На правах рукописи

Ильина Анастасия Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ

Специальность 05.13.18
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2019 год

Работа выполнена на кафедре «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент **Красинский Александр Яковлевич**

Официальные оппоненты: **Рапапорт Лев Борисович,**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией № 16 «Динамики нелинейных процессов управления им. Е.С. Пятницкого» Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт проблем управления» им. В.А. Трапезникова РАН

Кулешов Александр Сергеевич,
кандидат физико-математических наук, доцента кафедры Теоретической механики и мехатроники Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Ведущая организация: Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

Защита состоится «28» июня 2019 года в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке:
$https : //mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_{I}D = 103570$.

Автореферат разослан «____» мая 2019 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет МАИ

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.04, кандидат физико-математических наук ____________ Рассказова Варвара Андреевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Проблема математического описания динамики механических систем является необходимым этапом исследования любого современного технического устройства, имеющего в своём составе механическую компоненту. Начиная с основополагающих работ Ж.Л. Лагранжа, У.Р. Гамильтона, Э.Дж. Рауса, П.Э. Аппеля, усилиями многочисленных учёных создан широкий выбор способов математического моделирования динамики механических систем. При этом голономные системы с нелинейными геометрическими связями требуют особого подхода, так как вариации координат, описывающих такую систему, оказываются зависимыми.

Для моделирования динамики данных систем можно применять уравнения Лагранжа первого рода в декартовых координатах или уравнения Лагранжа с множителями связей в избыточных криволинейных координатах. При этом непосредственное интегрирование такой системы уравнений, как правило, является достаточно сложной задачей. Кроме того, если в исследовании не предполагается определение реакций связей, то неопределенные множители необходимо исключать. Различные методы исключения множителей связей разрабатывались А.И. Лурье, И.В. Новожиловым, М.Ф. Зацепиным и др. Продолжая работу в этом направлении, М.Ф. Шульгин вывел уравнения для моделирования динамики систем с избыточными координатами, не содержащие множителей связи. Уравнения движения в форме М.Ф. Шульгина имеют компактный вид, их число равно числу степеней свободы системы. Именно эта форма уравнений была выбрана А.Я. Красинским как наиболее удобная для решения задач устойчивости и стабилизации систем с избыточными координатами. Данные задачи долгое время оставались недостаточно изученными, несмотря на общие результаты по теории устойчивости, полученные в работах А.М. Ляпунова, И.Г. Малкина, Г.В. Каменкова и др., так как устойчивость таких систем возможна лишь в критических случаях. В некоторых работах по динамике систем с нелинейными геометрическими связями зависимые переменные просто исключают посредством линеаризации уравнений связей в окрестности исследуемых стационарных движений, что приводит, вообще говоря, к необоснованным математическим моделям. Например, так обычно моделируют систему GBB 1005 Ball and Beam – популярный лабораторный стенд с нелинейной геометрической связью, который используется для исследования различных стратегий управления.

Строгие результаты в решении задач стабилизации рассматриваемого класса систем были получены А.Я. Красинским. На основе уравнений Шульгина в переменных Лагранжа и Рауса с использованием теории критических случаев Ляпунова им были доказаны теоремы об условной асимптотической устойчивости положений равновесия и устойчивости стационарных движений систем с избыточными координатами, а также получен ряд других важных результатов.

Несмотря на существенное продвижение в решении задач стабилизации систем с избыточными координатами, этот класс систем требует дальнейшего серьезного изучения в силу разнообразия типов систем и возможных способов управления (в том числе при неполной информации о состоянии). Кроме того, применение результатов теории критических случаев в задаче стабилизации систем с нелинейными геометрическими связями неизбежно связано с громоздкими преобразованиями. Современные технологии обработки символьной информации могут быть применены для автоматизации этих процедур. Уже существуют программные продукты, позволяющие линеаризовать уравнения в окрестности исследуемого положения равновесия или стационарного движения. Однако они имеют ряд существенных недостатков: во-первых, автоматический анализ нелинейных членов в них практически невозможен; во-вторых, их применение требует достаточно высокой квалификации пользователя в области программирования.

Объектом исследования являются голономные механические и мехатронные системы с нелинейными геометрическими связями.

Цель и задачи работы заключаются в развитии методов решения задач устойчивости и стабилизации положений равновесия и стационарных движений мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями на основе комплексного применения аналитической механики, математического моделирования, нелинейной теории устойчивости, математической теории управления, численных методов и разработке алгоритмов нахождения стабилизирующего управления, в том числе при неполной информации о состоянии.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) получить математические модели динамики мехатронных систем с геометрическими связями на основе уравнений Шульгина в переменных Лагранжа и Рауса при наличии или отсутствии циклических координат для различных способов введения управляющих воздействий.

2) установить условия разрешимости нелинейных задач стабилизации стационарных движений и положений равновесия мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями, в том числе при неполной информации о состоянии;

3) разработать алгоритм численного определения коэффициентов стабилизирующего управления и наблюдателя;

4) разработать комплекс программ, реализующий предложенный алгоритм для системы GBB 1005 Ball and Beam;

5) применить полученные результаты для стабилизации всех положений равновесия системы GBB 1005 Ball and Beam, провести сравнение различных математических моделей.

Методы исследования. Для решения поставленных задач используются методы аналитической механики, математического моделирования, нелинейной теории устойчивости, математической теории управления и численные методы. Развивается метод использования различных типов переменных для разных классов задач. При этом большое внимание уделяется получению векторно-матричных нелинейных уравнений и уравнений с выделенным первым приближением в окрестности исследуемого движения с помощью методов матричной алгебры. В том числе используются такие операции с матрицами, как кронекеровское произведение и векторизация, а также ряд вспомогательных соотношений для преобразования и дифференцирования векторных и матричных функций.

Для написания комплекса программ, реализующего разработанный алгоритм, и проведения других численных исследований используется система MATLAB.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических формулировок и доказательств утверждений, подтверждением полученных теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. В диссертационной работе получены новые векторно-матричные уравнения динамики систем с нелинейными геометрическими связями в переменных Лагранжа при наличии циклических координат при различных способах управления (по вектору циклических, позиционных или избыточных координат) и в переменных Рауса для случая управления по части циклических координат. Предложена форма записи векторно-матричных нелинейных уравнений и уравнений с выделенным первым приближением в окрестности стационарного движения, позволяющая упростить анализ структуры нелинейных членов. Установлены новые достаточные условия разрешимости для задачи стабилизации систем с избыточными координатами. Построены математические модели системы GBB 1005 Ball and Beam с учетом нелинейной геометрической связи для различных случаев выбора избыточной координаты и различных способов введения управляющих воздействий. Выполнено подробное исследование всех положений равновесия системы Ball and Beam, проведено сравнение с математической моделью, полученной на основе уравнений Лагранжа второго рода после линеаризации уравнения связи.

