УДК 517.2: 517.9

О симметричном преобразовании спектра неустойчивого объекта при управлении им по критерию минимума расхода энергии

Степаньянц Г.А.

Аннотация

Рассматривается стационарный линейный объект, все характеристические числа которого (спектр) имеют строго положительные вещественные части. Показывается, что при оптимальном управлении, обеспечивающем минимум интеграла от квадрата управляющего сигнала, спектр объекта симметрично отображается в левую полуплоскость комплексной плоскости.

Ключевые слова: спектр линейного оператора, неустойчивый объект, оптимальное управление, динамическое программирование, линейные с насыщением законы управления, область притяжения нулевого состояния равновесия.

Рассмотрим линейный стационарный неустойчивый объект со скалярным управлением, дифференциальные уравнения которого заданы в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu\,. \qquad (1)$$

Управление u - скаляр, пара матриц A, B управляема, а спектр матрицы A (набор всех корней её характеристического многочлена $Q_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$) целиком лежит в правой полуплоскости комплексной плоскости. Будем считать, что интеграл от квадрата управления пропорционален расходу энергии на управление. Обозначим через $\hat{u}(x) = \hat{K}x$ линейный закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия системы и вместе с тем минимизирующий интегральную квадратичную оценку $\int_0^\infty u^2[x(t)]dt$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Если спектр матрицы A правой части уравнения (1) целиком лежит в правой полуплоскости комплексной плоскости, то оптимальный закон управления $\hat{u}(x) = \hat{K}x$, минимизирующий интегральную квадратичную оценку $I_u = \int_0^\infty u^2[x(t)]dt$, зеркально отображает спектр матрицы A в правую полуплоскость комплексной плоскости. Таким образом, для характеристического многочлена $Q_{A+B\hat{K}}(\lambda)$ матрицы $A+B\hat{K}$ имеет место равенство $Q_{A+B\hat{K}}(\lambda)=\det(\lambda E-A-B\hat{K})=\det(\lambda E+A)$.

Доказательство. Для построения оптимального закона используем динамическое программирование [1]. Так как пара матриц A, B - управляема, то, не нарушая общности, будем считать, что матрицы A и B записаны в первой сопровождающей форме [2]: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Если $\hat{u}(x)$ - оптимальный по критерию $I_u(x_0)$ закон управления, то, учитывая условия стационарности, уравнение Беллмана можно записать в виде [2]: $\hat{u}^2(x)+2x^T H(Ax+B\hat{u}(x))=\min\limits_u\{u^2(x)+2x^T H(Ax+Bu(x))\}$. Отсюда следует равенство $\hat{u}(x)=-x^T HB=-B^T Hx$. Значение положительно определённой квадратичной формы $x^T Hx$ является оптимальным значением функционала $I_u(x_0)$, а симметрическая матрица H может быть найдена из соотношения

$$HA+A^T H=HBB^T H. \qquad (2)$$

Покажем, что кроме тривиального нулевого решения уравнение (2) имеет решение, удовлетворяющее условиям теоремы. Из равенства $\hat{u}(x)=-B^T Hx$ следует, что

$$\hat{u}(x)=h_{n1}x_1+h_{n2}x_2+\dots+h_{nn}x_n. \qquad (3)$$

С другой стороны, поскольку уравнение движения записано в первой сопровождающей форме, то закон управления можно записать в виде

$$\hat{u}(x)=(a_0-\hat{a}_0)x_1+\dots+(a_{n-1}-\hat{a}_{n-1})x_n. \qquad (4)$$

Так как $\hat{Q}(\lambda)=\det(\lambda E+A)$, то значения коэффициентов характеристического многочлена $\hat{Q}(\lambda)$ равны $\hat{a}_{n-1}=-a_{n-1}$, $\hat{a}_{n-2}=a_{n-2}$, $\dots\hat{a}_{n-i}=-\frac{1}{2}(1+(-1)^{n+i})a_{n-i}$ (этот результат можно получить также из теоремы Виета).

Приравнивая правую часть выражения (3) для оптимального закона управления, записанную через коэффициенты матрицы H, к правой части выражения (4) для этого же закона, получим значения для элементов последней строки и последнего столбца матрицы H в виде

$$h_{nn}=-2a_{n-1},\ h_{n(n-1)}=h_{(n-1)n}=0,\dots,h_{ni}=h_{in}=-(1+(-1)^{n+i}). \qquad (5)$$

Пусть i - строка, а j - столбец матриц правой и левой частей уравнения (2). Уравнение, приравнивающее соответствующие элементы этих матриц, запишется в виде

$$h_{i(j-1)} + h_{j(i-1)} - a_{j-1}h_{ni} - a_{i-1}h_{nj} = h_{ni}h_{nj}. \quad (6)$$

