На правах рукописи

Урюпин Илья Вадимович

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Специальность 2.3.1

Системный анализ, управление и обработка информации

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена на кафедре «Математическая кибернетика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель:	**Бортаковский Александр Сергеевич** доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Математическая кибернетика» ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»
Официальные оппоненты:	**Канатников Анатолий Николаевич** доктор физико-математических наук, доцент, профессор, кафедры «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
	Румянцев Дмитрий Станиславович кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории «Оптимальных управляемых систем имени В. Ф. Кротова» ИПУ имени В.А. Трапезникова РАН
Ведущая организация:	ФГБУН Институт программных систем имени А.К. Айламазяна РАН

Защита состоится «17» июня 2022 г. в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.2.327.02 федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д.4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д.4 или на сайте: https://mai.ru

Автореферат разослан «___» _______ 2022 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
24.2.327.02, к.ф.-м.н. В.А. Рассказова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена разработке методов и алгоритмов оптимизации управляемых гибридных систем, функционирующих с мгновенными многократными переключениями, а также их применению в актуальных приложениях в области авиационной и ракетно-космической техники.

Актуальность работы. Важным направлением современного развития теории и практики оптимального управления является исследование и применение гибридных систем (ГС). Переключаемые системы (ПС) представляют собой обширный класс ГС, включающий непрерывно-дискретные системы (НДС), динамические системы с автоматной частью, дискретные системы автоматного типа и другие. Процессы управления в таких системах имеют непрерывно-дискретный характер. ГС имеют широкое применение в авиационной и космической областях, ракетной и роботизированной технике, т.е. напрямую связаны с автоматизацией процессов управления. В ПС непрерывное изменение состояния описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные дискретные изменения состояния (переключения) – рекуррентными уравнениями. Моменты переключений, а также их количество заранее не заданы. Качество управления одной траекторией характеризуется функционалом, в котором учитываются затраты на каждое переключение. При этом, не исключаются многократные переключения в фиксированный момент времени. Исследованию ГС и ПС посвящены работы Аграчева А.А., Болтянского В.Г., Бортаковского А.С., Гурмана В.И., Дмитрука А.В., Дыхты В.А., Миллера Б.М., Расины И.В., Axelsson H., Boccadoro M., Branicky M.S., Egerstedt M., Hedlund S., Li Z., Heemels W., Liberzon D., Lu J., Park Ju.W., Rantzer A., Riedinger P., Silva G.N., Soh Y., Sussmann H.J., Valigi P., Wardi Y., Wen C., Zefran M., Zheng G. и других ученых.

В диссертации исследуются задачи оптимизации ПС. Вопросы оптимизации ПС могут возникать в ходе проектирования систем управления подвижными объектами, в частности летательными или космическими аппаратами. Одной из новых проблем, связанных с ПС, являются задачи оптимизации количества переключений. В работе рассматриваются задачи минимизации количества переключений таких систем.

Несмотря на большой объем исследований ПС, проблемы, связанные с минимизацией количества переключений, ранее не исследовались. Теория и численные методы решения этих задач фактически не разработаны. Эти проблемы имеют также и практический интерес. Они возникают в прикладных задачах, в которых число переключений определяется техническими требованиями. Например, при управлении космическими аппаратами (КА) количество включений и выключений двигателя конструктивно ограничено. Минимизация количества переключений актуальна в задачах быстродействия, планирования и оптимизации маршрутов движения управляемых объектов. Кроме того, ряд задач, связанных с аппроксимацией функций, сводится к задачам оптимального управления ПС, при этом требование минимизации количества переключений становится важным для численного решения.

Таким образом, проблема минимизации количества переключений представляется актуальной с практической и теоретической точки зрения. Необходимость исследований определяется современными задачами проектирования сложных многорежимных авиационных и ракетно-космических систем, допускающих мгновенные многократные переключения. Полученные результаты имеют теоретическую и практическую направленность и могут быть использованы при создании прикладных систем автоматического управления.

Целью работы является разработка методов и алгоритмов оптимизации управляемых гибридных систем, функционирующих с мгновенными многократными переключениями, а также их применение в актуальных приложениях в области авиационной и ракетно-космической техники.

В диссертации решаются задачи:

1) минимизации количества переключений в линейно-квадратичной задаче синтеза оптимального управления гибридной системой;
2) минимизации количества переключений оптимальных кусочно-постоянных управлений для приближенного решения задачи оптимального кусочно-непрерывного управления динамическими системами;
3) планирования и оптимизации траекторий Маркова-Дубинса плоского движения летательного аппарата с промежуточными условиями и при наличии препятствий;
4) разработки алгоритмов и программных комплексов для численного решения задач оптимального управления ПС.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались: математическая теория управления, теория дифференциальных уравнений, системный анализ, теория оптимизации, численные методы. Для разработки программного комплекса и проведения вычислительных экспериментов использовались современные компьютерные технологии.

Научная новизна. В диссертационной работе получены новые результаты: разработаны алгоритм и программный комплекс решения ЛКЗ синтеза оптимального управления переключаемыми системами; доказаны необходимые условия оптимальности кусочно-постоянного управления непрерывными системами; разработаны численно-аналитические методы минимизации количества переключений оптимальных кусочно-постоянных управлений для приближенного решения задачи оптимального управления непрерывными системами; доказаны необходимые условия оптимальности траектории Маркова-Дубинса с промежуточными условиями; разработаны алгоритм и программный комплекс для решения задачи планирования и оптимизации траекторий Маркова-Дубинса плоского движения ЛА с промежуточными условиями и при наличии препятствий.

Практическая значимость. В диссертации разработаны алгоритмы решения задач анализа и синтеза оптимального управления ПС с учетом минимизации количества переключений, которые могут быть применимы в авиационной и космической областях, а также в робототехнике. Разработаны и зарегистрированы два комплекса программ: синтез оптимальной переключаемой системы с обменом каналов управления (свидетельство о государственной регистрации №2019614061 от 27 марта 2019 г.), оптимизация маршрута непрерывно-дискретного движения управляемого объекта при наличии препятствий (свидетельство о государственной регистрации №2021619328 от 8 июня 2021 г.).

Достоверность результатов. Разработанные алгоритмы имеют строгое теоретическое обоснование. Диссертация содержит приближенные и аналитические решения академических примеров, демонстрирующих эффективность предлагаемых алгоритмов.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на восьми научных конференциях [7-14]. На XLV и XLVI Международных молодежных научных конференциях «Гагаринские чтения» в секции «Теория управления и оптимизация» представленные работы заняли I места в 2019 и 2020 годах. Работа выполнялась и докладывалась на кафедре "Математическая кибернетика" Московского авиационного института (национального исследовательского университета). Представленные в диссертационной работе результаты получены в научно-исследовательских работах, поддержанных грантом РФФИ №18-08-00128-а «Методы оценивания состояния и синтеза переключаемых систем управления подвижными объектами в конфликтной среде при ограниченных ресурсах».

