УДК 536.2

Температурное поле разделяющей две различные среды изотропной стенки, обладающей анизотропным покрытием, при его локальном нагреве в условиях теплообмена с внешней средой

А. В. Аттетков, И. К. Волков

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет) (МГТУ им. Н. Э. Баумана), Москва, 105005, Россия
e-mail: fn2@bmstu.ru

Поступила в редакцию 19.12.2018
После доработки 21.12.2018
Принята к публикации 22.12.2018

Предложена математическая модель процесса формирования температурного поля в двухслойной разделительной системе, имитируемой изотропной стенкой постоянной толщины с анизотропным покрытием одной из ее поверхностей, подверженной локальному тепловому воздействию в условиях теплообмена с внешней средой. Показано, что температурное поле изучаемой системы представляет собой сумму двух независимых аддитивных составляющих. С применением интегрального преобразования Лапласа найдено аналитическое решение для первой из аддитивных составляющих температурного поля, формируемого за счет различия начальной температуры двухслойной системы и температур внешних разделяемых сред. Идентифицирована вторая независимая аддитивная составляющая температурного поля, формируемого за счет воздействия нестационарного пространственно-распределенного теплового потока на внешнюю поверхность анизотропного покрытия двухслойной системы при совпадении ее начальной температуры с температурами внешних разделяемых сред. С применением методов интегральных преобразований в аналитически замкнутом виде найдено решение соответствующей задачи нестационарной теплопроводности. Полученные результаты подтверждают обнаруженный ранее эффект «сноса» температурного поля в анизотропном материале с анизотропией свойств общего вида.

Ключевые слова: изотропная разделительная стенка, анизотропное покрытие, локальное тепловое воздействие, интегральные преобразования.

Введение

Широкое внедрение в инженерную практику композиционных материалов, обладающих значимой степенью анизотропии тепловых свойств, сопровождается резким повышением интереса к аналитическим методам решения задач математической теории теплопроводности твердых тел [1–4]. Трудности принципиального характера, которые приходится преодолевать при нахождении этих решений в аналитически замкнутом виде, известны и связаны, в основном, с наличием смешанных производных по пространственным переменным в уравнении теплопереноса [4]. Они усугубляются при необходимости учета ограниченности анизотропной области и специфических условий сопряжения в составных областях, обладающих анизотропией свойств общего вида. Авторам известны лишь единичные случаи решения задач этого класса в аналитически замкнутом виде [5–11].

Цель проведенных исследований – нахождение в аналитически замкнутом виде решения задачи об определении температурного поля изотропной разделительной стенки двух различных сред, обладающей анизотропным покрытием, при локальном тепловом воздействии в условиях теплообмена с внешней средой.

Исходные допущения и математическая модель

Для достижения поставленной цели при построении исходной математической модели процесса формирования температурного поля $T(x_1, x_2, x_3, t)$ объекта исследований в фиксированной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ пространства $\mathbb{R}^3$ предполагалось, что:

1) объект исследований представляет собой изотропную стенку двух различных сред

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} -\infty < x_1 < +\infty \\ 0 < x_2 < h_c \\ -\infty \le x_3 \le +\infty \end{matrix} \right\}$$

постоянной толщины $h_с$, одна из поверхностей которой (плоскость $x_2 = 0$) обладает изотропным покрытием толщины $h_П = \mathrm{const}$;

2) незащищенная поверхность изотропной стенки (плоскость $x_2 = h_с$) находится под воздействием внешней среды с температурой $T_{с2} = \mathrm{const}$;

3) внешняя поверхность анизотропного покрытия (плоскость $x_2 = -h_П$) находится как под воздействием внешней среды с температурой $T_{с1} = \mathrm{const}$, так и теплового потока с плотностью мощности $q(x_1, x_3, t)$;

4) температуры $T_{с1}$ и $T_{с2}$ разделенных сред различны и отличны от начальной температуры $T_0 = \mathrm{const}$ объекта исследований;

5) внешний тепловой поток с плотностью мощности $q(x_1, x_3, t)$ воздействует на поверхность $x_2 = -h_П$ анизотропного покрытия разделительной стенки Ω в направлении, противоположном направлению ее внешней нормали;

6) при любом фиксированном значении временного переменного $t \ge 0$ функционал $q(x_1, x_3, t)$ интегрируем с квадратом в $\mathbb{R}^2$ по совокупности пространственных переменных x_1, x_3, т. е. [12]

$$q(x_1, x_3, t)\Big|_{(t \ge 0)} \in L^2(\mathbb{R}^2);$$

7) при любых фиксированных значениях пространственных переменных x_1, x_3, представленных вектором $[x_1, x_3]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$, функционал $q(x_1, x_3, t)$ интегрируем с квадратом на полуинтервале $[0, +\infty)$ по временному переменному t, т. е.

$$q(x_1, x_3, t)\Big|_{\left([x_1, x_3]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2\right)} \in L^2[0, +\infty);$$

8) теплообмен в системе «объект исследований–внешняя среда» реализуется по закону Ньютона с постоянными коэффициентами теплоотдачи [2, 3] $\alpha_П$ для среды при $x_2 < -h_П$ и $\alpha_с$ для среды при $x_2 > h_с$;

9) в системе «изотропная разделительная стенка–анизотропное покрытие» реализуются условия идеального теплового контакта [2, 3].

Согласно допущениям, представленным выше, при использовании следующих обозначений:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_{c1} - T_0};\ \Delta\theta_c = \frac{T_{c2} - T_0}{T_{c1} - T_0};\ x = \frac{x_1}{l},\ y = \frac{x_2}{l},\ z = \frac{x_3}{l};$$

$$\mathrm{Fo} = \frac{\lambda_{22} t}{c_n \rho_n l^2};\ \mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{22}};\ a^2 = \frac{c_n \rho_n \lambda_c}{c_c \rho_c \lambda_{22}};$$

$$\mathrm{Bi}^{(-)} = \frac{\alpha_n l}{\lambda_{22}};\ \mathrm{Bi}^{(+)} = \frac{\alpha_c l}{\lambda_{22}};$$

$$Q = \frac{ql}{(T_{c1} - T_0)\lambda_{22}};\ \mu = \frac{\lambda_c}{\lambda_{22}};\ H^{(-)} = \frac{h_n}{l};\ H^{(+)} = \frac{h_c}{l},$$

где l – используемая единица масштаба пространственных переменных; $\lambda_{ij} \equiv \lambda_{ji}$ – компонента тензора теплопроводности анизотропного материала покрытия, $c_П$ и $\rho_П$ – его удельная массовая теплоемкость и плотность соответственно, а $\lambda_с$, $c_с$ и $\rho_с$ – соответствующие теплофизические характеристики изотропного материала разделительной стенки; функционал $\theta(x, y, z, \mathrm{Fo})$, определяющий процесс формирования искомого температурного поля, должен удовлетворять системе двух линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка параболического типа [2–4]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{Fo}} = \mu_{11}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + 2\mu_{12}\frac{\partial^2\theta}{\partial x \partial y} + 2\mu_{13}\frac{\partial^2\theta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + 2\mu_{23}\frac{\partial^2\theta}{\partial y \partial z} + \mu_{33}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ H^{(-)} < y < 0,\ \mathrm{Fo} > 0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{Fo}} = a\left\{\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right\},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < H^{(+)},\ \mathrm{Fo} > 0,$$

