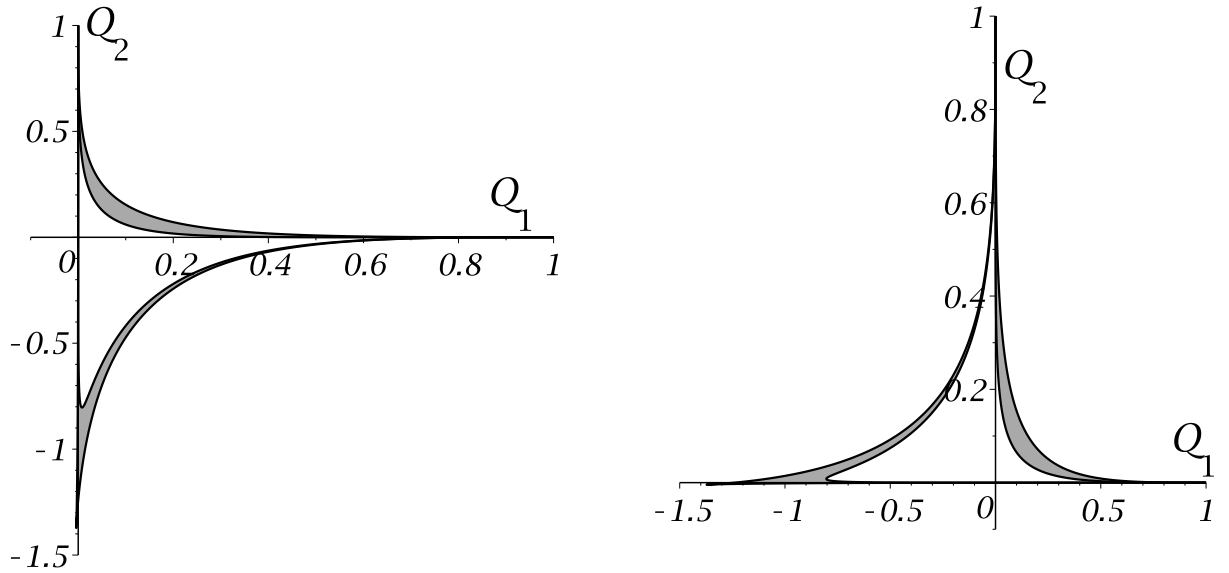


Рис. 2.1: Область устойчивости при  $\mu = 0.45$ .

раметров задачи плоскостью  $\mu = 0.45$ . В данном сечении области устойчивости в линейном приближении обозначены серым цветом. Эти области примыкают к точкам  $(0, 1)$  и  $(1, 0)$  плоскости параметров  $Q_1, Q_2$ . Верхняя область соответствует значениям коэффициента  $a$  из интервала  $(\frac{8}{9}; 1)$ , а нижняя – значениям  $a$  из интервала  $(-\frac{1}{2}; 0)$ . При приближении значений параметра  $\mu$  к нулю указанные области вытягиваются вниз вдоль отрицательного направления оси  $Q_2$ , а при приближении  $\mu$  к единице – влево вдоль отрицательного направления оси  $Q_1$  (см. Рис. 2.2).

Устойчивость коллинеарной точки либрации  $L_1$  в линейном приближении не означает ее устойчивости в полной системе с гамильтонианом (2.4), поэто-

(a) Области устойчивости при  $\mu = 0.1$ (b) Области устойчивости при  $\mu = 0.9$ Рис. 2.2: Области устойчивости вблизи граничных значений  $\mu$ .

му для получения выводов об устойчивости по Ляпунову, необходимо провести нелинейный анализ, принимая во внимание члены выше второй степени в разложении гамильтониана (2.4).

### 2.3. Нелинейный анализ устойчивости в нерезонансном случае

В дальнейшем предполагается, что  $a \in [-\frac{1}{2}; 0] \cup [\frac{8}{9}; 1]$ , т.е. будем рассматривать случай, когда значения параметров задачи принадлежат областям устойчивости в линейном приближении или их границам. Строгие выводы об устойчивости точки либрации  $L_1$  по Ляпунову в этом случае могут быть сделаны на основе достаточных условий устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, которые были получены методами КАМ-теории [2, 4, 29, 99]. Для проверки выполнения этих достаточных условий необходимо сначала выполнить нормализацию гамильтониана (2.4), т.е. построить каноническую замену переменных, которая приводит гамильтониан к наиболее



удобной для исследования устойчивости, так называемой нормальной форме.

В нерезонансном и резонансных случаях нормальная форма имеет различный вид. Поэтому резонансные случаи следует рассматривать отдельно от нерезонансного. При исследовании устойчивости наиболее существенную роль играют резонансы до четвертого порядка включительно. Резонансы первого ( $\omega_2 = 0$ ) и второго ( $\omega_1 = \omega_2$ ) порядков имеют место на границах областей устойчивости в линейном приближении. Они будут рассмотрены в параграфах 2.5 и 2.6 соответственно. Резонанс третьего порядка ( $\omega_1 = 2\omega_2$ ) имеет место при  $a = a_3^\pm$ , где  $a_3^- = \frac{41-5\sqrt{145}}{108}$ ,  $a_3^+ = \frac{41+5\sqrt{145}}{108}$ , а резонанс четвертого порядка ( $\omega_1 = 3\omega_2$ ) – при  $a = a_4^\pm$ , где  $a_4^- = \frac{68-60\sqrt{5}}{209}$ ,  $a_4^+ = \frac{68+60\sqrt{5}}{209}$ . Случаи резонансов третьего и четвертого порядков исследуются в параграфе 2.4.

В данном параграфе будем считать, что в системе с функцией Гамильтона (2.4) отсутствуют резонансы до четвертого порядка включительно, т.е. система устойчива в линейном приближении и выполняются соотношения  $a \neq a_3^\pm$  и  $a \neq a_4^\pm$ .

Нормализацию квадратичной части гамильтониана можно выполнить при помощи линейной канонической замены переменных  $q_i, p_i \rightarrow x_i, y_i$ , построенной на основании метода, описанного в [29, 31]. Эта замена имеет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, & q_2 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \\ p_1 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2, & p_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ji} &= \frac{\kappa_i(\delta_j\omega_i^2 - a + 1)}{\omega_i}, & \kappa_i &= \left( \frac{\omega_i}{\omega_i^4 - 2a\omega_i^2 + a^2 + 2\omega_i^2 + 2a - 3} \right)^{1/2}, \\ b_{1i} &= 2\delta_i\kappa_i, & b_{2i} &= \delta_i\kappa_i(\omega_i^2 - a + 1), & \delta_1 &= 1, & \delta_2 &= -1, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

В переменных  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2$ ) квадратичная часть функции Гамильтона принимает следующий вид

$$H_2 = \frac{1}{2}\omega_1(x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2(x_2^2 + y_2^2). \quad (2.37)$$

После нормализации квадратичной части гамильтониана можно построить каноническую близкую к тождественной замену переменных  $x_i, y_i \rightarrow u_i, v_i$  ( $i = 1, 2$ ), приводящую гамильтониан задачи к нормальной форме до членов некоторой конечной степени.

Производящая функция такой замены переменных имеет следующий вид

$$S = x_i v_i + S^{(3)}(x_i, v_i) \quad (i = 1, 2), \quad (2.38)$$

где  $S^{(3)}(x_i, v_i)$  – сходящийся степенной ряд, начинающийся с членов не ниже третьей степени. Для вычисления коэффициентов производящей функции (2.38) и коэффициентов нормальной формы гамильтониана может быть использован классический метод Биркгофа [68] или метод Депри-Хори [29, 74].

В нерезонансном случае гамильтониан задачи, нормализованный до членов четвертого порядка, имеет вид

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right), \quad (2.39)$$

где канонические переменные  $r_i, \varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ) введены по формулам  $u_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, v_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i$ .

Если  $\Delta = c_{02}\omega_1^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{20}\omega_2^2 \neq 0$ , то согласно теореме Арнольда-Мозера [2, 4, 99] положение равновесия системы с гамильтонианом (2.39) устойчиво по Ляпунову.

Используя метод Депри-Хори, были получены коэффициенты  $c_{02}, c_{11}, c_{20}$  и найдено следующее явное выражение для величины  $\Delta$

$$\Delta(a, b, c) = -\frac{3\delta}{16a(9a - 8)(54a^2 - 41a - 9)(a - 1)(2a + 1)^2}, \quad (2.40)$$

где

$$\begin{aligned} \delta = & 11664a^7c - 7776a^6b^2 - 14688a^6c + 6336a^5b^2 - 8856a^5c + \\ & + 12110a^4b^2 + 17196a^4c - 19009a^3b^2 - 6483a^3c + 16439a^2b^2 - \\ & - 3189a^2c - 5256ab^2 + 3384ac - 2520b^2 + 648c. \end{aligned}$$

Напомним, что величины  $a, b, c$  определяются соответственно выражениями (2.8), (2.9), (2.10), которые содержат все три параметра задачи  $\mu, Q_1, Q_2$  и корень  $\xi_*$  уравнения (1.16), т.е. безразмерную координату точки  $L_1$ .

Таким образом, для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам  $a \neq a_3^\pm, a \neq a_4^\pm$  и  $\Delta \neq 0$  точка либрации  $L_1$  устойчива по Ляпунову.

При  $\Delta = 0$  имеет место случай вырождения, когда вопрос об устойчивости не может быть решен с учетом членов не выше четвертого порядка в разложении гамильтониана (2.4). Для исследования устойчивости в случае вырождения необходимо учитывать члены не ниже шестого порядка. Равенство  $\Delta = 0$  определяет двумерные поверхности вырождения в областях устойчивости в линейном приближении трёхмерного пространства параметров задачи. На Рис. 2.3 для  $Q_i \leq 0.4$  ( $i = 1, 2$ ) изображены кривые вырождения, полученные сечением поверхности вырождения плоскостью  $\mu = 0.45$ .

Задача об устойчивости точки либрации  $L_1$  для значений параметров, отвечающих поверхностям вырождения, в данной работе не исследовалась.

## 2.4. Анализ устойчивости при резонансах третьего и четвёртого порядков

В резонансных случаях нормальная форма гамильтониана содержит дополнительные резонансные члены. В данном параграфе рассматриваются случаи резонансов третьего и четвёртого порядков. В трёхмерном пространстве параметров  $\mu, Q_1, Q_2$  этим резонансам соответствуют двумерные резонансные поверхности, задаваемые уравнениями  $a = a_3^\pm, a = a_4^\pm$  соответственно, где  $a$  определяется формулой (2.8).

Решая эти уравнения совместно с уравнением (1.16) относительно  $Q_1, Q_2$ ,

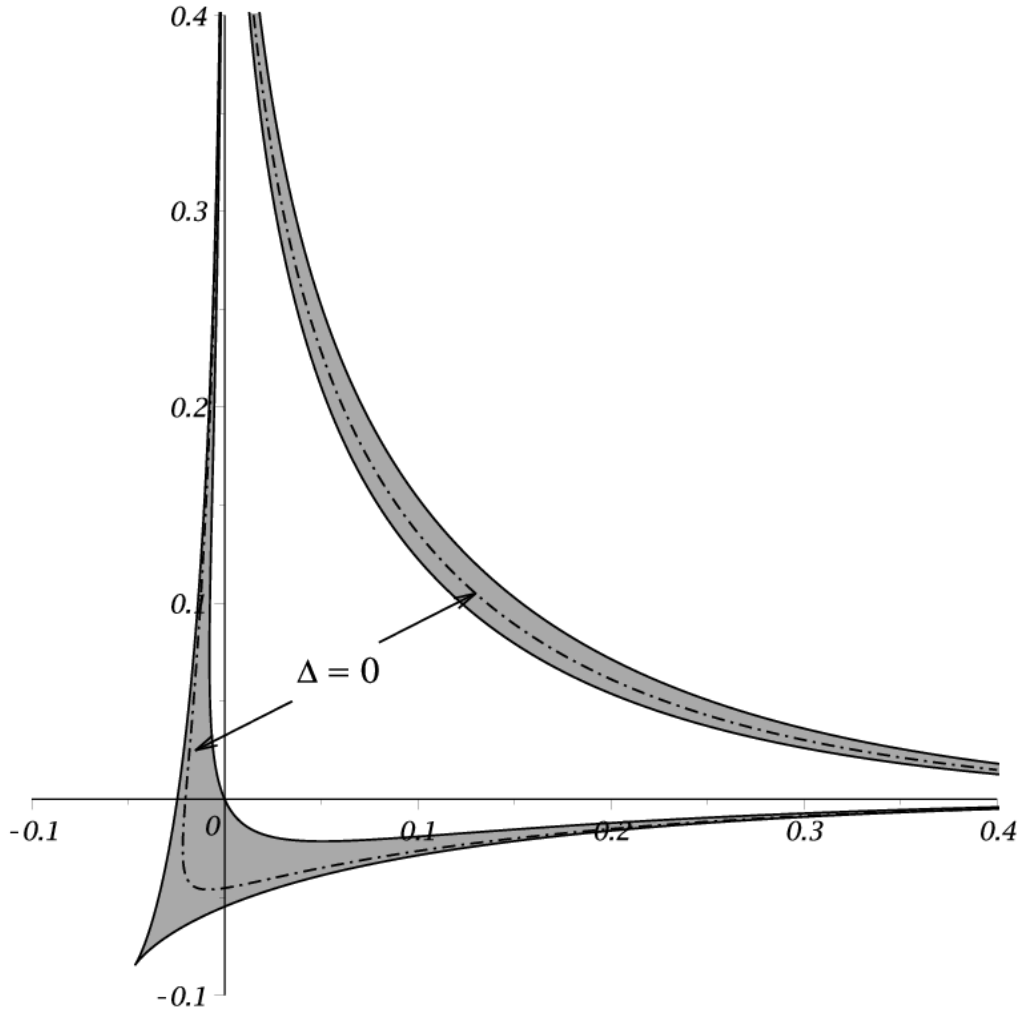


Рис. 2.3: Кривая вырождения (для  $\mu = 0.45$ ).

имеем

$$Q_1 = -\frac{(\xi_* + \mu)^3 (a_r \mu + a_r \xi_* - a_r - \xi_*)}{1 - \mu}, \quad Q_2 = -\frac{(\xi_* + \mu - 1)^3 (a_r \mu + a_r \xi_* - \xi_*)}{\mu}, \quad (2.41)$$

где величина  $a_r$  в (2.41) принимает одно из резонансных значений  $a = a_3^\pm$  или  $a = a_4^\pm$ , отвечающих резонансу третьего или четвертого порядка соответственно.

Соотношения (2.41) представляют собой параметрические уравнения резонансных поверхностей. Параметрами здесь являются  $\mu \in (0; 1)$  и  $\xi_* \in (-\mu; 1 - \mu)$ , причем, как и ранее, параметр  $\xi_*$  следует интерпретировать как безразмерную координату точки либрации  $L_1$  (корень уравнения (1.16)).

Резонансные поверхности лежат внутри областей устойчивости в линейном

приближении. На Рис. 2.4 для  $Q_i \leq 0.4$  ( $i = 1, 2$ ) изображены резонансные кривые, полученные пересечением резонансных поверхностей с плоскостью  $\mu = 0.45$ .

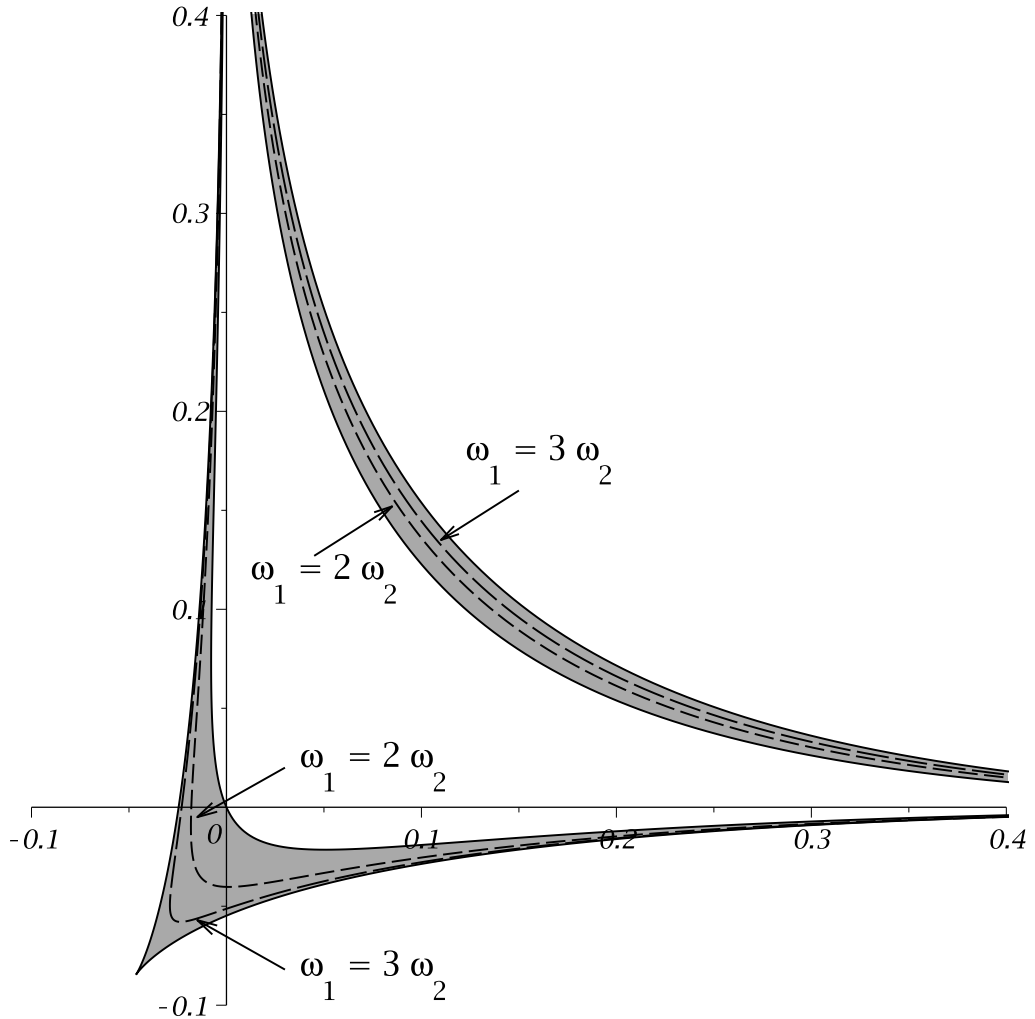


Рис. 2.4: Резонансные кривые (для  $\mu = 0.45$ ).