Практическая ценность. Результаты исследования могут быть использованы при моделировании и управлении мехатронными системами с нелинейными геометрическими связями, в частности, некоторыми манипуляторами. Разработанный программный продукт может быть использован в учебном процессе.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015);

14-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2015);

8-я Всероссийская мультиконференция по проблемам управления МКПУ-2015 (Геленджик, 2015);

XIII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» (Москва, 2016);

X Всероссийская научная конференция им. Ю.И. Неймарка «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 2016);

VII Всероссийское совещание-семинар заведующих кафедрами и преподавателей теоретической механики, робототехники, мехатроники вузов Российской Федерации (Махачкала, 2016);

Международная научно-техническая конференция «Пром-инжиниринг» (Челябинск, 2016);

XI Международная научная конференция «Аналитическая механика,

устойчивость и управление. (Казань, 2017);
1-я Международная конференция «Проблемы механики и управления» (Махачкала, 2018).

Личный вклад. Автором построены все представленные математиче-ские модели систем с нелинейными геометрическими связями. Для получения математических моделей систем с нелинейными геометрическими связями в виде векторно-матричных нелинейных уравнений и уравнений с выделенным первым приближением предложена методика использования операций ронекеровского произведения и векторизации. Доказано несколько новых достаточных условий разрешимости задачи стабилизации положений равновесия и стационарных движений при полной и неполной информации о состоянии, разработаны алгоритмы численного нахождения коэффициентов стабилизирующих управлений и коэффициентов наблюдателя, предложен алгоритм численного нахождения полного вектора начальных возмущений фазовых переменных для систем с наложенными нелинейными геометрическими связями, проведено подробное исследование положений равновесия системы Ball and Beam. В системе MATLAB автором реализованы разработанные алгоритмы, проведены вычислительные эксперименты и анализ полученных результатов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 работах, из которых 5 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [1–5], в том числе 2 опубликованы в журналах, цитируемых международной базой Scopus [1–2], в том числе 1 опубликована в журнале, цитируемом международной базой Web of Science [1], и 9 опубликованы в материалах различных конференций [6–14]. Разработан и зарегистрирован комплекс программ [15].

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, приложения А, приложения Б и списка используемой литературы. Работа изложена на 165 страницах, включая 28 рисунков, 9 таблиц и список литературы, содержащий 100 наименований.

Содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность исследования, проводимого в рамках работы, приводится обзор существующих результатов по теме исследования, формулируется цель работы и задачи, решаемые в рамках достижения этой цели, обоснована научная новизна и практическая значимость работы, изложено содержание глав диссертации.

В первой главе рассматривается задача стабилизации положений равновесия мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями, в составе которых имеется один или несколько электроприводов. Предполагается, что управление осуществляется за счёт изменения напряжения на якорных обмотках двигателей. Для систем рассматриваемого класса на основе уравнений Шульгина в переменных Лагранжа строится специальная математическая модель с явным учётом динамики исполнительных приводов. Доказывается достаточное условие разрешимости задачи стабилизации положений равновесия при полной и при неполной информации о состоянии. Приводится алгоритм численного определения коэффициентов стабилизирующего управления.

Пусть конфигурация механической системы определяется $n + m$ параметрами $q' = (q_1, \ldots, q_{n+m})$, $m \geq 1$, взятыми в числе, превосходящем число степеней свободы n. Тогда m из этих $n+m$ параметров называются *избыточными координатами*. Предполагается, что на систему наложено m независимых нелинейных геометрических связей:

$$F' = (F_1(q), \ldots, F_m(q)) = 0, \ \ \mathrm{rank}\frac{\partial F}{\partial q} = m. \tag{1.1}$$

Пусть система включает в себя k двигателей постоянного тока с независимым возбуждением. Для получения соответствующих уравнений динамики разобъём фазовый вектор на группы следующим образом:

$$q' = (r', I', s'), \ \ r' = (q_1 \ldots q_k), \ \ I' = (q_{k+1} \ldots q_n), \ \ s' = (q_{n+1} \ldots q_{n+m}), \tag{1.2}$$

где r – вектор независимых параметров, I – вектор переменных, соответствующих электродвигателям, s – вектор избыточных координат. Штрих означает транспонирование.

Выразим зависимые скорости $\dot{s}$ из уравнений (1.1), продифференцированных по времени:

$$\dot{s} = B(q)\dot{r}, \ \ B(q) = -\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right). \tag{1.3}$$

Уравнения Шульгина для систем с избыточными координатами имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}'} - \frac{\partial L^*}{\partial r'} = Q_r^* + B'(q)\left(\frac{\partial L^*}{\partial s'} + Q_s^*\right), \tag{1.4}$$

где $L^* = \frac{1}{2}\dot{r}' a_{rr}(q)\dot{r} + a_r(q)\dot{r} - W(q)$ – функция Лагранжа, Q_r^* и Q_s^* – непотенциальные силы, отнесенные к координатам r и s. Звездочкой отмечено, что скорости $\dot{s}$ исключены с помощью (1.3). Уравнения (1.4) рассматриваются вместе с (1.3).

В полную математическую модель, учитывающую динамику электроприводов, войдут также k уравнений вида

$$L_a\frac{dI_a}{dt} + R_a \cdot I_a + k_1 \cdot \omega = k_2 \cdot e_\nu, \tag{1.5}$$

где I_a – сила тока в якорной обмотке, e_ν – напряжение в цепи якоря, L_a – индуктивность якорной обмотки, R_a – сопротивление, k_1 – электромагнитный коэффициент, k_2 – коэффициент преобразователя питания, ω – угловая скорость вращения вала. Уравнение (1.5) представляет собой линейное приближение второго закона Кирхгофа.

Обозначим вектор угловых скоростей вращения валов ω_I, e_ν – вектор напряжений. В рассматриваемом случае в него включаются управляющие воздействия. Далее, обозначим диагональные матрицы: $\mathcal{L}_{II}$ – матрица индуктивности, $\mathcal{R}_{II}$ – сопротивлений, $\mathcal{P}_{II}$ – электромагнитных коэффициентов, $\mathcal{K}_{II}$ – коэффициентов преобразователей питания. Тогда математическую модель динамики систем рассматриваемого класса в явной векторно-матричной записи можно представить в виде

$$\left\{\begin{array}{c} a_{rr}(q)\ddot{r} + (\dot{r}'\otimes E_{n-k})a_{rr}^{r'}\dot{r} + (\dot{r}'B'\otimes E_{n-k})a_{rr}^{s'}\dot{r} - \frac{1}{2}(E_{n-k}\otimes\dot{r}')a_{rr}^{r'}\dot{r} - \\ -\frac{1}{2}B'(E_m\otimes\dot{r}')a_{rr}^{s'}\dot{r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial r} - \left(\frac{\partial a_r}{\partial r}\right)' + \frac{\partial a_r}{\partial s}B - B'\left(\frac{\partial a_r}{\partial s}\right)'\right)\dot{r} + \\ + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)' + B'\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)' = Q_r^* + B'Q_s^*, \\ \mathcal{L}_{II}\dot{I} = -\mathcal{R}_{II}I - \mathcal{P}_{II}\omega_I + \mathcal{K}_{II}e_\nu, \quad \dot{s} = B(q)\cdot\dot{r} \end{array}\right. \tag{1.6}$$

