

УДК 539.3

Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства

Михайлова Е.Ю.,* Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.*****

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: mihe16@yandex.ru*

***e-mail: tdvhome@mail.ru*

****e-mail: greghome@mail.ru*

Аннотация

Исследуется произвольный этап взаимодействия сферической оболочки типа Тимошенко (ударник) и упругого изотропного полупространства (основание). Получена система разрешающих уравнений. Разработан и реализован численно-аналитический алгоритм ее решения. Приведены результаты расчетов в виде графиков распределений контактного давления, нормальных перемещений, а также зависимости от времени контактного давления и нормальных перемещений в лобовой точке оболочки. Полученные результаты могут быть использованы в аэрокосмической отрасли при расчете случаев жесткой посадки спускаемых аппаратов на грунт.

Ключевые слова: нестационарные контактные задачи, сферическая оболочка типа Тимошенко, упругое полупространство, функция влияния, интегральные уравнения, квадратурные формулы, сингулярные интегралы, каноническая регуляризация.

Введение

Задачи механики контактных взаимодействий являются одними из основных проблем, подлежащих решению на этапах проектирования и создания самых различных объектов современной техники. В авиационной и космической отраслях промышленности актуальными и важными являются контактные задачи для тонкостенных элементов конструкций, в том числе, для оболочек. Оболочки являются основными конструктивными элементами корпусов, оперений, обтекателей и многих других элементов летательных аппаратов. В настоящее время наименее исследованными являются нестационарные контактные задачи. И среди них наиболее сложными являются нестационарные задачи с подвижной границей области контакта. Можно привести множество работ посвященных контактным задачам. Однако работ касающихся нестационарных задач с подвижными границами среди них найдется немного. К ним относятся следующие публикации [1, 2, 3]. В тоже время задачи данного класса являются исключительно важными и особенно актуальны для областей авиастроения, ракетостроения, судостроения, а также других отраслей промышленности, где широко применяются тонкостенные оболочечные элементы конструкций, работающие в условиях нестационарных контактных взаимодействий. В настоящей работе решена одна из этих важных задач.

Постановка задачи

Рассматривается осесимметричная нестационарная контактная задача с подвижными границами области взаимодействия для тонкой упругой сферической оболочки и упругого полупространства. Оболочка, двигаясь с некоторой начальной скоростью V_0 , вектор которой направлен по нормали к невозмущенной поверхности

полупространства, в момент времени $\tau=0$ достигает этой поверхности. Контакт происходит в условиях свободного проскальзывания. С оболочкой связана подвижная сферическая система координат $O_0, r_0, \vartheta, \theta$ с началом, совпадающим с центром оболочки. Для полупространства используется неподвижная цилиндрическая система координат O_1, r, ϑ, z с центром в точке первоначального контакта O_1 (Рис. 1).

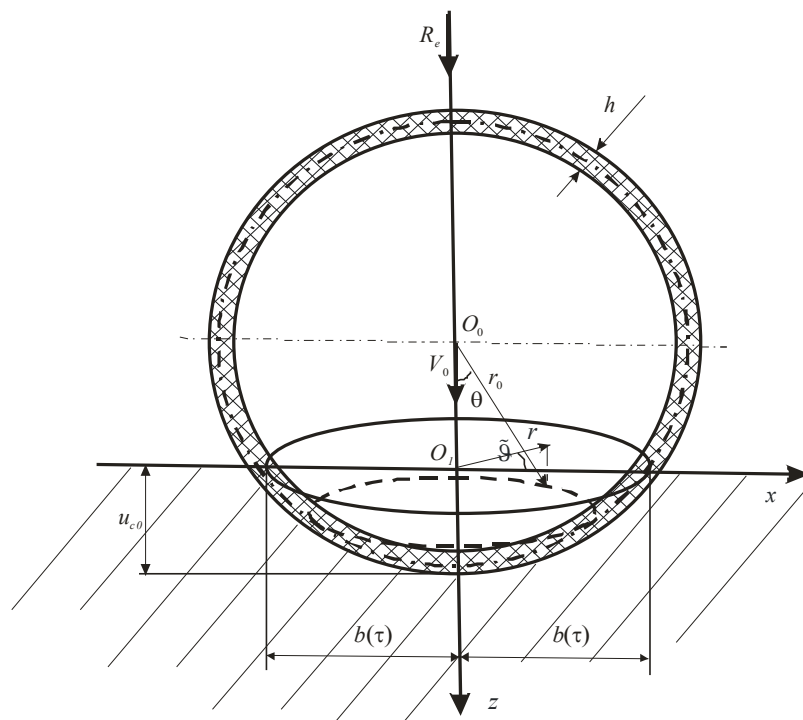


Рис. 1.

Все переменные и параметры приводятся к безразмерному виду (штрих соответствует безразмерным величинам; величины с индексом $k=1$ относятся к полупространству, а с $k=0$ - к оболочке):

$$\varphi' = \frac{\varphi}{R^2}, \quad \psi' = \frac{\psi}{R^2}, \quad \eta_i = \frac{c_{11}}{c_{i1}} \quad (i=1,2), \quad z' = \frac{z}{R}, \quad \tau' = \frac{c_{11}\tau}{R}, \quad u'_k = \frac{u_k}{R}, \quad w'_k = \frac{w_k}{R}, \quad u'_c = \frac{u_c}{R}$$

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\lambda_1 + 2\mu_1} \quad (\alpha, \beta = r_1, \vartheta, z), \quad \alpha_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + 2\mu_k}, \quad \beta_k = \frac{\mu_k}{\lambda_k + 2\mu_k}, \quad r' = \frac{r}{R}, \quad h' = \frac{h}{R},$$

$$V'_0 = \frac{V_0}{c_{11}}, \quad b' = \frac{b}{R}, \quad p' = \frac{p}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad \gamma^2 = \frac{c_{11}^2}{c_{10}^2}, \quad c_{1k}^2 = \frac{\lambda_k + 2\mu_k}{\rho_k}, \quad c_{2k}^2 = \frac{\mu_k}{\rho_k}, \quad a' = \frac{h^2}{12R^2},$$

$$m'_0 = \frac{m_0}{\rho_1 R^3}, \quad R'_a = \frac{R_a}{\rho_1 c_{11}^2 R^2}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \quad Q' = \frac{Q}{h(\lambda_0 + 2\mu_0)}, \quad \kappa'_{\alpha\alpha} = \kappa_{\alpha\alpha} R,$$

$$M'_{\alpha\alpha} = \frac{M_{\alpha\alpha}}{Rh(\lambda_0 + 2\mu_0)}, \quad \tilde{T}'_{\alpha\alpha} = \frac{\tilde{T}_{\alpha\alpha}}{h(\lambda_0 + 2\mu_0)}, \quad T'_{\alpha\alpha} = \frac{T_{\alpha\alpha}}{h(\lambda_0 + 2\mu_0)} \quad (\alpha = \theta, \vartheta).$$

Здесь R - радиус оболочки; c_{1k} и c_{2k} - скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига; φ, ψ - скалярный и векторный потенциалы упругих смещений полупространства; $\sigma_{\alpha\beta}$ - компоненты тензора напряжений полупространства; ρ_k - плотность; $b(\tau)$ - радиус области контакта; t - время; h - толщина оболочки; λ_k, μ_k - упругие постоянные Ламе; w_k, u_k - нормальное и тангенциальное перемещения; u_c - перемещение центра масс оболочки; p - нормальное контактное напряжение; m_0 - масса оболочки; R_a - результирующая контактная сила; $T_{\alpha\alpha}, \tilde{T}_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\alpha}, \kappa_{\alpha\alpha}$ - ненулевые компоненты тензоров тангенциальных усилий, симметрического тензора составляющих тангенциальных усилий, изгибающих моментов, изменения кривизны; Q - перерезывающая сила. Далее везде штрихи опущены.

Постановка задачи включает следующие группы соотношений.

Уравнения движения полупространства, записанные относительно упругих потенциалов (точками здесь и далее обозначены производные по времени) [2,4, 5]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} = \eta_2^2 \ddot{\psi},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \ddot{\varphi}. \quad (1)$$

Связи перемещений с упругими потенциалами

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\psi + r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (2)$$

Связи ненулевых компонент тензора напряжений и вектора перемещений

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \beta_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right), \quad \sigma_{rr} = \frac{\partial u_1}{\partial r} + \alpha_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{u_1}{r} \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial w_1}{\partial z} + \alpha_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_1}{r} \right), \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{u_1}{r} + \alpha_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial r} \right); \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения движения оболочки в форме С.П. Тимошенко [2, 5, 6]

$$\begin{aligned} \gamma^2 \ddot{u}_0 &= \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + (T_{\theta\theta} - T_{\vartheta\vartheta}) \operatorname{ctg} \theta + Q, \\ \gamma^2 \ddot{w}_0 &= -T_{\theta\theta} - T_{\vartheta\vartheta} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} + Q \operatorname{ctg} \theta + \frac{p}{h}, \\ \gamma^2 \ddot{\chi} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta (M_{\vartheta\vartheta} - M_{\theta\theta}) - Q \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Геометрические соотношения оболочки С.П. Тимошенко

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + w_0, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = u_0 \operatorname{ctg} \theta + w_0, \quad \beta = \chi - \varsigma, \quad -\varsigma = \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - u_0, \\ \kappa_{\theta\theta} &= \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - w_0, \quad \kappa_{\vartheta\vartheta} = \operatorname{ctg} \theta (\chi - u_0) - w_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\varepsilon_{\theta\theta}$ и $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}$ - ненулевые компоненты тензора деформаций; χ - угол поворота нормального к срединной поверхности оболочки волокна за счет сдвига в поперечном сечении.