Личный вклад. Все излагаемые в диссертации результаты получены лично автором. Научному руководителю принадлежат постановки исследуемых задач и условия оптимальности переключаемых систем.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в шести статьях [1-6] и журналах, входящих в Перечень ВАК, в том числе две статьи [3, 5] опубликованы в журналах, индексируемых в международных базах Web of Science и SCOPUS, а также в трудах научных конференций [7-14]. Получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ [15, 16]. Всего по теме диссертации опубликовано 16 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов основной части, заключения, списка использованных источников (153 наименования). Работа изложена на 97 страницах и содержит 23 иллюстрации и 1 таблицу.

Диссертационная работа соответствует паспорту специальности 2.3.1 (области исследования 1, 2, 4).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обзор известных методов и задач управления ГС, указана область проведенных исследований, обоснованы их научная новизна и актуальность, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, представлены положения, выносимые на защиту, описана структура диссертации.

В первом разделе рассмотрена задача оптимизации непрерывно-дискретных управляемых процессов с мгновенными многократными переключениями [3].

В разделе 1.1 поставлены следующие задачи. Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений в моменты времени t_i, $i = 1, \ldots, N$, образующие неубывающую конечную последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$:

$$t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_N \le t_{N+1} \triangleq t_F. \qquad (1)$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \qquad (2)$$

а в моменты переключений – дискретно в соответствии с рекуррентным уравнением

$$x_i = g(t_i, x_{i-}, v_i), \quad i = 1, \ldots, N. \qquad (3)$$

В соотношениях (2) обозначены: $\mathcal{N} \triangleq \{i = 0,1, \ldots, N | t_i < t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i \triangleq [t_i, t_{i+1})$ непрерывного движения системы; $x(t)$ – состояние системы в момент времени $t \in T_i$, $i \in \mathcal{N}$, $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$; $u(t)$ – управление непрерывным движением системы в момент времени $t \in T$, $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^p$. Для краткости изложения теоретико-функциональные требования к встречающимся функциям, а также некоторые дополнительные предположения и ограничения в автореферате опускаются.

В уравнении (3) $x_i \triangleq x(t_i)$ – состояние системы сразу после i – го переключения, x_{i-} – состояние системы непосредственно перед i -м переключением:

$$x_{i-} \triangleq \begin{cases} x(t_i - 0), & t_{i-1} < t_i, \\ x_{i-1}, & t_{i-1} = t_i; \end{cases}$$

v_i – управление переключением системы в момент $t_i \in \mathcal{T}$, $v_i \in V \subseteq \mathbb{R}^q$; возможное равенство $t_i = t_{i-1}$ в (1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения. Начальное состояние системы $x(t_0) = x_0$ задано, момент t_F окончания процесса управления задан, а конечное состояние свободно.

Управление в таких системах представляет собой целый *«управляющий комплекс»*, включающий количество переключений N, моменты переключений $\mathcal{T}$, управление $u(\cdot)$ непрерывным движением между переключениями и управление $\{v\}$ переключениями. Обозначим через $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ множество допустимых процессов $d = (\mathcal{T}, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$, включающих «управляющий комплекс» и соответствующую ему траекторию $x(\cdot)$.

На множестве $\mathcal{D}(t_0, x_0)$ допустимых процессов задан функционал качества

$$I(t_0, x_0, d) = \int_{t_0}^{t_F} f^0\big(t, x(t), u(t)\big)dt + \sum_{i=1}^{N} g^+(t_i, x_{i-}, v_i) + F\big(x(t_F)\big), \qquad (4)$$

где $g^+(t_i, x_{i-}, v_i)$ – неотрицательная функция, определяющая затраты при переключении $x_{i-} \to x_i$. В функционале (4) количество переключений N и моменты переключений не заданы, а находятся в результате оптимизации.

В задаче *оптимального управления* требуется найти минимальное значение функционала (4) и оптимальный процесс $d^* \in \mathcal{D}(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0)} I(t_0, x_0, d). \qquad (5)$$

В задаче *оптимального управления с фиксированным числом переключений* N требуется найти минимальное значение функционала (4) на множестве $\mathcal{D}_N(t_0, x_0)$ и процесс $d^N \in \mathcal{D}_N(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I_N(t_0, x_0, d^N) = \min_{d \in \mathcal{D}_N(t_0, x_0)} I_N(t_0, x_0, d).$$

Здесь $\mathcal{D}_N$ и I_N – соответственно множество допустимых процессов из $\mathcal{D}$ и функционал (4) с фиксированным количеством переключений N. Процесс d^N будем называть *условно оптимальным*, имея в виду его оптимальность при дополнительном условии – заданном количестве переключений N.

В задаче *минимизации количества переключений* требуется найти минимальное количество переключений N^ε, при котором наименьшее значение функционала $I_{N^\varepsilon}(t_0, x_0, d)$ не превосходит заданного параметра ε:

$$\min_{d \in \mathcal{D}_{N^\varepsilon}(t_0, x_0)} I_{N^\varepsilon}(t_0, x_0, d) \le \varepsilon. \tag{6}$$

В *линейно-квадратичной задаче оптимального управления* уравнения движения (2), (3) системы линейные:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \;\; t \in T_i, \;\; i \in \mathcal{N},$$
$$x_i = A_{t_i} x_{i-} + B_{t_i} v_i, \;\; i = 1, \ldots, N,$$

а функционал (4) – квадратичный:

$$I(t_0, x_0, d) = \int_{t_0}^{t_F} \left\{ \frac{1}{2} x^T(t) C(t) x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) D(t) u(t) \right\} dt +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \left\{ \lambda_{t_i} + \frac{1}{2} x_i^T C_{t_i} x_i + \frac{1}{2} v_i^T D_{t_i} v_i \right\} + \frac{1}{2} x^T(t_F) F x(t_F) \to \min. \tag{7}$$

Ограничений на состояние системы и на значения управления нет. Все матрицы соответствующих размеров, причем симметрические матрицы C, F – неотрицательно определенные, а матрицы D – положительно определенные. Величина λ_t неотрицательная при всех $t \in T$. *Линейно-квадратичная задача минимизации количества переключений* формулируется аналогично (6).

В разделе 1.2 диссертационной работы рассматривается задача минимизации функционала оставшихся потерь $I(t, x, d)$ на множестве допустимых процессов $\mathcal{D}(t, x)$. Эта задача отличается от (5) начальной позицией $(t, x) \in T \times X$.