Положим $h_{ij} = 0$ при нечётной сумме индексов, $(-1)^{i+j} = -1 \Rightarrow h_{ij} = 0$. Тогда, если индексы i, j оба нечётны, то равенство (6) справедливо, так как $h_{i(j-1)} = h_{j(i-1)} = 0 \& h_{ni} = h_{nj} = 0$, и из (6) следует тождество $0 = 0$. Если же индексы i, j оба чётны, то $h_{i(j-1)} = h_{j(i-1)} = 0 \ \& h_{ni} = -2a_{i-1} \ \& \ h_{nj} = -2a_{j-1}$, и из (6) следует тождество $-a_{j-1}(-2a_{i-1}) - -a_{i-1}(-2a_{j-1}) = 4a_{i-1}a_{j-1}$.

Остаётся показать, что существует единственное решение уравнения (6) при различных чётностях индексов i, j. Так как при этом $h_{ni}h_{nj} = 0$, то в силу симметрии выражения $h_{i(j-1)} + h_{j(i-1)} + 4a_{i-1}a_{j-1} = 0$ все уравнения, содержащие одну и ту же пару переменных, будут совпадать. Таким образом, различных уравнений, содержащих пары переменных с различными чётностями индексов i, j, будет ровно столько, сколько переменных. При этом суммы двух различных пар переменных линейно независимы, так как отличаются набором переменных: если пары $h_{i(j-1)}, h_{j(i-1)}$ и $h_{m(k-1)}, h_{k(m-1)}$ не совпадают, то $(i \neq m \ \& \ i \neq k) \vee (j \neq m \ \& \ j \neq k)$. Отсюда следует единственность и существование решения уравнения (6) при различных чётностях индексов i, j переменных, что завершает доказательство теоремы.

В большинстве практических задач управления неустойчивыми линейными объектами спектр матрицы правой части уравнения движения (1) содержит характеристические числа как с положительными, так и с отрицательными и нулевыми вещественными частями. В этом случае следует найти линейное преобразование $x = Ly$, расщепляющее исходное уравнение движения на три независимых подсистемы с общим управлением [3,4] : неустойчивую (её спектр при отсутствии управления целиком лежит в правой полуплоскости комплексной плоскости), нейтральную (её спектр лежит на мнимой оси комплексной плоскости) и асимптотически устойчивую (её спектр лежит в левой полуплоскости комплексной плоскости). Например , такое преобразование может приводить матрицу A к канонической жордановой форме [4], [5].

Пусть при расщепляющем преобразовании нейтральная подсистема отсутствует (у объекта нет характеристических чисел с нулевыми вещественными частями). Тогда для минимизации интегральной оценки $I_u = \int_0^\infty u^2[x(t)]dt$ следует искать закон управления, который зависит только от координат неустойчивой подсистемы и удовлетворяет условиям теоремы 1. Применительно к исходной системе это означает, что при оптимальном управлении по критерию минимума функционала I_u элементы спектра матрицы A, имеющие положительные вещественные части, симметрично отображаются в левую полуплоскость комплексной плоскости, а характеристические числа с отрицательными вещественными частями не претерпевают изменений.

В случае, когда спектр матрицы A содержит характеристические числа с нулевой вещественной частью, управление, оптимальное по критерию минимума функционала I_u, не существует. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ - уравнение движения объекта со скалярным управлением u, пара матриц A, B управляема, а все элементы спектра матрицы A чисто мнимые или равны нулю. В этом случае для любого как угодно большого $\eta > 0$ и любого как угодно малого $\delta > 0$ найдётся обеспечивающий асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия закон управления $\tilde{u}(x)$ со следующим свойством. При любых начальных условиях x_0, таких, что $\|x_0\| < \eta$, значения интегрального функционала качества $I_u(x_0) = \int_0^\infty u^2[x(t)]dt$ не будут превышать δ.

Доказательство. Не нарушая общности, ограничимся случаем, когда уравнения движения записаны в первой сопровождающей форме [2], так что $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Характеристический многочлен матрицы A равен $Q_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$. Сдвинем все корни этого многочлена на величину ε в левую полуплоскость комплексной плоскости. В результате получим многочлен $Q_{A\varepsilon}(\lambda) = Q_A(\lambda + \varepsilon)$, все корни которого имеют вещественные части, равные ε. Разложим полученное выражение в ряд по степеням ε и оставим только члены первого порядка малости. В результате получим, что $Q_{A\varepsilon}(\lambda) = Q_A(\lambda + \varepsilon) \approx Q_A(\lambda) + \Delta Q_A(\lambda)$, где $\Delta Q_A(\lambda) = n\varepsilon\lambda^{n-1} + (n-1)\varepsilon a_1\lambda^{n-2} + \dots + 2a_2\varepsilon\lambda + \varepsilon a_1$. Обозначим $\tilde{u}_\varepsilon(x) = \tilde{K}_\varepsilon x$ такой закон управления, который сдвигает корни характеристического многочлена на величину ε в левую полуплоскость. Нетрудно видеть, что $\tilde{K}_\varepsilon x = -\varepsilon \tilde{K} x$, где $\tilde{K}x = a_1x_1 + 2a_2x_2 + \dots + (n-1)a_{n-1}x_{n-1} + nx_n$.