нулевому начальному условию:

$$\theta\left(x, y, z, \mathrm{Fo}\right)\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \qquad (2)$$

неоднородным краевым условиям [13]:

$$-\left\{\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right\}\Bigg|_{y=-H^{(-)}} =$$
$$= \mathrm{Bi}^{(-)}\left\{1-\theta\right\}\Big|_{y=-H^{(-)}} + Q\left(x, z, \mathrm{Fo}\right); \qquad (3)$$
$$-\frac{\partial\theta}{\partial y}\bigg|_{y=H^{(+)}} = \mu^{-1}\,\mathrm{Bi}^{(+)}\left(\Delta\theta_c - \theta\right)\Big|_{y=H^{(+)}}$$

и условиям идеального теплового контакта в системе «изотропная разделительная стенка–анизотропное покрытие», т. е. граничным условиям четвертого рода [2]:

$$\theta\left(x, 0-0, z, \mathrm{Fo}\right) = \theta\left(x, 0+0, z, \mathrm{Fo}\right);$$
$$\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\Bigg|_{y=0-0} = \mu\frac{\partial\theta}{\partial y}\bigg|_{y=0+0}. \qquad (4)$$

Анализ элементов (1)–(4) исходной математической модели процесса формирования искомого температурного поля объекта исследований позволяет предположить, что

$$\theta\left(x, y, z, \mathrm{Fo}\right) = \theta_1\left(y, \mathrm{Fo}\right) + \theta_2\left(x, y, z, \mathrm{Fo}\right), \qquad (5)$$

где функционал $\theta_1(y, \mathrm{Fo})$ являлся решением одномерной смешанной задачи:

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2},\ -H^{(-)} < y < 0, \mathrm{Fo} > 0;$$
$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\mathrm{Fo}} = a^2\frac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2},\ 0 < y < H^{(+)}, \mathrm{Fo} > 0;$$
$$\theta_1\left(y, 0\right) = 0;$$
$$-\frac{\partial\theta_1}{\partial \mathrm{y}}\bigg|_{y=-H^{(-)}} = \mathrm{Bi}^{(-)}\left\{1-\theta_1\right\}\Big|_{y=-H^{(-)}}; \qquad (6)$$
$$\theta_1\left(0-0,\ \mathrm{Fo}\right) = \theta_1\left(0+0,\ \mathrm{Fo}\right);$$
$$\frac{\partial\theta_1}{\partial y}\bigg|_{y=0-0} = \mu\frac{\partial\theta_1}{\partial y}\bigg|_{y=0+0};$$
$$\frac{\partial\theta_1}{\partial \mathrm{y}}\bigg|_{y=H^{(+)}} = \mu^{-1}\,\mathrm{Bi}^{(+)}\left\{\Delta\theta_{\mathrm{c}} - \theta_1\right\}\Big|_{y=H^{(+)}};$$
$$\theta_1\left(y, \mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(y\in\left[-H^{(-)}, H^{(+)}\right]\right)} \in L^2\left[0, +\infty\right);$$
$$\theta_1\left(y, \mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(\mathrm{Fo}\geq 0\right)} \in L^2\left[-H^{(-)}, H^{(+)}\right].$$

Как следствие, согласно (1)–(6), функционал $\theta_2(x, y, z, \mathrm{Fo})$ должен удовлетворять системе уравнений в частных производных параболического типа (1), начальному условию (2), модифицированным краевым условиям (3):

$$\left\{\mu_{12}\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta_2}{\partial z} - \mathrm{Bi}^{(-)}\theta_2\right\}\Bigg|_{y=-H^{(-)}} = -Q(x, z, \mathrm{Fo});$$
$$\left\{\frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \mu^{-1}\mathrm{Bi}^{(+)}\theta_2\right\}\Bigg|_{y=H^{(+)}} = 0, \qquad (7)$$

условиям идеального теплового контакта (4) и требованиям:

$$\theta_2\left(x, y, z, \mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(-H^{(-)}\leq y\leq H^{(+)}\right)\wedge\left(\mathrm{Fo}\geq 0\right)} \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right);$$
$$\theta_2\left(x, y, z, \mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(\left[x,z\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge\left(\mathrm{Fo}\geq 0\right)} \in L^2\left[-H^{(-)}, H^{(+)}\right]; \qquad (8)$$
$$\theta_2\left(x, y, z, \mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(\left[x,z\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge\left(-H^{(-)}\leq y\leq H^{(+)}\right)} \in L^2\left[0, +\infty\right)$$

при наличии ограничений на функционал $Q(x, z, \mathrm{Fo})$, определяющий плотность мощности теплового потока:

$$Q\left(x, z, \mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(\mathrm{Fo}\geq 0\right)} \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right);$$
$$Q\left(x, z, \mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(\left[x,z\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)} \in L^2\left[0, +\infty\right). \qquad (9)$$

Температурное поле

Согласно сказанному выше, реализуемость гипотезы, представленной равенством (5), означает обладание искомым температурным полем объекта исследований аддитивной структурой с двумя независимыми составляющими, определенными функционалами $\theta_1(y, \mathrm{Fo})$ и $\theta_2(x, y, z, \mathrm{Fo})$. При этом функционал $\theta_1(y, \mathrm{Fo})$ описывает процесс формирования независимой аддитивной составляющей искомого температурного поля объекта исследований за счет различия его начальной температуры и температур внешних разделяемых сред, а функционал $\theta_2(x, y, z, \mathrm{Fo})$ – процесс формирования второй независимой аддитивной составляющей, обусловленной лишь воздействием теплового потока на внешнюю поверхность анизотропного покрытия изотропной разделительной стенки при совпадении начальной температуры объекта исследований с температурами разделяемых сред.

Идентификация функционала $\theta_1(y, \mathrm{Fo})$

Математическая модель процесса формирования первой аддитивной составляющей искомого температурного поля представляет собой смешанную задачу (6) для системы уравнений в частных производных второго порядка параболического типа. А так как эта задача является линейной и одномерной, то для ее решения естественным является использование интегрального преобразования Лапласа [2], применяемого по временному переменному Fo. В этом случае решение исходной задачи в пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа не связано с преодолением каких-либо трудностей, но последующий переход в пространство оригиналов весьма проблематичен, о чем можно судить по крайне немногочисленным известным результатам решения более простых аналогов смешанной задачи (6) для двухслойных областей [1–3].

