На правах рукописи

Рябов

Рябов Павел Евгеньевич

Топологический анализ неклассических интегрируемых задач динамики твердого тела

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Московского физико-технического института (государственного университета)

Научный консультант: **Борисов Алексей Владимирович,**
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты:

Цыганов Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет», кафедра вычислительной физики

Лерман Лев Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, кафедра дифференциальных уравнений, математического и численного анализа

Буров Александр Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, отдел механики, старший научный сотрудник

Ведущая организация:
ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»

Защита состоится «24» июня 2016 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 на базе Московского авиационного института (национального исследовательского университета) по адресу: 125993, Москва А-8, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и на сайте института www.mai.ru.

Автореферат разослан «22» апреля 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф-м. н., доцент Гидаспов В. Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

Современные аналитические и качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений берут свое начало в работах А. Пуанкаре [1], [2], в которых Пуанкаре развил геометрическую теорию решений дифференциальных уравнений. Пуанкаре ввел понятия гомоклинических и гетероклинических орбит, связывающих неподвижные точки между собой, и показал, что возмущение этих орбит является причиной сложного поведения решения. В своем трехтомном трактате “Новые методы небесной механики” [1] А. Пуанкаре на примере ограниченной задачи трех тел обнаружил наличие гомоклинической структуры траекторий и указал препятствия к существованию аналитических интегралов для широкого класса динамических систем. Многие аспекты исследования Пуанкаре опередили свое время на несколько десятилетий. На самом деле, изучение сложного движения Пуанкаре основано на совершенно новом подходе: качественном анализе поведения решений. Он предложил изучать топологические свойства решений в фазовом пространстве совместно с аналитическими свойствами решений уравнений.

Для классической и небесной механики особый интерес представляют гамильтоновы системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Существенный прогресс в качественном анализе поведения гамильтоновых систем был достигнут во второй половине двадцатого века после опубликования фундаментальных результатов А.Н. Колмогорова [3], В.И. Арнольда [4], [5], Ю. Мозера [6], впоследствии получивших название КАМ теории. На основании КАМ теории были получены важные выводы об устойчивости и общем характере движения близких к интегрируемым гамильтоновых систем.

Важное влияние на развитие аналитической динамики твердого тела и качественной теории динамических систем оказали работы В.В. Козлова, объединенные в монографию “Методы качественного анализа в динамике твердого тела” [7]. В частности, В.В. Козловым доказано несуществование аналитических интегралов уравнений Эйлера–Пуассона, а также указаны динамические эффекты, препятствующие интегрируемости этих уравнений – расщепление сепаратрис, рождение большого числа невырожденных периодических решений. Эти результаты дали сильный толчок исследованиям по проблеме точной интегрируемости уравнений движения. Результаты таких исследований систематизированы в монографиях В.В. Козлова "Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике" [8] и А.В.Борисова, И.С.Мамаева "Современные методы теории интегрируемых систем"[9]. В [9] интегрируемость многомерных аналогов классических интегрируемых задач динамики твердого тела как правило устанавливается при помощи представления Лакса со спектральным параметром $\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), A(\lambda)]$. Инварианты матрицы $L(\lambda)$ являются первыми интегралами системы.

Современному состоянию топологического анализа динамических систем мы обязаны работе С. Смейла (1972 г.) [10], в которой намечена программа топологического исследования классических механических систем и указаны пути ее реализации в натуральных системах с симметрией. В качестве примера он рассматривал задачи небесной механики. Впоследствии, благодаря работам прежде всего российских ученых В.В. Козлова, Я.В. Татаринова, М.П. Харламова, А.Т. Фоменко, А.В. Болсинова, А.В. Борисова, И.С. Мамаева, А.А. Ошемкова и других исследованы бифуркации нелинейных по скоростям дополнительных интегралов и соответствующих интегральных многообразий, не укладывающиеся в схему Смейла.