Для закона управления $\tilde{K}_\varepsilon x = -\varepsilon \tilde{K} x$ оценим сверху значения функционала качества $I_u(x_0)=\int\limits_0^{\infty} u^2[x(t)]dt$. Если $e^{A_\varepsilon t}$ - переходная матрица системы $\frac{dx}{dt} = A_\varepsilon x,$ а $A_\varepsilon x = Ax + B\tilde{K}_\varepsilon x$, то $I_u(x_0)=\int\limits_0^{\infty}\left(\tilde{K}_\varepsilon e^{A_\varepsilon t} x_0\right)^2 dt$. Невырожденным линейным преобразованием $x = Ly$ приведём матрицу A_ε к канонической жордановой форме $\Lambda_{A\varepsilon} = L^{-1} A_\varepsilon L$. При отсутствии кратных элементов спектра матрица $\Lambda_{A\varepsilon} = L^{-1} A_\varepsilon L$ будет диагональной, а в соответствии с построением все вещественные части её диагональных элементов будут одинаковы и равны $-\varepsilon$. Отсюда следует, что норма матрицы [6] $e^{\Lambda_{A\varepsilon} t}$ равна $\left\| e^{\Lambda_{A\varepsilon} t} \right\| = e^{-\varepsilon t}$.

Записав $I_u(x_0)=\int\limits_0^{\infty}\left(\tilde{K}_\varepsilon L e^{\Lambda_{A\varepsilon} t} L^{-1} x_0\right)^2 dt$, получим неравенство, позволяющее оценить значение интегрального функционала качества сверху: $I_u(x_0) \le \int\limits_0^{\infty}\left(\left\|\tilde{K}_\varepsilon\right\| \left\|L\right\| \left\| e^{\Lambda_{A\varepsilon} t}\right\| \left\|L^{-1}\right\| \left\|x_0\right\|\right)^2 dt = \varepsilon^2 \left\|\tilde{K}\right\|^2 \left\|x_0\right\|^2 \int\limits_0^{\infty} e^{-2\varepsilon t} dt = \frac{\varepsilon}{2}\left\|\tilde{K}\right\|^2 \left\|x_0\right\|^2$. Значение интегрального функционала $I_u(x_0)=\int\limits_0^{\infty} u^2[x($ является равномерно непрерывной функцией от коэффициентов матрицы A. Поскольку бесконечно малым изменением коэффициентов можно добиться отсутствия в спектре матрицы A кратных характеристических чисел, то полученная оценка интегрального функционала справедлива и в случае наличия кратных элементов спектра. Значение параметра $\varepsilon < \frac{2\delta}{\eta^2 \left\|\tilde{K}\right\|}$ при законе управления $\tilde{u}_\varepsilon(x) = \tilde{K}_\varepsilon x$ удовлетворяет условию теоремы.

Заметим, что в большинстве случаев при управлении неустойчивыми объектами приходится учитывать ограничения на величину управляющего воздействия, которая при скалярном управлении имеет вид $|u| \le C_u$.

В этом случае следует при больших отклонениях от стабилизируемого состояния равновесия использовать законы управления, предельно расширяющие область притяжения нулевого состояния равновесия, а при малых отклонениях использовать законы управления, оптимизирующие желаемый показатель качества. Методика построения таких законов управления (они названы комбинированными законами управления, оптимальными по устойчивости) изложена в [4]. В этой же работе предлагается при управлении неустойчивым объектом расщеплять уравнения движения на три независимые подсистемы с общим управлением. Эти подсистемы названы неустойчивой (у неё положительны все вещественные части характеристических чисел), нейтральной (у неё все вещественные чисти характеристических чисел нулевые) и асимптотически устойчивой. При оптимальном по устойчивости законе управления область притяжения нулевого состояния равновесия совпадает с прямым произведением области притяжения неустойчивой подсистемой на пространство состояний двух других подсистем. При этом основная задача ложится на управление неустойчивой подсистемой, являющейся предметом исследования данной статьи. Во многих случаях порядок неустойчивой подсистемы невысок, что значительно упрощает задачу исследования.

Строить комбинированный закон управления целесообразно только в том случае, когда его применение даёт существенное преимущество по сравнению с линейным с насыщением законом управления. Такие исследования в общем виде достаточно сложны, однако для неустойчивых систем первого и второго порядка могут быть проведены достаточно просто.