Для преодоления возникших трудностей воспользуемся общей теорией интегральных преобразований [12] с целью определения интегрального преобразования по пространственному переменному $y \in [-H^{(-)}, H^{(+)}]$, которое позволит решить смешанную задачу (6), т.е. идентифицировать функционал $\theta_1(y, \mathrm{Fo})$. При этом с учетом специфики понимания равенства в функциональном пространстве $L^2[-H^{(-)}, H^{(+)}]$, т.е. в пространстве интегрируемых с квадратом функций [12], решение смешанной задачи (6) будем искать в следующем виде:

$$\theta_1(y, \mathrm{Fo}) = \theta_{11}(y) + \theta_{12}(y, \mathrm{Fo}), \tag{10}$$

где $\theta_{11}(y)$ – решение стационарного варианта смешанной задачи (6); $\theta_{12}(y, \mathrm{Fo})$ – решение смешанной задачи (6) при неоднородном начальном условии

$$\theta_{12}(y, 0) = -\,\theta_{11}(y) \tag{11}$$

и неоднородных краевых условиях

$$\left.\frac{\partial\theta_{12}}{\partial y}\right|_{y=-H^{(-)}} = \mathrm{Bi}^{(-)}\left.\theta_{12}\right|_{y=-H^{(-)}},\qquad \left.\frac{\partial\theta_{12}}{\partial y}\right|_{y=H^{(+)}} = -\mu^{-1}\,\mathrm{Bi}^{(+)}\left.\theta_{12}\right|_{y=H^{(+)}}. \tag{12}$$

Согласно сказанному выше, функционал

$$\theta_{11}(y) = \lim_{\mathrm{Fo}\to+\infty}\theta_1(y, \mathrm{Fo})$$

и является решением краевой задачи для системы двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, соответствующей смешанной задаче (6). Это решение может быть найдено с использованием стандартных методов [14] и представлено в следующем виде:

$$\begin{gathered}\theta_{11}(y) = (\mu y + e_1)e_2,\ -H^{(-)} \le y \le 0;\\ \theta_{11}(y) = (y + e_1)e_2,\ 0 \le y \le H^{(+)};\\ e_1 = 1 + \frac{\mu}{\mathrm{Bi}^{(-)}}\left(1 + \mathrm{Bi}^{(-)}H^{(-)}\right);\end{gathered} \tag{13}$$

$$e_2 = \frac{\mathrm{Bi}^{(+)}\mathrm{Bi}^{(-)}\left(\Delta\theta_c - 1\right)}{\left(\mu + \mathrm{Bi}^{(+)}H^{(+)}\right)\mathrm{Bi}^{(-)} + \mu\left(1 + \mathrm{Bi}^{(-)}H^{(-)}\right)\mathrm{Bi}^{(+)}}.$$

Далее, согласно (6), (10)–(12) и общей теории интегральных преобразований [12], ядро искомого интегрального преобразования $K(y, \gamma)$, применяемого по пространственному переменному $y \in [-H^{(-)}, H^{(+)}]$, полностью определено задачей Штурма–Лиувилля:

$$\begin{gathered}\frac{d^2K(y,\gamma)}{dy^2} + \gamma^2K(y,\gamma) = 0,\ -H^{(-)} < y < 0;\\ a^2\frac{d^2K(y,\gamma)}{dy^2} + \gamma^2K(y,\gamma) = 0,\ 0 < y < H^{(+)};\end{gathered} \tag{14}$$

$$\left.\frac{dK(y,\gamma)}{dy}\right|_{y=-H^{(-)}} = \mathrm{Bi}^{(-)}K(y,\gamma)\Big|_{y=-H^{(-)}}; \tag{15}$$

$$K(0-0,\gamma) = K(0+0,\gamma); \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\left.\frac{dK(y,\gamma)}{dy}\right|_{y=0-0} = \mu\left.\frac{dK(y,\gamma)}{dy}\right|_{y=0+0};\\ \left.\frac{dK(y,\gamma)}{dy}\right|_{y=H^{(+)}} = -\mu^{-1}\,\mathrm{Bi}^{(+)}K(y,\gamma)\Big|_{y=H^{(+)}}\end{gathered} \tag{17}$$

и условием его нормировки:

$$1 \equiv \|K(y,\gamma)\|^2 \equiv \left(K(y,\gamma), K(y,\gamma)\right) \equiv \int_{-H^{(-)}}^{H^{(+)}}\rho(y)K^2(y,\gamma)\,dy, \tag{18}$$

где неизвестная весовая функция

$$\rho(y) = \begin{Bmatrix}\rho_1, & -H^{(-)} < y < 0\\ \rho_2, & 0 < y < H^{(+)}\end{Bmatrix} \tag{19}$$

подлежит определению.

С использованием стандартных методов [14] находим решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка (14), удовлетворяющих условиям сопряжения (16), и представляем в следующем виде:

$$K(y,\gamma)=C_1\cos(\gamma y)+\mu a^{-1}C_2\sin(\gamma y),\ -H^{(-)}<y\le 0;$$
$$K(y,\gamma)=C_1\cos(a^{-1}\gamma y)+C_2\sin(a^{-1}\gamma y),\ 0\le y<H^{(+)}. \tag{20}$$

Для идентификации параметров C_1, C_2, γ, воспользовавшись представлением (20) ядра $K(y,\gamma)$ искомого интегрального преобразования и краевыми условиями (15), (17), приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$a\left[\gamma\mathrm{tg}(\gamma H^{(-)})-\mathrm{Bi}^{(-)}\right]C_1+\mu\left[\gamma+\mathrm{Bi}^{(-)}\mathrm{tg}(\gamma H^{(-)})\right]C_2=0;$$
$$\left[a\mathrm{Bi}^{(+)}-\gamma\mu\mathrm{tg}(a^{-1}\gamma H^{(+)})\right]C_1+$$
$$+\left[a\mathrm{Bi}^{(+)}\mathrm{tg}(a^{-1}\gamma H^{(+)})+\gamma\mu\right]C_2=0,$$

которая имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю [15]. Таким образом, приходим к характеристическому уравнению для нахождения собственных чисел $\{\gamma_n\}_{n\ge 1}$:

$$\frac{a\left[\mathrm{Bi}^{(-)}-\gamma_n\mathrm{tg}(\gamma_n H^{(-)})\right]}{\mu\left[\gamma_n+\mathrm{Bi}^{(-)}\mathrm{tg}(\gamma_n H^{(-)})\right]}=\frac{\mu\gamma_n\mathrm{tg}(a^{-1}\gamma_n H^{(+)})-a\mathrm{Bi}^{(+)}}{a\mathrm{Bi}^{(+)}\mathrm{tg}(a^{-1}\gamma_n H^{(+)})+\mu\gamma_n} \tag{21}$$

и следующей трансформации равенств (20):

$$K(y,\gamma_n)=c_n\begin{Bmatrix}\cos(\gamma_n y)+d_n\sin(\gamma_n y), & -H^{(-)}\le y\le 0\\ \cos(a^{-1}\gamma_n y)+d_n\sin(a^{-1}\gamma_n y), & 0\le y\le H^{(+)}\end{Bmatrix};$$
$$d_n=\frac{a\left[\mathrm{Bi}^{(-)}-\gamma_n\mathrm{tg}(\gamma_n H^{(-)})\right]}{\mu\left[\gamma_n+\mathrm{Bi}^{(-)}\mathrm{tg}(\gamma_n H^{(-)})\right]}, \tag{22}$$

где коэффициенты $\{c_n\}_{n\ge 1}$ определяются из условия (18) нормировки ядра $K(y,\gamma)$ искомого интегрального преобразования. Но для этого предварительно необходимо идентифицировать весовую функцию (19).