Физические соотношения оболочки С.П. Тимошенко

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} &= \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \alpha_0 \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \tilde{T}_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta} + \alpha_0 \varepsilon_{\vartheta\vartheta}, \\ M_{\theta\theta} &= a (\kappa_{\theta\theta} + \alpha_0 \kappa_{\vartheta\vartheta}), \quad M_{\vartheta\vartheta} = a (\kappa_{\vartheta\vartheta} + \alpha_0 \kappa_{\theta\theta}), \\ T_{\theta\theta} &= \tilde{T}_{\theta\theta} - M_{\theta\theta}, \quad T_{\vartheta\vartheta} = \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} - M_{\vartheta\vartheta}, \quad Q = \beta_0 k^2 \beta, \quad k^2 = \frac{5}{6}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение движения оболочки как абсолютно твердого тела

$$m_0 \ddot{u}_c = R_a, R_a(\tau) = 2\pi\tilde{\gamma} \int_0^{b(\tau)} p(r, \tau) r dr. \quad (7)$$

Соотношение, связывающее радиус границы области взаимодействия с глубиной погружения оболочки, вытекающее из условия пересечения недеформированных поверхностей оболочки и полупространства

$$b(\tau) = \sqrt{u_c(2 - u_c)}. \quad (8)$$

Начальные условия

$$\begin{aligned} u_c|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}_c|_{\tau=0} = V_0, \quad u_0|_{\tau=0} = 0, \quad w_0|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}_0|_{\tau=0} = -V_0 \sin \theta, \\ \dot{w}_0|_{\tau=0} = V_0 \cos \theta, \quad \phi|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{\phi}|_{\tau=0} = 0, \quad \psi|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=0} = \tilde{\gamma} p (|r| \leq b(\tau)), \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0 (|r| > b(\tau)), \\ \sigma_{z\theta}|_{z=0} = 0 (r \in (-\infty, \infty)), \quad w_1 = w_0 \cos \theta \approx w_0 |r| \leq b(\tau). \end{aligned} \quad (10)$$

Условия на бесконечности, заключающиеся в отсутствии возмущений в бесконечно удаленной точке полупространства

$$\varphi = O(1), \quad \psi = O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Функция влияния для оболочки

Для приведения постановки задачи к системе разрешающих уравнений используются функции влияния для полупространства и сферической оболочки. Нестационарная поверхностная функция влияния для полупространства найдена и исследована в [4, 6]. Поставим задачу об определении функции влияния для сферической оболочки.

Функции влияния сферической оболочки представляют собой перемещения и угол поворота сечения при воздействии сосредоточенного мгновенного давления

$$p = \delta(\tau)\delta(\theta - \xi), \quad (12)$$

где $\delta(\tau)$, $\delta(\theta - \xi)$ - дельта-функции Дирака.

Сведем начальные условия (9) к однородным. Представим тангенциальные и нормальные перемещения оболочки так

$$u_0 = \tilde{u}_0 - V_0 \tau \sin \theta, \quad w_0 = \tilde{w}_0 + V_0 \tau \cos \theta. \quad (13)$$

При этом новые функции \tilde{u}_0 и \tilde{w}_0 удовлетворяют однородным начальным условиям. Подстановка (13) в (4) - (6) не изменяет последние и приводит к системе уравнений относительно неизвестных \tilde{u}_0 , \tilde{w}_0 , χ , которые с учетом (12) и являются функциями влияния для оболочки. Для них введем специальные обозначения:

$$G_{01}(\theta, \xi, \tau) = \tilde{u}_0, \quad G_{02}(\theta, \xi, \tau) = \tilde{w}_0, \quad G_{03}(\theta, \xi, \tau) = \chi. \quad (14)$$

Граничные условия в задаче об определении функций влияния состоят в требовании ограниченности решения в полюсах оболочки $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

Для решения поставленной задачи используем разложения функций G_{01} , G_{02} , G_{03} и $\delta(\theta - \xi)$ в ряды по полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta)$ и их производным:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} G_{01}(\theta, \xi, \tau) \\ G_{03}(\theta, \xi, \tau) \end{pmatrix} &= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{01n}(\tau, \xi) \\ G_{03n}(\tau, \xi) \end{pmatrix} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \\ \begin{pmatrix} G_{02}(\theta, \xi, \tau) \\ \delta(\theta - \xi) \end{pmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{02n}(\tau, \xi) \\ \delta_n(\xi) \end{pmatrix} P_n(\cos \theta), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{где } \delta_n(\xi) = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \delta(\theta - \xi) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \xi) \sin \xi.$$

Подставляя (15) с учетом (14) в (6), (5), а затем в (3), используя соотношения для полиномов Лежандра [7]

$$\frac{d^2 P_n(\cos \theta)}{d\theta^2} = - \left(\operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} + n(n+1)P_n(\cos \theta) \right),$$

и учитывая малость параметра a по сравнению с единицей ($a \ll 1$) получаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений, зависящих от времени τ и угловой координаты ξ :

$$\begin{aligned} \gamma^2 \frac{\partial^2 G_{01n}(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} &= L_{11n} G_{01n}(\tau, \xi) + L_{12n} G_{02n}(\tau, \xi) + L_{13n} G_{03n}(\tau, \xi), \\ \gamma^2 \frac{\partial^2 G_{02n}(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} &= L_{21n} G_{01n}(\tau, \xi) + L_{22n} G_{02n}(\tau, \xi) + L_{23n} G_{03n}(\tau, \xi) + \frac{\delta(\tau)\delta_n(\xi)}{h}, \\ \gamma^2 \frac{\partial^2 G_{03n}(\tau, \xi)}{\partial \tau^2} &= L_{31n} G_{01n}(\tau, \xi) + L_{32n} G_{02n}(\tau, \xi) + L_{33n} G_{03n}(\tau, \xi). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\mathbf{L}_n = (L_{ijn})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} d - \tilde{b} - m & c + \tilde{b} & \tilde{b} \\ m(\tilde{b} + c) & -2c - m\tilde{b} & -m\tilde{b} \\ \tilde{b}/a & -\tilde{b}/a & -\tilde{b}/a \end{pmatrix},$$

$$d = 1 - \alpha_0, \quad \tilde{b} = \beta_0 k, \quad c = 1 + \alpha_0, \quad m = n(n+1).$$

В пространстве преобразований Лапласа уравнения (16) с учетом нулевых начальных условий запишутся следующим образом (значок "L" означает трансформанту):

$$\begin{aligned} \gamma^2 s^2 G_{01n}^L(s, \xi) &= L_{11m} G_{01n}^L(s, \xi) + L_{12m} G_{02n}^L(s, \xi) + L_{13m} G_{03n}^L(s, \xi), \\ \gamma^2 s^2 G_{02n}^L(s, \xi) &= L_{21m} G_{01n}^L(s, \xi) + L_{22m} G_{02n}^L(s, \xi) + L_{23m} G_{03n}^L(s, \xi) + \zeta_n(\xi), \\ \gamma^2 s^2 G_{03n}^L(s, \xi) &= L_{31m} G_{01n}^L(s, \xi) + L_{32m} G_{02n}^L(s, \xi) + L_{33m} G_{03n}^L(s, \xi), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\zeta_n(\xi) = \frac{P_n(\cos \xi) \sin(\xi) (2n+1)}{h}$, s - параметр преобразования.

Отметим, что для решения исходной задачи достаточно определить только одну функцию влияния - G_{02} .