Рассмотрим случай неустойчивой подсистемы первого порядка. Её уравнение с линейным с насыщением законом управления, который при малых отклонениях удовлетворяет условиям теоремы 1, можно записать в виде $\frac{dx}{dt} = ax + b\hat{u}(x)$, причём оптимальный закон управления $\hat{u}$ определяется соотношением $\left|\frac{2a}{b}x\right| < C_u \Rightarrow \hat{u}(x) = -\frac{2a}{b}x,\ \left|\frac{2a}{b}x\right| \geq C_u \Rightarrow \hat{u}(x) = -sign\left(\frac{2a}{b}x\right).$

Область линейности этого закона управления определяется равенством $\left|\frac{2a}{b}x\right| < C_u$, а область притяжения лежит между двумя неустойчивыми состояниями равновесия $\pm\hat{x},\ \hat{x} = \frac{bC_u}{a}$, совпадает с областью управляемости и не может быть расширена. Следовательно, для неустойчивых подсистем первого порядка (и только для них) линейный с насыщением закон управления, оптимальный по критерию $I_u(x_0)$, является оптимальным по устойчивости.

Для систем высокого порядка определение точной конфигурации области притяжения является достаточно сложной задачей. Грубую оценку размеров этой области можно получить прямым методом Ляпунова [3,4]. Однако для часто встречающегося случая неустойчивой подсистемы второго порядка оценку области притяжения нулевого состояния равновесия при линейном с насыщением законе управления и её сравнение с областью управляемости можно получить методами фазовой плоскости. Рассмотрим простой пример такого сравнения (все уравнения записываются в безразмерной форме).

Пусть уравнения движения и ограничения на управление заданы в виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2 + u, \quad |u| \le 1. \tag{7}$$

Построив оптимальный по быстродействию закон управления [7] найдём область управляемости системы. В рассматриваемом случае это будет симметричная открытая выпуклая связная область, границами которой являются две траектории, соответствующие решению системы (7) при $u = \pm 1$. Траектория, соответствующая решению (7) при $u = 1$, выходит из состояния равновесия с координатой $\hat{x}_1 = \frac{1}{2}$ и пересекает ось x_1 в точке $x_1 = -\hat{x}_1$. Траектория, соответствующая решению при $u = -1$, проходит симметрично.

Оптимальный по критерию $I_u(x_0)$ при малых отклонениях линейный с насыщением закон управления равен $\hat{u}(x) = -6x_2$ при $|x_2| < \frac{1}{6}$, а при $|x_2| \ge \frac{1}{6}$ $\hat{u}(x) = -sign(x_2)$. Фазовый портрет системы с таким управлением показан на рис. 1.

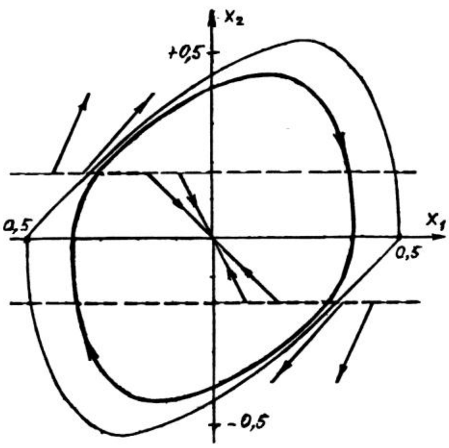

Рис. 1

Область притяжения нулевого состояния равновесия ограничена неустойчивым предельным циклом (период ≈ 5.44), пересекающим ось x_1 в точках с координатами ± 0.3675. На рисунке показан предельный цикл, являющийся границей области притяжения нулевого состояния равновесия, прямолинейные отрезки траекторий и граница области управляемости. Такой фазовый портрет позволяет оценить необходимость построения комбинированного закона управления. Если маловероятно попадание вектора состояния во внешнюю область предельного цикла, лежащую внутри области управляемости, то можно ограничиться линейным с насыщением законом управления, оптимальным в области линейности.

Библиографический список.

1. Беллман Р. Динамическое программирование. - М.: ИИЛ, 1961. 400.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. - М.: Наука, 1976. 424.
3. Степаньянц Г.А. Теория динамических систем. – М.: Машиностроение, 1985. 248.
4. Степаньянц Г.А. Стабилизация систем управления неустойчивыми и слабодемпфированными объектами. – М.: Издательство МАИ, 2011. 164.
5. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. 512.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. 576.
7. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. 392.

Сведения об авто

Степаньянц Георгий Аркадьевич, профессор д.т.н., профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.т.н.,тел.:. (499)-158-4655. e-mail gssst@rambler.ru.