где символом $\otimes$ обозначено кронекеровское произведение и введены следующие обозначения для блочных матриц:

$$a_{rr}^{r'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{rr}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{rr}}{\partial q_k} \end{pmatrix}, \quad a_{rr}^{s'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{rr}}{\partial q_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_{rr}}{\partial q_{n+m}} \end{pmatrix}.$$

Система (1.6) допускает частное решение, соответствующее положению равновесия

$$r = r_0 = \text{const}, \ \ s = s_0 = \text{const}, \ \ I = I_0 = \text{const}, \ \ e_\nu = e_{\nu_0} = \text{const}. \tag{1.7}$$

Возмущения координат обозначим следующим образом:

$$r = r_0 + x_1, \ \ \dot{r} = x_2, \ \ I = I_0 + x_3, \ \ s = s_0 + y, \ \ e_\nu = e_{\nu_0} + u. \tag{1.8}$$

С помощью линейной замены

$$z = y - B(0)x_1, \ \ B(0) = B(r_0, s_0). \tag{1.9}$$

система уравнений возмущённого движения приводится к специальному виду теории критических случаев и доказывается

Утверждение 1.1. *Устойчивость положений равновесия мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями возможна только в критических случаях. Причём число нулевых корней системы первого приближения в окрестности положения равновесия имеет не менее m корней, где m – число геометрических связей.*

После замены (1.9) система (1.6) с выделенным первым приближением может быть записана в следующем компактном виде

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\xi} = N\xi + Uu + Zz + X^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = B^{(1)}(x_1, z)x_2, \ \ \xi' = (x_1', x_2', x_3'), \end{array}\right. \tag{1.10}$$

где $B^{(1)}(x_1, z) = B(r_0 + x_1, \ s_0 + B(0)x_1 + z) - B(0)$, $X^{(2)}(\xi, z)$ – нелинейные члены, разложение которых начинается со второго порядка относительно переменных $x_1, \ x_2, \ x_3, \ z$. Матрицы N, U, Z постоянны, их коэффициенты известным образом выражаются через функцию Лагранжа, непотенциальные силы и уравнения связей и вычисляются в положении равновесия (1.7).

Пусть информация о состоянии системы получается в виде вектора $\sigma, \dim\sigma \le 2n - k$, линейные члены, в разложении которого в окрестности исследуемого положения равновесия имеют вид $\sigma = \Sigma\xi$, где Σ – некоторая постоянная матрица. Обозначим $\hat{\xi}$ – вектор оценки фазового состояния системы, полученный по измерению σ. Для определения $\hat{\xi}$ введём наблюдатель

$$\dot{\hat{\xi}} = N\hat{\xi} + Uu + \Lambda(\sigma - \Sigma\hat{\xi}), \tag{1.11}$$

где Λ – некоторая постоянная матрица коэффициентов. которая может быть найдена из решения дуальной задачи стабилизации

$$\dot{\mu} = N'\mu + \Sigma'\nu, \ \ \nu = -\Lambda'\mu. \tag{1.12}$$

Теорема 1.1. *Если для систем (1.10), (1.11) пара (N, V) управляема, а пара (N, Σ) наблюдаема, то положение равновесия (1.7) стабилизируется до асимптотической устойчивости по всем переменным приложением по вектору e_ν управления вида $u = -\mathcal{K}\hat{\xi}$.*

Алгоритм 1.1. Алгоритм численного нахождения коэффициентов стабилизирующего воздействия

1. Исходя из уравнений геометрических связей (1.1) выделить m координат, которые будут считаться избыточными.

2. Выразить скорости зависимых координат в виде (1.3).

3. Исключить зависимые скорости $\dot{s}$ из выражений для кинетической энергии и непотенциальных сил.

4. Определить матрицы коэффициентов a_{rr}, a_r квадратичной и линейной по скоростям частей кинетической энергии, приведённую потенциальную энергию $W(q)$ и матрицы параметров электродвигателей $\mathcal{L}_{II}$, $\mathcal{R}_{II}$, $\mathcal{K}_{II}$, $\mathcal{P}_{II}$.

5. Определить значения всех компонент фазового вектора и программных управлений в положении равновесия.

6. Ввести возмущения координат согласно (1.8).

7. Вычислить матрицы N и U коэффициентов линейной управляемой подсистемы

$$\dot{\xi} = N\xi + Uu, \ \ \xi' = (x_1', x_2', x_3'), \tag{1.13}$$

не содержащей критических переменных z.

8. Проверить условие управляемости пары (N, U).

9. Если условие п.8 выполняется, то задать квадратные матрицы R и Q порядков $2n - k$ и k соответственно из критерия качества

$$\int_{t_0}^{+\infty} (\xi' R\xi + u'Qu)\, dt. \tag{1.14}$$

10. Найти матрицу X коэффициентов функции Ляпунова стабилизирующего воздействия, решив матричное алгебраическое уравнение Риккати

$$XN + N'X - X\left(UR^{-1}U'\right)X + Q = 0. \tag{1.15}$$

11. Найти матрицу $\mathcal{K}$ коэффициентов линейного управляющего воздействия по формуле

$$\mathcal{K} = R^{-1}Q'X. \tag{1.16}$$

Примеры стабилизации положений равновесия системы GBB 1005 Ball and Beam – голономной системы с избыточной координатой – при различных способах введения управляющих воздействий (посредством механического момента или дополнительного напряжения) рассмотрены в главе 3.

Во **второй главе** решается задача стабилизации стационарных движений мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями при наличии циклических координат. Рассматриваются следующие способы введения управляющих воздействий: по вектору позиционных, циклических или избыточных координат. Для моделирования динамики таких систем используются уравнения Шульгина в переменных Лагранжа и Рауса. При выводе векторно-матричных нелинейных уравнений динамики в явном виде и выделения первого приближения в окрестности стационарного движения применяются формулы матричного дифференцирования, полученные в приложении А. Доказываются новые достаточные условие разрешимости задачи стабилизации при полной и при неполной информации о состоянии. Разрабатывается алгоритм численного нахождения коэффициентов управляющего воздействия и наблюдателя.

Определение 2.1. [Шульгин М.Ф.] Координаты β назовем циклическими[1], если выполнены следующие условия:
1. они не входят явно в выражение функции Лагранжа L, (но L явно зависит от $\dot{\beta}$), т.е. $\frac{\partial L}{\partial \beta} \equiv 0$;
2. они не содержатся явно в выражениях конечных связей (1.1).

Будем также считать, что соответствующие циклическим координатам обобщённые силы равны нулю, а выражения остальных обобщённых сил не зависят от этих координат.