Решая систему уравнений (17), находим изображение коэффициентов разложения функции влияния $G_{02n}^L(\tau, \xi)$:

$$G_{02n}^L(s, \xi) = \frac{P(s^2, m)}{R(s^2, m)} \zeta_n(\xi),$$

$$P(s, m) = \sum_{k=0}^2 P_k(s, m), \quad P_k(s, m) = \sum_{l=0}^k \tilde{a}_{l, k-l} s^l m^{k-l}, \quad (18)$$

$$R(s, m) = \sum_{k=0}^3 R_k(s, m), \quad R_k(s, m) = \sum_{l=0}^k a_{*l, k-l} s^l m^{k-l},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \tilde{b}d & -\tilde{b} & 0 \\ \gamma^2(ad - a\tilde{b} - \tilde{b}) & -\gamma^2 a & 0 \\ -\gamma^4 a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_* = (a_{*ij})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 2\tilde{b}cd & \tilde{b}c(c-2) & 0 & 0 \\ -2\gamma^2 \left(c(\tilde{b} - ad + a\tilde{b}) - \frac{\tilde{b}d}{2} \right) & \gamma^2(a(c(-2 + 2\tilde{b} + c) + \tilde{b}d) - \tilde{b}) & \gamma^2 ab & 0 \\ -\gamma^4(a(\tilde{b} - d + 2c) + \tilde{b}) & -a\gamma^4(\tilde{b} + 1) & 0 & 0 \\ -a\gamma^6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку изображение G_{02n}^L представляет собой правильную рациональную дробь относительно параметра s , то соответствующий оригинал при каждом n определяем аналитически с помощью второй теоремы разложения для преобразования Лапласа [8]

$$G_{02n}(\tau, \xi) = \sum_k \underset{s_{nk}}{\text{res}} G_{02n}^L(s, \xi) e^{s\tau}, \quad R(z_{nk}, n) = 0, \quad z_{nk} = s_{nk}^2. \quad (19)$$

Подставляя найденные коэффициенты $G_{02n}(\tau, \xi)$ в соответствующее разложение (15), получаем функцию влияния для оболочки $G_{02}(\theta, \xi, \tau)$ в виде ряда.

Система разрешающих уравнений

При исследовании контактного взаимодействия оболочки и полупространства на произвольном этапе основное уравнение системы разрешающих уравнений вытекает из последнего граничного условия в (10), которое при учете (13) преобразуется к виду

$$w_1 = \tilde{w}_0 + V_0 \tau \cos \theta, \quad |r| \leq b(\tau). \quad (20)$$

Нормальные перемещения оболочки и полупространства связаны с контактным давлением интегральными соотношениями, базирующимися на принципе суперпозиции [5, 9, 10, 11]:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_0 &= J_0(\theta, \tau), \quad w_1 = J_0(\theta, \tau), \\ J_0(\theta, \tau) &= \int_0^\tau dt \int_0^{b(t)} G_{02}(\theta, \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi, \\ J_1(\theta, \tau) &= \tilde{\gamma} \int_0^\tau dt \int_0^{b(t)} \bar{\Lambda}(\theta, \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi, \\ \Lambda(\theta, \xi, \tau) &= \xi \bar{\Lambda}(\theta, \xi, \tau), \quad \bar{\Lambda}(\theta, \xi, \tau) = \int_0^{2\pi} G_1(\sqrt{\theta^2 + \xi^2 - 2\theta\xi \cos \alpha}, \tau) d\alpha. \end{aligned} \quad (21)$$

В (21) принято допущение о малых относительных размерах пятна контакта ($r \approx \theta$).

Из (20) и (21) вытекает основное разрешающее уравнение

$$J_1(\theta, \tau, b(\tau)) - J_0(\theta, \tau, b(\tau)) = V_0 \tau \cos \theta. \quad (22)$$

До замкнутой системы разрешающих уравнений оно дополняется кинематическим соотношением (8) и уравнением движения оболочки как абсолютно твердого тела, записанным в интегральной форме

$$u_c = V_0 \tau + \frac{1}{m_0} J_c(\tau), \quad (23)$$

$$J_c(\tau) = R_e \frac{\tau^2}{2} + \pi \int_0^\tau \int_0^y p(\xi, \tau)(\tau - t) \sin(2\xi) d\xi dt,$$

а также начальными условиями

$$u_c(0) = 0, \quad b(0) = 0. \quad (24)$$

Ядро $\Lambda(\theta, \xi, \tau)$ интегрального оператора $J_1(\theta, \tau, y)$ в (21), найдено в явном виде в работе [4]:

$$\Lambda(\theta, \xi, \tau) = \sum_{j=1}^2 \left[\Lambda_{jr}(\theta, \xi, \tau) + \Lambda_{js}(\theta, \xi, \tau) H(\theta + \xi - c_R \tau) \right] H(\tau - \eta_j |\theta - \xi|) \quad (25)$$

$$\Lambda_{js}(\theta, \xi, \tau) = \frac{a_j}{\eta^4} \begin{cases} \frac{\tau}{\pi} \sqrt{1 - \eta_j^2 c_R^2} \Lambda_s(\theta, \xi, \tau) & (\theta \neq \xi, \theta \xi \neq 0), \\ \frac{1}{\pi c_R^2 \tau} & (\theta = \xi, \theta \xi \neq 0), \\ \tau \xi \sqrt{1 - \eta_j^2 c_R^2} (\theta^2 + \xi^2 - c_R^2 \tau^2)^{-3/2} & (\theta \xi = 0), \end{cases}$$

$$\Lambda_s(\theta, \xi, \tau) = -\sqrt{\frac{\theta}{\xi}} \frac{1}{c_R^2 \tau^2 - (\theta - \xi)^2} - \frac{1}{16\theta \sqrt{\theta \xi}} \ln |c_R^2 \tau^2 - (\theta - \xi)^2|,$$

$$\Lambda_{jr}(\theta, \xi, \tau) = \frac{\tau}{\pi \eta^4} \left[\xi \Lambda_{j2}(\theta, \xi, \tau) + a_j \sqrt{1 - \eta_j^2 c_R^2} g_j(\theta, \xi, \tau) H(m) \right],$$

$$g_j(\theta, \xi, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{4\theta \sqrt{\theta \xi}} \left[\tilde{\Lambda}_{j1}(\theta, \xi, \tau) + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{4} \ln |m_1| + \frac{1}{4} \ln(4\theta \xi) \right] & (\theta \xi \neq 0), \\ 0 & (\theta \xi = 0). \end{cases}$$

$$\tilde{\Lambda}_{j1}(\theta, \xi, \tau) = 4(\theta \xi)^{3/2} \Lambda_{j1}(\theta, \xi, \tau), \quad a_1 = \frac{(2 - \eta^2 c_R^2)^2}{P_2(c_R^2, 1)}, \quad a_2 = 4 \frac{1 - c_R^2}{P_2(c_R^2, 1)},$$

$$P_2(x, \tau) = x^2 - 2\alpha^2 \tau x + \beta^2 \tau^2, \quad \alpha^2 = 4/\eta^2 - c_R^2/2, \quad \beta^2 = 16(\eta^2 - 1)/(\eta^8 c_R^2).$$

Здесь c_R - скорость волны Рэля, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \eta$, $\Lambda_{js}(\theta, \xi, \tau)$ - сингулярные составляющие ядра Λ , $\Lambda_{jr}(\theta, \xi, \tau)$ - регулярные составляющие, которые являются непрерывными функциями, $H(x)$ - функция Хевисайда.

Функция Λ_{j2} не имеет особенностей и при $\theta\xi \neq 0$ определяется так:

$$\begin{aligned} \Lambda_{j2}(\theta, \xi, \tau) &= H(n_{j1}) \left[H(-n_j) L_{j2}(-1) + H(n_j) L_{j2}(z_{j1}) \right], \\ L_{j2}(y) &= \int_y^1 \frac{\chi_j(R_1^2, \tau^2)}{\sqrt{1-z^2}} dz, \quad R_1^2 = \theta^2 + \xi^2 - 2\theta\xi z, \quad n_j = \frac{1}{4\theta\xi} \left[(\theta + \xi)^2 - \tau_j^2 \right], \\ n_{j1} = 1 - n_j &= \frac{1}{4\theta\xi} \left[\tau_j^2 - (\theta - \xi)^2 \right], \quad z_{j1} = \frac{\theta^2 + \xi^2 - \tau_j^2}{2\theta\xi}, \quad \tau_j = \tau/\eta_j. \end{aligned} \quad (26)$$

А при $\theta\xi = 0$ имеем

$$\Lambda_{j2}(\theta, \xi, \tau) = \pi\chi_j(\theta^2 + \xi^2, \tau^2) H(\tau - \eta_j \sqrt{\theta^2 + \xi^2}). \quad (27)$$

В формуле (26) интегралы L_{j2} сводятся к гиперэллиптическим интегралам и вычисляются с помощью квадратурных формул, учитывающих особенность подынтегральной функции в точках $z = \pm 1$.