Сначала рассмотрим резонанс третьего порядка  $\omega_1 = 2\omega_2$ , т.е. положим  $a = a_3^\pm$ . В этом случае нормализующая замена канонических переменных приводит функцию Гамильтона к следующей нормальной форме [29]

$$H = 2\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 - 2\sqrt{2}k_{12}r_2\sqrt{r_1}\sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^2). \quad (2.42)$$

Значение коэффициента  $k_{12}$ , соответствующее значению  $a = a_3^+$ , обозначим через  $k_{12}^+$ , а значение коэффициента  $k_{12}$ , соответствующее значению  $a = a_3^-$ ,

– через  $k_{12}^-$ . Величины  $k_{12}^+$  и  $k_{12}^-$ , полученные с помощью метода Депри-Хори, имеют вид

$$k_{12}^+ = \frac{81\sqrt{6}(61\sqrt{145} - 731)(105 - 3\sqrt{145})^{1/4}}{2(8360 - 640\sqrt{145})(475 - 29\sqrt{145})^{1/2}}b,$$

$$k_{12}^- = -\frac{81\sqrt{6}(61\sqrt{145} + 731)(105 + 3\sqrt{145})^{1/4}}{2(8360 + 640\sqrt{145})(475 + 29\sqrt{145})^{1/2}}b.$$

Если коэффициент  $k_{12} \neq 0$ , то согласно теореме А.П. Маркеева [27, 29] имеет место неустойчивость положения равновесия системы с гамильтонианом (2.42), что означает и неустойчивость коллинеарной точки  $L_1$ . Особый случай  $k_{12} = 0$  возможен только при  $b = 0$ . В этом случае нормальная форма гамильтониана не содержит резонансную часть до членов четвёртого порядка включительно. При  $k_{12} = 0$  нормализованный гамильтониан имеет вид (2.39), поэтому для решения вопроса устойчивости может быть применена упомянутая ранее теорема Арнольда-Мозера, на основании которой устойчивость имеет место, если  $\Delta \neq 0$ . Подставляя  $a = a_3^\pm$  и  $b = 0$  в (2.40), получаем:

$$\begin{aligned} \text{при } a = a_3^+, \quad \Delta \left( \frac{41 + 5\sqrt{145}}{108}, 0, c \right) &= \frac{-3}{640}(617\sqrt{145} + 10207)c; \\ \text{при } a = a_3^-, \quad \Delta \left( \frac{41 - 5\sqrt{145}}{108}, 0, c \right) &= \frac{3}{640}(617\sqrt{145} - 10207)c. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Особый случай имеет место на кривой, которая лежит на резонансной поверхности в трёхмерном пространстве параметров  $\mu$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ . Данная кривая задается уравнениям  $a = a_3^\pm$  и  $b = 0$ , где  $a$  и  $b$  определены формулами (2.8) и (2.9). Уравнения данной кривой можно также представить в следующей параметрической форме

$$\mu = \frac{\xi_* + a_r - 2a_r\xi_*}{2a_r}, \quad Q_1 = \frac{(a_r + \xi_*)^4}{8a_r^2(2a_r\xi_* + a_r - \xi_*)}, \quad Q_2 = \frac{(a_r - \xi_*)^4}{8a_r^2(\xi_* + a_r - 2a_r\xi_*)}, \quad (2.44)$$

где параметром  $\xi_*$  является безразмерная координата точки либрации  $L_1$ , а величина  $a_r$  принимает одно из двух значений  $a_3^-$  или  $a_3^+$ , отвечающих резонансу третьего порядка.

Исключая из (2.44) параметр  $\xi_*$  уравнения этой кривой можно записать в следующей наиболее простой форме

$$Q_1 = \frac{(a_r - \mu)^4 a_r}{(2a_r - 1)^4 (1 - \mu)}, \quad Q_2 = \frac{(a_r + \mu - 1)^4 a_r}{(2a_r - 1)^4 \mu}. \quad (2.45)$$

Заметим еще, что в формулах (2.45) параметр  $\mu$  принимает значения из интервала  $(0; 1)$  при  $a_r = a_3^-$  и из интервала  $(1 - a_3^+; a_3^+)$  при  $a_r = a_3^+$ . Это нетрудно показать, принимая во внимание, что  $\xi_* \in (-\mu; 1 - \mu)$  и учитывая равенство

$$\xi_* = \frac{a_r (2\mu - 1)}{1 - 2a_r}, \quad (2.46)$$

которое следует из первого уравнения (2.44).

Подставляя (2.45) и (2.46) в (2.10), получаем выражение величины  $c$ , на кривой, заданной уравнениями (2.44)

$$c = \frac{(1 - 2a_r)^2 a_r}{(a_r + \mu - 1)(a_r - \mu)}. \quad (2.47)$$

Числитель выражения (2.47) очевидно не обращается в ноль. Кроме того, поскольку  $a_3^- < 0$ , а при  $a_r = a_3^+$  параметр  $\mu$  принимает значения из интервала  $(1 - a_3^+; a_3^+)$ , то и знаменатель выражения (2.47) также не обращается в ноль. Таким образом, величина  $c$ , заданная формулой (2.47), определена при всех допустимых значениях параметра  $\mu$  и не обращается в ноль. Поэтому, на основании формул (2.43), при  $a = a_3^\pm$  и  $b = 0$  величина  $\Delta$  отлична от нуля. Следовательно, в этом особом случае коллинеарная точка либрации  $L_1$  устойчива по Ляпунову.

Рассмотрим теперь резонанс четвертого порядка  $\omega_1 = 3\omega_2$ , т.е. положим  $a = a_4^\pm$ . В случае резонанса четвертого порядка нормальная форма гамильтониана имеет вид [29]

$$H = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \\ + B r_2 \sqrt{r_1 r_2} \sin(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right). \quad (2.48)$$

Согласно теореме А. П. Маркеева [27–29] условием устойчивости по Ляпунову системы с гамильтонианом (2.48) является неравенство

$$|3\sqrt{3}B| < |C|, \quad (2.49)$$

где  $C = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}$ . Если же это неравенство (2.49) выполнено с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость.

Обозначим через  $B^\pm$  и  $C^\pm$  выражения  $B$  и  $C$ , соответствующие значениям  $a = a_4^\pm$ . Эти выражения были вычислены с помощью метода Депри-Хори и имеют следующий явный вид.

$$\begin{aligned} C^\pm &= \frac{10372745 \pm 2818766\sqrt{5}}{36368720394160000} \left( 1883380163269b^2 \mp (305789811600\sqrt{5} \pm 1132825190175)c \right), \\ B^\pm &= \frac{(47 \pm 20\sqrt{5})^{1/2}(36929\sqrt{5} \mp 151550)}{618130040000} \left( (11390400\sqrt{5} \pm 19052675)c \mp 46359753b^2 \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Поскольку коэффициенты  $b$  и  $c$  в (2.50) вычисляются при значениях параметров  $\mu, Q_1, Q_2$ , соответствующих резонансу четвертого порядка, то имеют место соотношения (2.41). Таким образом, используя формулы (2.9), (2.10), (2.41) и (2.50), коэффициенты нормальной формы (2.48) можно записать через параметры  $\mu$  и  $\xi_*$  в следующем виде

$$\begin{aligned} C^\pm &= \frac{G^\pm}{560000 (\xi + \mu)^2 (\xi + \mu - 1)^2}, \\ B^\pm &= \frac{F^\pm}{40000 (\xi + \mu)^2 (\xi + \mu - 1)^2}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

где

$$\begin{aligned} G^\pm &= \left( 199758295 \mp 88566074\sqrt{5} \right) \xi^2 + \left( \left( 164139670 \mp 84824564\sqrt{5} \right) \mu \pm 42412282\sqrt{5} - \right. \\ &\quad \left. - 82069835 \right) \xi + \left( 265190980 \pm 85485724\sqrt{5} \right) \mu(\mu - 1) + 11012620 \mp 4348844\sqrt{5}, \\ F^\pm &= \left[ \left( 794050 \mp 354433\sqrt{5} \right) \xi^2 + \left( \left( 532900 \mp 241738\sqrt{5} \right) \mu \pm 120869\sqrt{5} - 266450 \right) \xi + \right. \\ &\quad \left. + \left( 193500 \pm 1908\sqrt{5} \right) \mu(\mu - 1) + 20500 \mp 8548\sqrt{5} \right] \sqrt{47 \pm 20\sqrt{5}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$



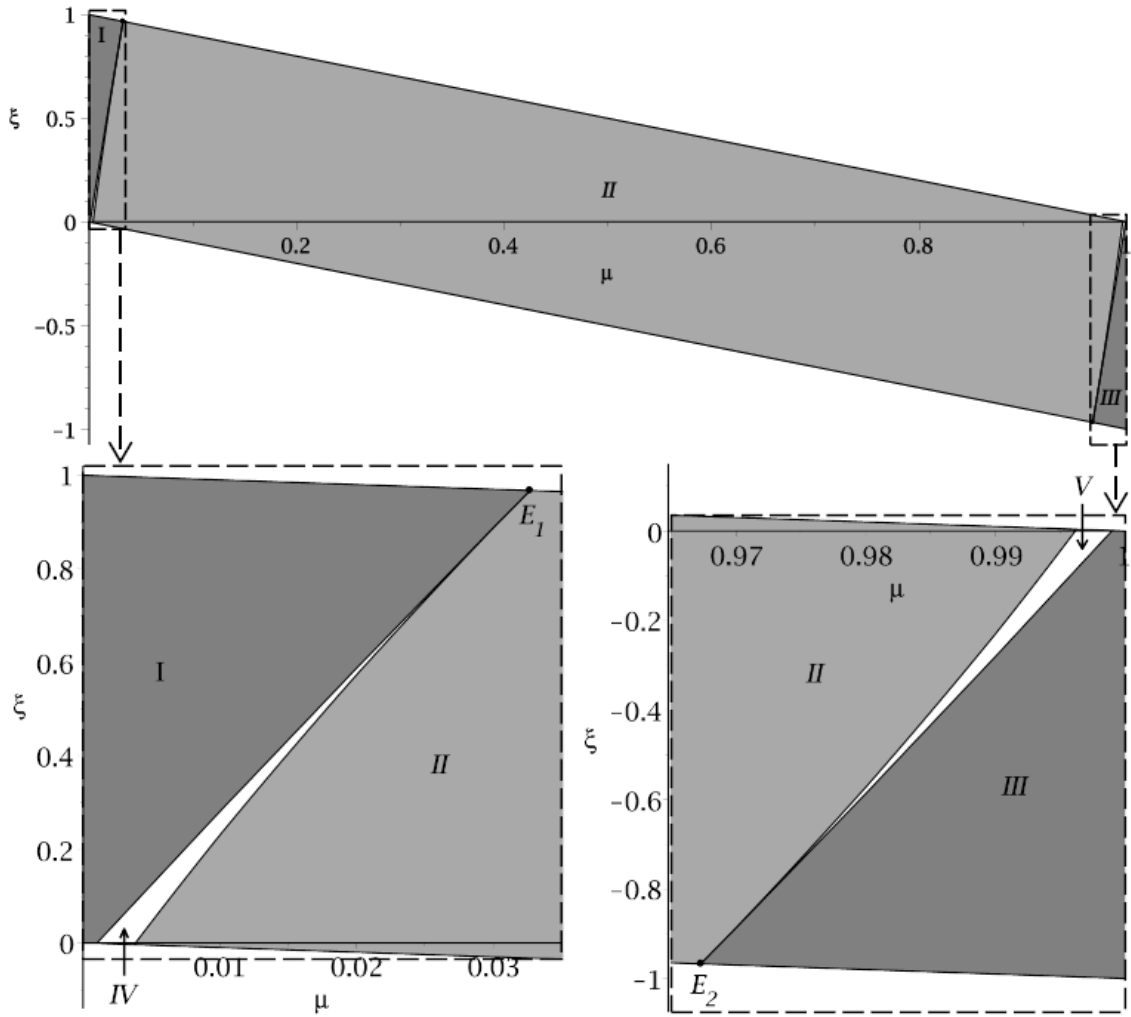


Рис. 2.5: Подобласти устойчивости и неустойчивости в случае  $a = a_4^+ = \frac{68+60\sqrt{5}}{209}$ .

Вычисления показали, что в случае  $a = a_4^-$  неравенство (2.49) всегда выполняется и, следовательно, точка либрации  $L_1$  устойчива по Ляпунову. В случае же  $a = a_4^+$  существуют три подобласти устойчивости по Ляпунову в области допустимых значений параметров  $\mu$  и  $\xi_*$ . Эти области разделены двумя узкими областями неустойчивости. На Рис. 2.5 подобласти устойчивости обозначены I, II и III. Границы областей неустойчивости находятся из соотношения  $|3\sqrt{3}B| = |C|$ . Действительно, подставляя (2.52) в приведенное выше соотношение, мы получаем следующее уравнение для этих границ

$$\left(G^+ - 42\sqrt{3}F^+\right) \left(G^+ + 42\sqrt{3}F^+\right) = 0. \quad (2.53)$$

Фактически, границы областей неустойчивости представляют со-

бой отрезки эллипсов, пересекающиеся в точках  $E_1 \left( \frac{141-60\sqrt{5}}{209}, \frac{68+60\sqrt{5}}{209} \right)$  и  $E_2 \left( \frac{68+60\sqrt{5}}{209}, -\frac{68+60\sqrt{5}}{209} \right)$ . Узкие подобласти неустойчивости, обозначенные IV, V и выделенные белым цветом, показаны в более крупном масштабе в нижней части Рис. 2.5.

## 2.5. Анализ устойчивости в случае резонанса первого порядка

Исследуем теперь задачу об устойчивости точки либрации  $L_1$  при значениях параметров, отвечающих границам областей устойчивости, т.е. в случаях, когда выполняется одно из равенств:  $a = 1$ ,  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $a = \frac{8}{9}$  или  $a = 0$ . Эти случаи соответствуют резонансам первого и второго порядков. Напомним, что они реализуются на двумерных поверхностях в трехмерном пространстве параметров  $\mu, Q_1, Q_2$ . Эти поверхности заданы параметрическими уравнениями (2.32)-(2.35).

Рассмотрим сначала случай  $a = 1$ . Частоты линейной системы с гамильтонианом (2.5) принимают в этом случае следующие значения:  $\omega_1 = 1$  и  $\omega_2 = 0$ . Одна из частот равна нулю, т.е. имеет место резонанс первого порядка. Нетрудно показать, что при данном резонансе матрица линейной системы не приводится к диагональному виду. Поэтому линейная система неустойчива. Однако, в данном граничном случае из неустойчивости в линейном приближении не следует неустойчивость в полной нелинейной системе с гамильтонианом (2.4). Для строгого решения вопроса об устойчивости здесь необходим нелинейный анализ, который будем проводить по той же схеме, что и ранее.

Выполним сначала линейную каноническую замену переменных

$$\begin{aligned} q_1 &= -x_1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}y_2, & q_2 &= \sqrt{3}x_2 - 2y_1, \\ p_1 &= -\sqrt{3}x_2 + y_1, & p_2 &= x_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}y_2, \end{aligned} \tag{2.54}$$

которая приводит квадратичную часть гамильтониана (2.4) к следующей нормальной форме

$$H_2 = \frac{1}{2} (x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2} y_2^2. \quad (2.55)$$

Замена переменных (2.54) была построена методом, описанным в [29, 31].

Нормализуем теперь часть гамильтониана, содержащую члены третьей и четвертой степени по каноническим переменным. Это можно сделать помощью канонической близкой к тождественной замены переменных  $x_i, y_i \rightarrow u_i, v_i$ , производящая функция которой ищется в виде (2.38). В случае рассматриваемого здесь резонанса первого порядка гамильтониан можно привести к следующей нормальной форме

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2) - \frac{1}{2} v_2^2 + k_3 u_2^3 + k_{12} (u_1^2 + v_1^2) u_2 + A u_2^4 + \\ & + B (u_1^2 + v_1^2) u_2^2 + C (u_1^2 + v_1^2)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.56)$$

Многоточием в (2.56) обозначены члены выше четвертой степени.