Функция цены $\varphi(t, x)$ по определению равна значению функционала оставшихся потерь:

$$\varphi(t, x) = \min_{d \in \mathcal{D}(t, x)} I(t, x, d).$$

Образующая функции цены $\varphi^k(t, x)$ по определению равна значению функционала оставшихся потерь на оптимальном процессе с k оставшимися переключениями:

$$\varphi^k(t, x) = \min_{d \in \mathcal{D}_k(t, x)} I_k(t, x, d).$$

Функцию $\phi(t, x | t_1, \ldots, t_k)$, равную значению функционала оставшихся потерь на оптимальной траектории с k оставшимися переключениями, которые происходят в моменты времени $t_1, \ldots, t_k$, назовем k *-моментной функцией цены*. Если обозначить через $\mathcal{D}(t, x | t_1, \ldots, t_k)$

множество допустимых процессов из $\mathcal{D}_k(t,x)$ с k переключениями в моменты времени $t_1,\ldots,t_k$, то $\phi(t,x|t_1,\ldots,t_k) = \min\limits_{d\in\mathcal{D}(t,x|t_1,\ldots,t_k)} I_k(t,x,d)$. По определению полагаем, что $\phi(t,x) = \varphi^0(t,x)$.

Согласно определениям, функция цены является нижней огибающей своих образующих

$$\varphi(t,x) = \min_{k\in\mathbb{Z}_+} \varphi^k(t,x); \tag{8}$$

образующая связана с моментной функцией цены равенством

$$\varphi^k(t,x) = \min_{t\le t_1\le\cdots\le t_k\le t_F} \phi(t,x|t_1,\ldots,t_k); \tag{9}$$

функция цены выражается через моментные функции

$$\varphi(t,x) = \min_{k\in\mathbb{Z}_+} \min_{t\le t_1\le\cdots\le t_k\le t_F} \phi(t,x|t_1,\ldots,t_k); \tag{10}$$

наименьшие значение функционала оставшихся потерь вычисляется по формуле

$$\min_{d\in\mathcal{D}(t,x)} I(t,x,d) = \varphi(t,x) = \min_{k\in\mathbb{Z}_+} \min_{t\le t_1\le\ldots\le t_k\le t_F} \phi(t,x|t_1,\ldots,t_k).$$

В разделе 1.3 представлены уравнения для моментных функций цены. Нулевая образующая, или 0-моментная функция цены ($\phi(t,x) = \varphi^0(t,x)$), находится как решение уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\min_{u\in U}[\ \phi_t(t,x) + \phi_x(t,x)f(t,x,u) + f^0(t,x,u)] = 0 \tag{11}$$

с терминальным условием $\phi(t_F,x) = F(x)$.

Остальные моментные функции находятся рекуррентным образом. Пусть известна $(k-1)$ моментная функция цены $\phi(t,x|t_1,\ldots,t_{k-1})$. Следующая k-моментная функция $\phi(t,x|t_1,\ldots,t_k)$ удовлетворяет уравнению

$$\min_{u\in U}[\ \phi_t(t,x|t_1,\ldots,t_k) + \phi_x(t,x|t_1,\ldots,t_k)f(t,x,u) + f^0(t,x,u)] = 0 \tag{12}$$

с терминальным условием

$$\phi(t_1,x|t_1,\ldots,t_k) = \min_{v\in V}[\phi(t_1,g(t_1,x,v)|t_2,\ldots,t_k) + g^+(t_1,x,v)] \tag{13}$$

для всех $(t,x)\in T\times X$, $t\le t_1\le\ldots\le t_k\le t_F$.

Для построения моментных функций цены можно использовать решение вспомогательной задачи Больца

$$\dot{x}(t) = f\big(t,x(t),u(t)\big),\ \ u(t)\in U,\ \ t_0\le t\le t_1, \qquad x(t_0) = x_0,$$
$$I = \int_{t_0}^{t_1} f^0\big(t,x(t),u(t)\big)dt + F\big(x(t_1)\big) \to \min. \tag{14}$$

В этой задаче начальная позиция и момент окончания процесса управления заданы, а конечное состояние – свободно. Обозначим ее решение через $\boldsymbol{\phi}(t_0,x_0|t_1,F(\cdot))$, подчеркивая зависимость от терминального члена функционала (14). Для ЛКЗ решение задачи Больца (14) известно.

Выразим моментные функции цены через $\boldsymbol{\phi}$. Для 0-моментной функции цены $\phi(t,x)$ (или нулевой образующей $\varphi^0(t,x)$) по определению имеем

$$\phi(t,x) = \varphi^0(t,x) = \boldsymbol{\phi}\big(t_0,x_0\big|t_1,F(\cdot)\big);$$

Для k-моментной функции цены $\phi(t,x|t_1,\ldots,t_k)$ имеем: в момент $t=t_1$ первого из k оставшихся переключений

$$\phi(t_1, x|t_1, \dots, t_k) = \min_{v \in V}[\phi(t_1, g(t_1, x, v)|t_2, \dots, t_k) + g^+(t_1, x, v)],\ k = 1,2, \dots$$

до момента первого переключения (при $t_0 \le t < t_1$):

$$\phi(t, x|t_1, \dots, t_k) = \boldsymbol{\phi}\big(t, x|t_1, \phi(t_1, \cdot\, |t_1, \dots, t_k)\big),\ k = 1,2, \dots .$$

При решении уравнений (8) – (13) выполняются пять операций минимизации, при этом определяются позиционные конструкции: оптимальное позиционное управление

$$\boldsymbol{u}(t, x) = \operatorname*{argmin}_{u \in U}[\ \phi_t(t, x) + \phi_x(t, x) f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] \tag{15}$$

непрерывным движением при отсутствии переключений;

условное позиционное управление

$$\boldsymbol{u}(t, x|t_1, \dots, t_k) = \operatorname*{argmin}_{u \in U}[\ \phi_t(t, x|t_1, \dots, t_k) + \phi_x(t, x|t_1, \dots, t_k) f(t, x, u) + f^0(t, x, u)]; \tag{16}$$

оптимальное позиционное управление первым переключением системы из k оставшихся:

$$\boldsymbol{v}(t_1, x|t_2, \dots, t_k) = \operatorname*{argmin}_{v \in V}[\phi(t_1, g(t_1, x, v)|t_2, \dots, t_k) + g^+(t_1, x, v)]; \tag{17}$$

оптимальные моменты оставшихся k переключений:

$$\{\boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_k\} = \operatorname*{argmin}_{t \le t_1 \le \dots \le t_k \le t_F} \phi(t, x|t_1, \dots, t_k). \tag{18}$$

Точки минимума (15) – (18) находятся при дополнительном условии – заданном количестве k оставшихся переключений, а оптимальное количество переключений определяется в результате минимизации (8) или (10):

$$\boldsymbol{k}(t, x) = \operatorname*{argmin}_{k \in \mathbb{Z}_+} \min_{t \le t_1 \le \dots \le t_k \le t_F} \phi(t, x|t_1, \dots, t_k). \tag{19}$$

Позиционные конструкции (15) – (19) представляют собой оптимальный «управляющий комплекс», позволяющий найти оптимальный процесс, исходящий из позиции $(t, x) \in T \times X$.