Функция Λ_{j1} при $\theta\xi \neq 0$ имеет следующий вид:

$$\Lambda_{j1}(\theta, \xi, \tau) = \frac{1}{4(\theta\xi)^{3/2}} H(n_{j1}) H(m) \left[H(-m_1) \Lambda_{j11}(\theta, \xi, \tau) + H(m_1) \Lambda_{j12}(\theta, \xi, \tau) \right], \quad (28)$$

$$\Lambda_{j11}(\theta, \xi, \tau) = -\frac{1}{m_1 \sqrt{m}} \left[H(n_j) E\left(\varphi_j, \frac{1}{m}\right) + H(-n_j) E\left(\frac{1}{m}\right) \right],$$

$$\Lambda_{j12}(\theta, \xi, \tau) = \frac{1}{m} \left\{ G(m) - H(n_j) \left[G(\theta_j, m) + \frac{1}{m} \sqrt{\frac{n_j n_{j1}}{m - n_j}} \right] \right\},$$

$$G(m) = K(m) - \frac{1}{m_1} E(m), \quad G(\theta_j, m) = F(\theta_j, m) - \frac{1}{m_1} E(\theta_j, m),$$

$$m = \frac{1}{4\theta\xi} [(\theta + \xi)^2 - c_R^2 \tau^2], \quad m_1 = 1 - m = \frac{1}{4\theta\xi} [c_R^2 \tau^2 - (\theta - \xi)^2],$$

$$\sin \theta_j = \sqrt{\frac{n_j}{m}}, \quad \sin \varphi_j = \sqrt{\frac{mn_{j1}}{m - n_j}}.$$

Здесь $K(m)$, $F(\varphi, m)$ - полные и неполный эллиптические интегралы первого рода, $E(m)$, $E(\varphi, m)$ - полные и неполный эллиптические интегралы второго рода, m - параметр, φ - амплитуда.

Из (25) видно, что особенности ядра $\Lambda(\theta, \xi, \tau)$ сосредоточены на прямых $c_R(\tau - t) = |\theta - \xi|$.

Алгоритм решения задачи

Для решения системы (22), (23) и (8) с начальными условиями (24) используется численно-аналитический алгоритм, основанный на методе квадратур. С учетом гиперболического типа уравнений движения оболочки и полупространства используется явная схема интегрирования.

На пространственно-временную область $R_{t\xi}^2$ наносится сетка с постоянным шагом δ_t по времени t и δ_ξ по координате ξ (Рис. 2):

$$t_i = i\delta_t, \quad \tau = t_m = m\delta_t, \quad \xi_j = j\delta_\xi, \quad \theta = \xi_n = n\delta_\xi, \quad \delta_t < c_R \delta_\xi,$$

$$R_{t\xi}^2 = \bigcup_i \bigcup_j K_{ij}, \quad K_{ij} = \{(t, \xi) | t_{i-1} \leq t \leq t_i, \xi_j \leq \xi \leq \xi_{j+1}\}. \quad (29)$$

Искомым функциям $b(t)$, $u_c(t)$, $p(t, \xi)$ ставятся в соответствие сеточные функции b_i , u_{ci} , p_{ij} :

$$b_i = b(t_i), \quad u_{ci} = u_c(t_i), \quad p_{ij} = p(t_i, \xi_j). \quad (30)$$

При этом граница области контакта $b(t)$ заменяется кусочно-постоянной ломаной.

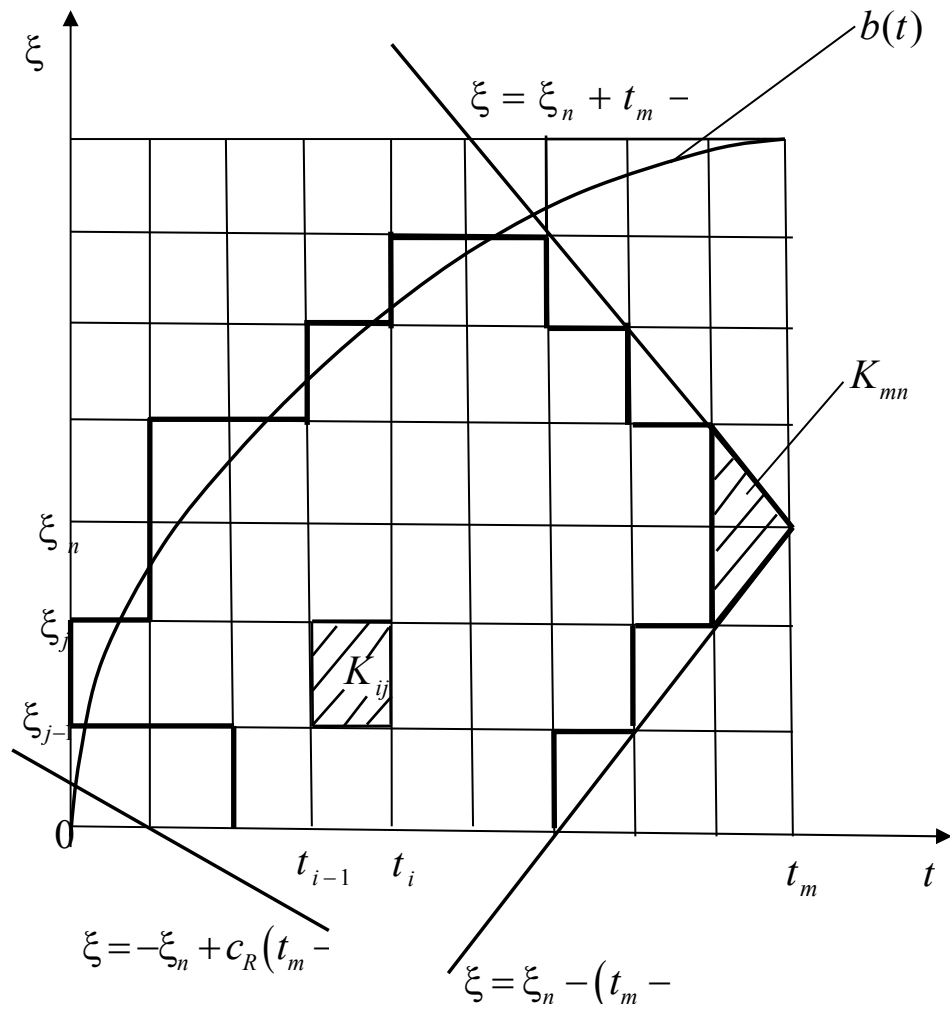


Рис. 2.

С учетом носителей область интегрирования в операторе $J_1(\theta, \tau)$ ограничена кривой $\xi = b(t)$ и прямыми $\xi = -\xi_n + c_R(t_m - t)$, $\xi = \xi_n + t_m - t$, $\xi = \xi_n - (t_m - t)$, которые также приближенно заменяются кусочно-постоянными ломаными.

Э дискретный аналог разрешающей системы (22), (23), (8) состоит из следующих уравнений:

$$u_{cm} = \frac{1}{m_0} \left\{ R_e \frac{(m\delta_t)^2}{2} + \pi \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k_i} p_{ij} d_{ij} \right\} + V_0 m \delta_t, \quad (31)$$

$$d_{ij} = \iint_{K_{ij}} (t_m - t) \sin(2\xi) d\xi dt, \quad k_i = \lceil b_i / \delta_\xi \rceil;$$

$$b_m = \sqrt{u_{cm}(2 - u_{cm})}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k_i} p_{ij} \left[\iint_{K_{ij}} \tilde{\gamma} \Lambda(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt - \cos(n\delta) \iint_{K_{ij}} G_{02}(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt \right] + \\ & + p_{mn} \left[\iint_{K_{mn}} \tilde{\gamma} \Lambda(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt - \cos(n\delta_\xi) \iint_{K_{mn}} G_{02}(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt \right] = \\ & = V_0 m \delta_t \cos^2(n\delta_\xi). \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $[b_i/\delta_\xi]$ означает целую часть выражения b_i/δ_ξ .

Начальные условия для данной системы имеют вид:

$$u_{c0} = 0, \quad b_0 = 0. \quad (34)$$

На каждом временном шаге с номером m из формулы (31) определяется значение глубины проникания оболочки в полупространство u_{cm} . Подставляя u_{cm} в (32), находим радиус области контакта b_m .

После этого определяется решение p_{mn} уравнения (34)

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{V_0 m \delta_t \cos^2(n\delta_\xi) - \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k_i} p_{ij} [\tilde{\gamma} I_{1ij} - \cos(n\delta_\xi) I_{0ij}]}{\tilde{\gamma} I_{1mn} - \cos(n\delta_\xi) I_{0mn}}, \\ I_{1ij} &= \iint_{K_{ij}} \Lambda(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt, \quad I_{0ij} = \iint_{K_{ij}} G_{02}(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt, \\ I_{1mn} &= \iint_{K_{mn}} \Lambda(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt, \quad I_{0mn} = \iint_{K_{mn}} G_{02}(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь K_{ij} - элементарные прямоугольники (29), а K_{mn} - область, ограниченная прямыми $\xi = \xi_n + t_m - t$, $\xi = \xi_n - (t_m - t)$ и $t = t_{m-1}$ (Рис. 2).