Для удобства дальнейших рассуждений полагаем

$$b(y)\triangleq\begin{Bmatrix}1, & -H^{(-)}<y<0\\ a^2, & 0<y<H^{(+)}\end{Bmatrix} \tag{23}$$

и, согласно (14), (23), выписываем два уравнения:

$$b(y)K''(y,\gamma_n)=-\gamma_n^2K(y,\gamma_n);$$
$$b(y)K''(y,\gamma_m)=-\gamma_m^2K(y,\gamma_m), \tag{24}$$

первое из которых умножаем на $K(y,\gamma_m)$, а второе – на $K(y,\gamma_n)$. Далее вычитаем из первого модифицированного уравнения системы (24) второе модифицированное уравнение с последующим умножением полученного равенства на весовую функцию $\rho(y)$, заданную равенством (19), и интегрированием его правой и левой частей по переменному y в пределах от $-H^{(-)}$ до $H^{(+)}$. В результате выполненных действий приходим к следующему результату:

$$\rho_1\int_{-H^{(-)}}^{0}\left[K''(y,\gamma_n)K(y,\gamma_m)-K(y,\gamma_n)K''(y,\gamma_m)\right]dy+$$
$$+\rho_2a^2\int_0^{H^{(+)}}\left[K''(y\gamma_n)K(y\gamma_m)-K(y\gamma_n)K''(y\gamma_m)\right]dy=$$
$$=\left(\gamma_m^2-\gamma_n^2\right)\int_{-H^{(-)}}^{H^{(+)}}\rho(y)K(y,\gamma_n)K(y,\gamma_m)dy\equiv \tag{25}$$
$$\equiv\left(\gamma_m^2-\gamma_n^2\right)\left(K(y,\gamma_n),K(y,\gamma_m)\right).$$

Для вычисления интегралов левой части равенства (25) воспользуемся методом интегрирования «по частям» [16] и с учетом однородных краевых условий (15), (17) получим:

$$\rho_1\left[K'(y,\gamma_n)K(y,\gamma_m)-K(y,\gamma_n)K'(y,\gamma_m)\right]\Big|_{y=0-0}-$$
$$-\rho_2a^2\left[K'(y,\gamma_n)K(y,\gamma_m)-K(y,\gamma_n)K'(y,\gamma_m)\right]\Big|_{y=0+0}=$$
$$=\left(\gamma_m^2-\gamma_n^2\right)\left(K(y,\gamma_n),K(y,\gamma_m)\right).$$

Таким образом, согласно условиям сопряжения (16), функционалы $\{K(y,\gamma_n)\}_{n\ge 1}$ образуют ортогональную систему на отрезке $[-H^{(-)},H^{(+)}]$ тогда и только тогда, когда

$$(\rho_1=a^2)\wedge(\rho_2=\mu). \tag{26}$$

Далее с учетом того, что весовая функция $\rho(y)$ полностью определена равенствами (19), (26), воспользуемся представлением (22) ядра искомого интегрального преобразования, условием (18) его нормировки и вычисляем

$$c_k=\left\{a^2\int_{-H^{(-)}}^{0}\left[\cos(\gamma_k y)+d_k\sin(\gamma_k y)\right]^2dy+\right.$$
$$\left.+\mu\int_0^{H^{(+)}}\left[\cos(a^{-1}\gamma_k y)+d_k\sin(a^{-1}\gamma_k y)\right]^2dy\right\}^{-1/2}=$$
$$=2\sqrt{\gamma_k}\,\left\{2\gamma_k(1+d_k)\left(a^2H^{(-)}+\mu H^{(+)}\right)+\right. \tag{27}$$
$$+\left(1-d_k^2\right)a\left[a\sin\left(2\gamma_kH^{(-)}\right)+\mu\sin\left(2a^{-1}\gamma_kH^{(+)}\right)\right]+$$

$$+2ad_k\left[a\cos\left(2\gamma_k H^{(-)}\right)-\mu\cos\left(2a^{-1}\gamma_k H^{(+)}\right)\right]-$$
$$\left.-2ad_k\left(a-\mu\right)\right\}^{-1/2}.$$

Таким образом, ядро искомого интегрального преобразования и спектр собственных чисел полностью определены равенствами (22), (21) и (27), а весовая функция – равенствами (19) и (26). В пространстве изображений этого интегрального преобразования смешанная задача (6), (11), (12) представляет собой задачу Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$B_{12}'\left(\mathrm{Fo},\gamma_n\right)=-\gamma_n^2 B_{12}\left(\mathrm{Fo},\gamma_n\right),$$
$$\mathrm{Fo}>0; \tag{28}$$
$$B_{12}(0,\gamma_n)=-B_{11}(\gamma_n),$$

при записи которой использованы следующие обозначения:

$$B_{12}\left(\mathrm{Fo},\gamma_n\right)\triangleq\int_{-H^{(-)}}^{H^{(+)}}\theta_{12}\left(y,\mathrm{Fo}\right)K\left(y,\gamma_n\right)\rho\left(y\right)dy;$$
$$B_{11}\left(\gamma_n\right)\triangleq\int_{-H^{(-)}}^{H^{(+)}}\theta_{11}\left(y\right)K\left(y,\gamma_n\right)\rho\left(y\right)dy, \tag{29}$$