Алгоритм синтеза оптимального «управляющего комплекса»

Ш а г 0. Решая уравнение

$$\min_{u \in U}[\ \phi_t(t, x) + \phi_x(t, x) f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] = 0$$

с терминальным условием $\phi(t_F, x) = F(x)$, находим 0-моментную функцию цены $\phi(t, x)$ и оптимальное позиционное управление непрерывным движением системы

$$\boldsymbol{u}(t, x) = \operatorname*{argmin}_{u \in U}[\ \phi_t(t, x) + \phi_x(t, x) f(t, x, u) + f^0(t, x, u)].$$

Полагая $k = 1$, переходим к шагу k.

Ш а г k. Решая рекуррентное уравнение

$$\phi(t_1, x|t_1, \dots, t_k) = \min_{v \in V}[\phi(t_1, g(t_1, x, v)|t_2, \dots, t_k) + g^+(t_1, x, v)], \tag{20}$$

выражаем позиционное управление первым из оставшихся k переключений

$$\boldsymbol{v}(t_1, x|t_2, \dots, t_k) = \operatorname*{argmin}_{v \in V}[\phi(t_1, g(t_1, x, v)|t_2, \dots, t_k) + g^+(t_1, x, v)].$$

Решая уравнение

$$\min_{u \in U}[\ \phi_t(t, x|t_1, \dots, t_k) + \phi_x(t, x|t_1, \dots, t_k) f(t, x, u) + f^0(t, x, u)] = 0$$

с терминальным условием (20), находим k -моментную функцию цены $\phi(t,x|t_1,\dots,t_k)$ и оптимальное позиционное управление непрерывным изменением состояния системы до первого из оставшихся k переключений:

$$\boldsymbol{u}(t,x|t_1,\dots,t_k) = \operatorname*{argmin}_{u\in U}[\ \phi_t(t,x|t_1,\dots,t_k) + \phi_x(t,x|t_1,\dots,t_k)f(t,x,u) + f^0(t,x,u)].$$

Проверяем условие окончания. Таких условий может быть несколько. Общим условием окончания синтеза служит неравенство

$$\min_{t\le t_1\le\cdots\le t_{k-1}\le t_F}\phi(t,x|t_1,\dots,t_{k-1}) \le \min_{t\le t_1\le\cdots\le t_k\le t_F}\phi(t,x|t_1,\dots,t_k),$$

если оно выполняется для всех позиций $(t,x)\in T\times X$. При решении задачи минимизации количества переключений условием окончания служит неравенство (6), которое можно записать при помощи k -моментной функции цены: $\min\limits_{t_0\le t_1\le\cdots\le t_k\le t_F}\phi(t_0,x_0|t_1,\dots,t_k)\le\varepsilon.$

Если неравенство выполняется, то большего, чем k, количества переключений не требуется.

Таким образом, если условие окончания выполняется, то процедура синтеза заканчивается, в противном случае полагаем $k := k+1$ и переходим к шагу k. Минимальное значение функционала качества (4) с не более чем N переключениями вычисляется по формуле

$$\min I\,(t_0,x_0,d) = \min_{k=0,\dots,N}\ \min_{t_0\le t_1\le\dots\le t_k\le t_F}\phi(t_0,x_0|t_1,\dots,t_k).$$

Алгоритм синтеза оптимального «управляющего комплекса» в линейно-квадратичной задаче

В отличие от предыдущего алгоритма процедура синтеза «управляющего комплекса» оптимальных позиционных конструкций для ЛКЗ является численно-аналитической. Оптимальные позиционные управления непрерывным движением и скачками выражаются аналитически через моментные функции цены в форме линейных регуляторов, а моменты переключений находятся численно.

Пусть известно решение $\boldsymbol{\phi}\big(t_0,x_0\big|t_1,F(\cdot)\big) = \frac{1}{2}x_0^T\Phi(t|t_1,F)x_0+\lambda$ вспомогательной ЛКЗ Больца. Матрица Φ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати

$$\dot\Phi(t)+A^T(t)\Phi(t)+\Phi(t)A(t)+C(t)-\Phi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\Phi(t)=0$$

с терминальным условием $\Phi(t_1)=F$, а оптимальное управление линейное $\boldsymbol{u}(t,x)=-L(t)x$ с матрицей коэффициентов $L(t)=D^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\Phi(t)$. Тогда алгоритм представляется следующим образом.

Ш а г 0. Находим матрицу $\Phi(t)=\Phi(t|t_F,F)$ функции цены $\phi(t,x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\Phi(t)x$ в задаче без переключений, т.е. матрицу 0-моментной функции цены. Составим матрицу $L(t) = D^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\Phi(t)$ коэффициентов линейного управления $\boldsymbol{u}(t,x)=-L(t)x$ непрерывным движением системы. Полагая $k=1$ перейдем к шагу k.

Ш а г k. Решая алгебраическое уравнение Риккати

$$\Phi(t_1\,|t_1,\dots,t_k) = C_{t_1} + L_{t_1}^{\mathrm{T}}\,D_{t_1}\,L_{t_1} + \big(A_{t_1}-B_{t_1}\,L_{t_1}\big)^{\mathrm{T}}\Phi(t_1|t_2,\dots,t_k)\big(A_{t_1}-B_{t_1}\,L_{t_1}\big),$$

находим матрицу $\Phi(t_1|t_1,\dots,t_k)$ k-моментной функции цены

$$\Phi(t,x|t_1,\dots,t_k)=\frac{1}{2}x^T\Phi(t|t_1,\dots,t_k)x+\lambda_{t_1}+\dots+\lambda_{t_k}$$

в момент $t=t_1$ первого из оставшихся k переключений, а также матрицу

$$L_{t_1}(t_2,\dots,t_k)=(D_{t_1}+B_{t_1}^T\Phi(t_1|t_2,\dots,t_k)B_{t_1})^{-1}B_{t_1}^T\Phi(t_1|t_2,\dots,t_k)A_{t_1}$$

коэффициентов линейного управления $\boldsymbol{v}^k(t_1,x|t_2,\dots,t_k)=-L_{t_1}(t_2,\dots,t_k)x$ переключением состояния системы. Находим матрицу $\Phi(t|t_1,\dots,t_k)=\Phi(t|t_1,\Phi(t_1|t_1,\dots,t_k))$ k-моментной функции цены $\phi(t,x|t_1,\dots,t_k)$ до первого переключения. Составляем матрицу $L(t|t_1,\dots,t_k)=D^{-1}(t)B^T(t)\Phi(t|t_1,\dots,t_k)$ коэффициентов линейного управления $\boldsymbol{u}(t,x|t_1,\dots,t_k)=-L(t|t_1,\dots,t_k)x$ непрерывным движением системы до первого переключения. Условия окончания синтеза оптимального «управляющего комплекса» остаются прежними. Условием окончания решения задачи минимизации количества переключений служит неравенство

$$\min_{t_0\le t_1\le\ldots\le t_k\le t_F}\{\tfrac{1}{2}x_0^T\Phi(t_0|t_1,\dots,t_k)x_0+\lambda_{t_1}+\ldots+\lambda_{t_k}\}\le\varepsilon.$$

Если неравенство выполняется, то большего, чем k, количества переключений не требуется.