Определение 2.2. [Клоков А.С., Самсонов В.А.] Координаты β назовем псевдоциклическими[2], если для них выполнены условия 1 и 2, но по ним могут быть приложены управляющие силы, действующие в окрестности невозмущённого движения.

В случае описания конфигурации системы переменными Лагранжа для введения циклических координат фазовый вектор разделим на три вектора:

$$q' = (\alpha',\ \beta',\ s'),\ \ \alpha' = (q_1 \dots, q_k),\ \ \beta' = (q_{k+1} \dots,\ q_n),\ \ n - k = l > 0. \qquad (2.1)$$

Из второго условия определения ?? сразу следует, что выражения для $\dot{s}$ принимают вид:

$$\dot{s} = B_{s\alpha}(\alpha, s)\dot{\alpha},\ \ B_{s\alpha}(\alpha, s) = -\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right). \qquad (2.2)$$

Обозначим векторы управлений: u_1, $\dim\, u_1 \le k$ – по независимым координатам α с постоянной матрицей коэффициентов M_1; u_2, $\dim\, u_2 \le m$ – по избыточным координатам s, с постоянной матрицей M_2; u_3 – по циклическим координатам β. Тогда

$$\tilde{Q}^*_\alpha = Q^*_\alpha + M_1 u_1,\ \ \tilde{Q}^*_s = Q^*_s + M_2 u_2.$$

Уравнения динамики с учетом возможных управляющих воздействий имеют вид

[1] Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании, Ташкент, Изд-во САГУ, 1958.

[2] Клоков А.С., Самсонов В.А. О стабилизируемости тривиальных установившихся движений гироскопически связанных систем с псевдоциклическими координатами. ПММ. 1985. Т. 49. № 2. С. 199-202.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\alpha}'} - \frac{\partial L^*}{\partial \alpha'} = Q^*_\alpha + M_1 u_1 + B'_{s\alpha}(q)\left(\frac{\partial L^*}{\partial s'} + Q^*_s + M_2 u_2\right), \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\beta}'} = u_3, \quad \dot{s} = B_{s\alpha}(\alpha, s)\dot{\alpha}. \end{cases} \tag{2.3}$$

При $u_3 = 0$ система (2.3) допускает циклические интегралы и может совершать стационарные движения:

$$\alpha = \alpha_0 = \text{const}, \;\; s = s_0 = \text{const}, \;\; \dot{\beta} = c_\beta = \text{const}. \tag{2.4}$$

Введём возмущения:

$$\begin{array}{c} \alpha = \alpha_0 + x, \;\; s = s_0 + y, \;\; \dot{\beta} = c_\beta + w, \\ u_1 = u_{1_0} + u_\alpha, \;\; u_2 = u_{2_0} + u_s, \;\; u_3 = u_\beta. \end{array} \tag{2.5}$$

С помощью линейной замены $z = y - B_{s\alpha}(0)\cdot x$, $\;B_{s\alpha}(0) = B_{s\alpha}(r_0,\ s_0)$ система (2.3) приводится к специальному виду теории критических случаев, выделяются критические переменные и доказывается

Утверждение 2.2. *Устойчивость стационарных движений мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями (1.1) возможна только в критических случаях. Причём число нулевых корней системы первого приближения в окрестности движения (2.4) не менее m, где m - число геометрических связей.*

После выделения первого приближения в окрестности (2.4) и замены, систему (2.3) можно записать следующим образом

$$\begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + V_\alpha u_\alpha + V_s u_s + V_\beta u_\beta + Zz + X^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = B^{(1)}(x, z)\dot{x}, \;\; \xi' = (x', \dot{x}', w'), \end{cases} \tag{2.6}$$

где $B^{(1)}(x,z) = B_{s\alpha}(\alpha_0 + x,\ s_0 + B_{s\alpha}(0)x + z) - B_{s\alpha}(0)$, матрицы коэффициентов $N,\ V_\alpha,\ V_s,\ V_\beta,\ Z$ постоянны и выражаются известным образом через коэффициенты функции Лагранжа, непотенциальных сил, уравнений геометрических связей и их частных производных (в том числе и второго порядка), вычисленных на стационарном движении (2.4) и матриц управлений.

Для решения задачи стабилизации при неполной информации о состоянии рассматриваются для простоты следующие варианты матриц коэффициентов линейного приближения вектора измерений σ: $\sigma_i = \Sigma_i\xi$,

$$\Sigma_1 = (E_k \;\; 0 \;\; 0), \; \Sigma_2 = (0 \;\; E_k \;\; 0), \; \Sigma_3 = (0 \;\; 0 \;\; E_l).$$

Наблюдатель для получения необходимой для формирования стабилизирующего управления информации построим в виде

$$\dot{\hat{\xi}} = N\hat{\xi} + V_\alpha u_\alpha + V_s u_s + V_\beta u_\beta + \Lambda_i(\sigma_i - \Sigma_i\hat{\xi}), \;\; i = 1,\ 2,\ 3, \tag{2.7}$$

где $\hat{\xi}' = (\hat{x},\ \dot{\hat{x}}',\ \hat{w}')$ – вектор оценки фазового состояния, Λ_i – постоянные матрицы коэффициентов системы оценивания, которые определяются из решения дуальной задачи стабилизации.

$$\dot{\mu} = N'\mu + \Sigma_i'\nu, \;\; \nu = -\Lambda_i'\mu. \tag{2.8}$$

Достаточные условия разрешимости задачи стабилизации стационарного движения (2.4) системы (2.6) до асимптотической устойчивости по всем переменным устанавливаются в виде следующих теорем.

Теорема 2.1. *Если для систем (2.6), (2.7) пара* $(N,\ V_\beta)$ *управляема, а пара* $(N,\ \Sigma_i)$ *наблюдаема, то стационарное движение (2.4) может быть стабилизировано до асимптотической устойчивости по всем переменным приложением по всему вектору циклических координат управления вида* $u_\beta = -\mathcal{K}_{3i}\hat{\xi}$, *где* $\hat{\xi}$ *– вектор оценки фазового состояния, полученный по измерению* σ_i.

Теорема 2.2. *Если для систем (2.6), (2.7) пара* $(N,\ V_\alpha)$ *управляема, а пара* $(N,\ \Sigma_i)$ *наблюдаема, то стационарное движение (2.4) может быть стабилизировано до асимптотической устойчивости по всем переменным приложением по вектору позиционных координат управления вида* $u_\alpha = -\mathcal{K}_{1i}\hat{\xi}$, *где* $\hat{\xi}$ *– вектор оценки фазового состояния, полученный по измерению* σ_i.