Результаты, полученные в XX в., нашли отражение в монографиях [7] (методы качественного анализа в динамике твердого тела), [11] (фазовая топология классических интегрируемых задач) и [12] (теория топологических инвариантов, описание лиувиллевых инвариантов приводимых систем и др.). Главные достижения относились к задачам динамики твердого тела, в которых существует одномерная группа преобразований конфигурационного пространства $SO(3)$, касательные преобразования к которым сохраняют кинетическую энергию и момент внешних сил как функции на шестимерном фазовом пространстве $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$, в силу чего возможна редукция системы к гамильтоновой системе с четырехмерным фазовым пространством TS^2. После этого изоэнергетический уровень оказывается трехмерным многообразием, на котором один оставшийся интеграл задает слоение Лиувилля на двумерные торы. Все базовые бифуркации в таком слоении были найдены М.П. Харламовым в его исследованиях [11] классических случаев Эйлера, Жуковского, Горячева-Чаплыгина, Сретенского, Ковалевской, Клебша. Случай Ковалевской, формально проинтегрированный еще в конце XIXв., получил полное решение лишь в наше время в работах В.В. Козлова (1980), М.П.Харламова (1983-1988), А.Т.Фоменко, А.В.Болсинова, П.Рихтера (2000) [13].

В течение этих лет был открыт и ряд математических обобщений в динамике твердого тела, среди которых физический смысл имеют обобщения И.В.Комарова [14], [15], Х.М.Яхья [16] на задачу о движении гиростата, случай В.В.Соколова [17] для задачи о движении тела в жидкости и случай Борисова-Мамаева-Соколова [18], описывающий движение твердого тела с полостями, заполненными вихревой несжимаемой жидкостью. Все эти задачи также приводятся к системам с двумя степенями свободы. В то же время имеется ряд интегрируемых систем с тремя степенями свободы, не укладывающихся в имеющиеся схемы исследования и принципиально не сводимых к системам с двумя степенями свободы (О.И.Богоявленский, В.В.Соколов, А.Г.Рейман и М.А.Семенов-Тян-Шанский, А.И.Бобенко, А.В. Борисов и И.С. Мамаев [19]). Среди них в рамках теоретической механики центральное место занимает задача о движении тяжелого магнита в гравитационном и магнитном полях, сформулированная О.И.Богоявленским (1984) [20] при изучении уравнений Эйлера на алгебрах Ли. В 1987 г. А.Г.Рейман и М.А.Семенов-Тян-Шанский [21] указали в этой задаче третий интеграл, находящийся в инволюции с K. В результате открыто новое физически реализуемое обобщение случая Ковалевской, но уже несводимое в целом к системе с двумя степенями свободы.

Цели и задачи диссертационной работы. Основная цель и задача диссертационной работы – исследование фазовой топологии вполне интегрируемых гамильтоновых систем с двумя и тремя степенями свободы механического происхождения и их обобщений на системы с неклассическими полями.

Научная новизна. Научная новизна диссертационной работы состоит в анализе (орбитальной) устойчивости невырожденных (в смысле теории особенностей) периодических движений, использовании и дальнейшем развитии метода критических подсистем, практическом построении стратификаций фазового пространства, классификации слоений в окрестности особых точек отображения момента, эффективном конструировании различных глобальных топологических инвариантов.

Теоретическая и практическая значимость применения к задачам динамики твердого тела. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для

- определения и анализа (орбитальной) устойчивости невырожденных (в смысле теории особенностей) траекторий;
- построения бифуркационных комплексов и с их помощью анализа устойчивости критических движений;
- практического построения стратификаций фазового пространства с использованием метода критических подсистем;
- описания глобальных топологических инвариантов в виде оснащенных изоэнергетических бифуркационных диаграмм;
- исследования фазовой топологии задач неголономной механики, связанных с качением твердых тел; задач о движении цилиндрического твердого тела, взаимодействующего с вихревой нитью, которые относятся к некоммутативному интегрированию;
- применения методов топологического анализа к задачам квантовой теории сильнокоррелированных систем при экстремально низких температурах. В работе [22] показано, что при определенных значениях параметров уравнения движения, которые описывают

бегущие волны в двухкомпонентном бозе-эйнштейновском конденсате, могут быть сведены к разделенным уравнениям типа Ковалевской в динамике твердого тела. Наличие разделенных уравнений дает возможность выделить дискриминантную поверхность, которая содержит бифуркационную диаграмму, и, таким образом, применить методы топологического анализа.