Таким образом, если условие окончания выполняется, то процедура синтеза заканчивается, в противном случае полагаем $k:=k+1$ и переходим к шагу k.

Минимальное значение функционала качества (7) с не более чем N переключениями вычисляется по формуле

$$\min I\,(t_0,x_0,d)=\min_{k=0,\dots,N}\quad\min_{t_0\le t_1\le\ldots\le t_N\le t_F}\{\tfrac{1}{2}x_0^T\Phi(t_0|t_1,\dots,t_N)x_0+\lambda_{t_1}+\ldots+\lambda_{t_N}\}.$$

При помощи разработанного алгоритма решена ЛКЗ с обменом каналов управления [2, 3]:

$$\dot{x}_1(t)=u(t),\ \ \dot{x}_2(t)=x_2(t),\qquad t\in T_i,\ \ i\in\mathcal{N},$$

$$x_{1i}=x_{2i-}+v_i,\quad x_{2i}=x_{1i-},\ \ i=1,\dots,N.$$

$$I(x_0,d)=\int_0^5\frac{1}{2}[u^2(t)+x_1^2(t)+x_2^2(t)]dt+\sum_{i=1}^N\left\{\lambda_{t_i}+\frac{\eta_{t_i}}{2}v_i^2\right\}\to\min,\quad \lambda_{t_i}\ge 0,\ \eta_{t_i}>0\,.$$

На рисунках 1, 2 представлены оптимальные траектории с четырьмя переключениями, полученные при разных значениях параметров функционала. Отметим, что переключения траектории на рисунке 2 – мгновенные многократные.

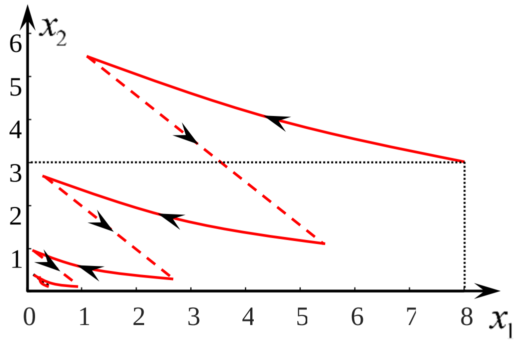

Рисунок 1.

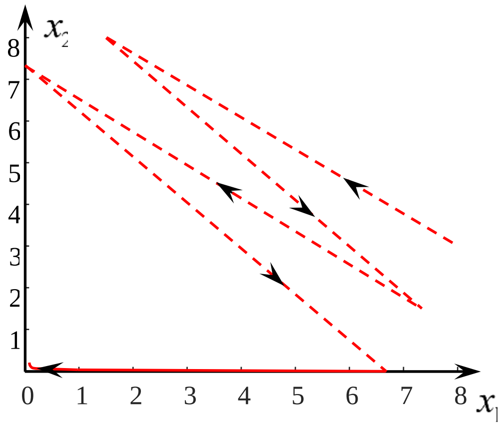

Рисунок 2.

Во втором разделе теория ПС применяется для решения задачи оптимального управления динамическими системами в классе кусочно-постоянных управлений:

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} \triangleq t_F. \tag{21}$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y_i), \quad t \in T_i \triangleq [t_i, t_{i+1}), \tag{22}$$

$$y_i \in U, \ i = 0,1, \dots, N, \tag{23}$$

$$x(t_0) = x_0, \ \Gamma\big(t_F, x(t_F)\big) = 0, \tag{24}$$

$$I(d) = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^0(t, x(t), y_i) dt + \sum_{i=1}^{N} g^+(y_{i-1}, y_i) + F\big(t_F, x(t_F)\big) \to \min. \tag{25}$$

В отличие от классической задачи оптимального управления в задаче (21) – (25) используются кусочно-постоянные управления $y(\cdot)$, а в функционале (25) учитываются затраты $g^+(y_{i-1}, y_i)$ на переключение управления $y_{i-1} \to y_i$. Вместе с задачей минимизации функционала (25) решается задача с фиксированным количеством переключений, а также задача минимизации количества переключений. Отметим, что задача (21) – (25) – конечномерная, поскольку при фиксированном N «управляющий комплекс» определяется $(N+1)(m+1)$ параметрами.

Для задачи (21) – (25) доказаны необходимые условия оптимальности управления.

Теорема 1. *Пусть оптимальный процесс* $(x(\cdot), y(\cdot))$ *имеет* N *переключений в моменты* $t_1, \dots, t_N$*:* $t_0 < t_1 < \ldots < t_N < t_F$. *Тогда существуют такая абсолютно непрерывная функция* $\psi(\cdot)$, *что выполняются*:

1) *сопряженное уравнение* $\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), t, x(t), y_i), \ t \in T$;
2) *условие трансверсальности*

$$\{F_t[t_F] - H[t_F]\}\delta t_F + \{F_x[t_F] + \psi(t_F)\}\delta x_F = 0 \tag{26}$$

для любых вариаций, связанных равенством $\Gamma_t[t_F]\delta t_F + \Gamma_x[t_F]\delta x_F = 0$;

3) *неравенства*

$$\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_y[t]dt - g^+_{y_i}(y_i, y_{i+1}) - g^+_{y_i}(y_{i-1}, y_i)\right\}\delta y_i \le 0, \quad i = 0,1, \dots, N-1, \tag{27}$$

$$\left\{g^+_{y_N}(y_{N-1}, y_N) + F_y[t_F] - \int_{t_N}^{t_F} H_y[t]dt\right\}\delta y_N \ge 0 \tag{28}$$

для любых допустимых вариаций δy_i, $i = 1, \ldots, N$;

4) *равенства* $H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}) - H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, N$.

Здесь $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ – вспомогательные переменные, $H(\psi, t, x, y) = \psi f(t, x, y) - f^0(t, x, y)$ – функция Гамильтона – Понтрягина. Доказательство теоремы следует из необходимых условий оптимальности ПС [5].

Алгоритм поиска оптимального кусочно-постоянного управления непрерывной системой

Шаг 1. Составляем функцию Гамильтона – Понтрягина для задачи (21) – (25).

Шаг 2. Из неравенств (27), (28) справедливых для любых допустимых вариаций δy_i, $i = 1, \ldots, N$, находим выражения для управлений y_i.