Теорема 2.3. *Если для систем (2.6), (2.7) пара* $(N,\ V_s)$ *управляема, а пара* $(N,\ \Sigma_i)$ *наблюдаема, то стационарное движение (2.4) может быть стабилизировано до асимптотической устойчивости по всем переменным приложением по вектору избыточных координат управления вида* $u_s = -\mathcal{K}_{2i}\hat{\xi}$, *где* $\hat{\xi}$ *– вектор оценки фазового состояния, полученный по измерению* σ_i.

При этом во всех случаях начальные возмущения должны удовлетворять уравнениям связей (1.1).

Алгоритм 2.2. Алгоритм численного нахождения коэффициентов стабилизирующего воздействия и наблюдателя для мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями.

1. Исходя из уравнений геометрических связей (1.1) выделить m координат, которые будут считаться избыточными.

2. Выразить скорости зависимых координат в виде (2.2).

3. Исключить зависимые скорости $\dot{s}$ из выражений для кинетической энергии и непотенциальных сил.

4. Определить матрицы коэффициентов кинетической энергии и приведённую потенциальную энергию $W(q)$.

5. Определить значения компонент фазового вектора и программных управлений в положении равновесия.

6. Ввести возмущения координат согласно (2.5).

7. Вычислить матрицы коэффициентов линейной управляемой подсистемы

$$\dot{\xi} = N\xi + V_\alpha u_\alpha,\ \ \dot{\xi} = N\xi + V_s u_s,\ \text{или}\ \dot{\xi} = N\xi + V_\beta u_\beta,$$

в зависимости от выбранного варианта введения управляющих воздействий.

8. Проверить условие управляемости пары $(N,\ V_\alpha)$, $(N,\ V_s)$ или $(N,\ V_\beta)$, соответственно.

9. Проверить выполнимость условия наблюдаемости для пары $(N,\ \Sigma_i)$.

10. Если условия пунктов 8 и 9 выполнены, то задать квадратные матрицы R и Q, определяющие критерий качества

11. Найти матрицу $\mathcal{K}_{ji} = R^{-1}Q'X$ коэффициентов стабилизирующего управления, вычислив матрицу X из соответствующего матричного алгебраического уравнения Риккати.

12. Найти матрицу $\Lambda_i = Y'Q(R^{-1})'$ коэффициентов наблюдателя, вычислив матрицу Y из соответствующего уравнения Риккати.

Задание конфигурации системы переменными Рауса позволяет рассмотреть ещё один способ управления – по части циклических координат, когда импульсы (переменные Гамильтона) вводятся только по неуправляемым циклическим координатам, а управления прикладываются по циклическим координатам, описываемым переменными Лагранжа. Это позволяет не включать возмущения импульсов, информация о которых не может быть получена непосредственно датчиками, в управляемую подсистему и соответственно в систему оценивания при неполной информации о состоянии.

Для построения соответствующей математической модели вектор фазовых координат делится на четыре части: $q' = (\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ s')$, где

$$\alpha' = (q_1 \dots q_k),\ \ \beta' = (q_{k+1} \dots\ q_l),\ \ \gamma' = (q_{l+1} \dots q_n),\ \ 1 < k < l < n.$$

Выделение вектора β нужно для введения управляемых циклических координат. Пусть переменные γ циклические, а переменные β – псевдоциклические. Таким образом, переменными Рауса в данной постановке будут являться $\alpha,\ \dot\alpha,\ \beta,\ \dot\beta,\ \gamma,\ p,\ s,\ \dot s$, где $p = \partial L/\partial\dot\gamma'$. Из условия цикличности координат β и γ, получаем, что выражение для исключения $\dot s$, совпадает с (2.2).

Обозначим $\rho,\ \ \dim\rho = l-k$ – вектор управляющих воздействий. В этом случае полная система уравнений динамики имеет вид

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{d}{dt}\frac{\partial R^*}{\partial\dot\alpha'} - \frac{\partial R^*}{\partial\alpha'} = Q^*_\alpha + B'_{s\alpha}\left(\frac{\partial R^*}{\partial s'} + Q^*_s\right), \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial R^*}{\partial\dot\beta'} = \rho, \\ \dot\gamma = -\frac{\partial R^*}{\partial p'}, \quad \dot p = 0, \quad \dot s = B_{s\alpha}(\alpha, s)\dot\alpha, \end{array}\right. \tag{2.9}$$

где R^* – функция Рауса после исключения $\dot s$ с помощью (2.2).

При $\rho = 0$ система (2.9) имеет циклические интегралы и может совершать стационарные движения:

$$p = p_0 = \text{const},\ \ \alpha = \alpha_0 = \text{const},\ \ \dot\beta = c_\beta = \text{const},\ \ s = s_0 = \text{const}. \tag{2.10}$$

Введём возмущения компонент фазового вектора и управлений:

$$p = p_0 + v,\ \ \alpha = \alpha_0 + x,\ \dot\beta = c_\beta + w,\ \ s = s_0 + y,\ \ \rho = u. \tag{2.11}$$

При помощи линейной замены выделяются критические переменные, возникающие из уравнений кинематических связей, и система приводится к специальному виду:

$$\left\{\begin{array}{c} \dot\xi = N\xi + Vu + Zz + X^{(2)}(\xi, v, z), \\ \dot z = B^{(1)}(x, z)\dot x,\ \ \dot v = 0,\ \ \xi' = (x', \dot x', w'), \end{array}\right. \tag{2.12}$$

где матрицы коэффициентов $N,\ V,\ Z$ постоянны и выражаются известным образом через функцию Рауса, непотенциальные силы и уравнения геометрических связей и их частных производных (в том числе и второго порядка), вычисленных на стационарном движении (2.10). Характеристическое уравнение системы первого приближения имеет в этом случае $n-l+m$ нулевых корней.

Пусть информация о состоянии получается одним из вариантов линейного приближения вектора измерений $\sigma_i = \Sigma_i\xi$:

$$\Sigma_1 = (E_k\ \ 0\ \ 0),\ \Sigma_2 = (0\ \ E_k\ \ 0),\ \Sigma_3 = (0\ \ 0\ \ E_l).$$

Система оценивания имеет вид

$$\dot{\hat{\xi}} = N\hat{\xi} + Vu + \Lambda_i(\sigma_i - \Sigma_i\hat{\xi}), \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{2.13}$$

где $\hat{\xi}$ – вектор оценки фазового состояния системы, Λ_i – постоянные матрицы коэффициентов системы оценивания, подлежащие определению из решения дуальной задачи стабилизации, аналогичной (2.8).

Здесь достаточные условия разрешимости задачи стабилизации стационарного движения (2.10) системы (2.12) до устойчивости по всем переменным при неполной информации о состоянии доказываются с применением теоремы Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях и формулируются в виде следующей теоремы.