Если коэффициент  $k_3$  в гамильтониане (2.56) отличен от нуля, то в соответствии с теоремой А.Г. Сокольского [42] положение равновесия неустойчиво. Для вычисления коэффициентов гамильтониана (2.56) применялся метод Де-при-Хори. Оказалось, что в данной задаче коэффициенты  $k_3$  и  $k_{12}$  равны нулю. В этом случае выводы об устойчивости могут быть получены на основе анализа членов четвертой степени функции Гамильтона. Из теоремы А.Г. Сокольского [42] следует, что при выполнении неравенства  $A < 0$  положение равновесия  $x_i = y_i = 0$  системы с гамильтонианом (2.56) устойчиво по Ляпунову. В противном случае, если  $A > 0$ , то равновесие неустойчиво. Расчеты показали, что коэффициенты нормализованного гамильтониана (2.56) имеют следующий явный вид

$$A = \frac{27}{8} (b^2 - c), \quad B = 9(b^2 - c), \quad C = \frac{9}{8} (b^2 - c). \quad (2.57)$$

Чтобы проверить условие устойчивости, выразим коэффициент  $A$  через

параметры параметры  $\xi_*$  и  $\mu$ . С этой целью подставим (2.9), (2.10) в приведенное выше выражение для  $A$ , а затем в полученном таким образом выражении, используя соотношения (2.35), заменим  $Q_1$  и  $Q_2$  их выражениями через  $\xi_*$  и  $\mu$ . В результате имеем

$$A = \frac{27\mu(\mu - 1)}{8(\xi_* + \mu)^2(\xi_* + \mu - 1)^2}. \quad (2.58)$$

Поскольку  $\mu \in (0; 1)$ , то из (2.58) следует, что  $A < 0$ . Следовательно, положение равновесия системы с гамильтонианом (2.56) устойчиво по Ляпунову. Это означает, что при значениях параметров на границе области устойчивости, заданной уравнениями (2.35), коллинеарная точка либрации  $L_1$  устойчива по Ляпунову.

Рассмотрим теперь случай  $a = -\frac{1}{2}$ , когда частоты принимают значения  $\omega_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}$  и  $\omega_2 = 0$ . Здесь также имеет место резонанс первого порядка. Напомним, что граница (2.32) области устойчивости в этой случае совпадает с бифуркационной поверхностью.

Выполним линейную каноническую замену переменных

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{10^{3/4}2\sqrt{5}}{25}x_1 - \frac{\sqrt{15}}{5}x_2, & q_2 &= -\frac{10^{1/4}\sqrt{5}}{5}y_1 + \frac{4\sqrt{15}}{15}y_2, \\ p_1 &= -\frac{10^{1/4}\sqrt{5}}{5}y_1 - \frac{\sqrt{15}}{15}y_2, & p_2 &= \frac{10^{3/4}\sqrt{5}}{50}x_1 - \frac{\sqrt{15}}{5}x_2, \end{aligned} \quad (2.59)$$

которая приводит квадратичную часть гамильтониана (2.4) к следующей нормальной форме

$$H_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}(x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2}y_2^2. \quad (2.60)$$

Нормализация членов третьей и четвертой степени, которая выполняется аналогично случаю  $a = 1$ , приводит гамильтониан к виду (2.56). Коэффициенты при членах третьей и четвертой степеней нормализованного гамильтониана имеют в этом случае вид

$$k_3 = -\frac{33\sqrt{6}}{100}b, \quad k_{12} = -\frac{3\sqrt{10}}{25}b, \quad (2.61)$$

$$A = -\frac{108}{625}b^2 - \frac{9}{25}c, \quad B = -\frac{9\sqrt{10}}{12500}(731b^2 - 550c), \quad C = -\frac{88239}{200000}b^2 - \frac{801}{4000}c. \quad (2.62)$$

Таким образом, в соответствии с теоремой А.Г. Сокольского [42] при  $b \neq 0$  положение равновесия неустойчиво. Коэффициент  $b$  на границе  $a = -\frac{1}{2}$  обращается в нуль при

$$\xi_* = -\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4}. \quad (2.63)$$

Подставляя (2.63) в (2.32) приходим к следующим параметрическим уравнениям кривой, на которой  $a = -\frac{1}{2}$  и  $b = 0$ .

$$Q_1 = -\frac{1}{512} \frac{(2\mu + 1)^4}{1 - \mu}, \quad Q_2 = -\frac{1}{512} \frac{(2\mu - 3)^4}{\mu}. \quad (2.64)$$

Для получения выводов об устойчивости при значениях параметров на данной кривой необходимо определить знак коэффициента  $A$  при членах четвертой степени функции Гамильтона. С этой целью, подставив (2.64) в первую из формул (2.62), имеем

$$A = \frac{72}{25(3 - 2\mu)(2\mu + 1)}. \quad (2.65)$$

Из (2.65) следует, что  $A > 0$ . Следовательно, на основании теоремы А.Г. Сокольского [42] коллинеарная точка либрации  $L_1$  неустойчива при  $a = -\frac{1}{2}$  и  $b = 0$ . Таким образом, при всех значениях параметров, отвечающих границе области устойчивости  $a = -\frac{1}{2}$ , заданной уравнениями (2.32) коллинеарная точка либрации  $L_1$  неустойчива.

## 2.6. Анализ устойчивости в случае резонанса второго порядка

Рассмотрим теперь случай  $a = \frac{8}{9}$ , который имеет место на границе области устойчивости, заданной параметрическими уравнениями (2.34). Здесь линейная

система имеет равные частоты  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , т.е. реализуется резонанс второго порядка. В этом случае, используя линейную каноническую замену переменных

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{5}x_2 + \frac{\sqrt{15}}{5}y_1, & q_2 &= \frac{\sqrt{15}}{5}x_1 - \sqrt{3}y_2, \\ p_1 &= -\frac{7\sqrt{15}}{15}x_1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}y_2, & p_2 &= \frac{7\sqrt{3}}{15}x_2 - \frac{2\sqrt{15}}{15}y_1, \end{aligned} \quad (2.66)$$

квадратичная часть гамильтониана (2.4) приводится к виду

$$H_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \omega(x_1y_2 - x_2y_1). \quad (2.67)$$

Посредством нелинейной канонической близкой к тождественной замены переменных  $x_i, y_i \rightarrow u_i, v_i$ , заданной производящей функцией вида (2.38), гамильтониан может быть приведен к следующей нормальной форме [40]

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) + \omega(u_1v_2 - u_2v_1) + \\ &+ (u_1^2 + v_1^2)(A(u_2^2 + v_2^2) + B(v_2u_1 - u_2v_1) + C(u_1^2 + v_2^2)) + \dots \end{aligned} \quad (2.68)$$

Многоточием в (2.68) обозначены члены выше четвертой степени. Расчеты, выполненные методом Депри-Хори показали, что коэффициенты нормализованного гамильтониана имеют вид

$$A = \frac{33291}{40000}b^2 - \frac{1161}{1600}c, \quad B = -\frac{27\sqrt{5}}{10000}(387b^2 - 335c), \quad C = \frac{93069}{25000}b^2 - \frac{3321}{1000}c. \quad (2.69)$$

В соответствии с теоремой А.Г. Сокольского [41, 85] положение равновесия канонической системы с гамильтонианом (2.68) устойчиво по Ляпунову, если выполняется неравенство  $A > 0$ . В противном случае, если  $A < 0$ , то равновесие неустойчиво. Получим выражение коэффициента  $A$  через  $\xi_*$  и  $\mu$ , которые как и в рассмотренных выше резонансных случаях, выбираются в качестве параметров задачи. Последовательно подставляя выражения (2.9), (2.10) и (2.34) в первую из формул (2.69), имеем

$$A = \frac{3(9272\mu^2 - 1562\mu\xi_* + 263\xi_*^2 - 9272\mu + 781\xi_* + 168)}{40000(\xi_* + \mu)^2(\xi_* + \mu - 1)^2}.$$

Из уравнения  $A = 0$  получаем следующие уравнения кривых, которые делят

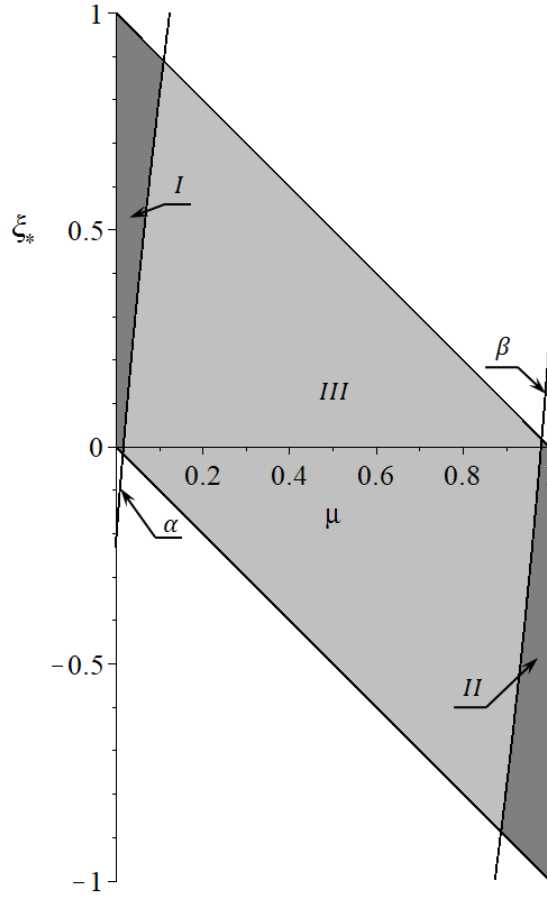


Рис. 2.6: Подобласти устойчивости и неустойчивости в случае  $a = \frac{8}{9}$ .

всю область допустимых значений параметров  $\xi_*$  и  $\mu$  на подобласти устойчивости и неустойчивости

$$\xi_* = \frac{781}{263}\mu - \frac{781}{526} \pm \frac{5}{526} \sqrt{-292572\mu^2 + 292572\mu + 17329}. \quad (2.70)$$

Эти подобласти показаны на Рис. 2.6. В подобластях I и II, выделенных темно-серым цветом, где выполняется неравенство  $A > 0$ , коллинеарная точка либрации  $L_1$  устойчива по Ляпунову. В подобласти III, выделенной светло-серым цветом, выполняется неравенство  $A < 0$ , поэтому здесь коллинеарная точка либрации  $L_1$  неустойчива. Граничная кривая  $\alpha$ , разделяющая области I и III, задается уравнением (2.70), где в правой части должен быть взят знак "+". Граничная кривая  $\beta$ , разделяющая области II и III, задается уравнением (2.70), где

в правой части должен быть взят знак "-". Для решения задачи об устойчивости на самих этих кривых требуется дополнительное исследование с учетом членов не ниже шестой степени в разложении гамильтониана (2.4). Такое исследование в данной работе не проводилось.

Для завершения анализа устойчивости рассмотрим случай  $a = 0$ , который реализуется на границе области устойчивости, заданной параметрическими уравнениями (2.33). Этом случае также имеет место резонанс второго порядка  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  и функция Гамильтона приводится к виду (2.68).

Линейная замена переменных, нормализующая квадратичную часть гамильтониана имеет следующий вид

$$q_1 = -y_2, \quad q_2 = -y_1, \quad p_1 = x_2, \quad p_2 = x_1, \quad (2.71)$$

а коэффициенты нормализованного до членов четвертой степени гамильтониана, вычисляются по формулам

$$A = \frac{35b^2 - 9c}{64}, \quad B = -\frac{13}{24}b^2, \quad C = -\frac{7}{12}b^2. \quad (2.72)$$

Последовательно подставляя (2.9), (2.10) и (2.33) в первую из формул (2.72), имеем следующее выражение для коэффициента  $A$ , через параметры  $\xi_*$  и  $\mu$

$$A = \frac{(18\mu + 53\xi_* - 9)\xi_*}{64(\xi_* + \mu)^2(\xi_* + \mu - 1)^2}.$$

Из уравнения  $A = 0$  получаем следующие уравнения для границ подобластей устойчивости и неустойчивости

$$\xi_*^{(0)} = 0, \quad \xi_*^{(1)} = \frac{9 - 18\mu}{53}. \quad (2.73)$$

На Рис. 2.7 в подобластях, выделенных темно-серым цветом, выполняется неравенство  $A > 0$ , поэтому на основании упомянутой выше теоремы А.Г. Сокольского [41, 85] коллинеарная точка либрации  $L_1$  в этих подобластях устойчива по Ляпунову. В подобласти, выделенной светло-серым цветом, выполняется



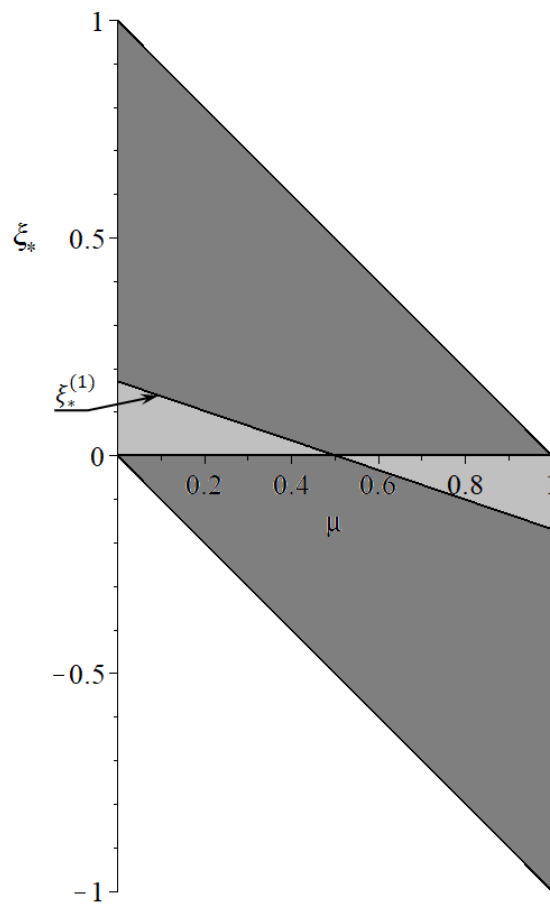


Рис. 2.7: Подобласти устойчивости и неустойчивости в случае  $a = 0$ .

неравенство  $A < 0$ , поэтому здесь на основании той же теоремы коллинеарная точка либрации  $L_1$  неустойчива.

## Глава 3

# Анализ устойчивости коллинеарной точки либрации $L_1$ в плоской эллиптической ограниченной фотогравитационной задаче трех тел

## 3.1. Гамильтониан задачи

Коллинеарные точки либрации также существуют и в эллиптической фотогравитационной задаче трёх тел, когда массивные излучающие тела движутся по эллиптическим орбитам. Вопрос об устойчивости коллинеарных точек либрации в эллиптической задаче значительно менее изучен. В работах [43, 44] рассматривалась линейная задача об устойчивости  $L_1$  в фотогравитационной эллиптической задаче трёх при различных значениях масс и коэффициентов редукции притягивающих центров. Численно были построены диаграммы устойчивости в линейном приближении для произвольных значений эксцентриситетов.

В данной главе рассматривается плоская фотогравитационная задача трёх тел. Функция Гамильтона канонической системы, описывающей движение тела малой массы в плоской эллиптической фотогравитационной задаче трёх тел, имеет вид

$$H = \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi + \frac{e \cos \nu (\xi^2 + \eta^2)}{2(1 + e \cos \nu)} - \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left( \frac{Q_1(1 - \mu)}{r_1} + \frac{Q_2 \mu}{r_2} \right). \quad (3.1)$$

Напомним, что величины  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния от тела малой массы  $P$  до тел  $P_1$  и  $P_2$  соответственно, они вычисляются по формулам (2.3).

Далее предполагается, что массивные тела движутся по слабоэллиптиче-

ским орбитам, т.е. эксцентриситет их орбит является малым параметром задачи ( $e \ll 1$ ). Поскольку при  $e = 0$  точки либрации  $L_1^{(2)}$ ,  $L_1^{(3)}$ ,  $L_2$  и  $L_3$  неустойчивы то, очевидно, они будут неустойчивы и при достаточно малых значениях эксцентриситета  $e$ . Поэтому представляет интерес лишь вопрос об устойчивости коллинеарной точки либрации  $L_1$ . Предположение о малости эксцентриситета позволило выполнить анализ ее устойчивости аналитически. Основные результаты данной главы были опубликованы в [1, 62].

### 3.2. Линейный анализ устойчивости

Рассмотрим сначала задачу об устойчивости  $L_1$  в линейном приближении. Линеаризованные в окрестности  $L_1$  уравнения движения тела малой массы имеют каноническую форму и задаются следующей функцией Гамильтона

$$H_2 = \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi + \frac{e \cos \nu - 2a}{2(1 + e \cos \nu)} \xi^2 + \frac{e \cos \nu + a}{2(1 + e \cos \nu)} \eta^2, \quad (3.2)$$

где коэффициент  $a$  вычисляется по той же формуле (2.8), что и в случае круговой орбиты.

Полагая  $e$  малым параметром задачи, разложим гамильтониан (3.2) в ряд по степеням  $e$

$$H_2 = H_2^{(0)} + e H_2^{(1)} + e^2 H_2^{(2)} + \dots, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} H_2^{(0)} &= \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi - a \xi^2 + \frac{a}{2} \eta^2, \\ H_2^{(1)} &= \left( \frac{1}{2} + a \right) \cos(\nu) \xi^2 + \left( \frac{1-a}{2} \right) \cos(\nu) \eta^2, \\ H_2^{(2)} &= - \left( \frac{1}{2} + a \right) \cos(\nu)^2 \xi^2 - \left( \frac{1-a}{2} \right) \cos(\nu)^2 \eta^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Напомним, что в случае круговых орбит массивных тел ( $e = 0$ ) характеристическое уравнение линейной канонической системы с гамильтонианом

(3.2) при  $a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{8}{9}; 1)$  имеет четыре чисто мнимых корня  $\pm i\omega_1$ ,  $\pm i\omega_2$  и коллинеарная точка либрации  $L_1$  устойчива в линейном приближении. Частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  малых линейных колебаний в окрестности  $L_1$  задаются формулами (2.31).

Если же  $a \notin [-\frac{1}{2}; 0] \cup [\frac{8}{9}; 1]$ , то при  $e = 0$  корни характеристического уравнения линейной системы имеют отличные от нуля вещественные части и коллинеарная точка либрации  $L_1$  неустойчива по Ляпунову. В этом случае неустойчивость этой коллинеарной точки будет иметь место и при достаточно малых значениях  $e$ .

