На правах рукописи

Онегин Евгений Евгеньевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ В КЛАССЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Специальности 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»,
05.13.01 — «Системный анализ, управление и обработка информации (авиационная и ракетно-космическая техника)»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре Математической кибернетики Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Научный руководитель:	**Хрусталев Михаил Михайлович** доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории №45 «Математических методов исследования оптимальных управляемых систем им. В.Ф. Кротова» ФГБУН ИПУ РАН
Официальные оппоненты:	**Горяинов Владимир Борисович** доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Математическое моделирование» ФГБОУ ВО МГТУ им. Н.Э. Баумана
	Родницев Николай Егорович доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «КНИТУ-КАИ»
Ведущая организация:	**ФГБУН «Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН»**

Защита состоится "__20__"____декабря____ 2019 в _12_ ч. _00_ мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института (национального исследовательского университета) по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ.

Отзывы на автореферат, заверенные гербовой печатью организации, просьба направлять по указанному адресу в двух экземплярах.

Автореферат разослан "____"____________ 2019.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 212.125.04
кандидат физико-математических наук — Рассказова В. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Важнейшим научным подходом при изучении и конструировании всего многообразия объектов и явлений реального мира является математическое моделирование. Сущность данной методологии заключается в построении математических моделей изучаемых объектов или явлений и дальнейшем их исследовании. При этом результативность такого подхода зависит как от точности, с которой математическая модель описывает исследуемый объект или явление, так и от набора доступных инструментов для анализа полученной модели. Как правило, усложнение модели приводит к более точному описанию рассматриваемого объекта, но и к сужению множества доступных для ее исследования инструментов. По этой причине важной задачей является выделение среди всего многообразия математических моделей таких подклассов, которые с одной стороны являются достаточно обширными, чтобы представлять практический интерес, а с другой стороны имеют богатый набор инструментов для работы с ними.

Модели, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями, нашли широкое применение в экономике, физике, биологии, социологии, авиационной и ракетно-космической технике. Поэтому естественный интерес представляет постановка и решение задач оптимального управления для моделей данного класса, к которым, в частности, относится задача оптимальной стабилизации движения. Классическим объектом, рассматриваемым в теории управления стохастическими системами, является линейная стохастическая система с аддитивными шумами. Случайные возмущения входят в системы данного типа таким образом, что, вообще говоря, невозможно обеспечить одновременно для состояния и управления сходимость по времени к нулю. Из-за этого не имеет содержательного смысла постановка вопроса об оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с классическим квадратичным критерием качества управления. Однако, имеется достаточно богатый класс систем, которые называют линейными системами с мультипликативными шумами или квазилинейными системами, для которых можно обеспечить асимптотическую устойчивость в среднем квадратическом нулевого решения. В данных системах коэффициент при шуме является линейной однородной функцией состояния и управления. При этом, если удается обеспечить одновременную сходимость состояния и управления системы к нулю, то величина воздействующих на систему возмущений также устремляется к нулю. Поэтому задача синтеза оптимального управления, которое обеспечивает одновременную сходимость к нулю состояния и величины воздействующих на систему случайных возмущений, в диссертационной работе также называется задачей оптимизации процесса подавления случайных возмущений.

Тема диссертационной работы посвящена выделению и исследованию нового подкласса математических моделей, названных в диссертационной работе квазилинейными стохастическими системами с управляемыми параметрами. Математические модели данного типа описываются линейными однородными стохастическими дифференциальными уравнениями, матрицы которых (в общем случае нелинейно) зависят от управления. В контексте задачи оптимальной стабилизации предложенный класс математических моделей является обобщением класса линейных стохастических систем с мультипликативными шумами. Вопреки данной общности для математических моделей предложенного класса возможно построение качественных и приближенных аналитических методов исследования и разработка эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий. Вопросы построения методов исследования и разработки вычислительных методов для квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами представляют практический интерес, потому что данные системы позволяют моделировать широкий спектр задач оптимизации движения. В частности, к указанным задачам относится конструирование регуляторов линейной структуры для оптимальной стабилизации объектов, описываемых линейными стохастическими системами с мультипликативными шумами, при наличии информационных ограничений, которые характерны для многосвязных технических систем и систем с децентрализованным управлением.

Объектом диссертационного исследования является класс квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами. Предметом диссертационного исследования является решение задачи оптимальной стабилизации в классе квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами.

Целью диссертационной работы является получение и исследование нового класса математических моделей, называемых в работе квазилинейными стохастическими системами с управляемыми параметрами, формализация и постановка задач оптимальной стабилизации для моделей данного класса, разработка методов и алгоритмов решения задачи оптимальной стабилизации и использование полученных результатов для построения качественных и приближенных аналитических методов, разработки эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий и реализации полученных численных методов и алгоритмов в виде комплексов программ для решения задачи оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами и информационными ограничениями.

В соответствии с целью исследования были поставлены следующие задачи:

1) Формализовать новый класс математических моделей – квазилинейные стохастические системы с управляемыми параметрами. Сформулировать и поставить задачу оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами.

2) Получить условия оптимальности в задаче оптимальной стабилизации:

   - в классе квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами;
   - в классе линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений;
   - в классе линейных стохастических систем с мультипликативными шумами с полной информацией о состоянии.

3) Разработать алгоритмы и численные методы градиентного типа для поиска оптимальных и субоптимальных управлений в перечисленных задачах оптимальной стабилизации.

4) Разработать комплекс программ, реализующих указанные численные методы.

5) Полученные результаты применить для моделирования и решения ряда демонстративных примеров и прикладных задач авиационной и ракетно-космической техники.

Методы исследования. При получении условий оптимальности за основу взят метод функций Ляпунова–Лагранжа, разработанный М. М. Хрусталевым, который является обобщением метода Кротова на стохастические системы. При разработке алгоритмического и программного обеспечения использовались методы теории оптимизации и численные методы.

Научная новизна. Вопросами оптимальной стабилизации движения линейных стохастических систем занимались такие авторы, как Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З., Ряшко Л. Б., Шаров В. Ф., Мильштейн Г. Н., Wonham W. M., Willems J. L., Willems J. C. и др. Задачи оптимальной стабилизации рассматривались в работах Мильштейна Г. Н., Ряшко Л. Б., Wonham W. M., Damm T., McLane P. J., Haussmann U. G., Dragan V., Morozan T., Halanay A. и др. В этом направлении, в соответствии с типом исследуемой проблемы, можно выделить две группы работ: оптимальная стабилизация при наличии полной обратной связи и с наличием информационных ограничений.