Теорема 2.4. *Если для систем (2.12), (2.13) пара $(N,\ V)$ управляема, а пара $(N,\ \Sigma_i)$ наблюдаема, то существует линейное управление $u_i = -\mathcal{K}_i\hat{\xi}$, стабилизирующее стационарное движение (2.10) до устойчивости по всем переменным.*

В **третьей главе** строятся различные математические модели системы GBB 1005 Ball and Beam (рис. 1) с нелинейной геометрической связью. Шар движется в желобе только под действием силы тяжести. Его положение r – расстояние от точки O до точки касания шара и желоба – регулируется за счет изменения угла α наклона желоба OA и должно стабилизироваться в некотором наперед заданном положении $r_0, 0 < r_0 < L$, где L – длина желоба, l – длина нерастяжимого стержня AB. Угол поворота колеса редуктора радиуса d электродвигателя обозначим θ. Связь задаётся уравнением

$$(L(\cos\alpha - 1) + d(1 - \cos\theta))^2 + (L\sin\alpha + l - d\sin\theta)^2 = l^2, \tag{3.1}$$

что позволяет в качестве зависимой координаты выбирать или угол α или θ. Решается задача стабилизации положений равновесия различными способами. Требуется:

1. построить различные математические модели системы в зависимости от способа управления (механического момента или дополнительного напряжения на якорной обмотке двигателя) и выбора избыточной координаты;

2. найти параметры стабилизирующего управления и наблюдателя и построить графики переходных процессов;

3. провести сравнительный анализ результатов компьютерного моделирования динамики системы в зависимости от разных подходов к построению математической модели (на основе уравнений Шульгина при различном выборе избыточной координаты или на основе уравнений Лагранжа второго рода после линеаризации уравнения связи в окрестности положения равновесия).

Очевидно, равновесие возможно только при $\alpha = 0$. Положив $\alpha_0 = 0$ и учитывая, что $0 \le \theta \le \pi$, получим значения угла θ, соответствующие всем положениям равновесия системы:

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = 2\arccos\left(\frac{d}{\sqrt{l^2 + d^2}}\right). \tag{3.2}$$

Геометрические конфигурации этих положений показаны на рис. 2.

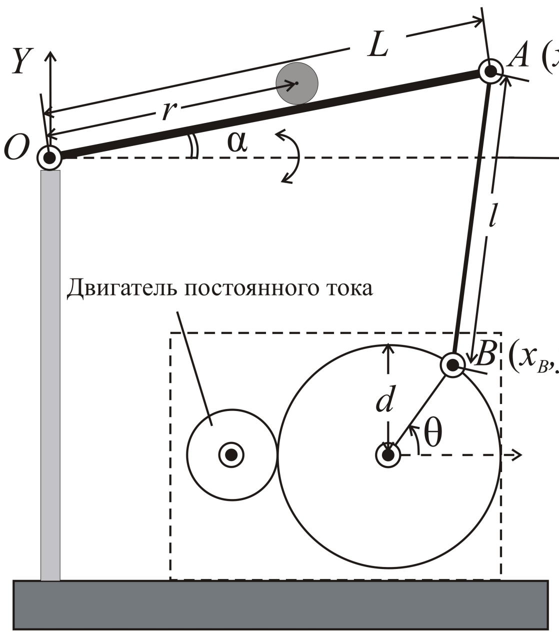

Рис. 1. Схема системы Ball and Beam

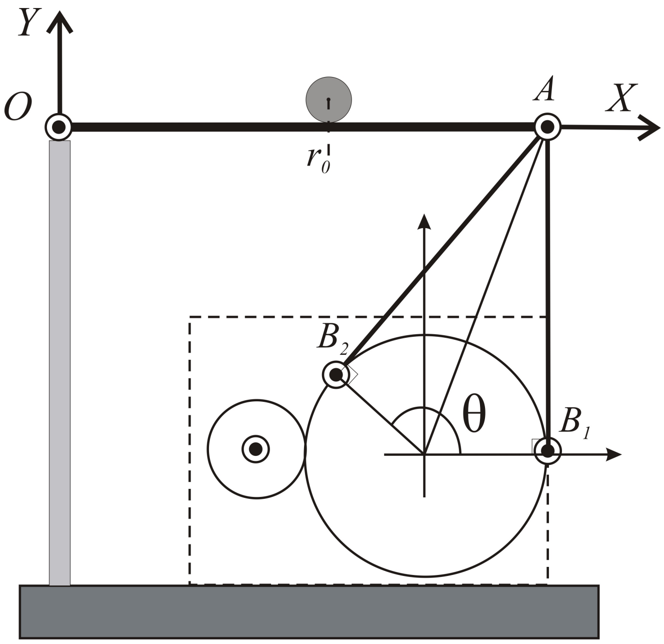

Рис. 2. Положения равновесия системы Ball and Beam

Различным способам стабилизации системы Ball and Beam посвящено много работ, однако при построении математической модели в подавляющем большинстве используется один и тот же подход: нелинейное уравнение (3.1) линеаризуется в окрестности положения равновесия $\alpha_0 = \theta_0 = 0$ и заменяется линейным соотношением между углами

$$\alpha \approx \frac{d}{L}\theta \;\text{ или }\; \alpha = \frac{d}{L}\theta, \tag{3.3}$$

после чего зависимая координата исключается и используются уравнения Лагранжа второго рода. Второе положение, очевидно, теряется, если пользоваться (3.3). Данная задача рассматривалась А.Я. Красинским. Он указал на существование второго положения равновесия и некорректность в общем случае математической модели динамики, основанной на линеаризованных геометрических связях. Строгую математическую модель динамики системы GBB 1005 Ball and Beam с учетом нелинейной связи можно построить, используя уравнения Шульгина.

Кинетическую и потенциальную энергию системы запишем в виде[3]

$$\begin{gathered} T = \tfrac{m}{2}\dot{r}^2 + \tfrac{m}{2}\left(r^2+R^2\right)\left(\dot{\alpha} - R\tfrac{\dot{r}}{r^2+R^2}\right)^2 + \tfrac{J}{2}\left(\dot{\alpha} - \tfrac{\dot{r}}{R}\right)^2 + \tfrac{J_0}{2}\dot{\theta}^2, \\ \Pi = mg(r\sin\alpha + R\cos\alpha), \end{gathered} \tag{3.4}$$

где m – масса шара, R – его радиус, g – ускорение свободного падения, J – момент инерции шара, J_0 – момент инерции всей системы, приведенной к двигателю.

Для решения задачи стабилизации применяются результаты, полученные в главе первой диссертационной работы. Для всех случаев по управляемой линейной подсистеме находится стабилизирующее управление, которое затем

[3]Красинский А.Я., Красинская Э.М. Моделирование динамики стенда GBB 1005 BALL AND BEAM как управляемой механической системы с избыточной координатой. Наука и образование, МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. Журн. 2014. №. 01.

подставляется в полную нелинейную систему. Начальные возмущения вектора фазовых компонент должны удовлетворять уравнению (3.1). Для демонстрации асимптотической устойчивости по всем переменным во всех положениях равновесия строятся графики переходных процессов (рис. 3–4).