Шаг 3. Составляем систему канонических уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y_i), \quad t \in T_i, \tag{29}$$

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), t, x(t), y_i), \quad i = 0,1, \dots, N, \tag{30}$$

и равенства

$$H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_{i-1}) - H(\psi(t_i), t_i, x(t_i), y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{31}$$

Шаг 4. Записываем краевые условия

$$x(t_0) = x_0, \;\; \Gamma\big(t_F, x(t_F)\big) = 0, \tag{32}$$

а также дополнительные условия в конечный момент времени t_F, которые получаем из условий трансверсальности (26) для любых вариаций, связанных равенством $\Gamma_t[t_F]\delta t_F + \Gamma_x[t_F]\delta x_F = 0$.

Шаг 5. Решаем полученную на предыдущих шагах (3 и 4) краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (29), (30) с краевыми условиями (26), (32) и промежуточными условиями (31). В результате находим «управляющий комплекс» с N переключениями, который может оказаться оптимальным.

Шаг 6. Для найденного «управляющего комплекса» вычисляем значение функционала (25).

Таким образом, находится оптимальное управление для заданного количества переключений N. Алгоритм выполняется последовательно для $N = 0,1, \dots, N_{\text{MAX}}$, где N_{MAX} – максимальное допустимое количество переключений. Из вычисленных значений функционала при $N = 0,1, \dots, N_{\text{MAX}}$, выбирается минимальное, соответствующее оптимальному количеству переключений.

На основе условий оптимальности решена задача гашения малых колебаний маятника с минимальными энергетическими затратами [6]. Получено оптимальное кусочно-постоянное управление с минимальным количеством переключений, обеспечивающее заданную точность (по функционалу) в сравнении с оптимальным кусочно-непрерывным управлением.

В третьем разделе рассматриваются задачи оптимизации маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий. Рациональная траектория движения объекта формируется в два этапа. Сначала синтезируется оптимальная ломаная – траектория движения на прямоугольной сетке с препятствиями. Затем «поверх» этой ломаной строится оптимальная траектория Маркова – Дубинса, причем вершины ломаной служат промежуточными точками для траектории.

Непрерывно-дискретное движение объекта управления на прямоугольной сетке задается уравнениями

$$0 \le t_1 \le \dots \le t_N \le t_{N+1} \triangleq T.$$

$$\dot{x}(t) = V(t)\cos\gamma(t), \;\; \dot{y}(t) = V(t)\sin\gamma(t), \;\; \dot{\gamma}(t) = 0, \;\; \dot{V}(t) = u(t),$$

$$\gamma_i = \gamma_{i-} + \frac{\pi}{2}v_i, \quad i = 1,\dots, N. \tag{33}$$

В этих уравнениях: $t \in T_i \triangleq [t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathcal{N} \triangleq \{\, i = 0,1,\dots, N \mid t_i < t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков T_i прямолинейного движения системы; $x(t)$, $y(t)$ – прямоугольные координаты положения объекта в момент времени $t \in T_i$, линейная скорость $V(t)$ движения – ограничена: $V(t) \le V_{\max}$, $u(t)$ – ускорение, ограниченное по модулю

$|u(t)| \le U_{\max}$. Угол $\gamma(t)$ наклона траектории к оси абсцисс имеет значение, кратное $\frac{\pi}{2}$, и не меняется при непрерывном движении. В момент переключения происходит мгновенное изменение направления движения (поворот) на величину $\frac{\pi}{2}$, согласно (33). Управление v_i задает направление поворота, $v_i \in \{\pm 1\}$. Повороты выполняются только при нулевой скорости движения $V(t) = 0$, причем время поворота равняется ΔT. Прямоугольные координаты при повороте не меняются.

Движение происходит на прямоугольной сетке, на которой заданы запрещенные позиции (препятствия), где объект управления не может находиться. Начальное состояние системы задано $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0$. Терминальные условия $x(T) = x_T,\ y(T) = y_T$ определяют момент T окончания процесса управления. Направление движения $\gamma(T)$ в момент достижения цели не существенно.

Качество управления оценивается функционалом $T(u(\cdot), v(\cdot)) = T + N\Delta T$, в котором кроме времени T непрерывного движения учитывается также время, затраченное на повороты. В *задаче быстродействия* требуется найти управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, при которых время движения минимальное: $T(u(\cdot), v(\cdot)) \to \min$.

Для решения задачи быстродействия находим *двухпозиционную функцию цены*. Ее значение $\Theta(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y})$ равно времени прямолинейного движения из стартового состояния (x, y, γ) в прицельное положение $(\hat{x}, \hat{y})$. Если отрезок от стартовой точки (x, y) до прицельной точки $(\hat{x}, \hat{y})$ не пересекает препятствий и принадлежит лучу

$$x(t) = x + tV\cos\gamma,\ \ y(t) = y + tV\sin\gamma,\ \ t \ge 0, \tag{34}$$

то такая траектория допустимая. В противном случае – недопустимая. Согласно принципу максимума, оптимальная по быстродействию допустимая траектория непрерывного движения состоит из трех участков: разгон с максимальным ускорением, движение с максимальной скоростью, торможение с минимальным ускорением. Если скорость движения не ограничена или длина отрезка мала, то оптимальная траектория состоит из двух участков: разгона и торможения. Время движения вычисляется по формулам:

$$\Theta(x_0, y_0, \gamma_0 | x_1, y_1) = \begin{cases} 2\sqrt{\dfrac{s}{U_{\max}}}\ , s < \dfrac{V_{\max}^2}{U_{\max}}\ , \\ \dfrac{s}{V_{\max}} + \dfrac{V_{\max}}{U_{\max}}, s \ge \dfrac{V_{\max}^2}{U_{\max}}\ , \end{cases} \quad s = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|. \tag{35}$$

Если нет допустимой траектории, то $\Theta(x_0, y_0, \gamma_0 | x_1, y_1) = +\infty$.

Нулевую образующую находим по двухпозиционной функции цены (35):

$$\theta_0(x, y, \gamma) = \Theta(x, y, \gamma | x_T, y_T).$$

Остальные образующие удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$\theta_k(x, y, \gamma) = \min_{(\hat{x}, \hat{y}) \in M} \left\{ \Theta(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y}) + \min_{v \in \{\pm 1\}} \theta_{k-1}\left(\hat{x}, \hat{y}, \gamma + \frac{\pi}{2} v\right) + \Delta T \right\}, k = 1,2, \dots .$$

Минимальное время движения при этом $T = \min\limits_{k \in Z_+} \theta_k(x_0, y_0, \gamma_0)$.

Вместе с задачей быстродействия были решены другие задачи оптимизации кусочно-непрерывных траекторий ПС: задача минимизации количества переключений $N \to \min$; задача условного быстродействия (с фиксированным количеством переключений) $T_N \to \min$; задача быстродействия с минимальным количеством переключений.