К первой группе относятся работы Wonham W. M., Haussmann U. G., McLane P. J., Damm T., в которых при различных предположениях о системе получены достаточные условия оптимальности линейного стационарного регулятора. В диссертационной работе для этой задачи получены необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности.

Ко второй группе относятся работы Ряшко Л. Б., Dragan V., Morozan T., McLane P. J., Ghaoui L. и др., в которых для решения задачи оптимальной стабилизации строится фильтр (идентификатор состояния) линейной структуры и исследуются его свойства. Однако фильтр не всегда реализуем на практике. Поэтому, представляет интерес построение так называемого регулятора с мгновенной обратной связью при наличии информационных ограничений. В этом направлении имеются работы Мильштейна Г. Н. и McLane P. J., в которых получены численные процедуры синтеза скалярного управления и достаточные условия оптимальности линейного стационарного регулятора при управлении по выходу соответственно. В диссертационной работе рассмотрена задача оптимальной стабилизации при наличии информационных ограничений более общего вида. Рассматриваемые информационные ограничения заключаются в том, что каждая компонента вектора управления зависит от фиксированного вектора измерений. Получены необходимые условия оптимальности в классе линейных стационарных регуляторов для данной задачи.

В перечисленных выше результатах при моделировании объекта управления и управляющего устройства, как правило, предполагается, что управление является некоторым случайным процессом, который так или иначе зависит от истории измерений. При этом, подавляющее большинство результатов связано с регуляторами линейной структуры. Если же при моделировании управляющего устройства сразу предполагать линейную структуру регулятора, и ставить задачу оптимизации его коэффициентов, то мы приходим к частному случаю более общей задачи оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами. Детерминированные аналоги данных моделей изучали Гурман В. И., Трушкова Е. А., их обобщение на стохастический случай изучались Черноусько Ф. Л., Хрусталевым М. М., Царьковым К. А., Румянцевым Д. С. и Халиной А. С. Известных результатов в задаче оптимальной стабилизации для систем данного класса нет.

Практическая значимость. В диссертационной работе разработаны новые алгоритмы синтеза оптимальных стратегий управления в задаче оптимальной стабилизации для богатого класса математических моделей, вносящие существенный вклад в арсенал методов оптимизации процессов функционирования сложных технических систем при наличии возмущений и неполноты информации. Разработан комплекс программ для решения задачи синтеза оптимального управления, с помощью которого был решен ряд прикладных задач авиационно-космической отрасли.

Достоверность полученных результатов подтверждается математическими доказательствами, численными экспериментами и сравнением полученных результатов с уже существующими. Работа предложенных алгоритмов и программ была проверена на ряде демонстративных примеров и прикладных задач. Приведенные условия оптимальности согласуются с известными результатами в области исследования.

Апробация работы. Основные результаты опубликованы в рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК [1, 2] или входящих в международные наукометрические базы данных Scopus и WoS [3, 4] и были доложены на региональных и международных научных конференциях [3, 4, 7–10]. Также имеется свидетельство о государственной регистрации комплекса программ для ЭВМ [5]. Ключевые результаты диссертационной работы были получены при поддержке РФФИ (гранты №15-07-09091, №16-08-00472).

Личный вклад автора. Все новые научные результаты, изложенные в диссертационной работе, получены лично автором. В работах [1, 3, 7] были получены результаты в задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами, в [1, 3] построены необходимые условия оптимальности в данной задаче и численные методы синтеза оптимального вектора параметров, в [7] предложен алгоритм синтеза субоптимального программного управления. Результаты по задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными возмущениями при наличии информационных ограничений получены в [1, 4, 8]. Необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности в задаче оптимизации процесса подавления случайных возмущений в линейных стохастических системах с мультипликативными возмущениями с полной обратной связью получены в работах [2, 6, 10]. Применения полученных результатов к задачам стабилизации технических систем приведены в работах [2, 6] и были доложены на конференциях [3, 4, 9].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографического списка из 137 наименований. Работа изложена на 102 страницах машинописного текста и содержит 3 рисунка.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В работе приняты следующие обозначения: $f^{(1)},\dots,f^{(n)} : A \to B$ – $f^{(1)},\dots,f^{(n)}$ являются функциями, которые определены на множестве A и принимают значения из множества B; $\mathcal{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $\mathcal{R} := \mathcal{R}^1$; $\|x\|,\ x \in \mathcal{R}^n$ – евклидова норма вектора x, $\|x\| := \sqrt{x^{\mathsf{T}}x}$; T – знак транспонирования; $\mathcal{R}_+$ – множество неотрицательных вещественных чисел; $\mathcal{R}^{n\times m}$ – пространство вещественных матриц размерности $n \times m$; $\mathcal{S}^n$ – пространство симметрических вещественных матриц размерности $n \times n$, $\mathcal{S}^n := \{A \in \mathcal{R}^{n\times n} : A = A^{\mathsf{T}}\}$; $\mathrm{tr}[\,\cdot\,]$ – след матрицы; $A \succ B$ $(A \succeq B)$ – матрица $A - B$ является положительно (неотрицательно) определенной; $i = \overline{j,k}$ – сокращение для записи $\forall i : j \leqslant i \leqslant k$; Ω – пространство элементарных исходов; $\mathcal{F}$ – σ-алгебра событий на Ω; $\mathbf{P}$ – вероятностная мера на измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{F})$, т.е. $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to \mathcal{R}_+,\ \mathbf{P}(\Omega) = 1$; $\mathbb{E}$ – оператор математического ожидания, $\mathbb{E}\,\xi := \int_\Omega \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega)$, где ξ – случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$.

Во введении проводится обзор известных результатов в задаче оптимального управления линейными стохастическими системами, обосновывается научная новизна и актуальность темы диссертационного исследования, сформулированы цель и задачи диссертационной работы, перечислены полученные в диссертации новые результаты, их практическая ценность, представлены положения, выносимые на защиту и описана структура диссертации.

В первой главе формулируются результаты диссертационной работы, посвященные задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами.