Методология и методы исследования.

Очень часто при анализе устойчивости периодических решений и неподвижных точек не делают различия между интегрируемыми и неинтегрируемыми системами и пользуются общими методами, основанными на вычислении мультипликаторов, нормализующих преобразованиях Биркгофа, изучении областей резонансов и так называемых связок интегралов (см., например, [23–30]).

Естественным образом используя интегрируемость системы, топологический анализ позволяет быстрым и наглядным образом определять устойчивость в тех случаях, когда использование общих стандартных методов является довольно затруднительным. При анализе устойчивости невырожденных (в смысле теории особенностей) траекторий никаких проблем не возникает. Если рассматриваемая система нерезонансна, то имеет место следующее утверждение [31]: эллиптические невырожденные траектории устойчивы, гиперболические невырожденные траектории неустойчивы.

Обобщая понятие бифуркационной диаграммы, в [31] вводится так называемый бифуркационный комплекс, который является простым, наглядным и естественным топологическим инвариантом интегрируемой системы. Его главное преимущество связано с упрощениями, которые достигаются при анализе и представлении результатов о существовании и устойчивости периодических решений интегрируемых систем. Построение этого инварианта дает возможность не только ответить на вопрос об устойчивости каких-то конкретных траекторий, но сразу описать все устойчивые траектории.

В диссертационной работе в качестве основных методов исследования выступают: анализ устойчивости невырожденных (в смысле особенностей) траекторий на основе определения их типа (эллиптический/ гиперболический); метод критических подсистем исследования фазовой топологии; метод ключевых множеств, классифицирующий бифуркационные диаграммы.

Положения, выносимые на защиту:

- Изложены строго обоснованные результаты по аналитическим решениям и топологическому анализу интегрируемого случая Ковалевской-Яхья: представлена полная аналитическая классификация бифуркаций гиростата Ковалевской-Яхья, возникающих в особых периодических движениях (критических точках ранга 1 отображения момента); найдены все разделяющие значения гиростатического момента при классификации диаграмм Смейла; исследована топология приведенных систем; обоснованы результаты об устойчивости периодических решений, полученные при помощи бифуркационной диаграммы; приведено полное описание динамики системы в окрестности особых (критических) периодических траекторий.

- Приводится полное исследование неприводимой системы с тремя степенями свободы, которая описывает движение волчка Ковалевской в двойном поле: приводится описание критических подсистем и бифуркационных диаграмм; дана классификация всех невырожденных критических точек – положений равновесия (невырожденных особенностей ранга 0), особых периодических движений (невырожденных особенностей ранга 1), а также критических двухчастотных движений (невырожденных особенностей ранга 2); предъявлены явные формулы характеристических уравнений для собственных чисел соответствующих симплектических операторов, которые определяют тип невырожденной особенности.

- Исследована фазовая топология интегрируемых случаев уравнений Кирхгофа движения твердого тела в жидкости с дополнительным интегралом четвертой степени по импульсам (случаи интегрируемости Чаплыгина, Горячева, Яхья). Найдено явное вещественное разделение переменных в частном случае интегрируемости Горячева, основанное на геометрическом подходе к разделению переменных. Полученные аналитические формулы позволили исследовать бифуркации лиувиллевых торов, а также устойчивость невырожденных (в смысле особенностей) траекторий.