Для решения задачи минимизации количества переключений используем *двухпозиционную функцию достижимости*. Ее значение $S(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y})$ равно нулю, если существует допустимая траектория без переключений, приводящая систему из состояния (x, y, γ) в положение $(\hat{x}, \hat{y})$. В противном случае, по определению полагаем $S(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y})$=$+\infty$. Если отрезок от стартовой точки (x, y) до прицельной точки $(\hat{x}, \hat{y})$ принадлежит лучу (34) и содержит только допустимые узлы, то $S(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y}) = 0$, иначе $S(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y})$=$+\infty$.

Нулевую образующую находим по двухпозиционной функции достижимости

$$s_0(x, y, \gamma) = S(x, y, \gamma | x_F, y_F).$$

Остальные образующие удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$s_k(x, y, \gamma) = \min_{(\hat{x}, \hat{y}) \in M} \left\{ S(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y}) + \min_{v \in \{\pm 1\}} s_{k-1}\left(\hat{x}, \hat{y}, \gamma + \frac{\pi}{2} v\right) + 1 \right\}, \ \ k = 1,2,\dots .$$

В процессе решения уравнений находится условное оптимальное позиционное управление, а минимальное количество переключений N определяется по образующим функции цены

$$N = \min_{k \in Z_+} s_k(x_0, y_0, \gamma_0).$$

Для решения задачи условного быстродействия с фиксированным количеством N переключений достаточно найти первые $N + 1$ образующих функции цены, решая рекуррентное уравнение

$$\theta_k(x, y, \gamma) = \min_{(\hat{x}, \hat{y}) \in M} \left\{ \Theta(x, y, \gamma | \hat{x}, \hat{y}) + \min_{v \in \{\pm 1\}} \theta_{k-1}\left(\hat{x}, \hat{y}, \gamma + \frac{\pi}{2} v\right) \right\}, \ \ k = 1,2, \dots N.$$

После чего условное минимальное время достижения цели находится по формуле

$$T_N = \min_{k = 0,1,\dots,N} \theta_k(x_0, y_0, \gamma_0). \tag{36}$$

Решение задачи быстродействия с минимальным количеством переключений выполняется в два этапа. Сначала определяется минимальное количество переключений N. Затем, при этом количестве переключений решается задача условного быстродействия и находится время (36).

На втором этапе решается задача оптимизации траектории Маркова – Дубинса с промежуточными условиями, т.е. проходящей через вершины ломаной, полученной на первом этапе. Движение модели Маркова – Дубинса на промежутке времени $[0, T]$ описывается уравнениями [4]

$$\dot{x}(t) = V\cos\gamma(t), \ \ \dot{y}(t) = V\sin\gamma(t), \ \ \dot{\gamma}(t) = u(t), \ \ |u(t)| \le \omega. \tag{37}$$

Здесь V – постоянная линейная скорость, u – угловая скорость, которая является управлением, ограниченным по модулю заданной величиной ω. Терминальные условия определяют начальное состояние

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0 \tag{38}$$

и конечное положение объекта управления

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T. \tag{39}$$

Промежуточные условия

$$x(t_i) = x_i, \quad y(t_i) = y_i, \;\; i = 1,\ldots,m, \tag{40}$$

задают точки, через которые траектория должна проходить. Моменты времени $t_1,\ldots,t_m$ ограничены неравенствами $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$. Углы $\gamma(t_1),\ldots,\gamma(t_m)$, $\gamma(T)$, определяющие направления движения в промежуточных точках и в конечный момент времени, произвольные. Допустимым считается кусочно-непрерывное управление u: $[0,T] \to [-\omega,\omega]$, которое порождает допустимую траекторию, соединяющую терминальные состояния (38), (39) и проходящую через промежуточные точки (40). Требуется решить задачу быстродействия:

$$T \to \min. \tag{41}$$

Если обозначить через $\Theta(x_0,y_0,\gamma_0|x_1,y_1,\gamma_1)$ или $\Theta(x_0,y_0,\gamma_0|x_F,y_F)$ минимальное время движения из состояния (x_0,y_0,γ_0) в состояние (x_1,y_1,γ_1) или в цель (x_F,y_F) соответственно, то время движения по составленной траектории будет зависеть только от углов $\gamma(t_i) = \gamma_i$, $i = 1,\ldots,m$, определяющих направление движения в промежуточных точках

$$T(\gamma_1,\ldots,\gamma_m) = \sum_{i=1}^{m} \Theta(x_{i-1},y_{i-1},\gamma_{i-1}|\, x_i,y_i,\gamma_i) + \Theta(x_m,y_m,\gamma_m|\, x_F,y_F),$$

а минимальное время является решением задачи

$$\min T = \min_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m} T(\gamma_1,\ldots,\gamma_m) \tag{42}$$

оптимизации по углам $\gamma_i \in [0,2\pi]$, $i = 1,\ldots,m$. Двухпозиционные функции цены Θ вычисляются по разработанному автором алгоритму [4]. Достаточные условия оптимальности доказываются методом динамического программирования.

Теорема 2. *Для того чтобы траектория* $\big(x(\cdot),y(\cdot),\gamma(\cdot)\big)$ *в задаче* (37) – (41) *с промежуточными условиями была оптимальной необходимо, чтобы:*

1) *участки траектории между промежуточными точками* (x_0,y_0), (x_1,y_1),..., (x_m,y_m), (x_F,y_F) *совпадали с кривыми Маркова-Дубинса;*
2) *углы* $\gamma_1,\ldots\gamma_m$ *направления скоростей в точках* (x_1,y_1),..., (x_m,y_m) *были решением задачи минимизации* (42).

Применение условий оптимальности демонстрируются на примерах [4]. На рисунке 3 представлены планируемые траектории (штрихпунктирные ломаные) и оптимальные траектории Маркова – Дубинса для разных задач быстродействия с учетом переключений.

В четвертом разделе рассматриваются математические модели оптимального управления гибридными системами, функционирующие с мгновенными многократными переключениями. Анализируются процедуры решения задач синтеза оптимального «управляющего комплекса» ПС и применяемые для этого численно-аналитические методы. Алгоритмы синтеза включают ряд вспомогательных задач: интегрирование дифференциальных уравнений непрерывного движения, решение рекуррентных уравнений, описывающих переключения, конечномерная минимизация, решение краевых задач с промежуточными условиями. Эти задачи решаются с помощью известных численных методов. Задачи нахождения образующих функции цены, двухпозиционных и моментных функций цены являются новыми. Для их решения разработаны численно-аналитические методы и реализующие их программные комплексы.