Под квазилинейной стохастической системой с управляемыми параметрами понимается непрерывная линейная стохастическая система с мультипликативными шумами, матрицы которой могут в общем случае нелинейно зависят от управления. Квазилинейные стохастические системы с управляемыми параметрами описываются векторным стохастическим дифференциальным уравнением Ито следующего вида

$$d\xi(t) = A^{(0)}(u(t))\xi(t)dt + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(u(t))\xi(t)\,d\beta_i(t),\ \xi(0) = \xi_0, \tag{1.1}$$

где $t \geqslant 0$ – время; ξ – случайный процесс со значениями в $\mathcal{R}^n$; β – стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathcal{R}^b$; $u : [0,+\infty) \to \mathcal{R}^m$ – програмное управление; $A^{(i)} : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^{n\times n},\ i = \overline{0,b}$, – непрерывно-дифференцируемые матричнозначные функции на $\mathcal{R}^m$; ξ_0 – случайный вектор, который не зависит от $\beta(t),\ t \geq 0$, и удовлетворяет условию $\mathbb{E}\|\xi_0\|^2 < +\infty$.

Обозначим через $\mathcal{D}_{\xi_0}$ множество допустимых процессов управления $z = (\xi, u)$, которые являются парами случайных процессов ξ и функций управления u, таких что

1. Функция u является ограниченной кусочно-непрерывной на каждом конечном интервале времени.

2. Непрерывный случайный процесс ξ является решением уравнения (1.1) с заданными ξ_0 и u.

3. Выполнено условие

$$\mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \|\xi(s)\|^2 ds < +\infty. \tag{1.2}$$

<u>Определение 1.</u> Управление u, для которого существует допустимый процесс управления $z = (\xi, u) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$, будем называть допустимым.

<u>Определение 2.</u> Управление u будем называть стабилизирующим, если оно является допустимым при любом ξ_0, $\mathbb{E}\|\xi_0\|^2 < +\infty$.

На множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}$ определим функционал $J : \mathcal{D}_{\xi_0} \to \mathcal{R}$

$$J(z) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \xi(s)^\mathsf{T} L(u(s))\xi(s)ds, \tag{1.3}$$

где $L : \mathcal{R}^m \to \mathcal{S}^n$ – дифференцируемая на $\mathcal{R}^m$ матричнозначная функция, такая что $L(v) \succcurlyeq 0$, $v \in \mathcal{R}^m$.

Задача состоит в поиске процесса управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{u}) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$, который будет минимизировать критерий (1.3) на $\mathcal{D}_{\xi_0}$

$$J(\overline{z}) = \min_{z\in\mathcal{D}_{\xi_0}} J(z). \tag{1.4}$$

Следуя методу Ляпунова–Лагранжа, строится модифицированный функционал качества $\Gamma : \mathcal{D}_{\xi_0} \to \mathcal{R}$

$$\begin{aligned}\Gamma(z) := \mathbb{E}\Big(\xi_0^\mathsf{T} M\xi_0\Big) + \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \xi(s)^\mathsf{T}\big(MA^{(0)}(u(s)) + A^{(0)}(u(s))^\mathsf{T}M + \\ + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(u(s))^\mathsf{T} MA^{(i)}(u(s)) + L(u(s))\big)\xi(s)ds.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Для данного функционала выполнено следующее важное свойство

$$\Gamma(z) \equiv J(z), \quad z \in \mathcal{D}_{\xi_0}, \tag{1.6}$$

которое не зависит от выбора матрицы $M \in \mathcal{S}^n$.

Введем в рассмотрение отображение $H : \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^{n\times n} \to \mathcal{R}^{n\times n}$

$$H(v, M) := MA^{(0)}(v) + A^{(0)}(v)^\mathsf{T}M + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(v)^\mathsf{T}MA^{(i)}(v) + L(v). \tag{1.7}$$

При помощи отображения H можно переписать функционал Γ в более компактном виде

$$\Gamma(z) = \mathrm{tr}\big[MP_0\big] + \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \xi(s)^\mathsf{T} H(u(s), M)\xi(s)ds, \tag{1.8}$$

где $P_0 \in \mathcal{R}^{n\times n}$ – матрица вторых начальных моментов вектора ξ_0.

Рассмотрим постоянные по времени стратегии управления $u(t) \equiv v \in \mathcal{R}^m$. При этом будем отождествлять вектор параметров v и соответствующую этому вектору стратегию управления $u(t) \equiv v$ и писать $z = (\xi, v) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$. Если соответствующее вектору программное управление является допустимым или стабилизирующим, то вектор будем также называть допустимым или стабилизирующим соответственно. Множество всех стабилизирующих векторов обозначим $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}^m$, а множество соответствующих процессов управления $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$,

$$\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}} := \{(\xi, v) : (\xi, v) \in \mathcal{D}_{\xi_0},\ v \in \mathcal{V}\}. \tag{1.9}$$

В работе показано, что множество $\mathcal{V}$ открыто и для всех $z = (\xi, v) \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$ выполнено равенство $\Gamma(z) = \hat{\Gamma}(v)$, в котором $\hat{\Gamma}$ – дифференцируемая на $\mathcal{V}$ функция,

$$\frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial v_i}(v) = \mathsf{tr}\Big[\big(M\frac{\partial A^{(0)}}{\partial v_i}(v) + \sum_{j=1}^{b} A^{(j)}(v)^{\mathsf{T}} M \frac{\partial A^{(j)}}{\partial v_i}(v) + \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial v_i}(v)\big)P\Big], \tag{1.10}$$

где $i = \overline{1, m}$, а неотрицательно определенная матрица P – единственное решение уравнения

$$PA^{(0)}(\overline{v})^{\mathsf{T}} + A^{(0)}(\overline{v})P + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(\overline{v})PA^{(i)}(\overline{v})^{\mathsf{T}} = -P_0. \tag{1.11}$$

Получены следующие необходимые условия в задаче поиска процесса управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{v}) \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$, который минимизирует критерий (1.3) на суженном множестве допустимых процессов управления $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$,

$$J(\overline{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}} J(z). \tag{1.12}$$

<u>Т е о р е м а 1.</u> Если процесс управления $z = (\xi, v) \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$ в задаче (1.1)–(1.3), (1.12), то выполнены следующие условия

$$\begin{aligned} \mathsf{tr}\big[\big(M\frac{\partial}{\partial v_i}A^{(0)}(v) + \sum_{j=1}^{b} A^{(j)}(v)^{\mathsf{T}} M \frac{\partial}{\partial v_i}A^{(j)}(v) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v_i}L(v)\big)\overline{P}\,\big] = 0,\ i = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

где неотрицательно определенные матрицы $M \in \mathcal{S}^n$ и $\overline{P} \in \mathcal{S}^n$ – единственные решения уравнений

$$\begin{aligned} &MA^{(0)}(v) + A^{(0)}(v)^{\mathsf{T}} M + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(v)^{\mathsf{T}} M A^{(i)}(v) = -L(v), \\ &\overline{P}A^{(0)}(v)^{\mathsf{T}} + A^{(0)}(v)\overline{P} + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(v)\overline{P}A^{(i)}(v)^{\mathsf{T}} = -P_0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Выражение (1.10) для частных производных функции $\hat{\Gamma}$ может быть применено для построения следующей процедуры градиентного типа. Пусть имеется процесс управления $z^{(l)} = (\xi^{(l)}, v^{(l)}) \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$. Тогда мы можем улучшить значение функционала качества выбрав новый вектор $v^{(l+1)}$ по следующей формуле

$$v_i^{(l+1)} = v_i^{(l)} - \theta \frac{\partial}{\partial v_i} \hat{\Gamma}(v^{(l)}), \; i = \overline{1, m}, \tag{1.15}$$

где $\theta > 0$ – достаточно малый шаг. С использованием данной процедуры предложен следующий алгоритм градиентного типа синтеза оптимального стабилизирующего вектора параметров.