- Для обобщенного двухполевого гиростата (случай интегрируемости Соколова-Цыганова) удалось выделить аналитически четыре инвариантных четырехмерных подмногообразия, на которых индуцированная динамическая система является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы. Система уравнений, задающая одно из инвариантных подмногообразий, является обобщением инвариантных соотношений интегрируемого случая О.И. Богоявленского вращения намагниченного твердого тела в однородном гравитационном и магнитном поле. Остальные три инвариантных подмногообразия являются новыми в динамике твердого тела. Для каждого из них указан дополнительный интеграл. Для описания фазовой топологии всей системы в целом используется метод критических подсистем. Для каждой подсистемы построены бифуркационные диаграммы и указаны бифуркации торов Лиувилля как внутри подсистем, так и во всей системе в целом.

- Исследована фазовая топология интегрируемой гамильтоновой системы на $e(3)$, найденной В.В. Соколовым (2001) и обобщающей случай Ковалевской. Обобщение состоит в том, что к однородному потенциальному силовому полю добавлены гироскопические силы, зависящие от конфигурационных переменных. Классифицированы относительные равновесия, вычислен их тип, определен характер устойчивости; установлены виды диаграмм Смейла и дана классификация изоэнергетических многообразий приведенных систем с двумя степенями свободы. Множество критических точек полного отображения момента представлено в виде объединения четырех критических подсистем, каждая из которых при фиксированных физических параметрах является однопараметрическим семейством почти гамильтоновых систем с одной степенью свободы.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты, представленные в диссертации, были доложены автором на многочисленных международных и всероссийских конференциях, наиболее значимые из которых перечислены ниже.

1) “The 8th International Workshop on Computer Algebra Systems in Teaching and Research”, Siedlce, Poland, 2015; 2) International Conference “Nonlinear Methods in Physics and Mechanics”, Ярославль, 2015; 3) “Dynamics, Bifurcations, and Strange Attractors”, Нижний Новгород, 2015; 4) “International Conference on Mathematical Control Theory and Mechanics”, Суздаль, 2015, 2011; 5) “Hamiltonian Dynamics, Nonautonomous Systems, and Patterns in PDE’s”, Нижний Новгород, 2014; 6) “International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems”, Суздаль, 2014, 2012; 7) “Recent Advances in Quantum Integrable Systems”, Dijon, France, 2014; 8) “10th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Application”, Madrid, Spain, 2014; 9) “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна”, Воронеж, 2014; 10) “8th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics”, Siedlce, Poland, 2013; 11) “Finite Dimensional Integrable Systems”, Marseille, France, 2013; 12) Семинар “Современные геометрические методы” под руководством академика А. Т. Фоменко; 13) International Topological Conference “Alexandroff Readings”, Moscow, 2012; 14) Международная конференция “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” (конференция Пятницкого), Москва, 2012; 15) “International Conference on stability, control and rigid body dynamics”, Донецк, 2011, 2009, 2008; 16) International Conference “Differential equations and related topics” dedicated Ivan G. Petrovskii, Moscow, 2011; 17) II Int. Conf. “Geometry, Dynamics, Integrable Systems”, Belgrad, Serbia, 2010; 18) Всероссийская конференция “Динамические системы, управление и наномеханика”, Ижевск, 2009.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 37 печатных работах, из них 21 статей в рецензируемых из перечня, рекомендованных ВАК, журналах [A01, A02, A03, A04, A05, A06, A07, A08, A09,