Интегралы I_{0ij} , I_{0mn} вычисляются аналитически.

Для вычисления интеграла I_{1mn} сделаем замену переменных

$$z = t - (m - 1)\delta_t$$

и с учетом носителя ядра получим:

$$\begin{aligned} \iint_{K_{mn}} \Lambda(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt &= \int_0^{\delta_t} dz \int_{n\delta_\xi - (\delta_t - z)}^{n\delta_\xi + (\delta_t - z)} \xi \bar{\Lambda}(n\delta_\xi, \xi, \delta_t - z) d\xi = \\ &= \int_0^{\delta_t} dz \int_0^\infty \xi \bar{\Lambda}(n\delta_\xi, \xi, \delta_t - z) J_0(0) d\xi = \int_0^{\delta_t} \bar{\Lambda}^{H_0}(n\delta_\xi, q, \delta_t - z) \Big|_{q=0} dz. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $\bar{\Lambda}(n\delta_\xi, \xi, \delta_t - z) = \int_0^{2\pi} G_1(\sqrt{(n\delta_\xi)^2 + \xi^2 - 2n\delta_\xi \xi \cos \alpha}, \delta_t - z) d\alpha$, $J_0(x)$ – функция

Бесселя первого порядка, значок H_0 указывает на преобразование Ханкеля по переменной ξ , q – параметр этого преобразования.

Применяя к (36) преобразование Лапласа по δ_t , получаем:

$$\left[\iint_{K_{mn}} \Lambda(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt \right]^L = \frac{1}{s} \bar{\Lambda}^{H_0L}(n\delta_\xi, q, s) \Big|_{q=0}. \quad (37)$$

Используя связь преобразования Фурье по двум переменным с преобразованием Ханкеля [4], имеем:

$$\bar{\Lambda}^{H_0L}(n\delta_\xi, q, s) \Big|_{q=0} = G^{FL}(p_1, p_2, s) \Big|_{p_1=p_2=0} = -\frac{1}{s}. \quad (38)$$

Здесь значком F обозначено преобразование Фурье по двум переменным, p_1, p_2 – параметры преобразования Фурье, $G(x_1, x_2, \tau)$ – функция влияния пространственной задачи, выражение изображения $G^{FL}(p_1, p_2, s)$ которой получено в работе [4].

Подставляя (38) в (37) и выполняя обратное преобразование Лапласа, находим значение искомого интеграла:

$$\iint_{K_{mn}} \Lambda(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt = -\delta_t \quad (40)$$

Теперь рассмотрим интеграл I_{1ij} . Он представляет собой сумму регулярных и сингулярных интегралов. Первые вычисляются с помощью квадратурных формул Гаусса [12]. Значения входящих в них полных эллиптических интегралов первого и второго рода вычисляются с применением аппроксимации многочленами [13]:

$$K(\tilde{m}) = [a_0 + a_1\tilde{m}_1 + \dots + a_4\tilde{m}_1^4] + [b_0 + b_1\tilde{m}_1 + \dots + b_4\tilde{m}_1^4] \ln(1/\tilde{m}_1) + \varepsilon(\tilde{m}),$$

$$|\varepsilon(\tilde{m})| \leq 2 \cdot 10^{-8},$$

$$a_0 = 1.38629436112, a_1 = 0.09666344259, a_2 = 0.03590092383,$$

$$a_3 = 0.03742563713, a_4 = 0.01451196212,$$

$$b_0 = 0.5, b_1 = 0.12498593597, b_2 = 0.06880248576,$$

$$b_3 = 0.03328355346, b_4 = 0.00441787012;$$

$$E(\tilde{m}) = [1 + a_1\tilde{m}_1 + \dots + a_4\tilde{m}_1^4] + [b_1\tilde{m}_1 + \dots + b_4\tilde{m}_1^4] \ln(1/\tilde{m}_1) + \varepsilon(\tilde{m}),$$

$$|\varepsilon(\tilde{m})| \leq 2 \cdot 10^{-8},$$

$$a_1 = 0.44325141463, a_2 = 0.06260601220,$$

$$a_3 = 0.04757383546, a_4 = 0.01736506451,$$

$$b_1 = 0.24998368310, b_2 = 0.09200180037,$$

$$b_3 = 0.04069697526, b_4 = 0.00526449639,$$

где $\tilde{m}_1 = 1 - \tilde{m}$.

Неполные эллиптические интегралы первого и второго рода вычисляются с помощью метода Симпсона [12] ($\delta_{эл.}$, \tilde{n} - шаг в эллиптическом интеграле и число разбиений соответственно):

$$I \approx \frac{\delta_{эл.}}{3} \left(y_0 + y_n + 4 \sum_{i=1}^n y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} \right), I = \begin{cases} F(\tilde{\delta}, \tilde{m}), \text{ где } y(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{m} \sin^2 \alpha}} \\ E(\tilde{\delta}, \tilde{m}), \text{ где } y(\alpha) = \sqrt{1 - \tilde{m} \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\delta_{эл.} = \frac{\tilde{\delta}}{2\tilde{n}}, y_0 = y(0), y_n = y(\delta), y_{2i-1} = y[(2i-1)\delta_{эл.}],$$

$$y_{2i} = y(2i\delta_{эл.}).$$

Для получения конечных значений сингулярных интегралов применяется метод весовых коэффициентов, которые определяются аналитически с использованием канонической регуляризации [5, 14].

Примеры расчетов

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим задачу о взаимодействии оболочки и полупространства, выполненных из стали со следующими размерными параметрами: $\rho_0 = \rho_1 = 7850$ кг/м³, $\lambda_0 = \lambda_1 = 1.15 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu_0 = \mu_1 = 7.69 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_0 = \nu_1 = 0.3$. Размерная начальная скорость оболочки $V_0 = 100$ м/с, радиус $R = 1$ м, толщина $h = 0.05$ м. Соответствующие безразмерные параметры: $V_0 = 0.017$, $\eta_2 = 1.87$, $a = 2 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = \tilde{\gamma} = 1$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 0.4286$, $\beta_0 = \beta_1 = 0.2857$, $m_0 = 0.5974$.

На рис. 3 представлено распределение контактного давления по координате r в различные моменты времени. Видно, что с течением времени давление понижается в окрестности лобовой точки и возрастает при приближении к границе области контакта.

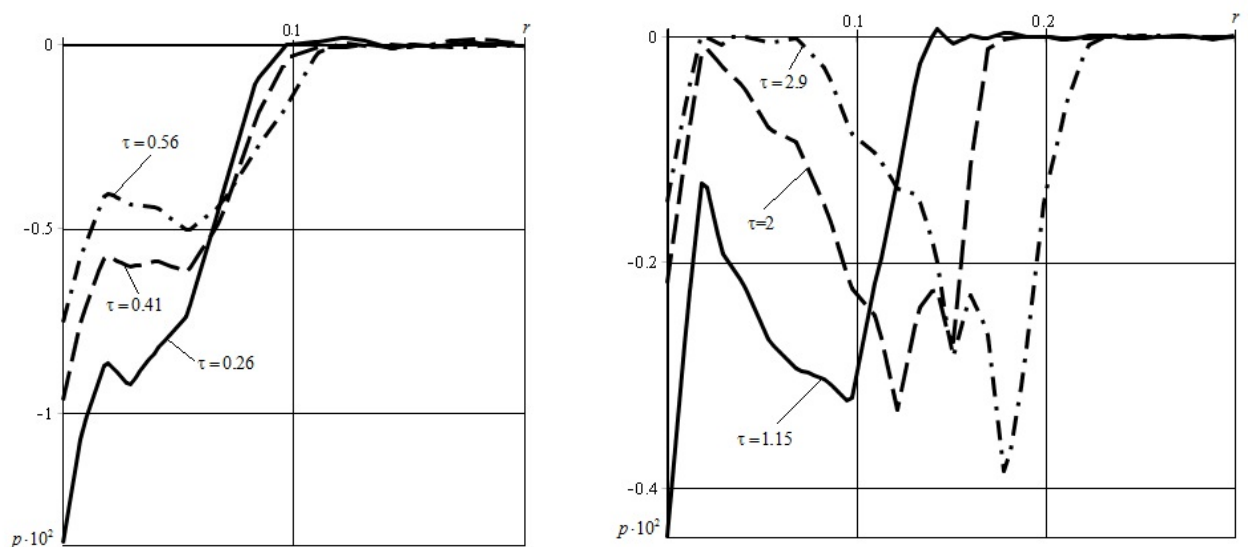


Рис. 3. Распределение контактного давления (пример 1).

Кривые на рис. 4 показывают распределения нормальных перемещений границы полупространства по координате r в различные моменты времени.