Ш а г 1. Задать $\theta > 0$ – шаг градиентного метода, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ – требуемые погрешности приближения, $v^{(0)}$ – начальное приближение (стабилизирующий вектор), и положить номер итерации $k = 0$, количество успешных итераций $i = 0$.

Ш а г 2. Численно решить систему матричных уравнений (1.14), положив в них $v = v^{(k)}$.

Ш а г 3. Численно проверить, что полученный вектор является стабилизирующим. Если $k = 0$ и вектор $v^{(k)}$ не является стабилизирующим, то закончить расчёт. Если $k > 0$ и вектор $v^{(k)}$ не является стабилизирующим, то положить $i = 0$, уменьшить θ вдвое, уменьшить k на единицу и перейти к шагу 7. Иначе перейти к шагу 4.

Ш а г 4. Вычислить значение $J(z^{(k)})$. Если $k = 0$, то перейти к шагу 6. Если $J(z^{(k)}) > J(z^{(k-1)})$, то положить $i = 0$, уменьшить θ вдвое, уменьшить k на единицу и перейти к шагу 7. Иначе перейти шагу 5.

Ш а г 5. Если $i = 2$, увеличить θ вдвое, положить $i = 0$.

Ш а г 6. Вычислить $\partial\hat{\Gamma}(v^{(k)})/\partial v_i, \; i = \overline{1, m}$, по формуле (1.10).

Ш а г 7. Вычислить величину $\|\nabla\hat{\Gamma}(v^{(k)})\|$ и проверить выполнение условий $\|\nabla\hat{\Gamma}(v^{(k)})\| < \varepsilon_1$, $\theta < \varepsilon_2$: если любое из условий выполнено, искомое значение $\overline{v}$ положить равным $v^{(k)}$ и закончить расчет, иначе вычислить $v^{(k+1)}$ по формуле (1.15) и перейти к шагу 7.

Ш а г 8. Увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

Нахождение оптимального программного управления в задаче (1.1)–(1.4) сопряжено с рядом трудностей, и точного численного алгоритма ее решения не известно. Поэтому привлекательными являются приближенные алгоритмы синтеза субоптимальных программных управлений. Отметим тот факт, что полученные выше в теореме 1 условия содержат матрицу P_0 вторых начальных моментов вектора ξ_0. Этот факт приводит к идее алгоритма синтеза кусочно-постоянного программного управления, основанного на рекуррентном вычислении стабилизирующего вектора, удовлетворяющего условиям теоремы 1.

Ш а г 1. Задать разбиение $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_q < +\infty$ интервала $[0, +\infty)$; $v^{(0)}$ – начальное приближение (стабилизирующий вектор, удовлетворяющий условиям теоремы 1); $\varepsilon > 0$ – параметр алгоритма, отвечающий за условие остановки. Положить номер итерации $l = 0$.

Ш а г 2. Вычислить $P(t_{l+1})$, решая задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = A^{(0)}(u(t))P(t) + P(t)A^{(0)}(u(t))^{\mathsf{T}} + \\ + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(u(t))P(t)A^{(i)}(u(t))^{\mathsf{T}}, \; t \geqslant 0, \; P(0) = P_0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

на интервале $[t_l, t_{l+1})$ при $u(t) \equiv v^{(l)}$ с начальным условием $P(t_l)$, $P(t_0) = P_0$.

Ш а г 3. При помощи предложенной выше процедуры (1.15) вычислить стабилизирующий вектор $v^{(l+1)}$, удовлетворяющий уравнениям теоремы 1 при $P_0 = P(t_{l+1})$. За начальное приближение алгоритма взять $v^{(l)}$.

Ш а г 4. Проверить выполнение условий $\|P(t_{l+1})\| < \varepsilon$ и $l + 1 < q$. Если не выполнено, то увеличить l на единицу и перейти к шагу 2. Иначе искомую стратегию $u(t)$ положить равной функции вида

$$u(t) = \begin{cases} v^{(0)}, \ 0 \leqslant t < t_1, \\ v^{(1)}, \ t_1 \leqslant t < t_2, \\ \dots \\ v^{(l+1)}, \ t_{l+1} \leqslant t < +\infty. \end{cases} \tag{1.17}$$

Полезное свойство данного алгоритма заключается в том, что он является не ухудшающим, то есть каково бы ни было разбиение интервала времени, значение критерия, соответствующее найденному управлению u, будет не хуже, чем соответствующее вектору $v^{(0)}$. Кроме того, данный алгоритм отличается относительной простотой производимых вычислений и является рекуррентным по t, то есть возможно производить расчет в реальном времени. Среди недостатков стоит отметить тот, что результат работы может значительно зависеть от выбора разбиения интервала времени. При этом вопрос выбора наилучшего разбиения остается открытым.

Результат работы предложенных алгоритмов продемонстрирован в диссертации на модельных примерах.

Во второй главе рассматривается задача оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений.

Полученные в первой главе результаты могут быть применены в задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными возмущениями при наличии информационных ограничений. Рассмотрим данную задачу подробнее. Процесс управления описывается векторным стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$\begin{aligned} d\xi(t) = \Big(A^{(0)}\xi(t) + B^{(0)}u(t, \eta(t))\Big)dt + \\ + \sum_{i=1}^{b} \Big(A^{(i)}\xi(t) + B^{(i)}u(t, \eta(t))\Big)\, d\beta_i(t), \ \xi(0) = \xi_0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $t \geqslant 0$ – время; ξ – случайный процесс со значениями в $\mathcal{R}^n$; β – стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathcal{R}^b$; $u : [0, +\infty) \times \mathcal{R}^p \to \mathcal{R}^m$ – стратегия управления; $A^{(i)} \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $B^{(i)} \in \mathcal{R}^{n\times m}$, $i = \overline{0, b}$ – постоянные матрицы; $\eta(t) = G\xi(t)$, $G \in \mathcal{R}^{p\times n}$, – измеряемый выход системы. Предполагается, что случайный вектор ξ_0 не зависит от $\beta(t), t \geqslant 0$, и удовлетворяет условию $\mathbb{E}\|\xi_0\|^2 < +\infty$.