Пусть  $a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{8}{9}; 1)$ , тогда линейной канонической заменой переменных (2.36) гамильтониан (3.3) можно привести к виду

$$\tilde{H}_2 = \frac{1}{2}\omega_1 (q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2 (q_2^2 + p_2^2) + e\tilde{H}_2^{(1)} + e^2\tilde{H}_2^{(2)} + O(e^3), \quad (3.5)$$

в котором автономная часть  $H_2^{(0)}$  приведена к нормальной форме.

Если при  $e = 0$  выполнено хотя бы одно из резонансных соотношений:  $2\omega_1 = n_1$ ,  $2\omega_2 = n_2$  или  $\omega_1 - \omega_2 = k$  (где  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $k$  – некоторые целые числа), то при  $e \neq 0$  в системе с гамильтонианом (3.5) возможно явление параметрического резонанса, приводящее к неустойчивости. Указанные резонансные соотношения выполняются в одной внутренней точке интервала  $(\frac{8}{9}; 1)$ , в трёх внутренних точках интервала  $(-\frac{1}{2}; 0)$  и на границах указанных интервалов. В точках  $a = \frac{5+\sqrt{97}}{16}$  и  $a = \frac{5-\sqrt{97}}{16}$  имеет место равенство  $2\omega_2 = 1$ , в точке  $a = \frac{13-3\sqrt{41}}{16}$  – равенство  $2\omega_1 = 3$ , в точке  $a = -\frac{1}{3}$  – равенство  $\omega_1 - \omega_2 = 1$ . На границах  $a = 1$  и  $a = -\frac{1}{2}$  имеет место равенство  $\omega_2 = 0$ , а на границах  $a = \frac{8}{9}$  и  $a = 0$  – равенство  $\omega_1 = \omega_2$ .

В плоскости параметров  $a, e$  из точек с координатами  $(1, 0)$ ,  $(\frac{5+\sqrt{97}}{16}, 0)$ ,  $(\frac{8}{9}, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\frac{5-\sqrt{97}}{16}, 0)$ ,  $(-\frac{1}{3}, 0)$ ,  $(\frac{13-3\sqrt{41}}{16}, 0)$ ,  $(-\frac{1}{2}, 0)$  исходят области неустойчивости. Если значение эксцентриситета мало, то границы указанных областей

можно получить аналитически в виде сходящихся рядов по степеням  $e$

$$a = a_0 + ea_1 + e^2a_2 + \dots, \quad (3.6)$$

где в качестве  $a_0$  следует положить одно из указанных выше резонансных значений:  $1, \frac{5+\sqrt{97}}{16}, \frac{8}{9}, 0, \frac{5-\sqrt{97}}{16}, -\frac{1}{3}, \frac{13-3\sqrt{41}}{16}$  или  $-\frac{1}{2}$ .

При малых значениях эксцентриситета эллиптических орбит массивных излучающих тел решение линейной задачи об устойчивости коллинеарной точки  $L_1$  можно получить используя подход, предложенный в [31]. На основании этого подхода нужно построить каноническую замену переменных приводящую линеаризованную систему с гамильтонианом (3.3) к наиболее удобной для дальнейшего анализа нормальной форме. Нормализацию линеаризованной системы можно выполнить до членов некоторого конечного порядка в разложении Гамильтониана (3.3) в ряд по степеням малого параметра  $e$ . Задача об устойчивости исходной линейной системы с гамильтонианом (3.3) и нормализованной линейной системы эквивалентны.

Вид нормализованной функции Гамильтона зависит от типа резонанса, поэтому каждый резонансный случай необходимо рассмотреть отдельно. Рассмотрим сначала так называемые резонансы основного типа, когда при  $e = 0$  величина  $2\omega_2$  равна целому числу. В этом случае линейной  $2\pi$ -периодической по  $\nu$ , аналитической по  $e$  заменой переменных  $q_1, q_2, p_1, p_2 \rightarrow x_1, x_2, y_1, y_2$  функцию Гамильтона можно привести к следующей нормальной форме

$$K_2 = \frac{1}{2} (\omega_1 + 2k_{10}) (x_1^2 + y_1^2) + k_{20}x_2^2 + k_{22}x_2y_2 + k_{02}y_2^2, \quad (3.7)$$

где  $k_{10}, k_{20}, k_{22}, k_{02}$  не зависят от  $\nu$  и представляют собой ряды по степеням эксцентриситета  $e$ , коэффициенты которых выражаются через коэффициенты разложения (3.6). Отметим, кроме того, что величина  $k_{10}$  имеет порядок малости не ниже  $e$ .

Линейная замена переменных, приводящая исходный гамильтониан к виду

(3.7) может быть построена при помощи метода Депри-Хори [31, 74]. В процессе нормализации выражения для коэффициентов гамильтониана (3.7) получаются в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра  $e$ . Методом Депри-Хори эти ряды могут быть получены с точностью до любого конечного порядка  $e$ .

На границах области неустойчивости (параметрического резонанса) характеристическое уравнение нормализованной канонической системы с гамильтонианом (3.7) имеет два нулевых корня, т.е. выполняется равенство

$$k_{22}^2 = 4k_{20}k_{02}. \quad (3.8)$$

Из данного равенства можно получить аналитические выражения для границ областей параметрического резонанса основного типа. Покажем, как это сделать для параметрических резонансов, встречающихся в данной задаче.

При выполнении соотношения  $2\omega_2 = 1$ , области параметрического резонанса исходят из точек  $\left(\frac{5+\sqrt{97}}{16}, 0\right)$  и  $\left(\frac{5-\sqrt{97}}{16}, 0\right)$ . В первом случае  $a_0 = \frac{5+\sqrt{97}}{16}$  и коэффициенты нормальной формы принимают вид

$$\begin{aligned} k_{20} &= \frac{97 + 19\sqrt{97}}{409728} \left( 3104a_1 + 291 + 15\sqrt{97} \right) e + \\ &\quad + \frac{59803 + 14701\sqrt{97}}{4451118870528} \left( \left( 41295616 + 561920\sqrt{97} \right) a_2 - 30964736a_1^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left( 67725504 + 7128000\sqrt{97} \right) a_1 - 35280555 + 1888989\sqrt{97} \right) e^2 + O(e^3), \\ k_{22} &= O(e^3), \\ k_{02} &= \frac{97 + 19\sqrt{97}}{409728} \left( 3104a_1 - 291 - 15\sqrt{97} \right) e + \\ &\quad + \frac{59803 + 14701\sqrt{97}}{4451118870528} \left( \left( 41295616 + 561920\sqrt{97} \right) a_2 - 30964736a_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( 67725504 + 7128000\sqrt{97} \right) a_1 - 35280555 + 1888989\sqrt{97} \right) e^2 + O(e^3). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя выражения (3.9) в равенство (3.8) и приравнивая коэффициенты при равных степенях эксцентриситета, получим уравнения для последовательного определения коэффициентов  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) ряда (3.6). Вычисления

показали, что уравнения границ области параметрического резонанса, исходящих из точки  $\left(\frac{5+\sqrt{97}}{16}, 0\right)$  имеют вид

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{5 + \sqrt{97}}{16} + \left(\frac{3}{32} + \frac{15\sqrt{97}}{3104}\right) e + \left(\frac{375}{512} - \frac{381237\sqrt{97}}{4817408}\right) e^2 + O(e^3), \\ a_- &= \frac{5 + \sqrt{97}}{16} - \left(\frac{3}{32} + \frac{15\sqrt{97}}{3104}\right) e + \left(\frac{375}{512} - \frac{381237\sqrt{97}}{4817408}\right) e^2 + O(e^3). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Границы, вычисленные до  $e^5$  включительно, приведены в приложении.

Аналогично определяются границы области параметрического резонанса, исходящие из точки  $\left(\frac{5-\sqrt{97}}{16}, 0\right)$ . Здесь коэффициенты нормальной формы (3.7) имеют следующий вид

$$\begin{aligned} k_{22} &= O(e^3), \\ k_{20} &= \frac{97 - 19\sqrt{97}}{409728} \left(3104a_1 + 291 - 15\sqrt{97}\right) e + \\ &+ \frac{1}{22 + \sqrt{97}} \left(\frac{97 - 107\sqrt{97}}{44} a_2 + \frac{12259 + 29291\sqrt{97}}{15972} a_1^2 - \right. \\ &\left. - \frac{836307 - 81657\sqrt{97}}{21296} a_1 + \frac{3995634 + 727923\sqrt{97}}{340736}\right) e^2 + O(e^3), \quad (3.11) \\ k_{02} &= \frac{97 - 19\sqrt{97}}{409728} \left(3104a_1 - 291 + 15\sqrt{97}\right) e + \\ &+ \frac{1}{22 + \sqrt{97}} \left(\frac{97 - 107\sqrt{97}}{44} a_2 + \frac{12259 + 29291\sqrt{97}}{15972} a_1^2 + \right. \\ &\left. + \frac{836307 - 81657\sqrt{97}}{21296} a_1 + \frac{3995634 + 727923\sqrt{97}}{340736}\right) e^2 + O(e^3). \end{aligned}$$

Подставив выражения (3.11) в равенство (3.8) и вычислив коэффициенты ряда (3.6), получаем следующие уравнения границ области неустойчивости, исходящих из точки  $\left(\frac{5-\sqrt{97}}{16}, 0\right)$

$$\begin{aligned}
a_+ &= \frac{5 - \sqrt{97}}{16} + \frac{9(\sqrt{97} - 8)}{4(19\sqrt{97} - 97)}e + \frac{27(444341\sqrt{97} + 9550369)}{32(19\sqrt{97} - 97)^2(107\sqrt{97} - 97)}e^2 + O(e^3), \\
a_- &= \frac{5 - \sqrt{97}}{16} - \frac{9(\sqrt{97} - 8)}{4(19\sqrt{97} - 97)}e + \frac{27(444341\sqrt{97} + 9550369)}{32(19\sqrt{97} - 97)^2(107\sqrt{97} - 97)}e^2 + O(e^3).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

При резонансе  $2\omega_1 = 3$  нормальная форма принимает следующий вид

$$K_2 = \frac{1}{2}(\omega_2 + 2k_{20})(x_2^2 + y_2^2) + k_{10}x_1^2 + k_{11}x_1y_1 + k_{01}y_1^2, \tag{3.13}$$

где  $k_{20}$ ,  $k_{10}$ ,  $k_{11}$ ,  $k_{01}$  не зависят от  $\nu$  и являются рядами по степеням эксцентриситета  $e$ , коэффициенты которых выражаются через коэффициенты ряда (3.6). Величина  $k_{20}$  имеет порядок малости не ниже  $e$ . Линейная замена переменных  $q_1, q_2, p_1, p_2 \rightarrow x_1, x_2, y_1, y_2$ , приводящая гамильтониан (3.5) к виду (3.13), также может быть построена при помощи метода Депри-Хори.

На границах области параметрического резонанса характеристическое уравнение системы с гамильтонианом (3.13) имеет два нулевых корня, т.е. имеет место равенство

$$k_{11}^2 = 4k_{10}k_{01}. \tag{3.14}$$

При выполнении соотношения  $2\omega_1 = 3$ , область параметрического резонанса исходит из точки  $\left(\frac{13-3\sqrt{41}}{16}, 0\right)$ . В этом случае коэффициенты нормальной формы принимают вид



$$\begin{aligned}
k_{11} &= O(e^4), \\
k_{10} &= k_0 + \frac{48765\sqrt{41} - 312315}{4096}e^3 + O(e^4), \\
k_{01} &= k_0 - \frac{48765\sqrt{41} - 312315}{4096}e^3 + O(e^4), \\
k_0 &= -\frac{123 + 53\sqrt{41}}{1220}a_1e + \frac{1}{\sqrt{41} - 6} \left( \frac{39\sqrt{41} - 287}{244}a_2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{9631779 - 2218151\sqrt{41}}{68094300}a_1^2 + \frac{64485\sqrt{41} - 656910}{1155584} \right) e^2 + \\
&\quad + \frac{1}{1997\sqrt{41} - 12787} \left( \frac{21604\sqrt{41} - 138334}{61}a_3 + \right. \\
&\quad + \left( \frac{491447578 - 76752602\sqrt{41}}{680943}a_2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{25712263006566\sqrt{41} - 164783276157101}{68094300} \right) a_1 + \\
&\quad \left. + \frac{4440095377202\sqrt{41} - 28431991117658}{190034167725}a_1^3 \right) e^3 + O(e^4). \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Подставляя выражения (3.15) в равенство (3.14) и вычисля коэффициенты ряда (3.6) приходим к следующим уравнениям границ области неустойчивости, исходящих из точки  $\left(\frac{13-3\sqrt{41}}{16}, 0\right)$ .

$$\begin{aligned}
a_+ &= \frac{13 - 3\sqrt{41}}{16} + \frac{45(14598 - 1433\sqrt{41})}{4736(39\sqrt{41} - 287)}e^2 + \frac{915(3251\sqrt{41} - 20821)}{8192(10802\sqrt{41} - 69167)}e^3 + O(e^4), \\
a_- &= \frac{13 - 3\sqrt{41}}{16} + \frac{45(14598 - 1433\sqrt{41})}{4736(39\sqrt{41} - 287)}e^2 - \frac{915(3251\sqrt{41} - 20821)}{8192(10802\sqrt{41} - 69167)}e^3 + O(e^4). \tag{3.16}
\end{aligned}$$

При комбинационном резонансе, когда при  $e = 0$  разность  $\omega_1 - \omega_2$  равна целому числу, функция Гамильтона (3.3) уже не приводится к виду (3.7), но

использованная выше методика построения границ областей неустойчивости в виде рядов по степеням малого параметра  $e$ , применима и в этом случае.

Для построения границ области неустойчивости, исходящих из точки  $(-\frac{1}{3}; 0)$ , в которой при  $e = 0$  имеет место резонансное соотношение  $\omega_1 - \omega_2 = 1$  выполним линейную замену переменных (2.36) и перейдем к каноническим полярным координатам

$$q_1 = \sqrt{2r_1} \sin \varphi_1, \quad q_2 = \sqrt{2r_2} \sin \varphi_2, \quad p_1 = \sqrt{2r_1} \cos \varphi_1, \quad p_2 = \sqrt{2r_2} \cos \varphi_2. \quad (3.17)$$

В результате таких замен функция Гамильтона (3.3) принимает вид

$$\hat{H}_2 = \frac{\sqrt{33} + 3}{6} r_1 - \frac{\sqrt{33} - 3}{6} r_2 + e \hat{H}_2^{(1)} + e^2 \hat{H}_2^{(2)} + O(e^3). \quad (3.18)$$

Далее при помощи линейной близкой к тождественной  $2\pi$ -периодической по  $\nu$  канонической замены переменных  $r_i, \varphi_i \rightarrow \rho_i, \theta_i$  ( $i = 1, 2$ ), которую можно построить при помощи метода Депри-Хори, приведем гамильтониан (3.18) к следующей нормальной форме

$$K_2 = \Omega_1 \rho_1 - \Omega_2 \rho_2 + \kappa \cos(\theta_1 + \theta_2 - \nu) \sqrt{\rho_1 \rho_2}, \quad (3.19)$$

где  $\Omega_1, \Omega_2, \kappa$  представляют собой ряды по степеням эксцентриситета  $e$ , коэффициенты которых выражаются через коэффициенты ряда (3.6), и не зависят от  $\nu$ .

Вычисления показали, что с точностью до  $e^2$  имеют место следующие вы-

ражения

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \frac{\sqrt{33} + 3}{6} + \frac{5\sqrt{33} - 99}{88}a_1e + \\
&\quad + \left( \frac{5\sqrt{33} - 99}{88}a_2 + \frac{9801 - 2823\sqrt{33}}{15488}a_1^2 + \frac{\sqrt{33} - 462}{968} \right) e^2 + O(e^3), \\
\Omega_2 &= \frac{\sqrt{33} - 3}{6} - \frac{5\sqrt{33} + 99}{88}a_1e - \\
&\quad - \left( \frac{5\sqrt{33} + 99}{88}a_2 - \frac{9801 + 2823\sqrt{33}}{15488}a_1^2 + \frac{\sqrt{33} + 462}{968} \right) e^2 + O(e^3), \\
\kappa &= -\frac{\sqrt{66}}{11}e - \frac{699\sqrt{66}}{1936}a_1e^2 + O(e^3).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Далее, выполнив замену переменных

$$\theta_1 = \psi_1, \quad \theta_2 = \psi_2 + \nu - \frac{\pi}{2}, \quad \rho_1 = R_1, \quad \rho_2 = R_2,$$

приходим к системе со следующим независимым от  $\nu$  гамильтонианом

$$K_2 = \Delta_1 R_1 + \Delta_2 R_2 + \kappa \sin(\psi_1 + \psi_2) \sqrt{R_1 R_2}, \tag{3.21}$$

где  $\Delta_1 = \Omega_1$  и  $\Delta_2 = -\Omega_2 - 1$ .