где функционал $\theta_{11}(y)$ полностью определен равенствами (13), т. е. с учетом (22), (19) и (26) согласно (29) имеем:

$$B_{11}(\gamma_n)=e_2c_n\left\{\int_{-H^{(-)}}^{0}(\mu y+e_1)\left[\cos(\gamma_n y)+d_n\sin(\gamma_n y)\right]a^2dy+\right.$$
$$\left.+\int_0^{H^{(+)}}(y+e_1)\left[\cos(a^{-1}\gamma_n y)+d_n\sin(a^{-1}\gamma_n y)\right]\mu dy\right\}\equiv c_ne_2a\gamma_n^{-2}\times$$
$$\times\left\{a\left(e_1-\mu H^{(-)}\right)\left[\sin\left(\gamma_nH^{(-)}\right)-d_n\left(1-\cos\left(\gamma_nH^{(-)}\right)\right)\right]\gamma_n+\right.$$
$$+\mu a\left[\left(1-\cos\left(\gamma_nH^{(-)}\right)\right)-d_n\sin\left(\gamma_nH^{(-)}\right)\right]-\mu aH^{(-)}\gamma_nd_n+ \tag{30}$$
$$+\mu\left(e_1+H^{(-)}\right)\left[\sin\left(a^{-1}\gamma_nH^{(+)}\right)+d_n\left(1-\cos\left(a^{-1}\gamma_nH^{(+)}\right)\right)\right]\gamma_n+$$
$$\left.+\mu a\left[\left(1-\cos\left(a^{-1}\gamma_nH^{(+)}\right)\right)-d_n\sin\left(a^{-1}\gamma_nH^{(+)}\right)\right]-\mu aH^{(+)}\gamma_nd_n\right\}.$$

Таким образом, начальные условия задачи Коши (28) полностью определены равенствами (30), (27), (22) и соответствующим корнем γ_n характеристического уравнения (21). Стандартными методами [14] находим решение задачи Коши (28):

$$B_{12}(\mathrm{Fo},\gamma_n)=-B_{11}(\gamma_n)\exp(-\gamma_n^2\mathrm{Fo}), \tag{31}$$
$$\mathrm{Fo}\geq 0,$$

и для завершения процедуры определения функционала $\theta_{12}(y,\mathrm{Fo})$, являющегося основным элементом независимой аддитивной составляющей $\theta_1(y,\mathrm{Fo})$ искомого температурного поля $\theta(x,y,z,\mathrm{Fo})$ объекта исследований, осталось воспользоваться формулой обращения [12] использованного интегрального преобразования:

$$\theta_{12}\left(y,\mathrm{Fo}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{12}\left(\mathrm{Fo},\gamma_n\right)K\left(y,\gamma_n\right). \tag{32}$$

Идентификация функционала $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$

Функционал $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$ определяет вторую независимую аддитивную составляющую искомого температурного поля объекта исследований и должен удовлетворять смешанной задаче (1), (2), (7)–(9). Для ее решения сначала воспользуемся двумерным экспоненциальным интегральным преобразованием Фурье, задаваемым парой линейных интегральных операторов [17]:

$$\Phi[\,\cdot\,]\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\,\exp\left(-ipx-irz\right)dxdz;$$
$$\Phi^{-1}[\,\cdot\,]\equiv\frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\,\exp\left(ipx+irz\right)dpdr. \tag{33}$$

С учетом стандартных свойств интегрального преобразования (33), применяемого по пространственным переменным x и z, в пространстве его изображений с использованием следующих обозначений:

$$V\left(p,y,r,\mathrm{Fo}\right)\triangleq\Phi\left[\theta_2\left(x,y,z,\mathrm{Fo}\right)\right];$$
$$\mathrm{d}\left(p,r,\mathrm{Fo}\right)\triangleq\Phi\left[Q\left(x,z,\mathrm{Fo}\right)\right], \tag{34}$$

смешанную задачу (1), (2), (7)–(9) представим в следующем виде:

$$\frac{\partial V}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+2i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)\frac{\partial V}{\partial y}-$$
$$-\left(\mu_{11}p^2+2\mu_{13}pr+\mu_{33}r^2\right)V,$$
$$-H^{(-)}<y<0,\mathrm{Fo}>0;$$
$$\frac{\partial V}{\partial\mathrm{Fo}}=a^2\frac{\partial^2V}{\partial y^2}-a^2\left(p^2+r^2\right)V,\ 0<y<H^{(+)},\mathrm{Fo}>0;$$
$$V\left(p,y,r,0\right)=0;$$
$$\left.\left[\frac{\partial V}{\partial y}+i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)V-\mathrm{Bi}^{(-)}V\right]\right|_{y=-H^{(-)}}=-\mathrm{d}(p,r,\mathrm{Fo});$$

$$V\left(p,0-0,r,\mathrm{Fo}\right)=V\left(p,0+0,r,\mathrm{Fo}\right);$$
$$\left[\frac{\partial V}{\partial y}+i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)V\right]\Bigg|_{y=0-0}=\mu\frac{\partial V}{\partial y}\Bigg|_{y=0+0}; \tag{35}$$
$$\left[\frac{\partial V}{\partial y}+\mu^{-1}\mathrm{Bi}^{(+)}V\right]\Bigg|_{y=H^{(+)}}=0;$$
$$V\left(p,y,r,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(\left[p,r\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge\left(\mathrm{Fo}\geq 0\right)}\in L^2\left[-H^{(-)},H^{(+)}\right];$$
$$V\left(p,y,r,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(\left[p,r\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge\left(-H^{(-)}\leq y\leq H^{(+)}\right)}\in L^2\left[0,+\infty\right);$$
$$\mathrm{a}\left(p,r,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(\left[p,r\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)}\in L^2\left[0,+\infty\right).$$

Специфика смешанной задачи (35) проявляется в наличии комплекса $i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)$ не только в первом дифференциальном уравнении в частных производных второго порядка параболического типа и условиях сопряжения при $y=0$, но и в граничном условии при $y=-H^{(-)}$. Поэтому естественно искать ее решение в следующем виде:

$$V(p,y,r,\mathrm{Fo})= \tag{36}$$
$$=W(p,y,r,\mathrm{Fo})\begin{Bmatrix}\exp\left[-i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)y\right], & -H^{(-)}\leq y\leq 0\\ 1, & 0\leq y\leq H^{(+)}\end{Bmatrix}.$$

При этом, согласно (36), (35), функционал $W(p,y,r,\mathrm{Fo})$ должен удовлетворять упрощенному аналогу смешанной задачи (35):

$$\frac{\partial W}{\partial \mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\delta\left(p,r\right)W,\ -H^{(-)}<y<0,\mathrm{Fo}>0;$$
$$\frac{\partial W}{\partial \mathrm{Fo}}=a^2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-a^2\left(p^2+r^2\right)W,\ 0<y<H^{(+)},\mathrm{Fo}>0;$$
$$W\left(p,y,r,0\right)=0;$$
$$\left[\frac{\partial W}{\partial y}-\mathrm{Bi}^{(-)}W\right]\Bigg|_{y=-H^{(-)}}=-\mathrm{d}(p,r,\mathrm{Fo})\exp\left[-i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)H^{(-)}\right];$$
$$W\left(p,0-0,r,\mathrm{Fo}\right)=W\left(p,0+0,r,\mathrm{Fo}\right); \tag{37}$$
$$\frac{\partial W}{\partial y}\Bigg|_{y=0-0}=\mu\frac{\partial W}{\partial y}\Bigg|_{y=0+0};$$
$$\left[\frac{\partial W}{\partial y}+\mathrm{Bi}^{(+)}W\right]\Bigg|_{y=H^{(+)}}=0;$$
$$W\left(p,y,r,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(\left[p,r\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge\left(\mathrm{Fo}\geq 0\right)}\in L^2\left[-H^{(-)},H^{(+)}\right];$$
$$W\left(p,y,r,\mathrm{Fo}\right)\Big|_{\left(\left[p,r\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\right)\wedge\left(-H^{(-)}\leq y\leq H^{(+)}\right)}\in L^2\left[0,+\infty\right),$$

где положительная определенность квадратичной формы

$$\delta\left(p,r\right)=\left(\mu_{11}-\mu_{12}^2\right)p^2+$$
$$+2\left(\mu_{13}-\mu_{12}\mu_{23}\right)pr+\left(\mu_{33}-\mu_{32}^2\right)r^2 \tag{38}$$

при переходе к исходным обозначениям проверяется непосредственно с использованием критерия Сильвестра [15] и известных свойств тензора теплопроводности второго ранга [4].