Для того, чтобы свести задачу к рассмотренной ранее в данной работе, ограничим множество стратегий управления линейными регуляторами $u(t, y) = -U(t)y$, $U(t) \in \mathcal{R}^{m\times p}$, $t \geqslant 0$. Далее управлением, подлежащим определению, будем считать не u, а U. Заметим, что из описания системы следует, что

$$u(t,\eta(t)) = -U(t)G\xi(t),\ t \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Обозначим через $\mathcal{D}_{\xi_0}$ множество процессов управления $z = (\xi, U)$, которые являются парами случайных процессов ξ и отображений U таких, что

1. Отображение U является ограниченным и кусочно-непрерывным на каждом конечном интервале.

2. При заданной стратегии управления $u(t,y) = -U(t)y$ непрерывный случайный процесс ξ является решением уравнения (2.1) с заданным начальным условием.

3. Выполнено условие (1.2).

На множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}$ определим функционал $J : \mathcal{D}_{\xi_0} \to \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} J(z) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \big(&\xi(s)^\mathsf{T} Q\xi(s) + \xi(s)^\mathsf{T} S u(s,\eta(s)) + \\ &+ u(s,\eta(s))^\mathsf{T} S^\mathsf{T}\xi(s) + u(s,\eta(s))^\mathsf{T} E u(s,\eta(s))\big) ds, \end{aligned} \tag{2.3}$$

который с учетом равенства (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} J(z) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \xi(s)^\mathsf{T}\big(Q - SU(s)G - G^\mathsf{T} U(s)^\mathsf{T} S^\mathsf{T} + \\ + G^\mathsf{T} U(s)^\mathsf{T} E U(s) G\big)\xi(s) ds, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $Q \in \mathcal{S}^n,\ E \in \mathcal{S}^m,\ S \in \mathcal{R}^{n\times m}\ E \succ 0,\ Q \succcurlyeq SE^{-1}S^\mathsf{T}$.

Задача состоит в поиске такого процесса управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{F}) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$, который минимизирует критерий (2.4) на допустимом множестве

$$J(\overline{z}) = \min_{z\in\mathcal{D}_{\xi_0}} J(z). \tag{2.5}$$

Полученная задача (2.1)–(2.5) представляет собой частный случай задачи (1.1)–(1.4), и к ней могут быть применены предложенные условия оптимальности и процедуры улучшения. В роли компонент оптимизируемого управления u здесь выступают координатные функции отображения U. Однако, с учетом линейной структуры данной задачи, полученные условия оптимальности можно конкретизировать.

Аналогично тому, как это было сделано в главе 1, рассматриваются постоянные по времени отображения $U(t) \equiv V \in \mathcal{R}^{m\times p}$, мы будем отождествлять матрицы V и соответствующие постоянные по времени отображения $U(t) \equiv V$, и писать $z = (\xi, V) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$. Также будем считать, что понятия допустимого и стабилизирующего управления, определения которых даны ранее, аналогичным образом применимы к отображениям U и матрицам V. Множество стабилизирующих матриц обозначим $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}^{m\times p}$, а множество соответствующих процессов управления $\mathcal{D}^{\mathcal{U}}_{\xi_0} := \{(\xi, V) : (\xi, V) \in \mathcal{D}_{\xi_0},\ V \in \mathcal{U}\},\ \mathcal{D}^{\mathcal{U}}_{\xi_0} \subset \mathcal{D}_{\xi_0}$,

Сформулируем очередной результат диссертационной работы. Имеют место следующие необходимые условия в задаче поиска процесса управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{V}) \in$

$\mathcal{D}^{\mathcal{U}}_{\xi_0}$, который минимизирует критерий (2.4) на суженном множестве допустимых процессов управления $\mathcal{D}^{\mathcal{U}}_{\xi_0}$,

$$J(\overline{z}) = \min_{z\in\mathcal{D}^{\mathcal{U}}_{\xi_0}} J(z). \tag{2.6}$$

<u>Т е о р е м а 2.</u> Если процесс управления $z = (\xi, V) \in \mathcal{D}^{\mathcal{U}}_{\xi_0}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}^{\mathcal{U}}_{\xi_0}$ в задаче (2.1)–(2.4), (2.6), то выполнено условие

$$\begin{aligned} \Big((E + \sum_{i=1}^{b} {B^{(i)}}^{\mathsf{T}} M B^{(i)}) V G - \sum_{i=1}^{b} {B^{(i)}}^{\mathsf{T}} M A^{(i)} - \\ -S^{\mathsf{T}} - {B^{(0)}}^{\mathsf{T}} M\Big)\overline{P} G^{\mathsf{T}} = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где неотрицательно определенные матрицы $M \in \mathcal{S}^n$ и $\overline{P} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ – единственные решения уравнений

$$\begin{aligned} &M A_u^{(0)}(V) + A_u^{(0)}(V)^{\mathsf{T}} M + \sum_{i=1}^{b} A_u^{(i)}(V)^{\mathsf{T}} M A_u^{(i)}(V) = \\ &\qquad = -Q + SVG + G^{\mathsf{T}} V^{\mathsf{T}} S^{\mathsf{T}} - G^{\mathsf{T}} V^{\mathsf{T}} E V G, \\ &\overline{P} A_u^{(0)}(V)^{\mathsf{T}} + A_u^{(0)}(V)\,\overline{P} + \sum_{i=1}^{b} A_u^{(i)}(V)\,\overline{P} A_u^{(i)}(V)^{\mathsf{T}} = -P_0, \\ &A_u^{(i)}(V) := A^{(i)} - B^{(i)} V G,\ i = \overline{0,b}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Полученный результат может быть обобщен на задачу оптимальной стабилизации со структурными ограничениями на матрицу регулятора. Пусть задана матрица $C \in \mathcal{R}^{m\times p}$, состоящая из нулей и единиц.

<u>О п р е д е л е н и е 3.</u> Будем говорить, что матрица $V \in \mathcal{R}^{m\times p}$ удовлетворяет структурным ограничениям, если выполнено условие $\mathrm{tr}[C^{\mathsf{T}} V] = 0$. Множество матриц, удовлетворяющих структурным ограничениям, образует подпространство в $\mathcal{R}^{m\times p}$. Обозначим его $\mathcal{L}$.