На рис. 5 изображены зависимости контактного давления и нормальных перемещений лобовой точки оболочки от времени. Видно, что с течением времени и давление и перемещение сначала резко возрастают, а затем начинают уменьшаться. Причем с течением времени отчетливо проявляется волновой характер этих величин.

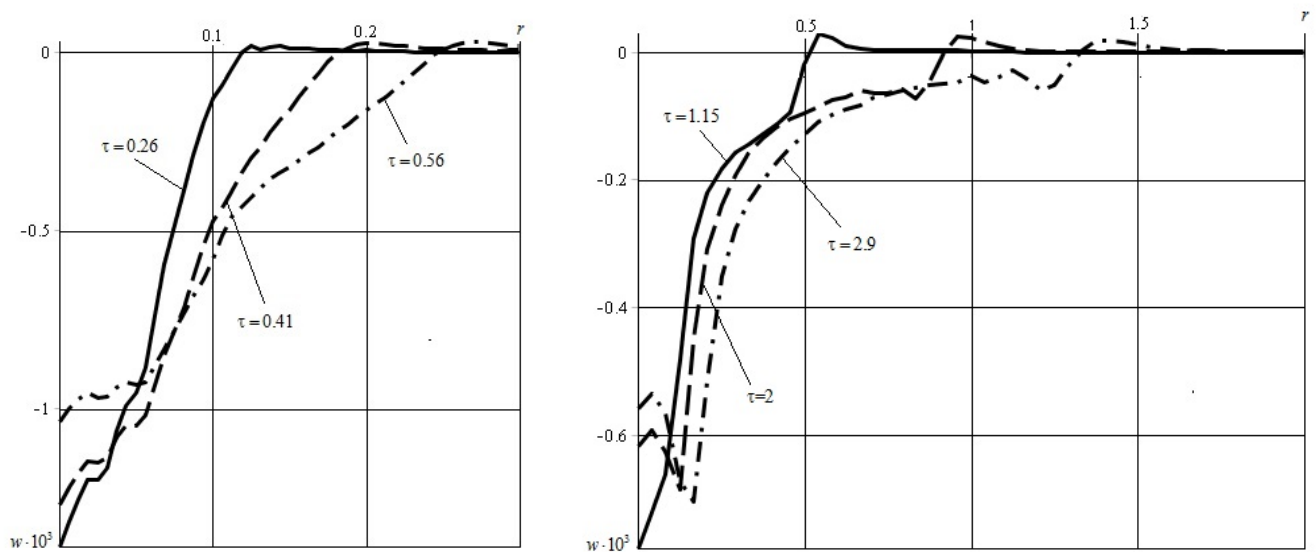


Рис. 4. Распределение нормальных перемещений (пример 1).

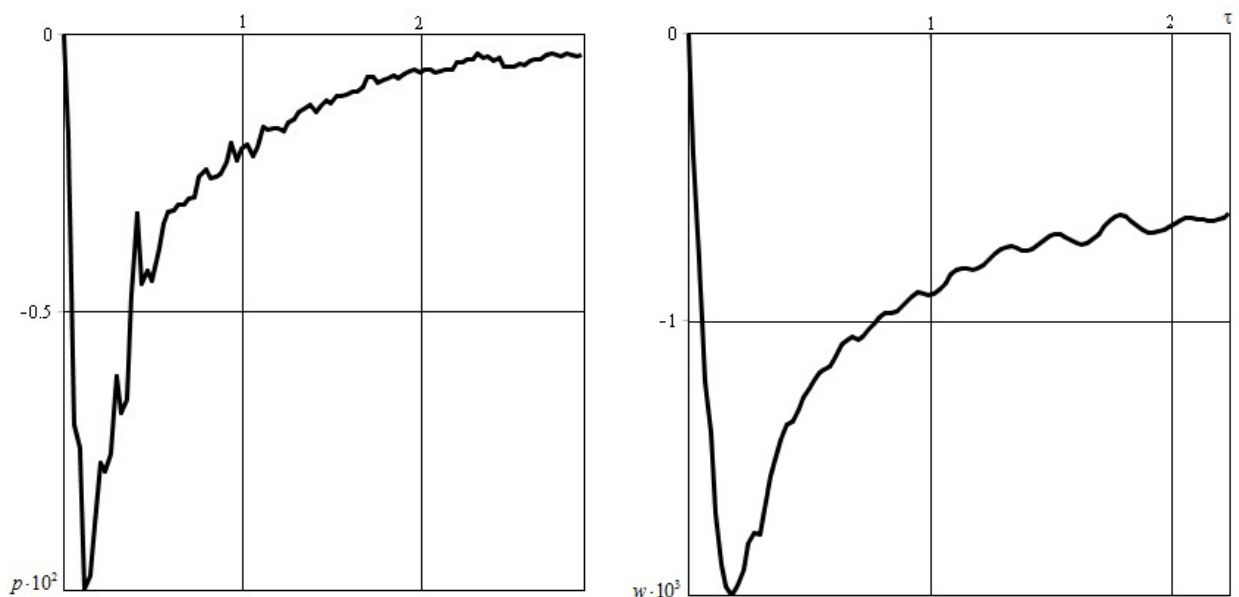


Рис. 5. Зависимость контактного давления и нормальных перемещений от времени
(пример 1).

Пример 2. В втором примере рассмотрим задачу о взаимодействии оболочки из стали и полупространства заполненного алюминием. Размерные параметры материалов: $\rho_0 = 7850 \text{ кг/м}^3$, $\rho_1 = 2770 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_0 = 1.15 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\lambda_1 = 5.18 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\mu_0 = 7.69 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\mu_1 = 2.67 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\nu_0 = 0.3$, $\nu_1 = 0.33$. Соответствующие безразмерные параметры: $\eta_2 = 1.98$, $\gamma = 1.052$, $\tilde{\gamma} = 2.56$, $\alpha_1 = 0.4925$, $\beta_1 = 0.2537$, $m_0 = 1.693$. Остальные параметры те же что и в примере 1.

Рисунки 6 и 7 иллюстрируют распределение контактных напряжений и нормальных перемещений соответственно по координате r . Из анализа представленных графиков видно качественное соответствие результатов примеров 1 и 2.

На рис. 8 показаны зависимости от времени контактного давления и перемещений в лобовой точке.

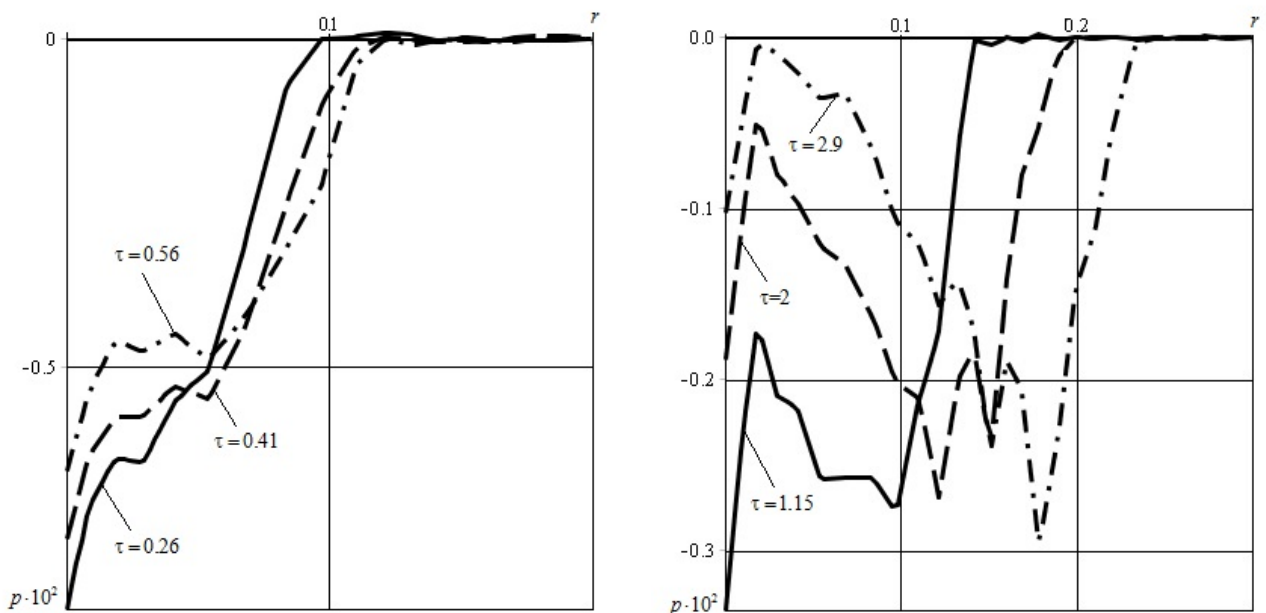


Рис. 6. Распределение контактного давления (пример 2).