Внешне смешанная задача (37), (38) мало отличается от смешанной задачи (6), (11), (12) для определения функционала $\theta_{12}(y,\mathrm{Fo})$. Поэтому и в рассматриваемой ситуации имеет смысл воспользоваться алгоритмом, реализованным в предшествующем разделе.

С учетом сказанного выше, согласно (37), (38) и общей теории интегральных преобразований [12], выписываем задачу Штурма–Лиувилля для определения ядра $k[y,p,r,\gamma(p,r)]$ интегрального преобразования, применяемого по пространственному переменному $y\in[-H^{(-)},H^{(+)}]$:

$$\frac{d^2k\left[y,p,r,\gamma\left(p,r\right)\right]}{dy^2}+\left\{\gamma^2\left(p,r\right)-\right.$$
$$\left.-\delta\left(p,r\right)\right\}k\left[y,p,r,\gamma\left(p,r\right)\right]=0,\ -H^{(-)}<y<0;$$
$$\frac{d^2k\left[y,p,r,\gamma\left(p,r\right)\right]}{dy^2}+$$
$$+\left\{a^{-2}\gamma^2\left(p,r\right)-p^2-r^2\right\}k\left[y,p,r,\gamma\left(p,r\right)\right]=0,$$
$$0<y<H^{(+)}; \tag{39}$$
$$\frac{dk\left[y,p,r,\gamma\left(p,r\right)\right]}{dy}\Bigg|_{y=-H^{(-)}}=\mathrm{Bi}^{(-)}k\left[y,p,r,\gamma\left(p,r\right)\right]\Big|_{y=-H^{(-)}};$$
$$k\left[0-0,p,r,\gamma\left(p,r\right)\right]=k\left[0+0,p,r,\gamma\left(p,r\right)\right];$$
$$\frac{dk\left[y,p,r,\gamma\left(p,r\right)\right]}{dy}\Bigg|_{y=0-0}=\mu\frac{dk\left[y,p,r,\gamma\left(p,r\right)\right]}{dy}\Bigg|_{y=0+0};$$
$$\frac{dk\left[y,p,r,\gamma\left(p,r\right)\right]}{dy}\Bigg|_{y=H^{(+)}}=-\mu^{-1}\mathrm{Bi}^{(+)}k\left[y,p,r,\gamma\left(p,r\right)\right]\Big|_{y=H^{(+)}}.$$

Далее, как и в предшествующем разделе, в процессе решения задачи Штурма–Лиувилля (39), (38) определяем характеристическое уравнение для нахождения спектра собственных чисел $\left\{\gamma_n\left(p,r\right)\right\}_{n\geq 1}$ для нахождения фиксированного значения вектора параметров $\left[p,r\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$ использованного интегрального преобразования Фурье (33):

$$\frac{\mathrm{Bi}^{(-)} - A_n(p,r)\operatorname{tg}\left[A_n(p,r)H^{(-)}\right]}{\mathrm{Bi}^{(-)}\operatorname{tg}\left[A_n(p,r)H^{(-)}\right] + A_n(p,r)} =$$

$$= \frac{B_n(p,r)\mu\left\{\mu B_n(p,r)\operatorname{tg}\left[B_n(p,r)H^{(+)}\right] - \mathrm{Bi}^{(+)}\right\}}{A_n(p,r)\left\{\mu B_n(p,r) + \mathrm{Bi}^{(+)}\operatorname{tg}\left[B_n(p,r)H^{(+)}\right]\right\}}; \quad (40)$$

$$A_n(p,r) \triangleq \left[\gamma_n^2(p,r) - \delta(p,r)\right]^{-1/2};$$

$$B_n(p,r) \triangleq \left[a^{-2}\gamma_n^2(p,r) - p^2 - r^2\right]^{-1/2},$$

весовую функцию искомого интегрального преобразования, которая оказалась заданной равенствами (19), (26), и ядро:

$$k\left[y, p, r, \gamma_n(p,r)\right] = \quad (41)$$

$$= c_n(p,r)\begin{cases}\cos\left[A_n(p,r)y\right] + D_n\sin\left[A_n(p,r)y\right], -H^{(-)} \le y \le 0\\ \cos\left[B_n(p,r)y\right] + D_n\sin\left[B_n(p,r)y\right], \quad 0 \le y \le H^{(+)}\end{cases};$$

$$D_n(p,r) = \frac{\mathrm{Bi}^{(-)} - A_n(p,r)\operatorname{tg}\left[A_n(p,r)H^{(-)}\right]}{\mathrm{Bi}^{(-)}\operatorname{tg}\left[A_n(p,r)H^{(-)}\right] - A_n(p,r)};$$

$$c_n(p,r) = \left\{\frac{a^2}{4A_n(p,r)}\left[2H^{(-)}\left[1 + D_n^2(p,r)\right]A_n(p,r) - 2D_n(p,r) + \right.\right.$$

$$+ \left[1 - D_n^2(p,r)\right]\sin\left[2A_n(p,r)H^{(-)}\right] +$$

$$\left. + 2D_n(p,r)\cos\left[2A_n(p,r)H^{(-)}\right]\right] +$$

$$+ \frac{\mu}{4B_n(p,r)}\left[2H^{(+)}\left[1 + D_n^2(p,r)\right]B_n(p,r) + \right.$$

$$+ 2D_n(p,r) + \left[1 - D_n^2(p,r)\right]\sin\left[2B_n(p,r)H^{(+)}\right] +$$

$$\left.\left. + 2D_n(p,r)\cos\left[2B_n(p,r)H^{(+)}\right]\right]\right\}^{-1/2}.$$