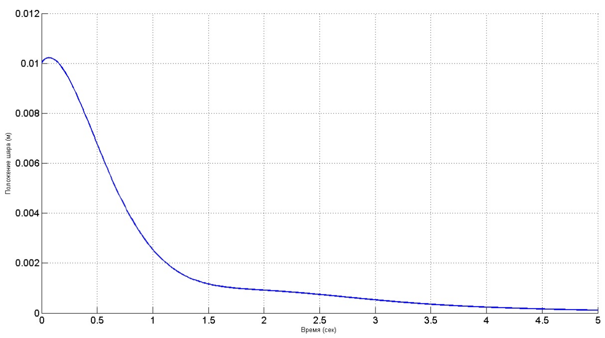

Рис. 3. Переходный процесс по координате x_1 (положение шара)

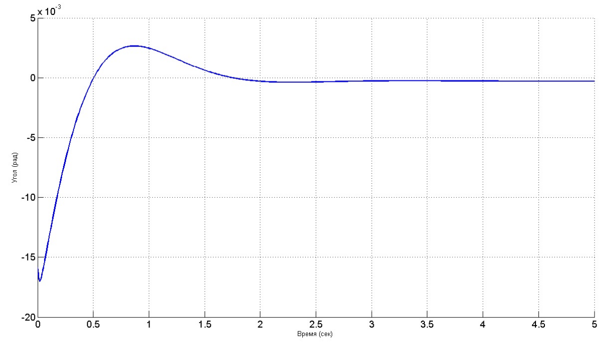

Рис. 4. Переходный процесс по координате x_5 (угол θ)

Показано, что математические модели, построенные на основе уравнений Шульгина при различном выборе зависимой координаты (α или θ) приводят к совпадающим переходным процессам, если начальные возмущения идентичны: необходимо учитывать, что компоненты фазовых векторов, входящих в управляемую подсистему, зависят от выбора избыточной координаты. Соответственно, начальные возмущения по этим координатам должны быть согласованы.

В случае моделирования системы посредством линеаризации связи было показано, что в нулевом положении равновесия ($\alpha_0 = 0, \ \theta_0 = 0$) получающиеся системы идентичны, так как для этого равновесия члены второго порядка в разложении уравнения связи (3.1) обращаются в ноль. В случае ненулевого положения равновесия ($\alpha_0 = 0, \ \theta_1 \neq 0$) матрицы систем с выделенным первым приближением различны. Проведенный численный эксперимент показал, что степень влияния этого различия зависит от соотношения механических параметров системы $L, \ d$ и l. На рис. 5 показан пример, когда стабилизирующее управление, найденное по системе, построенной на основе линеаризованного уравнения (3.1) и подставленное в полную нелинейную систему, приводит к возбуждению полной нелинейной системы. Пунктирной линией изображён график полной нелинейной системы, сплошной линией - моделирование линеаризованной системы. На рис. 6 показан пример процесса стабилизации системы управлением, полученным по системе с учетом нелинейного уравнения (3.1) для тех же значений параметров $L, \ d$ и l.

В **четвёртой главе** приводится описание программного комплекса HolStabBB, в котором полученные результаты по сравнению двух подходов к моделированию динамики системы Ball and Beam – с учетом нелинейной связи и при линеаризованной связи – реализованы с помощью среды MATLAB. А также рассматриваются численные методы, используемые для нахождения коэффициентов управляющего воздействия и наблюдателя и компьютерного моделирования динамики системы.

Комплекс состоит из графического интерфейса (рис. 7) и программно реализованных алгоритмов построения переходных процессов стабилизации по-

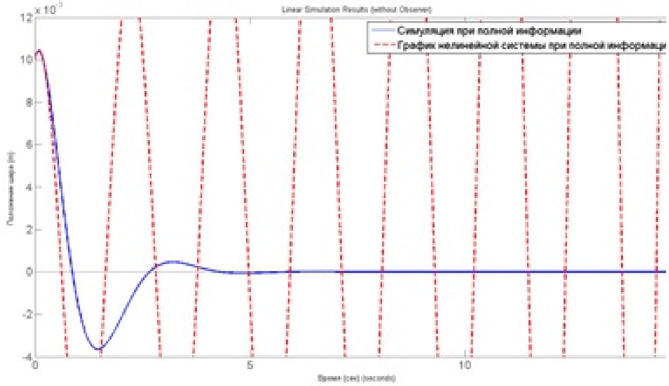

Рис. 5. Управление, определенное по линеаризованной системе

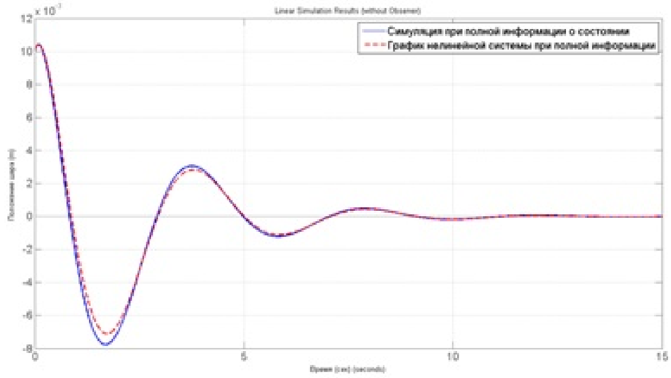

Рис. 6. Управление определено по системе с учетом нелинейной связи

ложений равновесия системы GBB 1005 Ball and Beam при ее регулировании посредством напряжения. Программный модуль позволяет пользователю задавать механические параметры системы и требуемое положение шара для стабилизации и выбирать способ математического моделирования динамики: с учетом нелинейной связи по уравнениям Шульгина или при линеаризованной связи по уравнениям Лагранжа; с использованием датчика (измеряется положение шара в жёлобе) или при полной информации о состоянии.

Для того чтобы управление, найденное по алгоритму 1.1, стабилизировало нелинейную систему до асимптотической устойчивости, необходимо, чтобы компоненты полного фазового вектора в начальный момент времени также удовлетворяли уравнению связи (3.1). Для их численного определения предлагается следующий

Алгоритм 3.3. Алгоритм определения полного вектора начальных возмущений для систем с геометрическими связями

1. Зададим некоторые $\epsilon > 0$ и $\mu > 0$, определяющие норму вектора начальных возмущений вектора независимых параметров x и точность работы алгоритма.

2. Зададим произвольно возмущения x^* вектора x так, что $||x^*||_1 < \epsilon$.

3. Определим новую функцию $G(y) = F(r_0 + x^*, s_0 + y)$, где y – возмущения вектора избыточных координат.

4. Определим начальное приближение $y^{(0)}$ вектора y, по формуле

$$y^{(0)} = B(0) \cdot x^*,$$

где $B(0)$ определяется из (1.9).

5. Если $G(y^{(0)}) \leq \mu$, положим $y^* = y^{(0)}$. Иначе доопределим решение с помощью алгоритма решения систем нелинейных уравнений trust-region dogleg (доверительной области dogleg), взяв $y^{(0)}$ как начальное приближение к решению.