Множество стабилизирующих матриц, удовлетворяющих структурным ограничениям, обозначим $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} := \mathcal{U} \bigcap \mathcal{L}$. Будем предполагать, что данное множество не пусто. Множество соответствующих процессов управления обозначим $\mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0} := \{(\xi, V) : (\xi, V) \in \mathcal{D}_{\xi_0},\ V \in \mathcal{G}\},\ \mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0} \subset \mathcal{D}^{\mathcal{U}}_{\xi_0} \subset \mathcal{D}_{\xi_0}$.

Имеют место следующие необходимые условия в задаче поиска процесса управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{V}) \in \mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0}$, который минимизирует критерий (2.4) на суженном множестве допустимых процессов управления $\mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0}$,

$$J(\overline{z}) = \min_{z\in\mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0}} J(z). \tag{2.9}$$

<u>Т е о р е м а 3.</u> Если процесс управления $z = (\xi, V) \in \mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0} \subset \mathcal{D}_{\xi_0}$ в задаче (2.1)–(2.4), (2.9), то для всех i, j, таких что $C_{ij} = 0$,

выполнены условия

$$\Big(\Big(\Big(E+\sum_{k=1}^{b} B^{(k)\mathsf{T}} M B^{(k)}\Big) V G-\sum_{k=1}^{b} B^{(k)\mathsf{T}} M A^{(k)}- \\ -S^{\mathsf{T}}-B^{(0)\mathsf{T}} M\Big) \overline{P} G^{\mathsf{T}}\Big)_{ij}=0, \tag{2.10}$$

где неотрицательно определенные матрицы $M \in \mathcal{S}^n$ и $\overline{P} \in \mathcal{S}^n$ – единственные решения уравнений (2.8).

Примером задачи, в которой могут возникнуть структурные ограничения на матрицу регулятора, является следующая задача с информационными ограничениями общего вида. Пусть заданы числа $p_i > 0,\ i = \overline{1,m},\ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = p$. Определим матрицу $C \in \mathcal{R}^{m\times p}$ следующим образом

$$C_{ij}=\begin{cases} 0, & \sum\limits_{k=1}^{i-1} p_k < j \leq \sum\limits_{k=1}^{i} p_k, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.11}$$

При этом подпространство $\mathcal{L}$, которое задается матрицей G, состоит из матриц $V \in \mathcal{R}^{m\times p}$, которые можно представить в виде блочной матрицы следующим образом

$$V=\begin{pmatrix} V^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V^{(m)} \end{pmatrix},\ V^{(i)} \in \mathcal{R}^{1\times p_i}. \tag{2.12}$$

На содержательном уровне данные информационные ограничения заключаются в том, что каждая компонента управления зависит от своего вектора выхода,

$$u(\eta(t))=\big(u_1(\eta^{(1)}(t)),\dots,u_m(\eta^{(m)}(t))\big)^{\mathsf{T}}, \tag{2.13}$$

где $u_i : \mathcal{R}^{p_i} \to \mathcal{R};\ \eta^{(i)}(t) = G_i \xi(t),\ G_i \in \mathcal{R}^{p_i\times n},\ i = \overline{1,m}$. Для решения поставленной задачи можно воспользоваться теоремой 3.

Обозначим $\mathsf{pr}[\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V)]$ ортогональную проекцию градиента функции $\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}$ в точке V на подпространство $\mathcal{L}$,

$$\mathsf{pr}[\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V)]=\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V)-G\circ\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V), \tag{2.14}$$

где $A \circ B \in \mathcal{R}^{m\times p}$ обозначает поэлементное произведение матриц (произведение Адамара). Используя полученные условия оптимальности и выражение для проекции градиента (2.14), сформулируем следующую процедуру градиентного типа. Пусть имеется процесс управления $z^{(l)} = (\xi^{(l)}, V^{(l)}) \in \mathcal{D}^{\mathcal{U}}_{\xi_0}$. Тогда можно найти оптимальную матрицу $\overline{V} \in \mathcal{G}$, выбирая $V^{(l+1)}$ по следующей формуле

$$V^{(l+1)}=V^{(l)}-\theta\ \mathsf{pr}[\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V^{(l)})]-\gamma\, G\circ V^{(l)}, \tag{2.15}$$

где $\theta > 0,\ \gamma > 0$ достаточно малы. Здесь проекция градиента обеспечивает движение вдоль структурных ограничений, а дополнительное слагаемое обеспечивает сходимость к подпространству $\mathcal{L}$. Такая процедура имеет существенное преимущество в том, что начальное приближение $V^{(l)}$ может не принадлежать $\mathcal{L}$. Более того, начальным приближением для численного метода на основе данной процедуры может служить управление с полной обратной связью, что существенно упрощает подбор начального приближения.

Для задач со структурными и информационными ограничениями, аналогично тому как это было сделано в первой главе, предложены алгоритмы синтеза оптимального стабилизирующего стационарного линейного регулятора и субоптимального стабилизирующего нестационарного регулятора. Алгоритмы построения по своей структуре совпадают с предложенными ранее.

Третья глава диссертационной работы посвящена задаче оптимизации процесса подавления случайных возмущений в линейных стохастических системах с мультипликативными шумами при наличии полной информации о состоянии. В данной задаче получены необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности в широком классе допустимых управлений.

Процесс управления описывается векторным стохастическим дифференциальным уравнением Ито вида

$$\begin{aligned} d\xi(t) = \Big(A^{(0)}\xi(t) + B^{(0)}u(t,\xi(t))\Big)dt + \\ + \sum_{i=1}^{b}\Big(A^{(i)}\xi(t) + B^{(i)}u(t,\xi(t))\Big)\,d\beta_i(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $t \geqslant 0$ – время; ξ – случайный процесс со значениями в $\mathcal{R}^n$; β – стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathcal{R}^b$; $u : [0,+\infty) \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ – измеримая по Борелю стратегия управления; $A^{(i)} \in \mathcal{R}^{n\times n}, B^{(i)} \in \mathcal{R}^{n\times m},\ i = \overline{0,b}$ – постоянные матрицы.