Таким образом, искомое интегральное преобразование полностью определено равенствами (40), (41), (19), (26), и в пространстве его изображений смешанная задача (37) трансформируется в задачу Коши для обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$U'\left[\mathrm{Fo}, \gamma_n(p,r)\right] = -\gamma_n^2(p,r)U\left[\mathrm{Fo}, \gamma_n(p,r)\right] -$$

$$- a^2 k\left[-H^{(-)}, p, r, \gamma_n(p,r)\right] \times \quad (42)$$

$$\times d(p, r, \mathrm{Fo})\exp\left[-i\left(\mu_{12}p + \mu_{23}r\right)H^{(-)}\right];$$

$$U\left[0, \gamma_n(p,r)\right] = 0,$$

где $U[\mathrm{Fo}, \gamma_n(p,r)]$ – изображение интегрального преобразования (40), (41), (19), (26) оригинала $W(p, y, r, \mathrm{Fo})$

$$U\left[\mathrm{Fo}, \gamma_n(p,r)\right] = \int_{-H^{(-)}}^{H^{(+)}} W(p, y, r, \mathrm{Fo})k\left[y, p, r, \gamma_n(p,r)\right]\rho(y)dy.$$

Далее, воспользовавшись стандартными методами [14] для решения задачи Коши (42) и формулой обращения использованного интегрального преобразования (40), (41), (19), (26), аналогичной (32), определяем функционал $W(p, y, r, \mathrm{Fo})$:

$$W(p, y, r, \mathrm{Fo}) =$$

$$= a^2 d(p, r, \mathrm{Fo})\exp\left[-i\left(\mu_{12}p + \mu_{23}r\right)H^{(-)}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\left\{1 - \right. \quad (43)$$

$$\left. - \exp\left[-\gamma_n^2(p,r)\mathrm{Fo}\right]\gamma_n^{-2}(p,r)k\left[y, p, r, \gamma_n(p,r)\right]\right.$$

и фактически завершаем процедуру идентификации независимой аддитивной составляющей $\theta_2(x, y, z, \mathrm{Fo})$ искомого температурного поля объекта исследований, так как согласно (34), (36) и (43) для этого осталось лишь выполнить операцию умножения (36) и воспользоваться оператором $\Phi^{-1}[\cdot]$ обращения двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (33).

Заключение

1. Температурное поле двухслойной разделительной системы двух различных сред, имитируемой изотропной стенкой постоянной толщины с анизотропным покрытием одной из ее сторон при его локальном нагреве в условиях теплообмена с внешней средой, обладает аддитивной структурой с двумя независимыми составляющими.

2. Одна из независимых аддитивных составляющих искомого температурного поля объекта исследований формируется за счет различия его начальной температуры и температур внешних разделяемых сред, а другая независимая аддитивная составляющая – лишь за счет воздействия внешнего теплового потока на анизотропное покрытие изотропной разделительной стенки.

3. Согласно (43), (36), (34) и (33), во второй независимой аддитивной составляющей искомого температурного поля объекта исследований проявляется известный эффект «сноса» температурного поля в анизотропном материале [18–21], который формально связан с наличием множителя

$\exp\left\{ip\left[x-\mu_{12}\left(y+H^{(-)}\right)\right]+ir\left[z-\mu_{23}\left(y+H^{(-)}\right)\right]\right\}$ при $y\in\left[-H^{(-)},0\right]$ под знаком двойного несобственного интеграла при переходе от изображения $V(p,y,r,\mathrm{Fo})$ к оригиналу $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$.

4. Специфика интегрального преобразования (41), (40), (19), (26), использованного при идентификации второй независимой аддитивной составляющей искомого температурного объекта исследований, обусловлена зависимостью его ядра и спектра собственных чисел от каждой конкретной реализации вектора $\left[p,r\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$ параметров двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (33), применяемого по пространственным переменным x,z на предшествующем этапе решения смешанной задачи (1), (2), (7)–(9), что значимо усугубляет трудоемкость проведения вычислительных экспериментов с использованием полученных результатов.

5. При проведении вычислительных экспериментов с использованием второй независимой аддитивной составляющей искомого температурного поля объекта исследований целесообразно придерживаться следующего алгоритма [21]: согласно известной теореме [15], единым преобразованием привести две положительно определенные квадратичные формы к каноническому виду с последующей заменой оператора обращения двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (33) оператором обращения двумерного косинус-преобразования Фурье [17].

6. При анализе результатов вычислительных экспериментов на поверхности $y=-H^{(-)}$ анизотропного покрытия и в ее окрестности следует помнить о неоднородности краевого условия (7) при $y=-H^{(-)}$ и о понятии «равенство» в используемом пространстве $L^2[-H^{(-)},H^{(+)}]$ [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 448 с.
2. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. **Карташов Э. М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
4. **Формалёв В. Ф.** Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 312 с.
5. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Температурное поле анизотропной охлаждаемой пластины, находящейся под воздействием внешнего теплового потока // Изв. РАН. Энергетика. 2012. № 6. С. 108–117.
6. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Температурное поле охлаждаемой изотропной пластины с анизотропным покрытием, находящейся под воздействием внешнего теплового потока // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5. № 2. С. 50–58.
7. **Формалёв В. Ф., Колесник С. А.** Аналитическое исследование теплопереноса в анизотропной полосе при задании тепловых потоков на границах // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 4. С. 973–982.
8. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Третья краевая задача математической теории теплопроводности для двухслойного анизотропного полупространства // Изв. РАН. Энергетика. 2017. № 4. С. 136–142.
9. **Формалёв В. Ф., Колесник С. А., Кузнецова Е. Л.** Нестационарный теплоперенос в пластине с анизотропией общего вида при воздействии импульсных источников теплоты // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55. № 5. С. 778–783.
10. **Формалёв В. Ф., Колесник С. А., Кузнецова Е. Л., Селин И. А.** Аналитическое исследование теплопереноса в теплозащитных композиционных материалах с анизотропией общего виде при произвольном тепловом потоке // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. Т. 23. № 2. С. 168–182.
11. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Квазистационарное температурное поле анизотропной системы с подвижной границей, нагреваемой средой с осциллирующей температурой // Изв. РАН. Энергетика. 2017. № 5. С. 144–155.
12. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
13. **Пехович А. И., Жидких В. М.** Расчет теплового режима твердых тел. Л.: Энергия, 1968. 304 с.
14. **Эльсгольц Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
15. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
16. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. 807 с.
17. **Снеддон И.** Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
18. **Аттетков А. В., Волков И. К., Тверская Е. С.** Стационарное температурное поле охлаждаемой ортотропной пластины с термически тонкой термоактивной прокладкой и анизотропным покрытием, находящимся под воздействием внешнего теплового потока // Изв. РАН. Энергетика. 2013. № 5. С. 136–145.
19. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого содержит пленочное покрытие // Изв. РАН. Энергетика. 2015. № 3. С. 39–49.
20. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого находится под воздействием внешнего теплового потока // Тепловые процессы в технике. 2015. Т. 7. № 2. С. 73–79.
21. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Температурное поле анизотропного полупространства с подвижной границей, обладающей термически тонким покрытие, при его нагреве внешней средой // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 8. С. 378–384.