В декартовых канонических переменных, которые вводятся по формулам

$$u_1 = \sqrt{2R_1} \sin \psi_1, \quad u_2 = \sqrt{2R_2} \sin \psi_2, \quad v_1 = \sqrt{2R_1} \cos \psi_1, \quad v_2 = \sqrt{2R_2} \cos \psi_2,$$

гамильтониан (3.21) принимает вид

$$K_2 = \frac{1}{2}\Delta_1 (u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2}\Delta_2 (u_2^2 + v_2^2) + \frac{1}{2}\kappa (u_1 v_2 + u_2 v_1). \tag{3.22}$$

Область неустойчивости системы с гамильтонианом (3.22), т.е. область исследуемого параметрического резонанса исходной системы, определяется неравенством [31]

$$|\Delta_1 + \Delta_2| < \kappa, \tag{3.23}$$

которое можно переписать в виде

$$|\Omega_1 - \Omega_2 - 1| < \kappa. \tag{3.24}$$

На границах области неустойчивости неравенство (3.24) обращается в равенство. Подставляя в это равенство выражения (3.20) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях эксцентриситета, можно последовательно вычислить коэффициенты ряда (3.6), задающего уравнения границ области неустойчивости (параметрического резонанса). Вычисления показали, что уравнения этих границ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} a_+ &= -\frac{1}{3} - \frac{4\sqrt{66}}{99}e + \frac{70}{1089}e^2 + O(e^3), \\ a_- &= -\frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{66}}{99}e + \frac{70}{1089}e^2 + O(e^3). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Для построения границы области неустойчивости, исходящей из точки  $(\frac{8}{9}; 0)$  выполним линейную замену переменных

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\sqrt{15}}{5}p_1 - \frac{\sqrt{3}}{5}q_2, & \eta &= \frac{\sqrt{15}}{5}q_1 - \sqrt{3}p_2, \\ p_\xi &= \frac{2\sqrt{3}}{3}p_2 - \frac{7\sqrt{15}}{15}q_1, & p_\eta &= \frac{7\sqrt{3}}{15}q_2 - \frac{2\sqrt{15}}{15}p_1, \end{aligned} \quad (3.26)$$

которая приводит функцию Гамильтона (3.3) к виду

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\sqrt{5}}{3}(q_1p_2 - q_2p_1) + e\hat{H}_2^{(1)} + e^2\hat{H}_2^{(2)} + O(e^3). \quad (3.27)$$

При помощи линейной близкой к тождественной  $2\pi$ -периодической по  $\nu$  канонической замены переменных  $q_i, p_i \rightarrow x_i, y_i$ , которую можно построить с помощью метода Депри-Хори, гамильтониан (3.27) приводится к следующей нормальной форме

$$K_2 = \frac{1}{2}(1 + 2k_{10})(x_1^2 + x_2^2) + k_{01}(y_1^2 + y_2^2) + \omega(x_1y_2 - x_2y_1) + k_{11}x_1y_1 + k_{21}x_2y_1, \quad (3.28)$$

где  $k_{10}, k_{01}, k_{11}, k_{21}$  – независимые от  $\nu$  сходящиеся ряды по степеням эксцентриситета  $e$ , коэффициенты которых выражаются через коэффициенты ряда

(3.6). С точностью до членов порядка  $e^2$  эти ряды имеют вид

$$\begin{aligned}
k_{10} &= \frac{9}{100}a_1e + \frac{1}{2} \left( \frac{9}{50}a_2 - \frac{7047}{10000}a_1^2 - \frac{6766}{6655} \right) e^2 + O(e^3), \\
k_{01} &= \frac{9}{20}a_1e + \frac{1}{2} \left( \frac{9}{10}a_2 + \frac{6237}{2000}a_1^2 + \frac{14}{121} \right) e^2 + O(e^3), \\
k_{21} &= \frac{21\sqrt{5}}{25}a_1e + \frac{\sqrt{5}}{4} \left( \frac{84}{25}a_2 + \frac{19683}{2500}a_1^2 + \frac{14992}{6655} \right) e^2 + O(e^3), \\
k_{11} &= O(e^3), \\
\omega &= \frac{\sqrt{5}}{3} + O(e^3).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Граница области устойчивости определяется равенством [31]

$$k_{01} = \frac{k_{11}^2 (4\omega^2 - 4\omega k_{21} - k_{11}^2)}{8(1 + 2k_{10})(2\omega - k_{21})^2}. \tag{3.30}$$

Приравняв в левой и правой частях этого равенства члены при одинаковых степенях  $e$ , можно получить систему уравнений для искомым коэффициентов  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) разложения (3.6), задающего уравнение границы области неустойчивости. Вычисления показали, что уравнение этой границы имеет следующий вид

$$a_* = \frac{8}{9} - \frac{140}{1089}e^2 - \frac{173891}{2898918}e^4 + O(e^5). \tag{3.31}$$

Для проверки достоверности полученных выше аналитических результатов в диссертационной работе был выполнен также и численный анализ корней характеристического уравнения линейной системы с гамильтонианом (3.2). Алгоритм этого анализа состоит в следующем. В результате численного интегрирования линейной системы с гамильтонианом (3.2) вычислялась ее матрица монодромии и находились коэффициенты соответствующего характеристического уравнения. На основании проведения указанных численных расчетов определялись области значений параметров, для которых характеристическое уравнение имеет корни с модулями неравными единице. Эти области изображены на Рис. 3.1 серым цветом, а их границы выделены тонкими сплошными линиями.

Данные области являются областями параметрического резонанса, где имеет место неустойчивость коллинеарной точки  $L_1$ . Отметим, что ранее эти области были получены в работе [43].

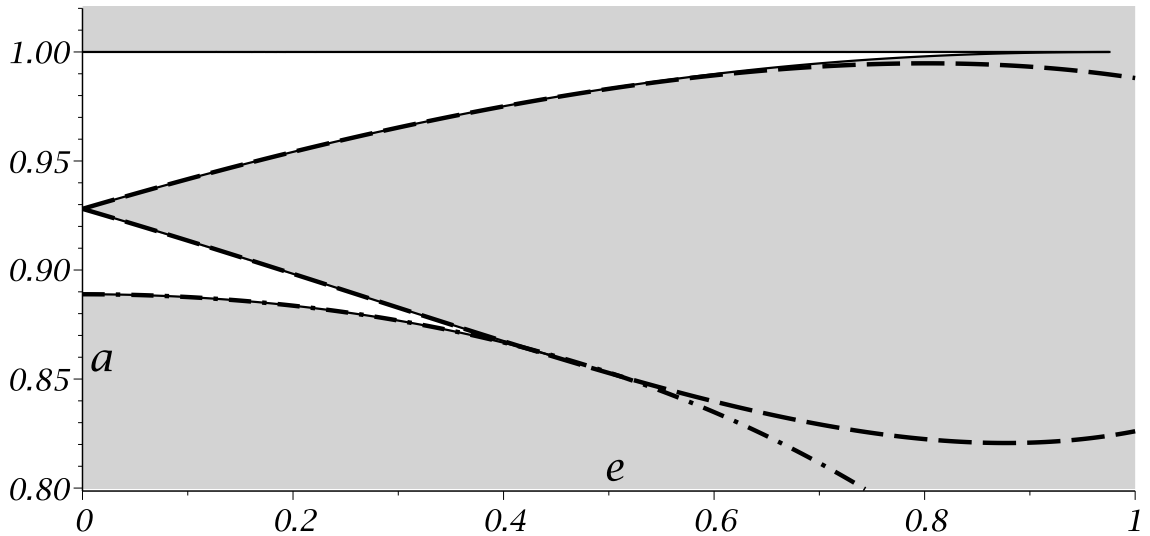


Рис. 3.1: Границы областей параметрического резонанса для  $a \in [\frac{8}{9}; 1]$ .

Пунктирными линиям на Рис. 3.1 изображены границы областей параметрического резонанса, построенные на основании асимптотических формул (3.10) и (3.31), полученных в данном параграфе. Таким образом, на Рис. 3.1 видно, что аналитические результаты, полученные в данном параграфе, хорошо согласуются с результатами анализа устойчивости  $L_1$ , выполненного на основании численного анализа корней характеристического уравнения.

### 3.3. Нелинейный анализ устойчивости в случае равных масс и интенсивностей излучения притягивающих тел

Рассмотрим случай, когда массы притягивающих тел равны  $m_1 = m_2$  ( $\mu = \frac{1}{2}$ ), а также равны интенсивности их излучения  $Q_1 = Q_2 = Q$ . Тогда из уравнения (1.16) следует, что  $\xi_{*1} = 0$ , т.е. коллинеарная точка либрации  $L_1$  находится в центре масс системы (см. Рис. 3.2). В этом случае на основании

формул (2.8)-(2.10) имеем:  $a = 8Q$ ,  $b = 0$ ,  $c = 32Q$ , а гамильтониан системы уравнений возмущенного движения принимает вид

$$H = H_2 + H_4 + \dots \quad (3.32)$$

где

$$H_2 = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - 8Q q_1^2 + 4Q q_2^2 + \left( \frac{1 + 16Q}{2} q_1^2 + \frac{1 - 8Q}{2} q_2^2 \right) \cos(\nu) e + O(e^2), \quad (3.33)$$

$$H_4 = -32Q q_1^4 + 96Q q_1^2 q_2^2 - 12Q q_2^4 + (32Q q_1^4 - 96Q q_1^2 q_2^2 + 12Q q_2^4) \cos(\nu) e + O(e^2). \quad (3.34)$$

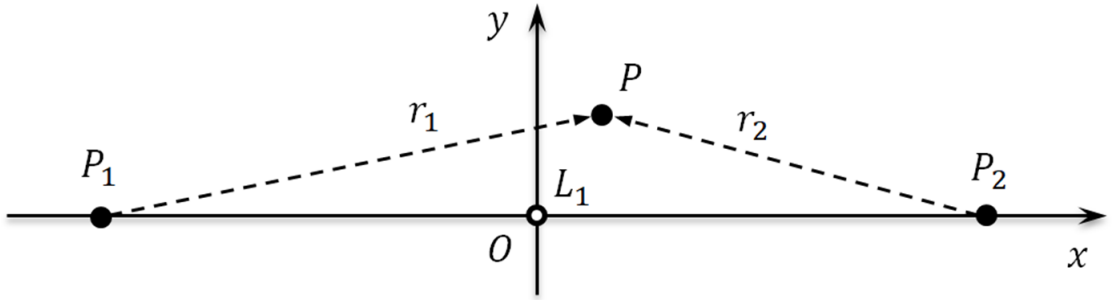


Рис. 3.2: Случай равных масс и интенсивностей излучения притягивающих тел.

Строгие выводы об устойчивости для  $Q \in (-\frac{1}{16}; 0) \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{8})$  и  $e \ll 1$  можно получить, используя теоремы об устойчивости периодических гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [3, 5, 10, 11, 92]. Чтобы применить эти теоремы, необходимо построить последовательность канонических замен переменных, которая для значений параметров из областей устойчивости в линейном приближении приводит гамильтониан (3.32) к нормальной форме до членов четвёртого порядка включительно. На первом этапе нормализации необходимо построить линейную каноническую замену переменных, приводящую квадратичную часть (3.33) гамильтониана (3.32) к виду

$$H = \Omega_1 r_1 - \Omega_2 r_2, \quad (3.35)$$

где  $\Omega_1 = \omega_1 + O(e)$ ,  $\Omega_2 = \omega_2 + O(e)$ . В диссертационной работе эта замена была построена методом Депри-Хори.

На втором этапе нормализации строится каноническая близкая к тождественной замена переменных  $x_i, y_i \rightarrow u_i, v_i$ , нормализующая гамильтониан задачи до членов четвёртой степени включительно. Производящая функция для такой замены имеет вид

$$S = x_i v_i + S^{(4)}(x_i, v_i, \nu) \quad (i = 1, 2), \quad (3.36)$$

где  $S^{(4)}(x_i, v_i, \nu)$  – сходящийся степенной ряд, начинающийся с членов четвертого порядка.

На этом этапе необходимо отдельно рассмотреть нерезонансный случай и случаи резонансов. В нерезонансном случае мы предполагаем, что частоты линейной системы не удовлетворяют резонансному соотношению вплоть до четвертого порядка. То есть, выполняется неравенство  $n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \neq N$ , где  $n_1$  и  $n_2$  – целые числа, удовлетворяющие условию  $|n_1| + |n_2| \leq 4$ . Тогда нормальная форма гамильтониана имеет вид

$$H = \Omega_1 r_1 - \Omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right), \quad (3.37)$$

где канонические переменные  $\varphi_i, r_i$  вводятся по формулам  $u_i = \sqrt{2r_i} \sin(\varphi_i)$ ,  $v_i = \sqrt{2r_i} \cos(\varphi_i)$ . Для вычисления коэффициентов производящей функции (3.36) и нормальной формы (3.37) также использовался метод Депри-Хори.

Расчеты показали, что в нашей задаче

$$c_{11}^2 - c_{20} c_{02} = -\frac{81(534528Q^4 - 90112Q^3 + 9600Q^2 - 480Q + 15)}{64(9Q - 1)^2(16Q + 1)(8Q - 1)} + O(e). \quad (3.38)$$

На основании результатов В. И. Арнольда [3, 5] система с гамильтонианом (3.37) устойчива для большинства начальных условий, если выполнено неравенство

$$c_{11}^2 - c_{20} c_{02} \neq 0. \quad (3.39)$$



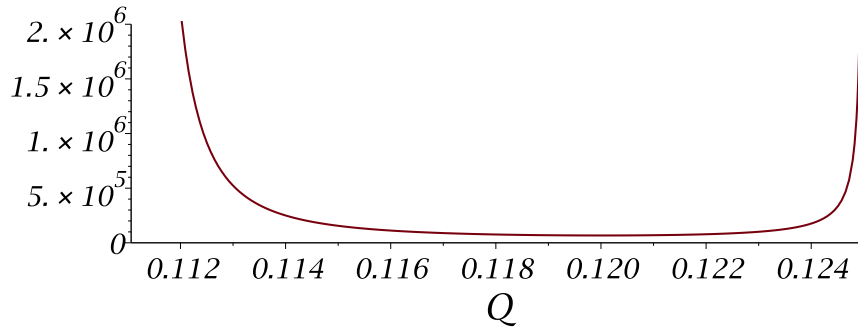


Рис. 3.3: Зависимость  $c_{11}^2 - c_{20}c_{02}$  от  $Q \in (\frac{1}{9}; \frac{1}{8})$ .

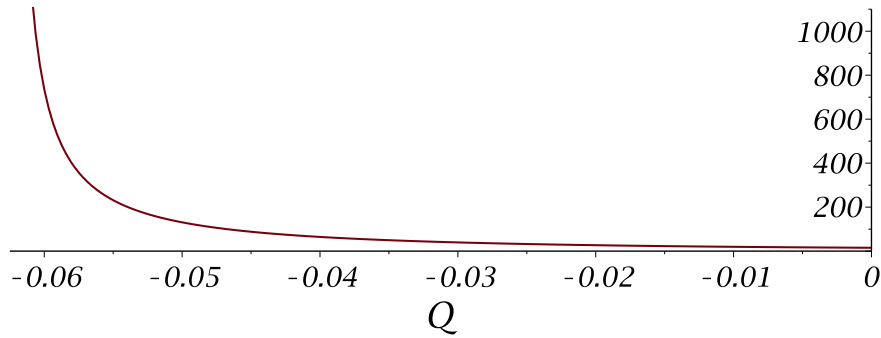


Рис. 3.4: Зависимость  $c_{11}^2 - c_{20}c_{02}$  от  $Q \in (-\frac{1}{16}; 0)$ .

На Рис. 3.3-3.4 изображен график зависимости выражения  $c_{11}^2 - c_{20}c_{02}$  от  $Q$ , из которого видно, что величина  $c_{11}^2 - c_{20}c_{02}$  всегда положительна. Следовательно, гамильтонова система устойчива для большинства начальных условий.

Далее рассмотрим формальную устойчивость гамильтоновой системы. В этом случае следует использовать результаты работ [10, 11, 75] о формальной устойчивости, на основании которых нулевое решение системы с Гамильтонианом (3.37) формально устойчиво, если квадратичная форма  $c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2$  положительно (или отрицательно) определенная для  $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$ . Чтобы показать, что приведенное выше условие выполняется в нашей задаче, мы должны проанализировать знаки значений  $c_{11}, c_{20}, c_{02}$  и  $c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02}$ . Расчеты показали

$$c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} = -\frac{81(92160Q^4 - 16384Q^3 + 1920Q^2 - 96Q + 3)}{16(9Q - 1)^2(16Q + 1)(8Q - 1)} + O(e). \quad (3.40)$$

Выражения для  $c_{11}, c_{20}, c_{02}$  очень громоздки, поэтому они здесь не приведены. Графики  $c_{11}, c_{20}$  и  $c_{02}$  при  $e = 0$  показаны на Рис. 3.5-3.7 для значений  $Q$

из положительной области  $(\frac{1}{9}; \frac{1}{8})$ . Откуда видно, что  $c_{11} < 0$ ,  $c_{20} < 0$  и  $c_{02} < 0$ , а значит, условие теоремы Глимма выполняется.

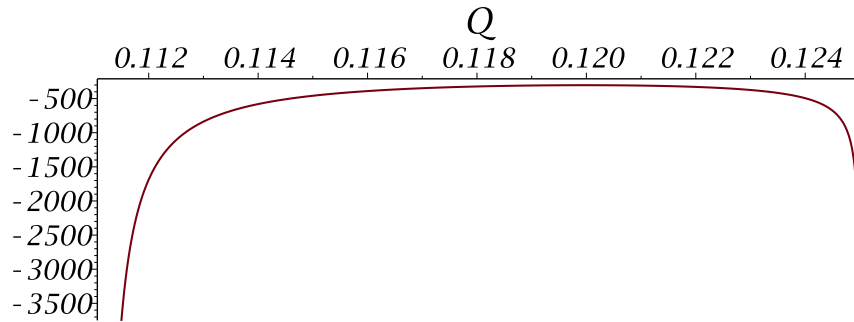


Рис. 3.5: Зависимость  $c_{11}$  от  $Q$ .