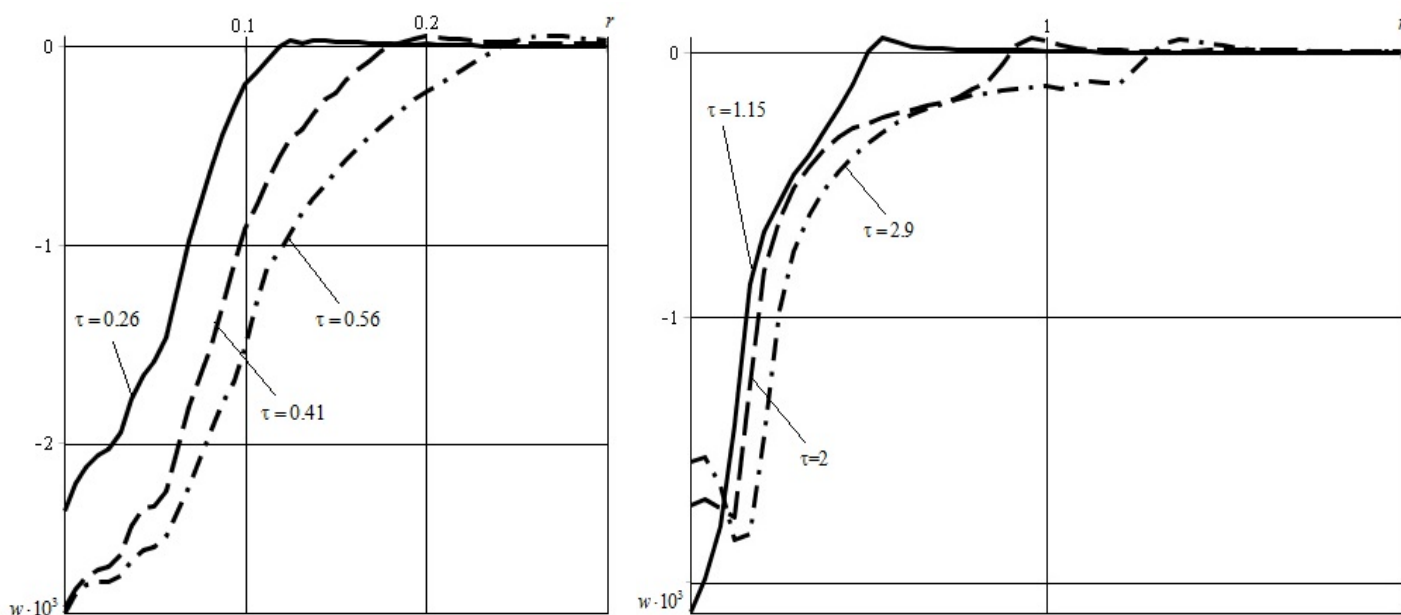


Рис. 7. Распределение нормальных перемещений (пример 2).

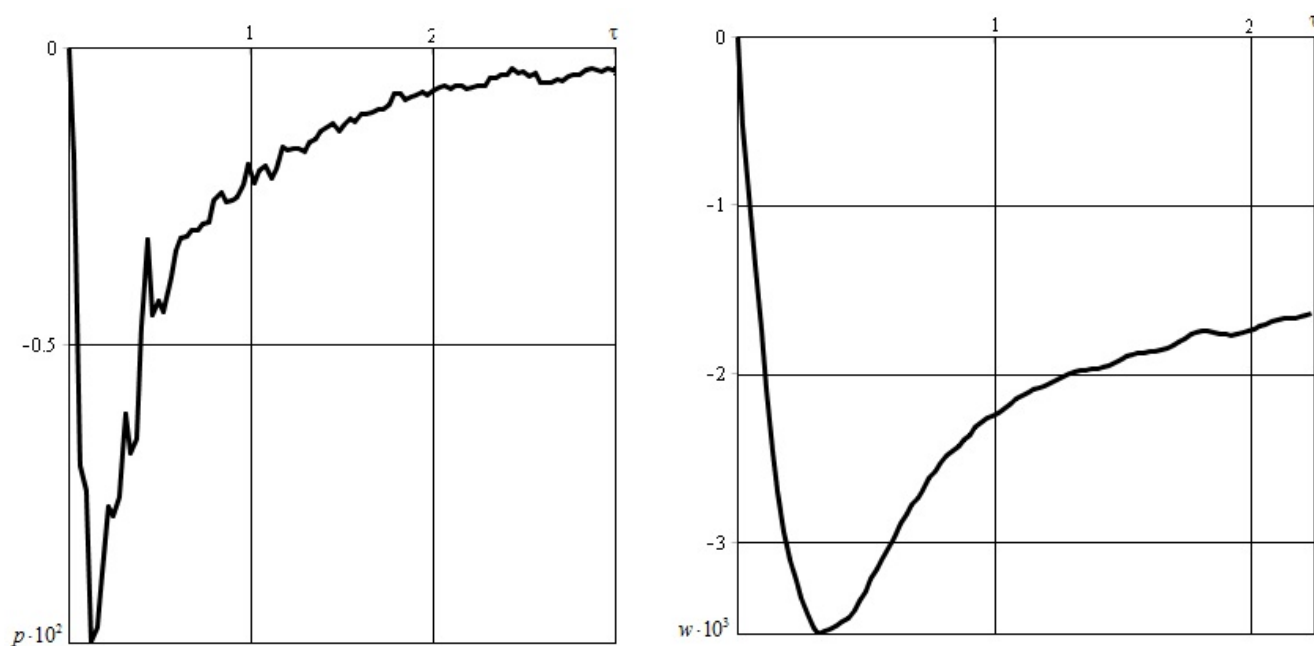


Рис. 8. Зависимость контактного давления и нормальных перемещений от времени (пример 2).

Пример 3. Здесь рассмотрим задачу о взаимодействии оболочки из стали и полупространства заполненного медью. Размерные параметры материалов:

$\rho_0 = 7850 \text{ кг/м}^3$, $\rho_1 = 8300 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_0 = 1.15 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\lambda_1 = 8.72 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\mu_0 = 7.69 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\mu_1 = 4.1 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\nu_0 = 0.3$, $\nu_1 = 0.34$. Соответствующие безразмерные параметры: $\eta_2 = 2.03$, $\gamma = 0.77$, $\tilde{\gamma} = 2.56$, $\alpha_1 = 0.515$, $\beta_1 = 0.242$, $m_0 = 0.565$. Остальные параметры совпадают с аналогичными данными в примерах 1 и 2.

На рис. 9 – 11 представлены соответственно распределения контактного давления и нормальных перемещений по координате r , а также зависимость контактного давления и нормальных перемещений от времени в лобовой точке.

Наблюдается качественное соответствие результатов этого примера результатам представленным выше.

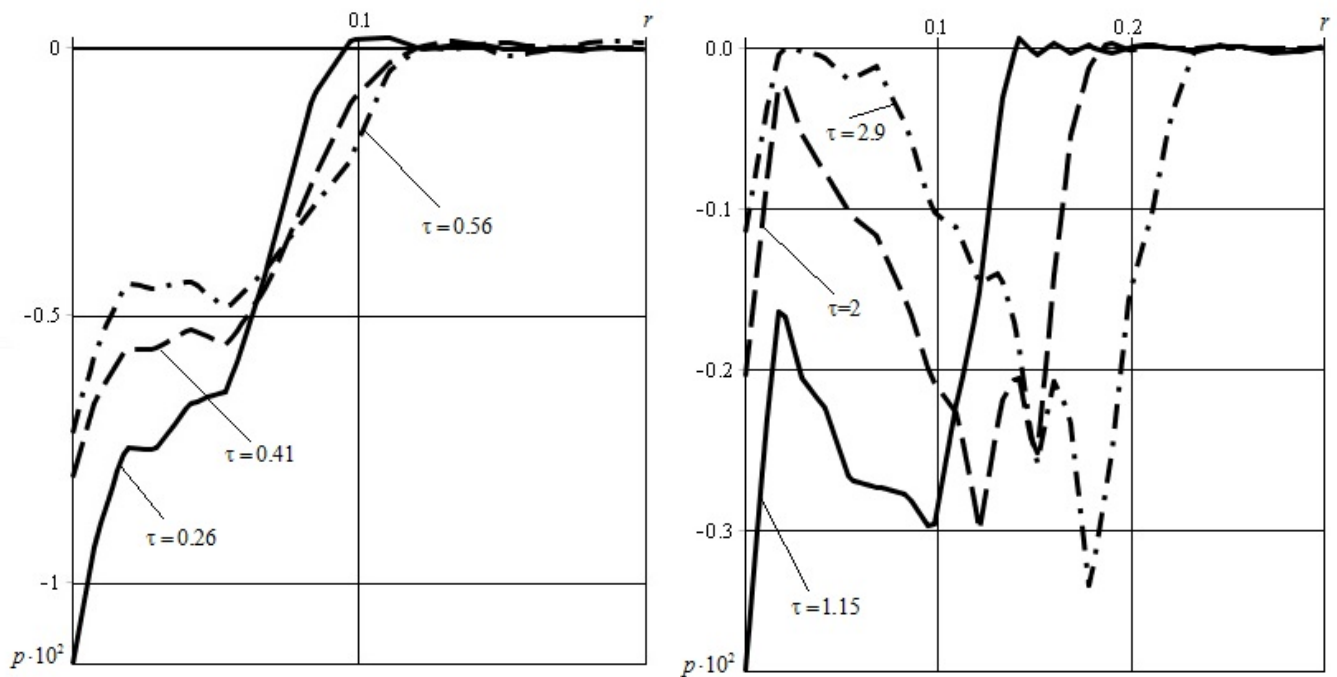


Рис. 9. Распределение контактного давления (пример 3).