6. Если решение не найдено в п.5, положим $x^* = \frac{1}{2}x^*$ и переходим к п. 3.

В **приложении А** собраны формулы, используемые при выводе уравнений динамики и приведено их доказательство.

Приложение Б содержит графики переходных процессов рассмотренных примеров.

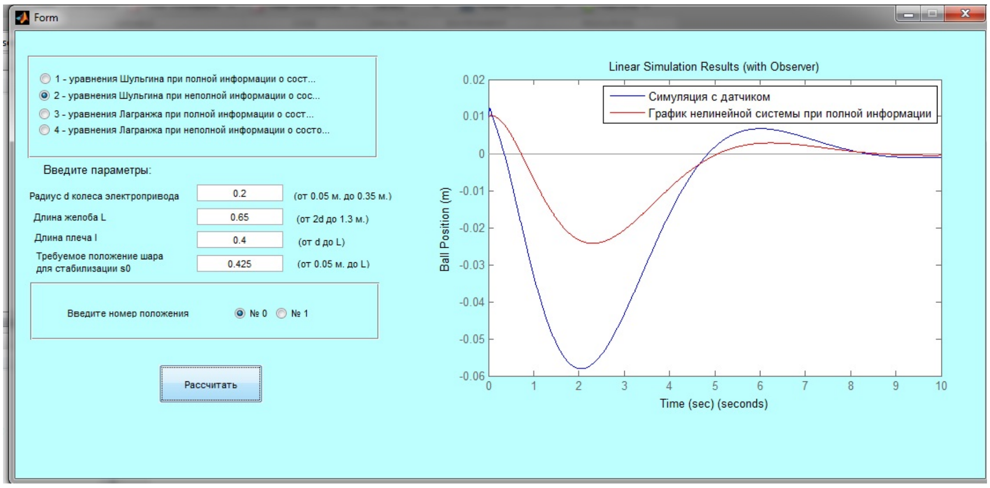

Рис. 7. Графический интерфейс программного комплекса HolStabBB

Основные результаты работы, выносимые на защиту

1. Предложена и реализована методика получения нелинейных математических моделей динамики мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями в виде векторно-матричных уравнений с выделенным первым приближением в переменных Лагранжа и Рауса [1, 3, 8, 10, 12–14].

2. Разработан метод получения явных нелинейных уравнений динамики и уравнений с выделенным первым приближением в векторно-матричном виде [1, 3].

2. Доказаны новые достаточные условия разрешимости нелинейных задач стабилизации стационарных движений и положений равновесия мехатронных голономных систем с геометрическими связями при различных способах введения управляющих воздействий при полной и неполной информации о состоянии [1, 3, 8, 10, 12–14].

3. Разработаны алгоритмы численного нахождения коэффициентов стабилизирующего управления и наблюдателя для мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями [4–7, 9].

4. Разработан комплекс программ для реализации предложенных алгоритмов применительно к полному исследованию динамики системы GBB 1005 Ball and Beam [15].

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК

1. Krasinskiy A.Ya., Ilyina A.N. The mathematical modelling of the dynamics of systems with redundant coordinates in the neighborhood of steady motions // Вестник Южно-Уральского университета. Серия математическое моделирование и программирование. 2017. Том 10. Вып. 2. С. 38–50. (WoS, Scopus)
2. Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М. О моделировании динамики системы Ball and Beam как нелинейной мехатронной системы с геометрической связью // Вестник Удмуртского университета. Секция механика. 2017. Том 27. Вып. 3, С. 414–430. (Scopus)
3. Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М. Об одном случае стабилизации стационарных движений систем с избыточными координатами //

Вестник МГУ. 2019. Сер. 1. Математика, механика. №1. С. 46 – 51. (Scopus)

4. Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М., Рукавишникова А.С. Математическое и компьютерное моделирование динамики планетохода с радиально деформируемыми колесами // Труды МАИ. 2017, №95.
5. Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М., Рукавишникова А.С. Математическое и компьютерное моделирование манипуляторов с нелинейной геометрической связью // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. №4(76). 20 стр. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-4-1757

Публикации по теме диссертации в других изданиях

6. Красинский А.Я., Ильина А.Н., Рукавишникова А.С. Сравнительный анализ компьютерных реализаций стабилизации стационарных движений голономных мехатронных систем при различных подходах к построению математических моделей // Материалы международной конференции «Проблемы механики и управления», 16-22 сентября, 2018 г., Махачкала. – М.: Изд-во МГУ, 2018. С. 191-194.
7. Krasinskaya E.M., Ilyina A.N., Rukavishnikova A.S. On modeling of the dynamics of a mobile manipulator as a mechatronic system// Труды Международной научно-технической конференции «Пром-Инжиниринг», 19-20 мая 2016 г., Челябинск. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7910960
8. Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М. О рациональном выборе типа переменных в задачах стабилизации установившихся движений при неполной информации о состоянии // Труды XI Международной научной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление», 14-18 июня 2017г., Казань. – Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. Том 3, Секция 3: Управление, часть 2. С. 72-81.
9. Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М., Рукавишникова А.С. Стабилизация продольного движения манипулятора с радиально деформируемыми колёсами // Труды XI Международной научной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление», 14-18 июня 2017 г., Казань. – Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. Том 3, Секция 3: Управление, часть 2. С. 82-88
10. Krasinskiy A.Ya. , Krasinskaya E.M., Ilyina A.N. About Mathematical Models of System Dynamics with Geometric Constraints in Problems of Stability and Stabilization by Incomplete State Information // International Robotics and Automation Journal. 2017. Vol. 2. Issue 1.
11. Красинский А.Я., Ильина А.Н. О стабилизации положений равновесия системы Ball and Beam как мехатронной системы с геометрической связью // Труды X Всероссийской научной конференции им. Ю.И. Неймарка. – Нижний Новгород: Наш дом, 2016. С. 480–486.
12. Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М. Об одном методе решения задачи стабилизации установившихся движений мехатронных систем с геометрическими связями // 14-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2015». 16-20 ноября 2015 года. Москва. Тезисы. – Типография «Люксор», 2015. С. 175.

13. Красинский А.Я., Ильина А.Н., Красинская Э.М. О моделировании динамики мехатронных систем с геометрическими связями как систем с избыточными координатами // Материалы 8-й Всероссийской мультиконференции. Том 2. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015, С. 37-39.

14. Ильина А.Н. Об исследовании структуры линеаризованных уравнений возмущённого движения механической системы с геометрическими связями в избыточных координатах // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. – Казань: Изд-во Казанского федерального университета, 2015. С. 1602-1604.

Программы для ЭВМ

15. *Ильина А.Н., Красинский А.Я., Рукавишникова А.С.* HolStabBB – программа для исследования мехатронных голономных систем: система Ball and Beam // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018663031 от 18 октября 2018 г..