Обозначим через $\mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}$ множество процессов управления $z = (\xi, u)$, которые являются парами случайных процессов ξ и стратегий управления u таких, что

1. При заданной стратегии управления u непрерывный случайный процесс ξ является слабым решением уравнения (3.1) с начальным условием $\mathbf{P}_{\xi(0)} = \mathbf{P}_0$, где $\mathbf{P}_{\xi(0)}$ обозначает распределение случайного вектора $\xi(0)$, а $\mathbf{P}_0$ – борелевская вероятностная мера на $\mathcal{R}^n$, удовлетворяющая условию $\int_{\mathcal{R}^n}\|x\|^4\mathbf{P}_0(dx) < +\infty$. Предполагается, что $\xi(0)$ не зависит от $\beta(t),\ t \geqslant 0$;

2. Выполнены условия:

$$\begin{gathered} \mathbb{E}\int_0^t \|\xi(s)\|^4 ds < +\infty, \quad \mathbb{E}\int_0^t \|u(s,\xi(s))\|^4 ds < +\infty, \quad t \geqslant 0, \\ \mathbb{E}\int_0^{+\infty}\Big(\|\xi(s)\|^2 + \|u(s,\xi(s))\|^2\Big)ds < +\infty,\ \lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}\|\xi(t)\|^2 = 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Пусть $\mathcal{M}$ – множество борелевских вероятностных мер $\mathbf{P}_0$ на $\mathcal{R}^n$, для которых выполнено условие $\int_{\mathcal{R}^n}\|x\|^4\mathbf{P}_0(dx) < +\infty$, а $\mathcal{D} := \bigcup\limits_{\mathbf{P}_0\in\mathcal{M}} \mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}$. На множестве $\mathcal{D}$

зададим функционал качества управления $J : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$,

$$J(z) = \mathbb{E} \int\limits_0^{+\infty} \Big(\xi(s)^\mathsf{T} Q \xi(s) + \xi(s)^\mathsf{T} S u(s, \xi(s)) + \\ + u(s, \xi(s))^\mathsf{T} S^\mathsf{T} \xi(s) + u(s, \xi(s))^\mathsf{T} E u(s, \xi(s)) \Big) ds, \tag{3.3}$$

где $Q \in \mathcal{R}^n,\ E \in \mathcal{S}^m,\ S \in \mathcal{R}^{n \times m},\ E \succ 0,\ Q \succcurlyeq SE^{-1}S^\mathsf{T}$.

О п р е д е л е н и е 4. Стратегию управления u будем называть стабилизирующей, если при любом начальном распределении $\mathbf{P}_0 \in \mathcal{M}$ существует процесс управления $z = (\xi, u) \in \mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}$.

Задача оптимизации процесса подавления случайных возмущений в системе (3.1) состоит в поиске такой стабилизирующей стратегии управления $\overline{u}$, что при любом фиксированном начальном распределении $\mathbf{P}_0 \in \mathcal{M}$ процесс управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{u}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}$ минимизирует критерий (3.3), т.е.

$$J(\overline{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}} J(z). \tag{3.4}$$

Такую стратегию управления $\overline{u}$ будем называть оптимальной.

Для данной задачи также построен вспомогательный функционал качества и с его помощью получены следующие условия оптимальности.

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы стабилизирующий линейный стационарный регулятор $\overline{u}(t, x) = -\overline{V}x$ был оптимальной стратегией, необходимо и достаточно существование неотрицательно определенной симметрической матрицы $\overline{M}$, удовлетворяющей условиям:

$$\overline{M} A_{\overline{u}}^{(0)} + {A_{\overline{u}}^{(0)}}^\mathsf{T} \overline{M} + \sum_{i=1}^{b} {A_{\overline{u}}^{(i)}}^\mathsf{T} \overline{M} A_{\overline{u}}^{(i)} + \\ + Q - S\overline{V} - \overline{V}^\mathsf{T} S^\mathsf{T} + \overline{V}^\mathsf{T} E \overline{V} = 0, \tag{3.5}$$

$$\overline{V} = \Big(E + \sum_{i=1}^{b} {B^{(i)}}^\mathsf{T} \overline{M} B^{(i)} \Big)^{-1} \Big({B^{(0)}}^\mathsf{T} \overline{M} + \sum_{i=1}^{b} {B^{(i)}}^\mathsf{T} \overline{M} A^{(i)} + S^\mathsf{T} \Big), \tag{3.6}$$

где $A_{\overline{u}}^{(i)} = A^{(i)} - B^{(i)}\overline{V},\ i = \overline{0, b}$.

Стоит отметить, что новизна полученного результата заключается в доказательстве необходимости приведенных достаточных условий оптимальности.

Четвертая глава диссертации посвящена описанию комплекса программ, разработанного в процессе диссертационного исследования, и решению ряда прикладных задач оптимизации процессов управления.

Предложенные в главах 1 и 2 алгоритмы были реализованы в виде комплекса программ. Данный комплекс программ разработан для решения задач синтеза оптимальных управлений и компьютерного моделирования квазилинейных стохастических систем.

Функциональное назначение. Комплекс программ предназначен для синтеза оптимальных и субоптимальных стратегий управления в линейных стохастических системах с мультипликативными шумами при наличии различных информационных ограничений на неограниченном интервале времени, а также для решения задачи оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами и компьютерного моделирования управляемых стохастических систем.

Основные характеристики. В качестве фреймворка для разработки комплекса программ выбрана система компьютерной математики «Maple», которая включает в себя среду разработки и встроенный язык программирования. Разработанный комплекс программ позволяет решать широкий спектр практических задач синтеза оптимальных управлений в квазилинейных системах с управляемыми параметрами и в линейных системах с мультипликативными шумами на неограниченном интервале времени, а именно: синтез оптимальных стабилизирующих векторов и субоптимальных стабилизирующих программных управлений для квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами, синтез оптимальных стабилизирующих линейных стационарных регуляторов и субоптимальных стабилизирующих нестационарных регуляторов для линейных стохастических систем с мультипликативными шумами, компьютерное моделирование и визуализация движения стохастических систем.

Описание логической структуры. Программный комплекс состоит из ряда подсистем: подсистема ввода и вывода данных, подсистема вспомогательных алгоритмов, подсистема синтеза оптимальных стабилизирующих векторов для квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами, подсистема синтеза субоптимальных программных управлений для квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами, подсистема синтеза оптимальных стабилизирующих линейных стационарных регуляторов для линейных стохастических систем с мультипликативными шумами и информационными ограничениями, подсистема синтеза субоптимальных стабилизирующих линейных стационарных регуляторов для линейных стохастических систем с мультипликативными шумами и информационными ограничениями, подсистема компьютерного моделирования и визуализации движения стохастических систем. Более подробное описание данных подсистем и пример визуализации содержатся в диссертационной работе.