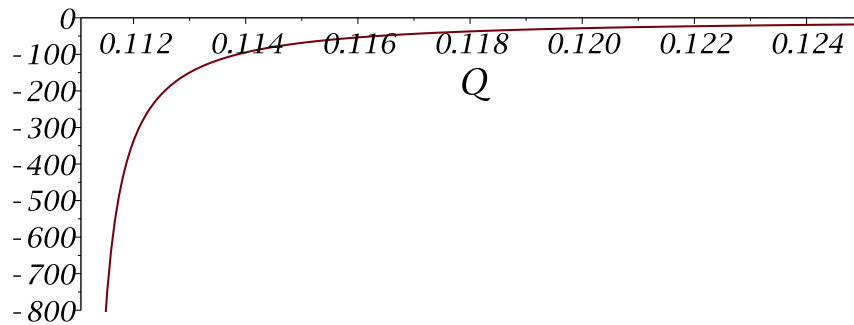
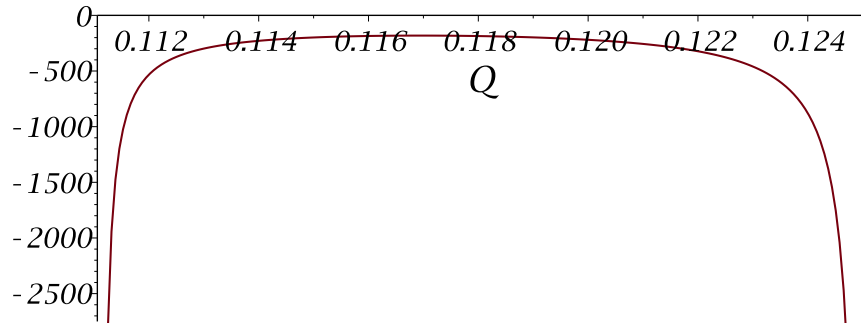
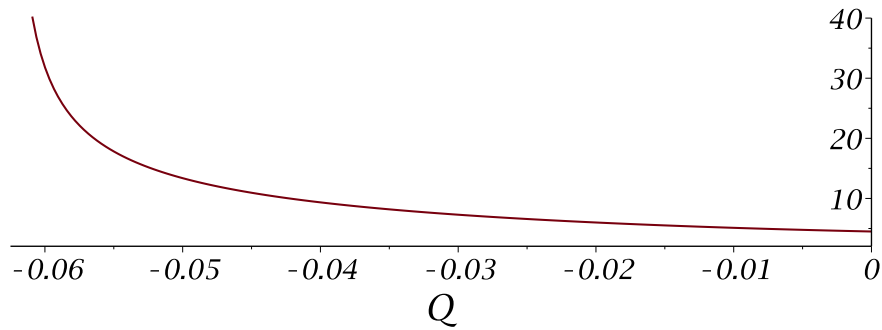


Рис. 3.6: Зависимость  $c_{20}$  от  $Q$ .

И на Рис. 3.8-3.10 для значений  $Q$  из отрицательной области  $(-\frac{1}{16}; 0)$ .

Видно, что  $c_{11} > 0$ ,  $c_{20} > 0$  и  $c_{02} > 0$ , то есть условие теоремы Глимма также выполняется. Таким образом, для  $\epsilon \ll 1$  и  $Q \in (-\frac{1}{16}; 0) \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{8})$  коллинеарная точка  $L_1$  формально устойчива в нерезонансном случае.

Если имеет место резонанс, то нормальная форма гамильтониана включает дополнительный (резонансный) член. Разложение функции Гамильтона (3.32) не содержит члены третьего порядка, поэтому резонансы третьего порядка в рассматриваемом приближении не проявляются. Таким образом в нашей задаче возможны только следующие резонансы четвертого порядка:  $4\omega_1 = 3$ ,  $4\omega_2 = 1$ ,  $2(\omega_1 - \omega_2) = 1$ ,  $\omega_1 - 3\omega_2 = 0$ . На самом деле, мы должны изучить только последний, потому что в случае других резонансных случаях резонансный

Рис. 3.7: Зависимость  $c_{02}$  от  $Q$ .Рис. 3.8: Зависимость  $c_{11}$  от  $Q$ .

член имеет порядок  $O(e)$ , и он не может повлиять на вывод об устойчивости, полученный для нерезонансного случая.

В случае резонанса  $\omega_1 - 3\omega_2 = 0$  нормальная форма Гамильтона принимает вид

$$H = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + Br_2 \sqrt{r_1 r_2} \sin(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right). \quad (3.41)$$

В этом случае условие устойчивости, описанное в [29], представлено в виде неравенства  $|3\sqrt{3}B| < |C|$ , где  $C = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}$ . Расчеты показали, что данное неравенство выполняется для рассматриваемого резонанса. Что говорит об устойчивости точки либрации  $L_1$  в смысле Ляпунова при  $e = 0$  и формальной устойчивости при  $e \ll 1$ .

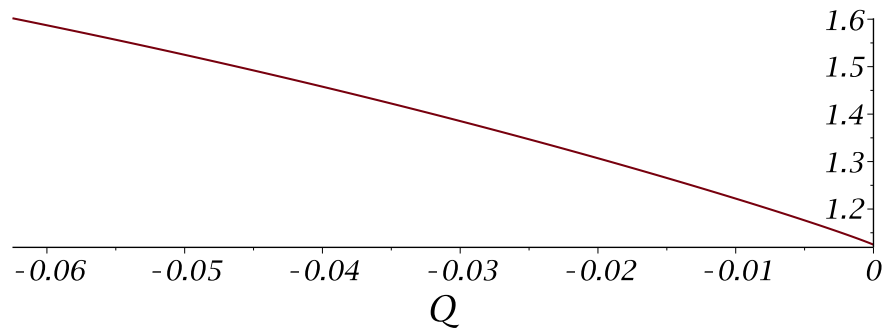


Рис. 3.9: Зависимость  $c_{20}$  от  $Q$ .

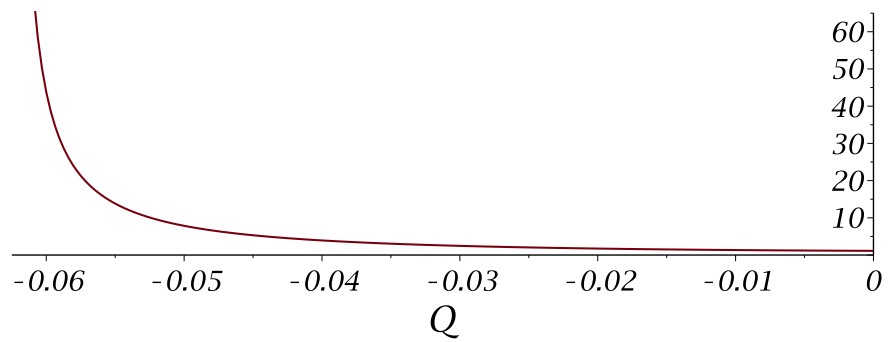


Рис. 3.10: Зависимость  $c_{02}$  от  $Q$ .

## Глава 4

# Анализ устойчивости положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова

## 4.1. Постановка задачи

Ограниченная задача трёх тел в ее классической постановке имеет замечательный частный случай, когда два тела, имеющие равные массы, двигаются по эллиптическим орбитам вокруг их общего центра масс, а третье тело, обладающее малой массой, движется в гравитационном поле этих тел по прямой, проходящей через их центр масс перпендикулярно плоскости их орбит. Этот частный случай называют задачей Ситникова [39].

В данной главе мы рассматриваем так называемую фотогравитационную задачу Ситникова, в которой изучается прямолинейное движение тела  $P$  в гравитационном поле двух тел  $P_1$  и  $P_2$ , обладающих равными массами и движущихся по эллиптическим орбитам эксцентриситета  $e$ . Предполагается, что тела  $P_1$  и  $P_2$  действуют на тело  $P$  с равными по величине репульсивными силами светового давления. Тело  $P$  обладает малой массой и не влияет на движение тел  $P_1$  и  $P_2$ . Прямолинейное движение тела  $P$  представляет собой колебания вдоль прямой  $Oz$ , перпендикулярной плоскости движения центров (см. Рис. 4.1). Уравнения такого движения могут быть записаны в следующей канонической форме

$$\frac{d\zeta}{d\nu} = \frac{dH}{d\zeta}, \quad \frac{dp_\zeta}{d\nu} = -\frac{dH}{dp_\zeta}, \quad (4.1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p_\zeta^2 + \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left[ \frac{e \cos \nu}{2} \zeta^2 - \frac{2Q}{(1 + 4\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (4.2)$$

Канонические переменные  $\zeta, p_\zeta$  вводятся по формулам  $\zeta = \frac{z}{r}$  и  $p_\zeta = \frac{d\zeta}{d\nu}$ ,

где  $\nu$  – истинная аномалия, а  $r$  – расстояние между телами  $P_1$  и  $P_2$ . Параметр  $Q$  – коэффициент редукции массы, характеризующий силу светового давления, принимает значения в интервале  $[0; 1]$ . Если  $Q = 1$ , то приходим к классической задаче Ситникова, когда световое давление отсутствует.

Тривиальное решение  $\zeta = p_\zeta = 0$  канонической системы (4.1) соответствует положению равновесия тела  $P$ , когда оно находится в центре масс  $O$  всей системы. Отметим, что это положение равновесия является коллинеарной точкой либрации  $L_1$  ограниченной фотогравитационной задачи трёх тел.

Устойчивость положения равновесия по Ляпунову классической задачи Ситникова ( $Q = 1$ ) подробно исследована [88]. Некоторые области неустойчивости положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова были установлены в [14, 45] на основе анализа линейного приближения системы (4.1).

Цель данной главы состоит в проведении линейного и нелинейного анализа системы (4.1) и получении строгих выводов об устойчивости по Ляпунову положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова. Основные результаты этой главы были опубликованы в [61].

Для дальнейшего анализа нам понадобится разложение гамильтониана (4.2) в ряд по степеням канонических переменных  $\zeta$  и  $p_\zeta$  до членов четвёртого порядка

$$H = H_2 + H_4 + \dots, \quad (4.3)$$

где

$$H_2 = \frac{1}{2} p_\zeta^2 + \frac{8Q + e \cos \nu}{2(1 + e \cos(\nu))} \zeta^2, \quad (4.4)$$

$$H_4 = -12 \frac{Q \zeta^4}{1 + e \cos(\nu)}. \quad (4.5)$$

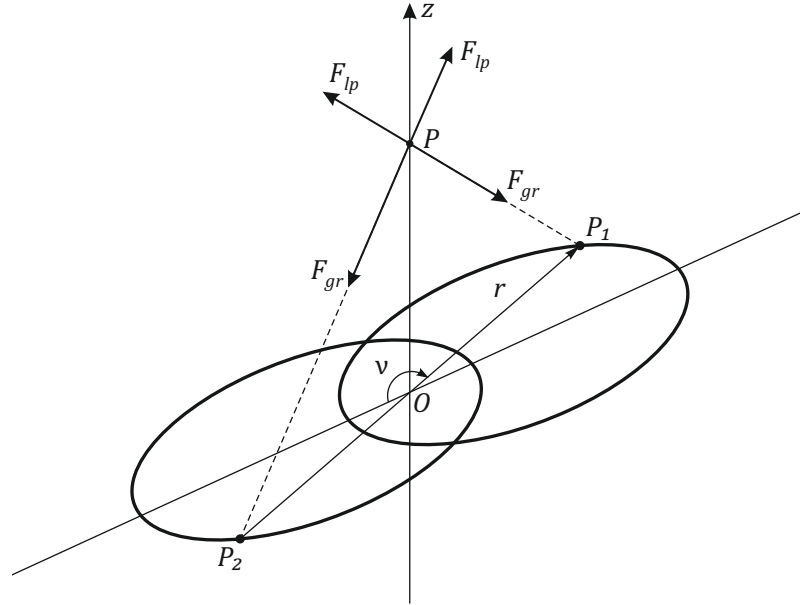


Рис. 4.1: Система координат в фотогравитационной задаче Ситникова

## 4.2. Линейный анализ устойчивости

Рассмотрим линейную систему канонических дифференциальных уравнений

$$\frac{d\zeta}{d\nu} = \frac{dH_2}{d\zeta}, \quad \frac{dp_\zeta}{d\nu} = -\frac{dH_2}{dp_\zeta}. \quad (4.6)$$

Вопрос об устойчивости положения равновесия  $\zeta = p_\zeta = 0$  линейной системы (4.6) может быть решён на основании анализа корней характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0, \quad (4.7)$$

где  $2A = [x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi)]$ . Функции  $x_{11}(\nu), x_{22}(\nu)$  – диагональные элементы матрицы  $\mathbf{X}(\nu)$ , которая является матрицей фундаментальных решений системы (4.6) и удовлетворяет начальному условию  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_2$ , где  $\mathbf{E}_2$  – единичная матрица второго порядка.

Если  $|A| > 1$ , то характеристическое уравнение (4.7) имеет корень с модулем, большим 1. В этом случае положение равновесия линеаризованной системы (4.6) неустойчиво [26]. Поэтому на основании теоремы Ляпунова об устойчиво-

сти по первому приближению положение равновесия нелинейной системы (4.1) также неустойчиво [25].

Если  $|A| < 1$ , то оба корня характеристического уравнения различны и их модули равны 1. В этом случае положение равновесия линейной системы (4.6) устойчиво [26]. Однако, это не означает, что положение равновесия устойчиво в соответствующей нелинейной системе (4.1).

Когда  $|A| = 1$ , характеристическое уравнение (4.7) имеет кратный корень  $\rho = 1$  или  $\rho = -1$ . В этом случае анализа устойчивости линейной системы (4.6) также недостаточно для получения строгих выводов об устойчивости исходной системы (4.1).

Чтобы получить строгое решение задачи об устойчивости положения равновесия исходной гамильтоновой системы в случае  $|A| \leq 1$ , требуется провести нелинейный анализ, принимая в расчёт члены не ниже четвертой степени в разложении гамильтониана (4.2) по степеням канонических переменных  $\zeta$  и  $p_\zeta$ .

В общем случае, чтобы определить коэффициент  $A$ , необходимо провести численное интегрирование линейной системы (4.6) на интервале  $[0; 2\pi]$ . Численное интегрирование системы (4.6) для значений эксцентриситета, близких к 1, требует высокой точности и становится очень затруднительным. В данной работе мы вычисляем коэффициент  $A$  для значений эксцентриситета на интервале  $0 < e < 0.999$ . Результаты линейного анализа устойчивости показаны на Рис. 4.2. Области, где положение равновесия неустойчиво, закрашены серым цветом. Вне этих областей положение равновесия устойчиво в линейном приближении. Большинство областей неустойчивости очень узкие или вырождаются в линию, поэтому на Рис. 4.2 они показаны жирными кривыми. Кривые, обозначенные пунктиром, отвечают резонансам четвертого порядка, о них речь пойдет ниже.

Отметим, что при  $e = 0$  линейная система с гамильтонианом (4.4) описывает периодические колебания с частотой  $\omega = \sqrt{8Q}$ . Если  $e \ll 1$  и  $\omega$  близка к



$N/2$ , где  $N = 1, 2, 3, 4, 5$ , тогда в вышеуказанной линейной системе имеет место явление параметрического резонанса, которое приводит к неустойчивости положения равновесия [29, 49]. В плоскости параметров  $e$  и  $Q$  области параметрического резонанса (области неустойчивости) исходят из точек  $Q_N = N^2/32$  оси  $Q$  (см. Рис. 4.2). Численные расчёты показали, что области параметрического резонанса, исходящие из точек  $Q_2, Q_4$ , вырождаются в кривые.

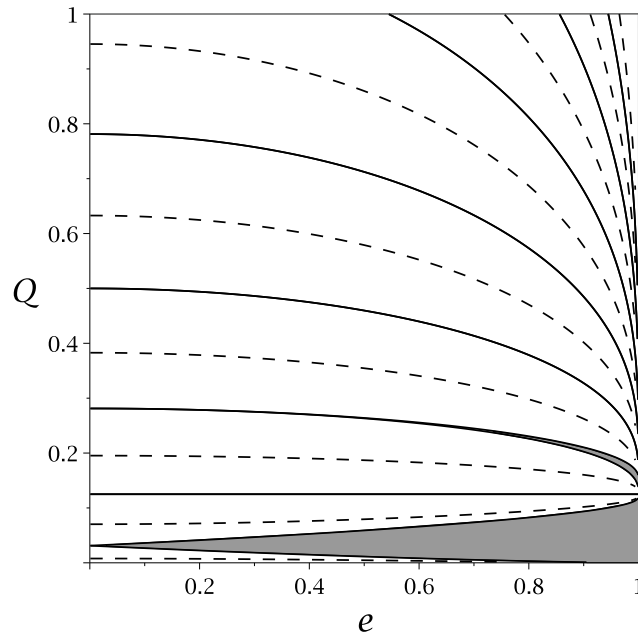


Рис. 4.2: Диаграмма устойчивости

Также стоит отметить, что при  $e = 1$  в точке  $\nu = \pi$  в правой части системы (4.6) имеет место разрыв второго рода. Численные расчёты показали, что, когда  $e$  приближается к 1, коэффициент  $A$  многократно меняет знак, поэтому интервалы с положительными и отрицательными значениями коэффициента  $A$  чередуются один за другим. Более того, в данных интервалах модуль коэффициента  $A$  достигает максимального значения, большего или равного 1. Это указывает на чередование областей устойчивости и неустойчивости вблизи значения  $e = 1$ . Области неустойчивости становятся уже, когда эксцентриситет  $e$  приближается к 1. Стоит отметить, что подобное явление было установлено в

задаче устойчивости плоских колебаний динамически симметричного спутника [87].

### 4.3. Линейный анализ устойчивости при малых значениях эксцентриситета

При значениях эксцентриситета, близких к нулю, области неустойчивости становятся очень узкими, поэтому для получения их границ требуется высокая точность численных расчётов. С другой стороны указанные границы при малых  $e$  могут быть получены аналитически на основании метода малого параметра.