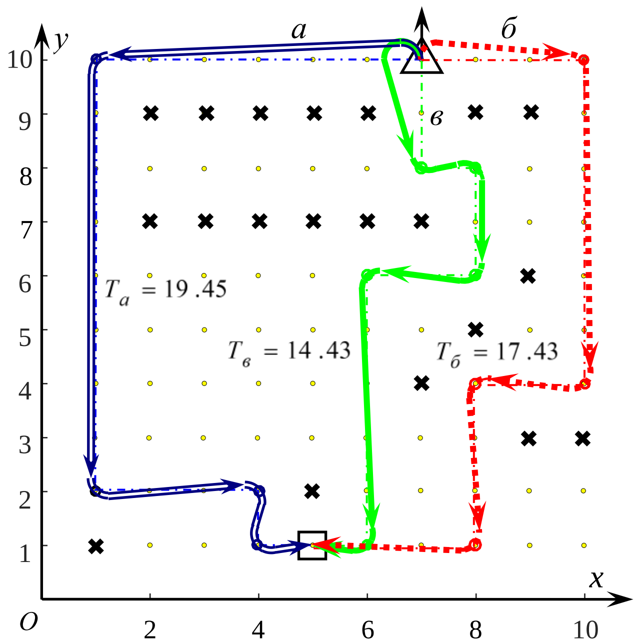

Рисунок 3.

Первый программный комплекс [15] позволяет решать ЛКЗ синтеза оптимальной ПС с обменом каналов управления. Входными параметрами являются: допустимое число переключений, начальное состояние, коэффициенты затрат на переключения, промежуток времени функционирования системы, величина шага интегрирования непрерывного движения системы, величина шага сетки для оптимизации моментов переключений, а также максимальное количество итераций. Выходными параметрами являются: минимальное значение функционала, оптимальные моменты переключений, количество вычислений функционала и время, затраченное на расчет, изображение оптимальной траектории ПС.

Второй программный комплекс [16] позволяет решать: задачи планирования маршрутов плоского движения на сетке с препятствиями, задачи построения и оптимизации траекторий Маркова-Дубинса с промежуточными условиями и при наличии препятствий. Входными параметрами служат: карта для движения объекта управления, координаты начальной и конечной позиции объекта управления, а также начальное направление движения. В задаче оптимизации траекторий Маркова – Дубинса дополнительно задаются линейная и угловая скорости, шаг оптимизации углов направления движения в промежуточных точках. Выходными параметрами служат: количество переключений и минимальное время движения, изображение оптимального маршрута движения.

Программные комплексы реализованы в среде MATLAB. Они предназначены для численно-аналитического решения задач оптимального управления ПС с минимальным количеством переключений, а также визуализации решений.

В заключении сформулирован основной итог диссертации – разработка методов и алгоритмов оптимизации управляемых гибридных систем, функционирующих с мгновенными многократными переключениями, а также их применение в актуальных приложениях в области авиационной и ракетно-космической техники.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Поставлена и исследована задача минимизации количества переключений непрерывно-дискретных управляемых процессов функционирования гибридных систем [1– 6].

2. Разработаны численно-аналитический метод решения линейно-квадратичной задачи синтеза оптимального управления гибридными системами с мгновенными многократными переключениями и реализующий его программный комплекс [2, 3, 8, 9, 10, 15].

3. Доказаны необходимые условия оптимальности кусочно-постоянного управления непрерывными системами с учетом затрат на переключения управления; разработан метод применения условий оптимальности кусочно-постоянного управления для приближенного решения задачи оптимального кусочно-непрерывного управления [5, 6, 7,14].

4. На основе достаточных условий оптимальности решены задачи быстродействия и минимизации количества переключений (поворотов) для разных моделей плоского движения объекта управления по карте с препятствиями [4, 11, 12].

5. Доказаны необходимые условия оптимальности траектории Маркова-Дубинса с заданными промежуточными состояниями, на основе которых разработаны алгоритм решения задачи оптимизации траекторий Маркова-Дубинса плоского движения летательного аппарата при наличии препятствий, а также реализующий его программный комплекс [4, 9, 11, 12, 13, 16].

Публикации в журналах, входящих в Перечень ВАК и МСЦ

1. Урюпин И.В. Синтез оптимальных кусочно-гладких аппроксимаций траекторий движения летательных аппаратов //"Труды МАИ", 2018. № 100. – 15 с. URL: trudymai.ru/published.php?ID=93440. (ВАК).
2. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Компьютерная технология синтеза оптимальных линейных переключаемых систем // Вестник компьютерных и информационных технологий, 2019. №11. С.13-22. (ВАК).
3. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Минимизация количества переключений оптимальных непрерывно-дискретных управляемых процессов // Изв. РАН, ТиСУ. 2019. №4. С. 29-46. (ВАК, Scopus, WoS).
4. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Синтез траектории летательного аппарата с многокритериальным планированием промежуточных условий //"Труды МАИ", 2020. №113. – 20 с. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=118185. (ВАК).
5. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Оптимизация траекторий переключаемых систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 5. С. 33-51. (ВАК, Scopus, WoS).
6. Урюпин И.В. Оптимизация непрерывных систем в классе кусочно-постоянных управлений // "Труды МАИ", 2021. № 121. – 23 с. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=162666. (ВАК).

Доклады на научных конференциях

7. Урюпин И.В. Оптимальная кусочно-гладкая аппроксимация траекторий непрерывных систем // 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», Москва. 19-23 ноября 2018. – Тезисы докладов. – М.: Изд-во "Люксор", 2018. С. 225.
8. Урюпин И.В. Минимизация количества переключений оптимальных непрерывно-дискретных управляемых процессов // XLV Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва. 16-19 апреля 2019. – Тезисы докладов. – М.: Изд-во МАИ, 2019. С. 717.
9. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Оптимизация переключений непрерывно-дискретных управляемых процессов // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-19), Москва. 17-20 июня 2019. – Тезисы докладов. – М.: ИПУ РАН. С.977-981.
10. Урюпин И.В. Оптимизация переключений в линейно-квадратичных задачах управления непрерывно-дискретными системами // 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», Москва. 18-22 ноября 2019. – Тезисы докладов. – М.: Изд-во "Логотип", 2019. С. 210.
11. Урюпин И.В. Оптимизация траектории равномерного движения объекта на сетке // XLVI Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, 2020. – Тезисы докладов. – М.: Изд-во МАИ, 2020. С. 865.
12. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Многокритериальная оптимизация маршрутов плоского движения переключаемых систем // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, г. Суздаль. 3-8 июля 2020. – Тезисы докладов. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2020. С. 45-46.
13. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Минимизация переключений кусочно-постоянных управлений гибридными системами // 19-я Международная конференция "Авиация и космонавтика", г. Москва. 23-27 ноября 2020, – Тезисы докладов. – М.: Изд-во "Перо", 2020 С. 499.
14. Урюпин И.В. Минимизация количества переключений оптимальных кусочно-постоянных управлений непрерывными системами // XLVII Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва. 20-23 апреля 2021. – Тезисы докладов. – М.: Изд-во "Перо", 2021. С.777.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

15. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Синтез оптимальной переключаемой системы с обменом каналов управления. // Федеральная служба по интеллект. собственности. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2019614061. 2019. (ВАК).
16. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Оптимизация маршрута непрерывно-дискретного движения управляемого объекта при наличии препятствий. // Федеральная служба по интеллект. собственности. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ №2021619328. 2021. (ВАК).