Далее в работе приведены примеры использования данного комплекса программ в практических приложениях, а именно:

1) Задача оптимальной стабилизации спутника с упругой штангой. Рассматриваются плоские колебания спутника, к которому прикреплен гибкий стержень с грузом на конце. На спутник действует возмущающий момент, связанный с движением спутника в гравитационном поле Земли. Управление реализуется за счет управляющего момента, действующего на спутник. Движение в окрестности желаемой ориентации описывается линеаризованными дифференциальными уравнениями. Предполагается, что в канале управления спутника имеются мультипликативные случайные ошибки. Задача состоит в построении стабилизирующего регулятора с полной обратной связью, который минимизирует заданный функционал качества управления.

2) Задача оптимальной стабилизации движения спутника на круговой орбите. Рассматривается плоское движение искусственного спутника по круговой орбите Земли в окрестности заданной траектории. Предполагается, что управление реализуется при помощи двигателя, вектор тяги которого всегда направлен по

касательной к круговой орбите движения спутника и может непрерывно изменяться, в том числе может менять знак. Движение в окрестности желаемой траектории описывается линеаризованными дифференциальными уравнениями. Предполагается, что в канале управления спутника имеются мультипликативные случайные ошибки. Задача состоит в построении стабилизирующего регулятора с полной обратной связью, который минимизирует заданный функционал качества управления.

3) Задача оптимального сближения двух спутников на круговой орбите. Рассматривается плоское движение двух искусственных спутников по круговой орбите Земли в окрестности заданной траектории. Управление каждым спутником осуществляется при помощи двигателя, вектор тяги которого всегда направлен по касательной к круговой орбите движения спутника и может непрерывно изменяться, в том числе может менять знак. Движение в окрестности желаемой траектории описывается линеаризованными дифференциальными уравнениями. Предполагается, что в канале управления спутника имеются мультипликативные случайные ошибки. Имеются информационные ограничения, которые заключаются в том, что спутники обладают лишь информацией о собственном состоянии и расстоянии между ними. Задача состоит в построении стабилизирующего регулятора, который минимизирует заданный функционал качества управления.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1) Выделен и исследован новый класс математических моделей – квазилинейные стохастические системы с управляемыми параметрами. Для математических моделей выделенного класса сформулирована и поставлена задача оптимальной стабилизации [1, 3, 7].

2) В задаче оптимальной стабилизации получены необходимые условия оптимальности:

   а) стабилизирующего вектора в квазилинейных стохастических системах с управляемыми параметрами [1, 3, 7];

   б) стабилизирующего линейного стационарного регулятора в линейных стохастических системах с мультипликативными шумами системах при наличии информационных ограничений [1, 4, 8].

3) Разработаны эффективные численные методы градиентного типа для построения:

   а) оптимального стабилизирующего вектора и субоптимального векторного программного управления в задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами [1, 3, 5, 7];

   б) оптимального линейного стационарного регулятора и субоптимального линейного нестационарного регулятора в задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений [1, 4, 8].

4) Полученные численные методы реализованы в виде комплекса программ.

5) Получены необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии полной информации о состоянии [6, 10].

6) Полученные результаты применены для моделирования и решения задач оптимальной стабилизации движения спутника с упругой штангой [9], движения спутника на круговой орбите [2], оптимального сближения двух спутников на круговой орбите [3].

Результаты диссертационной работы соответствуют пп. 1–4 паспорта специальности 05.13.18 и пп. 2, 4, 5 паспорта специальности 05.13.01.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации по теме диссертации в изданиях из перечня ВАК и/или индексируемых в международных наукометрических базах данных

[1] *Онегин Е. Е.* Оптимальная стабилизация квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление, 2019, Т. 20, №10, с. 589–599 (ВАК).

[2] *Хрусталев М. М., Онегин Е. Е.* Необходимые и достаточные условия в задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем // Автоматика и Телемеханика, 2019, №6, с. 89–104 (ВАК).
Khrustalev M. M., Onegin E. E. Necessary and sufficient conditions for optimal stabilization of quasi-linear stochastic systems // Automation and Remote Control. – 2019. – Т. 80. – №. 7. – С. 1252-1264 (Scopus, Web of Science).

[3] *Онегин Е.Е., Хрусталев М.М.* Оптимальная стабилизация квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами / Материалы 14-й Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) (Москва, 2018). М.: ИПУ РАН, 2018. С. 311-314.
Onegin E., Khrustalev M. Optimal stabilisation of a quasilinear stochastic system with controllable parameters / Proceedings of 2018 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiys Conference), STAB 2018. M.: IEEE, 2018, https://ieeexplore.ieee.org/document/8408384 (Scopus).

[4] *Хрусталев М.М., Онегин Е.Е.* Оптимальное подавление возмущений в квазилинейной стохастической системе, функционирующей на неограниченном интервале времени, при управлении по выходу // Материалы 13-й Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). М.: ИПУ РАН, 2016. С. 402-404.
Onegin E., Khrustalev M. The Optimal Disturbance Suppression Problem on the Infinite Time Interval for Quasilinear Stochastic Systems with Output

Feedback // Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE, 2016, http://ieeexplore.ieee.org/document/7541193/ (Scopus, Web of Science).

Свидетельства о государственной регистрации программ

[5] *Онегин Е. Е.* Программный комплекс для решения задач оптимальной стабилизации и моделирования квазилинейных стохастических систем // Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018616557. Федеральная служба по интеллект. собственности – 04.06.2018.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

[6] *Хрусталев М.М., Онегин Е.Е.* Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов для квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени // Программные системы: теория и приложения, 2015, Т. 6, №2, с. 29-44 (RSCI).

[7] *Онегин Е. Е., Хрусталев М. М.* Субоптимальная стабилизирующая стратегия управления линейной стохастической системой с управляемыми параметрами // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019), Москва, ИПУ РАН, 2019. С. 870-874.

[8] *Онегин Е.Е.* Оптимальное подавление случайных возмущений при управлении по выходу в квазилинейных стохастических системах на неограниченном интервале времени // Сборник тезисов докладов 42-ой Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения-2016». М.: МАИ, 2016. Т. 1. С. 469-470.

[9] *Онегин Е.Е.* Асимптотическая стабилизация спутника с упругой штангой при наличии случайных возмущений // Тезисы докладов 14-й Международной конференции «Авиация и космонавтика-2015» (Москва). М.: МАИ, 2015. С. 442-443.

[10] *Хрусталев М.М., Онегин Е.Е.* Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов для квазилинейных стохастических систем // Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015). Алушта: Изд-во МАИ, 2015. С. 669-672.