Далее предполагаем, что эксцентриситет  $e$  орбит тел  $P_1$  и  $P_2$  — малая величина ( $e \ll 1$ ), которую можно положить малым параметром задачи. Выполним каноническую замену переменных

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt[4]{8Q}}x, \quad p_\zeta = \sqrt[4]{8Q}y, \quad (4.8)$$

и разложим гамильтониан (4.4) в ряд по степеням  $e$

$$H_2 = \frac{1}{2}\omega_0(x^2 + y^2) + \sum_{n=0}^{\infty} e^n H^{(n)}, \quad \text{где } H^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2} \cos^n \nu \frac{\omega^2 - 1}{\omega} x^2. \quad (4.9)$$

Полагая, что  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ , где  $\omega_0 = \frac{N}{2}$ ,  $\Delta\omega \sim e$ , будем искать границы областей параметрического резонанса в виде рядов по степеням эксцентриситета

$$\omega = \frac{N}{2} + a_1 e + a_2 e^2 + a_3 e^3 + \dots \quad (4.10)$$

Для проведения дальнейшего анализа удобно ввести комплексно-сопряжённые переменные по формулам:

$$x = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}v_0, \quad y = \frac{1}{2}iu_0 - \frac{1}{2}iv_0, \quad (4.11)$$

где  $i$  — мнимая единица. Тогда ряд (4.9) примет вид

$$H_2 = i\omega_0 u_0 v_0 + \sum_{n=0}^{\infty} e^n H^{(n)}, \quad \text{где } H^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2} \cos^n \nu \frac{\omega^2 - 1}{\omega} i(u_0 + v_0)^2. \quad (4.12)$$

Методом Депри-Хори можно построить каноническую замену переменных  $u_0, v_0 \rightarrow u, v$ , приводящую гамильтониан  $H_2$  к виду

$$K = i\omega_0 uv + i(k_{20}e^{-2i\omega_0 v u} u^2 + k_{11}uv + k_{02}e^{2i\omega_0 v u} v^2). \quad (4.13)$$

Коэффициенты  $k_{ij}$  ( $i + j = 2$ ) — ряды по степеням эксцентриситета

$$k_{ij} = k_{ij}^{(1)}e + k_{ij}^{(2)}e^2 + k_{ij}^{(3)}e^3 + \dots, \quad (4.14)$$

где  $k_{ij}^{(n)}$  зависят от  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

С помощью замены переменных:  $u = \xi e^{i\omega_0 \nu}$ ,  $v = \eta e^{-i\omega_0 \nu}$ , нормализованный гамильтониан приводится к такому виду, когда его коэффициенты не зависят от  $\nu$

$$K_* = i(k_{20}\xi^2 + k_{11}\xi\eta + k_{02}\eta^2). \quad (4.15)$$

В действительных переменных  $X, Y$ , к которым можно перейти по формулам:

$$\xi = X - iY \quad \eta = X + iY, \quad (4.16)$$

гамильтониан (4.15) примет следующий вид

$$\Gamma = \gamma_{20}X^2 + \gamma_{11}XY + \gamma_{02}Y^2. \quad (4.17)$$

Задача об устойчивости линейной системы с исходным гамильтонианом (4.9), эквивалентна задаче об устойчивости системы с нормализованным гамильтонианом (4.17).

Характеристическое уравнение системы с нормализованным гамильтонианом (4.17) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} - \lambda^2 & \gamma_{02} \\ -\gamma_{20} & -\gamma_{11} - \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \gamma_{11}^2 + \gamma_{02}\gamma_{20} = 0. \quad (4.18)$$

Положение равновесия линейной системы устойчиво, если все корни характеристического уравнения чисто мнимые, и неустойчиво, если существует хотя

бы один корень с отличной от нуля действительной частью. Таким образом, области устойчивости положения равновесия в линейном приближении определяются неравенством

$$\gamma_{11}^2 - \gamma_{02}\gamma_{20} < 0. \quad (4.19)$$

Граничные кривые, разделяющие области устойчивости и области неустойчивости (области параметрического резонанса), задаются уравнением

$$\gamma_{11}^2 - \gamma_{02}\gamma_{20} = 0. \quad (4.20)$$

С помощью реализованного в программном пакете Maple алгоритма Де-при-Хори была выполнена нормализация гамильтониана (4.12) и вычислены явные выражения для коэффициентов гамильтониана (4.17) с точностью до членов  $e^5$  включительно, а затем из уравнения (4.20) были получены следующие выражения, определяющие границы областей параметрического резонанса в плоскости параметров  $e$  и  $Q$  ( $e \ll 1$ )

$$Q_1^{(l)} = \frac{1}{32} - \frac{3}{64}e + \frac{15}{1024}e^2 + \frac{27}{4096}e^3 + \frac{11805}{524288}e^4 + \frac{395079}{20971520}e^5, \quad (4.21)$$

$$Q_1^{(t)} = \frac{1}{32} + \frac{3}{64}e + \frac{15}{1024}e^2 - \frac{27}{4096}e^3 + \frac{11805}{524288}e^4 - \frac{395079}{20971520}e^5, \quad (4.22)$$

$$Q_2 = \frac{1}{8}, \quad (4.23)$$

$$Q_3^{(l)} = \frac{9}{32} - \frac{135}{2048}e^2 - \frac{45}{16384}e^3 - \frac{34695}{20971520}e^4 - \frac{585}{524288}e^5, \quad (4.24)$$

$$Q_3^{(t)} = \frac{9}{32} - \frac{135}{2048}e^2 + \frac{45}{16384}e^3 - \frac{34695}{20971520}e^4 + \frac{585}{524288}e^5, \quad (4.25)$$

$$Q_4 = \frac{1}{2} - \frac{3}{20}e^2 - \frac{39}{1000}e^4 - \frac{7023}{350000}e^6, \quad (4.26)$$

$$Q_5^{(l)} = \frac{25}{32} - \frac{525}{2048} e^2 - \frac{141225}{20971520} e^4 - \frac{525}{16777216} e^5, \quad (4.27)$$

$$Q_5^{(t)} = \frac{25}{32} - \frac{525}{2048} e^2 - \frac{141225}{20971520} e^4 + \frac{525}{16777216} e^5. \quad (4.28)$$

В равенствах (4.21)-(4.28)  $Q_n^{(l)}$  и  $Q_n^{(t)}$  отвечают нижней и верхней границам резонанса  $2\omega \approx N$  соответственно.

Анализ результатов численного и аналитического исследования устойчивости показал, что они хорошо согласуются. А именно, при малых значениях  $\epsilon$  выражения (4.21)-(4.28) хорошо аппроксимируют границы областей параметрического резонанса, полученные в результате численного анализа.

#### 4.4. Нелинейный анализ устойчивости

Строгие выводы об устойчивости по Ляпунову положения равновесия в ограниченной фотогравитационной задаче Ситникова могут быть получены с помощью нелинейного анализа, проведённого с учётом членов не ниже четвёртой степени в разложении гамильтониана (4.2) в ряд по степеням канонических переменных  $\zeta, p_\zeta$ .

В этом параграфе, предполагая, что параметры задачи принимают значения из областей линейной устойчивости или на их границах, мы выполним нелинейный анализ, используя метод, описанный в [30]. Этот метод применялся для исследования устойчивости в некоторых задачах небесной и классической механики (см. [7–9, 66, 67]). Главной идеей этого метода является построение симплектического отображения, порождённого системой нелинейных канонических уравнений (4.1), и исследование устойчивости его неподвижных точек. Задача устойчивости неподвижной точки данного отображения эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия системы (4.1).

Обозначим через  $\zeta^{(0)}, p_\zeta^{(0)}$  начальные значения переменных  $\zeta, p_\zeta$ , а через  $\zeta^{(1)}, p_\zeta^{(1)}$  – их значения при  $\nu = 2\pi$ . Тогда, согласно [30], симплектическое отображение примет вид

$$\left\| \begin{array}{c} \zeta^{(1)} \\ p_\zeta^{(1)} \end{array} \right\| = \mathbf{X}(2\pi) \left\| \begin{array}{c} \zeta^{(0)} - \frac{\partial S_4}{\partial p_\zeta^{(0)}} + O_4 \\ p_\zeta^{(0)} + \frac{\partial S_4}{\partial \zeta^{(0)}} + O_4 \end{array} \right\|, \quad (4.29)$$

где  $S_4 = \Phi_4(\zeta^{(0)}, p_\zeta^{(0)}, 2\pi)$ , а  $\Phi_4(\zeta^{(0)}, p_\zeta^{(0)}, \nu)$  – форма четвёртой степени, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \nu} = -G_4. \quad (4.30)$$

$G_4(\zeta^{(0)}, p_\zeta^{(0)}, \nu)$  – форма, полученная из  $H_4(\zeta, p_\zeta, \nu)$  с помощью замены переменных

$$\left\| \begin{array}{c} \zeta \\ p_\zeta \end{array} \right\| = \mathbf{X}(\nu) \left\| \begin{array}{c} \zeta^{(0)} \\ p_\zeta^{(0)} \end{array} \right\|, \quad (4.31)$$

где  $\mathbf{X}(\nu)$  – матрицант линейной системы с гамильтонианом (4.4).

Приравнивая коэффициенты при равных степенях равенства (4.30), получим пять обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов формы  $\Phi_4$ . Правые части этих уравнений зависят от элементов  $x_{ij}(\nu)$  матрицы  $\mathbf{X}(\nu)$ , и определяются в результате решения линейной системы (4.6). Таким образом, интегрируя систему из девяти уравнений (пять уравнений для коэффициентов формы  $\Phi_4$  и четыре – для элементов  $x_{ij}(\nu)$ ) на интервале  $[0; 2\pi]$ , мы получим коэффициенты формы  $S_4$ . В общем случае, указанная система может быть решена только численно.

Выполним замену переменных

$$\zeta = n_{11}Q + n_{12}P, \quad p_\zeta = n_{21}Q + n_{22}P, \quad (4.32)$$

которая нормализует линейную часть отображения (4.29). Если  $|A| < 1$ , где  $A$  – коэффициент характеристического уравнения (4.7), то коэффициенты  $n_{ij}$

( $i, j = 1, 2$ ) могут быть вычислены по формулам

$$n_{11} = x_{12}(2\pi), \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = (A - x_{11}(2\pi)), \quad n_{22} = \sqrt{1 - A^2}. \quad (4.33)$$

В новых переменных отображение (4.29) примет вид

$$\begin{pmatrix} Q^{(1)} \\ P^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} Q^{(0)} - \frac{\partial F_4}{\partial P^{(0)}} + O_4 \\ P^{(0)} + \frac{\partial F_4}{\partial Q^{(0)}} + O_4 \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

где  $F_4(Q^{(0)}, P^{(0)}) = cS_4(n_{11}Q^{(0)} + n_{12}P^{(0)}, n_{21}Q^{(0)} + n_{22}P^{(0)})$ , и  $c$  – валентность канонического преобразования (4.32), которая вычисляется по формуле  $c = (n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12})^{-1}$ .

Матрица нормализованной линейной части отображения (4.34) имеет вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

где  $\gamma = \arccos A$ .

Введём следующие обозначения:

$$\sigma = 3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}, \quad \sigma_1 = f_{22} - f_{40} - f_{04}, \quad \sigma_2 = f_{13} - f_{31},$$

где  $f_{ij}$  ( $i + j = 4$ ) – коэффициенты  $F_4$ .

Предположим, что в системе (4.6) не существует резонансов до четвёртого порядка включительно, т.е. корни характеристического уравнения (4.7) удовлетворяют неравенству  $\rho^k \neq 1$  (где  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ). Если неравенство  $\sigma \neq 0$  выполнено, то неподвижная точка отображения устойчива [30]. В противном случае, если  $\sigma = 0$ , то для получения строгих выводов об устойчивости требуется проводить нелинейный анализ с учётом членов выше четвёртой степени в разложении функции Гамильтона.

Резонансный случай требует отдельного исследования. Наиболее важными являются резонансы до четвёртого порядка включительно [29]. В рассматриваемой задаче функция Гамильтона не содержит членов третьей степени, поэтому

исследование устойчивости при резонансах третьего порядка можно выполнить в рамках анализа устойчивости в общем нерезонансном случае. Резонансы четвёртого порядка имеют место на кривых, изображённых на Рис. 4.2 пунктирными линиями. В случае резонансов четвёртого порядка выводы об устойчивости можно получить на основании следующего критерия [30]: если выполнено неравенство  $|\sigma| > \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ , то неподвижная точка устойчива, если же имеет место неравенство  $|\sigma| < \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ , то неподвижная точка неустойчива. Резонансы первого и второго порядков реализуются на границах областей неустойчивости и в данной работе не рассматривались.

Коэффициенты отображения (4.34) вычислялись численно для всех значений параметров из областей устойчивости в линейном приближении. Расчёты показали, что величина  $\sigma$  никогда не обращается в ноль, а на кривых резонанса четвёртого порядка всегда выполнено неравенство  $|\sigma| > \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . Таким образом, в областях устойчивости в линейном приближении имеет место также и устойчивость положения равновесия по Ляпунову.



## Заключение

В диссертационной работе был проведен строгий нелинейный анализ устойчивости коллинеарной точки либрации  $L_1$  в плоской ограниченной фотогравитационной задаче трех тел и получены следующие результаты.

1. Выполнен полный и строгий анализ устойчивости по Ляпунову коллинеарной точки либрации  $L_1$  в плоской круговой фотогравитационной задаче трёх тел. Установлено, что для большинства значений параметров из областей устойчивости в линейном приближении будет также иметь место и устойчивость  $L_1$  по Ляпунову. Исключение составляет множество малой меры, реализующейся на двумерных поверхностях, отвечающих резонансам третьего и четвертого порядков, а также случаю вырождения, когда вопрос об устойчивости решается членами выше четвертой степени в разложении гамильтониана возмущенного движения. Уравнение двумерной поверхности, отвечающей случаю вырождения, получено в явной аналитической форме. Установлено, что в случае резонанса третьего порядка возможна устойчивость коллинеарной точки либрации  $L_1$  по Ляпунову. Аналитически получены уравнения кривой, где имеет место устойчивость. Вне этой кривой на всей двумерной поверхности, отвечающей резонансу третьего порядка, точка либрации  $L_1$  неустойчива. При резонансе четвертого порядка было установлено, что на резонансной поверхности имеются области устойчивости по Ляпунову и области неустойчивости. Границы, разделяющие эти области, получены в явной аналитической форме. Аналогичный результат получен и в случаях резонансов первого и второго порядков, которые реализуются на границах областей устойчивости в линейном приближении. Все результаты проведенного исследования проиллюстрированы на диаграммах устойчивости.

2. Выполнено аналитическое исследование устойчивости в линейном приближении коллинеарной точки либрации  $L_1$  в плоской эллиптической ограниченной фотогравитационной задаче трех тел при малых значениях эксцентриситета орбит массивных тел. Исследовано явление параметрического резонанса, приводящее к неустойчивости. Были подробно рассмотрены резонансы как основного, так и комбинационного типа. Для каждого из резонансов аналитически построены границы областей параметрического резонанса в виде рядов по степеням эксцентриситета орбит массивных тел. Результаты проведенного аналитического исследования устойчивости полностью согласуются с результатами численного анализа. В случае равных масс и интенсивностей излучения массивных тел выполнен нелинейный анализ и получены строгие выводы о формальной устойчивости коллинеарной точки либрации  $L_1$  в нерезонансном случае. При наличии резонанса четвертого порядка установлено, что коллинеарная точка либрации  $L_1$  устойчива в приближенной нелинейной системе с учетом членов до третьей степени включительно.
3. Выполнено полное и строгое исследование устойчивости по Ляпунову положения равновесия (коллинеарной точки либрации  $L_1$ ) в фотогравитационной эллиптической задаче Ситникова. Области неустойчивости, полученные численно, представлены на диаграммах устойчивости в плоскости параметров задачи  $Q$  и  $e$ . При малых значениях эксцентриситета  $e$  орбит притягивающих тел границы областей неустойчивости получены аналитически в виде рядов по степеням  $e$ . Указано, что имеется счетное число чередующихся областей устойчивости и неустойчивости, которые асимптотически накапливаются вблизи прямой  $e = 1$  и становятся очень узкими в ее окрестности. На основании нелинейного анализа, выполненного при помощи метода симплектических отображений, показано, что вне

областей неустойчивости положение равновесия устойчиво по Ляпунову как в нерезонансном случае, так и в случаях резонансов.