Temperature field of isotropic wall, separating two different media, with anisotropic covering while its local heating in conditions of heat exchange with ambient environment

A.V. Attetkov, I.K. Volkov

Bauman Moscow State Technical University
(National Research University), Moscow, 105005, Russia
e-mail: fn2@bmstu.ru

The article suggests a mathematical model of a temperature field forming in a two-layer divide wall, imitated by the isotropic wall of a constant thickness with anisotropic covering of one of its surfaces, subjected to the local thermal impact in conditions of heat exchange with ambient environment. It is demonstrated, that the temperature field of the system under study represents the sum of the two independent additive components. Analytical solution for the first of the additive components of the temperature field, formed due to the difference of the initial temperature of the two-layer system and temperatures of the ambient environments being separated, was obtained with integral Laplace transformation application. The second independent additive component of the temperature field, formed by the impact of the non-stationary spatially distributed thermal flow on the external surface of the anisotropic covering of the two-layer system while its initial temperature coincides with the temperatures of the ambient environments being separated, was identified. Solution of the corresponding problem of non-stationary thermal conductivity in analytically closed form was obtained applying integral transformations method. The obtained results confirm the earlier found effect of the temperature field “demolition” in anisotropic material with properties anisotropy of the general type.

Keywords: isotropic dividing wall, anisotropic covering, local thermal impact, integral transformations.

REFERENCES

1. **Karslou G., Eger D.** *Teploprovodnost’ tvyordyh tel* [Thermal conductivity of solids]. M.: Nauka, 1964. 488 p. In Russ.
2. **Lykov A.V.** *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshayashkola, 1967. 600 p. In Russ.
3. **Kartashov E.M**. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tvyordyh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. M.: Vysshaya shkola, 2001. 552 p. In Russ.
4. **Formalev V.F.** *Teploprovodnost’ anizotropnyh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach* [Thermal conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods for solving problems]. M.: Fizmatlit, 2014. 312 p.
5. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole anizotropnoj okhlazhdaemoj plastiny, nakhodyashhejsya pod vozdejstviem vneshnego teplovogo potoka [Temperature field of anisotropic cooled plate under the influence of external heat flow]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2012, no. 6, pp. 108–117. In Russ.
6. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole okhlazhdaemoj izotropnoj plastiny s anizotropnym pokrytiem, nakhodyashhejsya pod vozdejstviem vneshnego teplovogo potoka [Temperature field of a cooled isotropic plate with anisotropic covering under influence of external heat flow]. *Teplovyeprotsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 50–58. In Russ.
7. **Formalev V.F., Kolesnik S.A.** Analytical investigation of heat transfer in an anisotropic band with heat fluxes assigned at the boundaries. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2016, vol. 89, no. 4, pp. 975–984.
8. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Tret’ya kraevaya zadacha matematicheskoj teorii teploprovodnosti dlya dvukhslojnogo anizotropnogo poluprostranstva [The third boundary value problem of the mathematical theory of heat conduction for a two-layer anisotropic half-space]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. PowerEngineering,* 2017, no. 4, pp. 136–142. In Russ.
9. **Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L.** Time-dependent heat transfer in a plate with anisotropy of general form under the action of pulsed heat sources. *High Temperature*, 2017, vol. 55, no. 5, pp. 761–766.
10. **Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetcova E.L., Selin I.A.** Analiticheskoe issledovanie teploperenosa v teplozashhitnykh kompozitsionnykh materialakh s anizotropiej obshhego vida pri proizvol’nom teplovom potoke [Heat transfer analytical investigation in heat protective composites with general type anisotropy under arbitrary heat loading]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsij – Journal on Composite Mechanics and Design,* 2017, vol. 23, no. 2, pp. 168–182. In Russ.
11. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Kvazistatsionarnoe temperaturnoe pole anizotropnoj sistemy s podvizhnoj granitsej, nagrevaemoj sredoj s ostsilliruyushhej temperaturoj [Quasistationary temperature field of the anisotropic system with a moving boundary of the heated environment with temperature oscillating]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. PowerEngineering*, 2017, no.5, pp. 144–155. In Russ.
12. **Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.** *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoj fiziki*

[Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1970. 712 p. In Russ.

13. **Pekhovich A.I., Zhidkih V.M.** *Raschyot teplovogo rezhima tvyordyh tel* [Calculation of the thermal regime of solids]. L.: Energiya, 1968. 304 p. In Russ.
14. **El'sgol'c L.E.** *Differencial'nye uravneniya i variacionnoe i schislenie* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka, 1969. 424 p. In Russ.
15. **Bellman R**. *Vvedenie v teoriyu matric* [Introduction to the theory of matrices]. M.: Nauka, 1969. 368 p. In Russ.
16. **Fikhtengolts G.M.** *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 2* [A Course of differential and integral calculus, Vol 2]. Moscow: Fizmatgiz, 1962. 807 p. In Russ.
17. **Sneddon I.** *Preobrazovaniya Fur'e* [Fourier transforms]. M.: Izd-voinostr. lit., 1955. 668 p. In Russ.
18. **Attekov A.V., Volkov I.K., Tverskaya E.S.** Statsionarnoe temperaturnoe pole okhlazhdaemoj ortoropnoj plastiny s termicheski tonkoj termoaktivnoj prokladkoj i anizotropnym pokrytiem, nakhodyashhimsya pod vozdejstviem vneshnego teplovogo potoka [Stationary temperature field of a cooled orthotropic wall with a thermal active layer and anisotropic coating, under the influence of external heat flux] *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2013, no.5, pp. 136–145. In Russ.
19. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole anizotropnogo poluprostranstva, podvizhnaya granitsa kotorogo soderzhit plenochnoe pokrytie [Temperature field of anisotropic half-space, the moving boundary of which contains a film coating]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. PowerEngineering*, 2015, no. 3, pp. 39–49. In Russ.
20. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole anizotropnogo poluprostranstva, podvizhnaya granitsa kotorogo nakhoditsya pod vozdejstviem vneshnego teplovogo potoka [Temperature field of an anisotropic half-space with movable boundary being under influence of external heat flux]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 73–79. In Russ.
21. **AttetkovA.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole anizotropnogo poluprostranstva s podvizhnoj granitsej, obladayushhej termicheski tonkim pokrytiem, pri ego nagreve vneshnej sredoj [Temperature field of the anisotropic half-space with the moving boundary, which has a thermally thin coating, heated by convection]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2016, vol. 8, no. 8, pp. 378–384. In Russ.

Учредитель и издатель журнала:
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-72651 от 16.04.2018
Редактор *Бублик Н.П.*, e-mail: tpt@mai.ru
Оригинал-макет и электронная версия изготовлены в МАИ.

Сдано в набор 18.01.2019. Подписано в печать 04.02.2019.
Формат 60×90 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 5.82. Уч.-изд. л. 6.35. Тираж 55 экз. «Свободная цена».

Отпечатано в ООО «Печатный салон ШАНС»