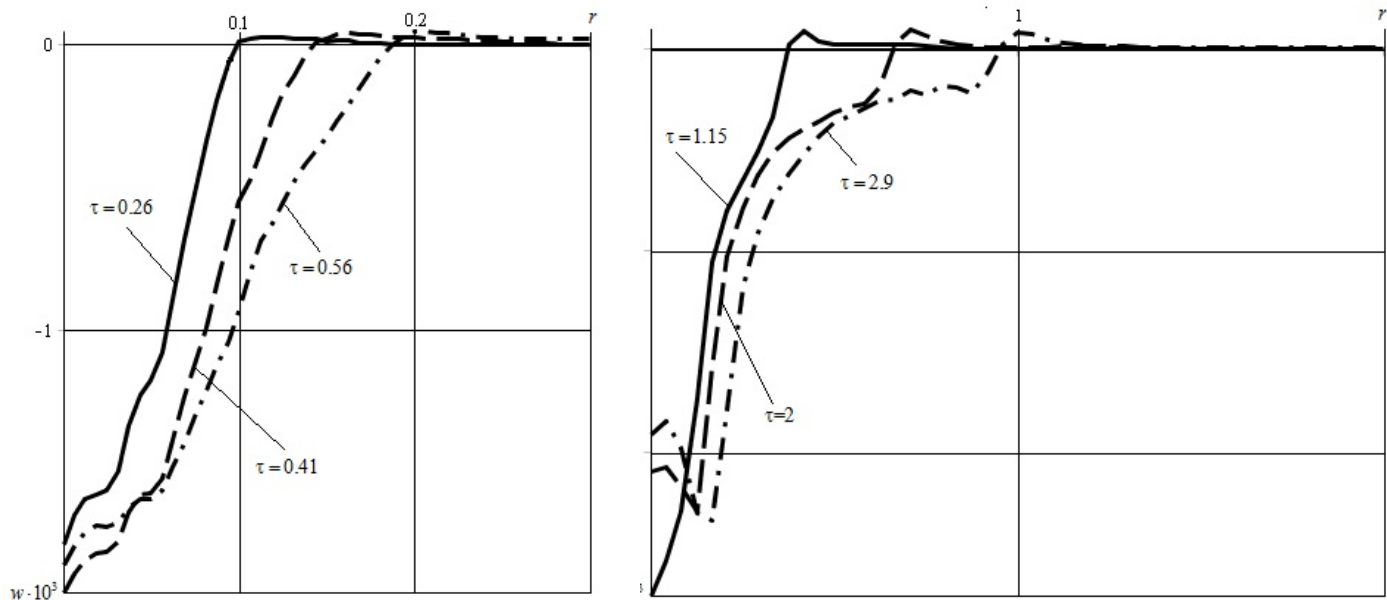


Рис. 10. Распределение нормальных перемещений (пример 3).

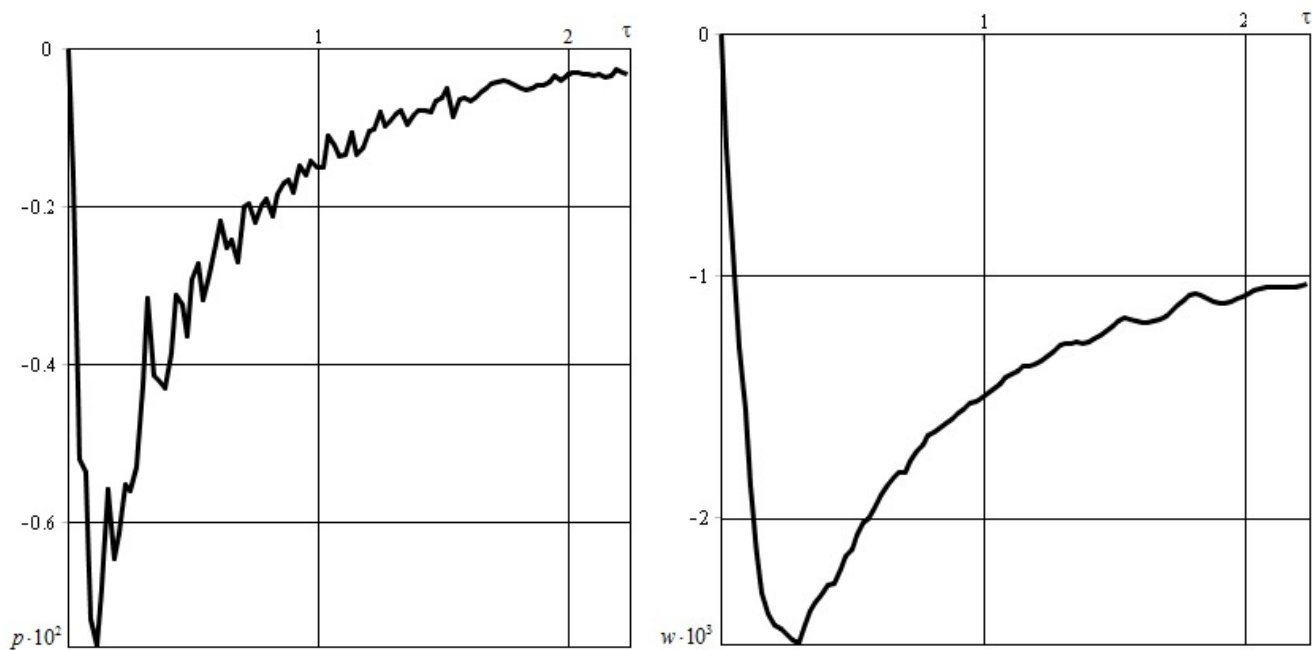


Рис. 11. Зависимость контактного давления и нормальных перемещений от времени (пример 3).

Заключение

В работе предложена методика и приведен алгоритм решения новой нестационарной контактной задачи с подвижными границами области

взаимодействия для тонкой упругой сферической оболочки и упругого полупространства. Построена нестационарная функция влияния для сферической оболочки. С применением принципа суперпозиции задача сведена к системе разрешающих уравнений. Предложенный алгоритм решения реализован на ЭВМ. Приведены примеры расчетов и проанализированы результаты. Разработанные методы и полученные результаты могут быть использованы в практических расчетах нестационарных задач для спускаемых космических аппаратов и зондов при жесткой посадке и взаимодействии с твердым грунтом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках конкурса «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований международными научными группами», номер проекта 14-49-00091.

Библиографический список

1. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Plane problem of a vertical cylindrical shell hit on elastic half-space. *Mechanics of Solids*. 2000. no. 5. pp. 151-158.
2. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction). *Mechanics of Solids*. 2011. vol. 46. no. 2. pp. 239–247.
3. Кубенко В.Д., Богданов В.Р. Осесимметричная задача удара оболочки об упругое полупространство // *Прикладная механика*, 1995. Т. 31. №10. С. 56-63.

4. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. - М.: Физматлит, 1995. - 352 с.
5. Кубенко В.Д., Федотенков Г.В., Михайлова Е.Ю. Решение осесимметричной нестационарной контактной задачи для тонкой сферической оболочки и упругого полупространства. Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва, Россия, 2012. том 2. С. 130-136.
6. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 472 с.
7. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. - М.: Наука, 1990. - 264 с.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1973. - 749 с.
9. Suvorov Ye.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012.vol. 76. no. 5. pp. 511-518.
10. Kuznetsova E.L., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Propagation of unsteady waves in an elastic layer. Mechanics of Solids. 2011. vol. 46. no. 5. pp. 779-787.
11. Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Медведский А.Л. Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Электронный журнал «Труды МАИ», 2013, выпуск № 71:

<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=46621> (дата публикации 26.12.2013).

12. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). - М.: Наука, 1975. - 632 с.
13. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. - М.: Наука, 1979. - 832 с.
14. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции. Вып. 1: Обобщенные функции и действия над ними. - М.: Физматгиз, 1959. - 470 с.