## Приложение А

### Границы области параметрического резонанса

Границы области параметрического резонанса, исходящего из точки  $\left(\frac{5+\sqrt{97}}{16}, 0\right)$ , вычисленные до  $e^5$

$$\begin{aligned}
 a_+ &= \frac{5 + \sqrt{97}}{16} + \left( \frac{3}{32} + \frac{15\sqrt{97}}{3104} \right) e + \left( \frac{375}{512} - \frac{381237\sqrt{97}}{4817408} \right) e^2 + \\
 &\quad + \left( \frac{400138425\sqrt{97}}{7476617216} - \frac{4635}{8192} \right) e^3 + \left( \frac{14319146391009\sqrt{97}}{11603709919232} - \frac{1589595}{131072} \right) e^4 + \\
 &\quad + \left( \frac{52923465}{2097152} - \frac{46184227518972435\sqrt{97}}{18008957794648064} \right) e^5 + O(e^6), \\
 a_+ &= \frac{5 + \sqrt{97}}{16} - \left( \frac{3}{32} + \frac{15\sqrt{97}}{3104} \right) e + \left( \frac{375}{512} - \frac{381237\sqrt{97}}{4817408} \right) e^2 - \\
 &\quad - \left( \frac{400138425\sqrt{97}}{7476617216} - \frac{4635}{8192} \right) e^3 + \left( \frac{14319146391009\sqrt{97}}{11603709919232} - \frac{1589595}{131072} \right) e^4 - \\
 &\quad - \left( \frac{52923465}{2097152} - \frac{46184227518972435\sqrt{97}}{18008957794648064} \right) e^5 + O(e^6).
 \end{aligned}$$

## Список литературы

1. *Авдюшкин А.Н.* О параметрическом резонансе в окрестности точки либрации L1 плоской ограниченной фотогравитационной задачи трех тел // *Труды МАИ.* 2022. Т. 126.
2. *Арнольд В.И.* Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае // *Докл. АН СССР.* 1961. Т. 137, Вып. 2. С. 255–257.
3. *Арнольд В.И.* Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // *Успехи мат. наук.* 1963. Т. 18, Вып. 5 (113). С. 13–40.
4. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // *УМН.* 1963. Т. 18, Вып. 6(114). С. 91–192.
5. *Арнольд В.И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. С. 284.
6. *Асланов В.С., Нерядовская Д.В.* Тросовая система в коллинеарных точках либрации L1, L2 системы Марс-Фобос // *Труды МАИ.* 2022. Т. 122.
7. *Бардин Б.С.* Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Бобылева-Стеклова // *Нелинейная динамика.* 2009. Т. 5, 4. С. 535–550.
8. *Бардин Б.С., Савин А.А.* Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // *Нелинейная динамика.* 2012. Т. 8, 2. С. 249–266.
9. *Бардин Б.С., Савин А.А.* Об устойчивости плоских периодических движений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // *Прикладная математика и механика.* 2013. Т. 76, 7. С. 806–821.
10. *Брюно А.Д.* О формальной устойчивости систем Гамильтона // *Матема-*

- тические заметки.* 1967. Т. 1, 3. С. 325–330.
11. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М: Наука, 1990. 293 с.
  12. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: "Наука", 1978. С. 456.
  13. *Зимовщиков А.С., Тхай В.Н.* Неустойчивость точек либрации резонансные явления в фотогравитационной эллиптической ограниченной задаче трех тел // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы.* 2004. Т. 38, 2. С. 180–190.
  14. *Калас В.О., Красильников П.С.* Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в нелинейной постановке // *Нелинейная динамика.* 2015. Т. 11, 1. С. 117–126.
  15. *Кунницын А.Л.* Об устойчивости треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // *Прикладная математика и механика.* 2000. Т. 64, 5. С. 788–794.
  16. *Кунницын А.Л.* Об устойчивости коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // *Прикладная математика и механика.* 2001. Т. 65, 4. С. 720–724.
  17. *Кунницын А.Л., Турешбаев А.Т.* О коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трёх тел // *Письма в астрономический журнал.* 1983. Т. 9, Вып. 7. С. 432–435.
  18. *Кунницын А.Л., Турешбаев А.Т.* О компланарных точках либрации фотогравитационной задачи трёх тел // *Письма в астрономический журнал.* 1985. Т. 2, 12. С. 930–933.
  19. *Кунницын А.Л., Турешбаев А.Т.* Устойчивость треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // *Письма в астрономический журнал.* 1985. Т. 11, 2. С. 145–148.
  20. *Лукьянов Л.Г.* Компланарные решения в фотогравитационной ограничен-

- ной круговой задаче трех тел // *Астрономический журнал*. 1984. Т. 61, 4. С. 789–794.
21. *Лукьянов Л.Г.* Лагранжевы решения в фотогравитационной ограниченной круговой задаче трёх тел // *Астрономический журнал*. 1984. Т. 61, 3. С. 564–570.
  22. *Лукьянов Л.Г.* Об устойчивости лагранжевых точек в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел // *Астрономический журнал*. 1986. Т. 63, 6. С. 1222–1229.
  23. *Лукьянов Л.Г.* Об устойчивости компланарных точек либрации в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел // *Астрономический журнал*. 1987. Т. 64, 6. С. 1291–1299.
  24. *Лукьянов Л.Г., Кочеткова А.Ю.* Об устойчивости лагранжевых точек либрации в ограниченной эллиптической фотогравитационной задаче трех тел // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* 1996. 5. С. 71–76.
  25. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // *Собр. соч.* Т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
  26. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: "Наука", 1966. С. 530.
  27. *Маркеев А.П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса // *Прикладная математика и механика*. 1968. Т. 32, Вып. 4. С. 738–744.
  28. *Маркеев А.П.* К задаче об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // *Прикладная математика и механика*. 1970. Т. 34, Вып. 6. С. 997–1004.
  29. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: "Наука", 1978. С. 312.
  30. *Маркеев А.П.* Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // *Изв. РАН МТТ*. 2004. 6. С. 3–12.
  31. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об

- устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. С. 396.
32. *Пережогин А.А.* Устойчивость шестой и седьмой точек либрации в фотогравитационной ограниченной круговой задаче трех тел // *Письма в Астр. журн.* 1976. Т. 2, 9. С. 448–451.
33. *Пережогин А.А.* Об устойчивости точек либрации в фотогравитационной ограниченной круговой задаче трех тел // *Письма в Астр. журн.* 1980. Т. 6, 5. С. 314–317.
34. *Пережогин А.А.* Об устойчивости точек либрации в ограниченной фотогравитационной круговой задаче трех тел // *Космич. исследования.* 1982. Т. 20, 2. С. 196–215.
35. *Пережогин А.А., Турешбаев А.Г.* Об устойчивости треугольных точек либрации в фотогравитационной задаче трех тел // *Письма в Астр. журн.* 1987. Т. 13, 4. С. 338–344.
36. *Пережогин А.А., Турешбаев А.Т.* О компланарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // *Астрономический журнал.* 1989. Т. 66, 4. С. 859–865.
37. *Радзиевский В.В.* Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления // *Астрономический журнал.* 1950. Т. 27, 4. С. 250–256.
38. *Радзиевский В.В.* Пространственный случай ограниченной задачи трех излучающих и гравитирующих тел // *Астрономический журнал.* 1953. Т. 30, 3. С. 265–273.
39. *Ситников К.А.* Существование осциллирующих движений в задаче трёх тел // *Доклады Академии наук СССР.* 1960. Т. 133, 2. С. 303–306.
40. *Сокольский А.Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот // *Прикладная математика и механика.* 1974. Т. 38, Вып. 5. С. 791–799.



41. *Сокольский А.Г.* Об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел при критическом отношении масс // *Прикладная математика и механика*. 1975. Т. 39, Вып. 2. С. 366–369.
42. *Сокольский А.Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // *Прикладная математика и механика*. 1977. Т. 41, Вып. 1. С. 24–33.
43. *Тхай В.Н., Зимовщиков А.С.* О возможности существования облачных скоплений микрочастиц в точках либрации двойной звезды // *Астрономический журнал*. 2009. Т. 86, Вып. 6. С. 598–606.
44. *Тхай В.Н., Зимовщиков А.С.* Диаграммы устойчивости для гетерогенного ансамбля частиц в коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // *Прикладная математика и механика*. 2010. Т. 74, Вып. 2. С. 221–229.
45. *Тхай Н.В.* Периодические движения обратимой механической системы второго порядка. Приложение к задаче Ситникова // *Прикладная математика и механика*. 2006. Т. 70, 5. С. 813–834.
46. *Тхай Н.В.* Устойчивость коллинеарных точек либрации при внутреннем резонансе третьего порядка // *Автоматика и телемеханика*. 2011. Т. 9. С. 121–126.
47. *Тхай Н.В.* Устойчивость коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел при внутреннем резонансе четвертого порядка // *Прикладная математика и механика*. 2012. Т. 76, Вып. 4. С. 610–615.
48. *Черников Ю.А.* Фотогравитационная ограниченная задача трех тел // *Астрономический журнал*. 1970. Т. 47, 1. С. 217–223.
49. *Якубович В.Я., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.:Наука, 1987. 328 с.
50. *Abouelmagd E., Guirao J.* On the perturbed restricted three-body problem // *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*. 2016. V. 1. P. 118–139.

51. *Abouelmagd E. I.* The effect of photogravitational force and oblateness in the perturbed restricted three-body problem // *Astrophysics and Space Science*. 2013. V. 346, no. 1. P. 51–69.
52. *Abouelmagd E. I., El-Shaboury S. M.* Periodic orbits under combined effects of oblateness and radiation in the restricted problem of three bodies // *Astrophysics and Space Science*. 2012. V. 341, no. 2. P. 331–341.
53. *Aggarwal R., Taqvi Z., Ahmad I.* Non-linear stability of L4 in the restricted three body problem for radiated axes symmetric primaries with resonances // *Bull. Astr. Soc. India*. 2006. V. 34, no. 4. P. 327–356.
54. *Alamri S. Z., El-Bar S. E. A., Seadawy A. R.* The collinear equilibrium points in the restricted three body problem with triaxial primaries // *Open Physics*. 2018. V. 16, no. 1. P. 525–538.
55. *Alvarez-Ramirez M., Formiga J.K., de Moraes R.V. et al.* The stability of the triangular libration points for the plane circular restricted three-body problem with light pressure // *Astrophysics and Space Science*. 2014. V. 351. P. 101–112.
56. *Alzahrani F., Abouelmagd E. I., Guirao J. L. G., Hobiny A.* On the libration collinear points in the restricted three-body problem // *Open Physics*. 2017. V. 15, no. 1. P. 58–67.
57. *Aslanov V.S.* Prospects of a tether system deployed at the L1 libration point // *Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 106. P. 2021–2033.
58. *Aslanov V.S.* Prospects of phobos sample return mission using electrostatic container // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2021. V. 58, no. 6. P. 1799–1805.
59. *Aslanov V.S.* A splitting of collinear libration points in circular restricted three-body problem by an artificial electrostatic field // *Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 103. P. 2451–2460.
60. *Aslanov V.S.* Capture trajectories into vicinity of collinear libration points by variable electrostatic field // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2022. V. 59,

- no. 3. P. 1039–1043.
61. *Bardin B. S., Avdushkin A. N.* Stability analysis of an equilibrium position in the photogravitational Sitnikov problem // *AIP Conference Proceedings*. 2018. V. 1959, no. 1. P. 040002.
  62. *Bardin B. S., Avdyushkin A. N.* Stability of the collinear point L1 in the planar restricted photogravitational three-body problem in the case of equal masses of primaries // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. V. 927, no. 1. P. 012015.
  63. *Bardin B. S., Avdyushkin A. N.* Nonlinear stability analysis of a collinear libration point in the planar circular restricted photogravitational three-body problem // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. V. 1925, no. 1. P.012018.
  64. *Bardin B. S., Avdyushkin A. N.* On stability of a collinear libration point in the planar circular restricted photogravitational three-body problem in the cases of first and second order resonances // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. —jul. V. 1959, no. 1. P. 012004.
  65. *Bardin B. S., Avdyushkin A. N.* On stability of the collinear libration point L1 in the planar restricted circular photogravitational three-body problem // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2022. V. 18, no. 4. P. 543–562.
  66. *Bardin B.S., Chekina E.A., Chekin A.M.* On the stability of a planar resonant rotation of a satellite in an elliptic orbit // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. V. 20, no. 1. P. 63–73.
  67. *Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A.* On the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body in the Bobilev-Steklov case // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2012. V. 17, no. 6. P. 533–546.
  68. *Birkhoff G.D.* Dynamical systems. N. Y.: American Mathematical Society, 1927.
  69. *El-Shaboury S. M.* Existence of libration points in the restricted problem of

- three bodies with radiation pressure // *Earth, Moon, and Planets*. 1990. V. 48, no. 3. P. 233–242.
70. *El-Shaboury S. M.* The libration points of a spherical satellite in the photogravitational restricted problem of three bodies // *Earth, Moon, and Planets*. 1990. V. 49, no. 3. P. 205–210.
71. *El-Shaboury S. M.* The libration points of a triaxial satellite in the photogravitational restricted problem of 3 bodies // *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 1992. V. 22, no. 8. P. 703–712.
72. *El-Shaboury S. M., Zaky S. A.* The perturbing effects on the planetary satellite // *Earth, Moon, and Planets*. 1991. V. 53, no. 2. P. 117–125.
73. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum // *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* 1767. V. 11. P. 144–151.
74. *Giacaglia G. E. O.* Perturbation methods in non-linear systems. Springer New York, NY, 1972. P. 369.
75. *Glimm J.* Formal stability of Hamiltonian systems // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1964. V. 17. P. 509–526.
76. *Gozdziewski K., Maciejewski A. J., Niedzielska Z.* About stability of libration points in the restricted photogravitational three body problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1991. V. 52, no. 2. P. 195–201.
77. *Hallan P. P., Jain Sanjay, Bhatnagar K.B.* The non-linear stability of L4 in the restricted three-body problem when the bigger primary is a triaxial rigid body // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2000. V. 77, no. 3. P. 157–184.
78. *Kumar V., Choudhry R. K.* On the stability of the triangular libration points for the photogravitational circular restricted problem of three bodies when both of the attracting bodies are radiating as well // *Celestial Mechanics*. 1987. V. 40, no. 2. P. 155–170.
79. *Kumar V., Choudhry R. K.* On the stability of the triangular libration points

- for the photogravitational circular restricted problem of three bodies under the resonances of the third and the fourth order // *Celestial Mechanics*. 1987. V. 41. P. 161–173.
80. *Kumar V., Choudhry R. K.* Nonlinear stability of the triangular libration points for the photo gravitational elliptic restricted problem of three bodies // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1990. V. 48, no. 4. P. 299–317.
81. *Kumar V., Choudhry R. K.* Existence of libration points in the generalised photogravitational restricted problem of three bodies // *Celestial Mechanics*. 1986. V. 39, no. 2. P. 159–171.
82. *Kunitsyn A. L., Perezhogin A. A.* On the stability of triangular libration points of the photogravitational restricted circular three-body problem // *Celestial Mechanics*. 1978. V. 18, no. 4. P. 395–408.
83. *Kunitsyn A. L., Tureshbaev A. T.* On the collinear libration points in the photo-gravitational three-body problem // *Celestial Mechanics*. 1985. V. 35. P. 105–112.
84. *Kunitsyn A.L. and Polyakhova E.N.* The restricted photogravitational three-body problem: A modern state // *Astronomical and Astrophysical Transactions*. 1995. V. 6, no. 4. P. 283–293.
85. *Lerman L.M., Markova A.P.* On stability at the Hamiltonian Hopf bifurcation // *Regul. Chaotic Dyn.* 2009. V. 14, no. 1. P. 148–162.
86. *Manju, Choudhry R. K.* On the stability of triangular libration points taking into account the light pressure for the circular restricted problem of three bodies // *Celestial Mechanics*. 1985. V. 36. P. 165–190.
87. *Markeev A.P., Bardin B.S.* On the stability of planar oscillations and rotations of a satellite in a circular orbit // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2003. no. 85. P. 51–66.
88. *Martinez-Alfaro J., Chiralt C.* Invariant rotational curves in Sitnikov's problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1993. V. 55.

- P. 351–367.
89. *Matas V.* Perturbation of libration points of the restricted three-body problem due to gravitational and radiative influence of a fourth body. Existence of a periodic solution in the vicinity of the libration points // *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*. 1969. V. 20, no. 6. P. 322.
  90. *Matas V.* Periodic perturbation of the libration points of the restricted three-body problem due to the presence of a resisting medium and both gravitational and radiative fields of a fourth body. // *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*. 1972. V. 23, no. 5. P. 262–265.
  91. *Matas V.* A generalization as to periodic solutions of disturbed elliptic restricted three-body problem // *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*. 1975. V. 26, no. 1. P. 30–33.
  92. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems // *Communs. Pure Appl. Math.* 1958. V. 11, no. 1. P. 81–114.
  93. *Moulton F. R.* An Introduction to Celestial Mechanics. New York: Macmillan Company, 1960. P. 455.
  94. *Niedzielska Z.* Nonlinear stability of the libration points in the photogravitational restricted three body problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1994. V. 58. P. 203–213.
  95. *Schuerman D.W.* The effect of radiation pressure on the restricted three-body problem // *Solid Particles in the Solar System*. 1980. V. 90. P. 285–288.
  96. *Schuerman D.W.* The restricted three body problem including radiation pressure // *The Astrophysical Journal*. 1980. V. 238, no. 1. P. 337–342.
  97. *Selim H. H., Guirao J. L. G., Abouelmagd E. I.* Libration points in the restricted three-body problem: Euler angles, existence and stability // *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*. 2019. V. 12, no. 4-5. P. 703–710.
  98. *Sharma R.* The linear stability of libration points of the photogravitational restricted three-body problem when the smaller primary is an oblate spheroid //

- Astrophysics and Space Science*. 1987. V. 135, no. 2. P. 271–281.
99. *Siegel C. L., Moser J. K.* Lectures on Celestial Mechanics. Springer New York, NY, 1971. P. 290.
100. *Simmons J.F.L., McDonald A.J.C., Brown J.C.* The restricted 3-body problem with radiation pressure // *Celestial Mechanics*. 1985. V. 35, no. 2. P. 145–187.
101. *Singh N. and Narayan A.* Analysis on nonlinear stability of the triangular libration points for radiating and oblate primaries in ER3BP // *International Journal of Advanced Astronomy*. 2017. V. 5, no. 1. P. 50.
102. *Tureshbaev A. T. and Polyakhova E. N.* Stability of collinear libration points in the three-body photogravitational problem under internal resonance // 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy’s Conference). 2022. P. 1–3.
103. *Xue-tang Z., Li-zhong Y., Yi-ping Q.* The libration points in photogravitational restricted three-body problem // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1994. V. 15. P. 771–777.