A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21], среди которых 11 публикаций, индексируемых международными базами Scopus и Web of Science; 8 статей в сборниках трудов конференций и 8 тезисов докладов.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 5 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 374 страниц, из них 354 страниц текста, включая 83 рисунков. Библиография включает 189 наименований на 19 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе изложены строго обоснованные результаты по аналитическим решениям и топологическому анализу интегрируемого случая Ковалевской-Яхья. Сообщение о том, что случай С.В. Ковалевской в динамике твердого тела обобщается на гиростат, Х.М. Яхья сделал на семинарах В.Г. Демина и В.В. Козлова в МГУ в 1985 году. На самом деле в [16] интеграл Ковалевской был обобщен сразу в двух направлениях – на гиростат и на двойное поле, моделирующее действие суперпозиции поля силы тяжести и постоянного магнитного поля. Ранее аналог интеграла Ковалевской для двойного поля был найден О.И. Богоявленским [32], однако, обобщение Яхья оказалось принципиальным – введение гиростатического момента нарушило классическую структуру интеграла (сумма квадратов), а также его однородность – новое слагаемое, пропорциональное гиростатическому моменту, имеет третью степень по угловым скоростям подобно интегралу Горячева–Чаплыгина. Поскольку введение двойного поля в общем случае ликвидирует симметрию задачи, уничтожая интеграл площадей, Х.М. Яхья отмечает два случая полной интегрируемости – гиростат типа Ковалевской в поле силы тяжести и гиростат в двойном поле особой структуры, допускающей сингулярную симметрию. В данной главе рассматривается первая задача. До настоящего времени она не сведена к квадратурам. В силу наличия группы симметрий система допускает редукцию с вырожденной скобкой Пуассона, в свою очередь расслоенное интегралом площадей на однопараметрическое семейство четырехмерных инвариантных симплектических листов, динамика на которых описывается гамильтоновыми системами с двумя степенями свободы.

В 1991 г. начались систематические исследования фазовой топологии случая Ковалевской–Яхья. Первым этапом всегда является изучение особенностей интегрального отображения (обычно называемого в современной литературе отображением момента). Это такие траектории в фазовом пространстве, на которых первые интегралы оказываются зависимыми в смысле линейной зависимости дифференциалов. Соответствующие решения уравнений Эйлера–Пуассона являются либо неподвижными точками (физически они отвечают равномерным вращениям тела), либо периодическими траекториями особого характера, на которых падает ранг отображения момента. В совокупности это подмножество фазового пространства образует критическое множество отображения момента. Критические точки отображения момента организованы в три критические подсистемы – трехмерные многообразия, состоящие из особых периодических движений (в современной терминологии, орбит пуассонова действия, ассоциированного с отображением момента) и их бифуркаций. Получены в явном виде параметрические уравнения поверхностей, которым принадлежат критические значения отображения момента – бифуркационная диаграмма задачи. Отмечена связь бифуркационной диаграммы с классами Аппельрота [33] классического волчка Ковалевской. Оказалось, что поверхности в пространстве констант первых интегралов, отвечающие в случае Ковалевской четырем классам Аппельрота, в случае Яхья (при ненулевом гиростатическом моменте) перестраиваются в две поверхности, одна из которых, в свою очередь, состоит из двух связных компонент. Аналитически классифицированы диаграммы Смейла в плоскости констант интегралов энергии и площадей – образы объединения ключевых множеств критических подсистем. Они определяют 29 камер, внутри которых изоэнергетические молекулы неизменны. Явно вычислены показатели Морса–Ботта интеграла Ковалевской–Яхья в специальных базисах. Доказано, что в расширенном интегральном пространстве имеется семь камер, а регулярные торы Лиувилля в целом формируют семь семейств. В результате доказательно построены 29 изоэнергетических инвариантов задачи.

Результаты первой главы опубликованы в работах [A01], [A02], [A03], [A04], [A05].

Во второй главе приводится полное исследование неприводимой системы с тремя степенями свободы, которая описывает движение волчка Ковалевской в двойном поле. В классической постановке задача динамики твердого тела описывается механической системой с гироскопическими силами на группе $SO(3)$ с S^1-симметрией. Отказ от осесимметричных сил приводит к системам с тремя степенями свободы без возможности глобального понижения порядка. Задачей такого типа является обобщение классического случая интегрируемости С.В. Ковалевской на движение гиростата в двойном силовом поле. Полная интегрируемость этой системы доказана в работах [16, 20, 21] путем последовательного обобщения классических интегралов. В настоящей главе эта система рассматривается при отсутствии гиростатического момента. Этот случай принято называть волчком Ковалевской в двойном поле. В диссертации предложено полное исследование трехмерной топологии системы, частично анонсированное в [A07].

Структура настоящей главы основана на идее топологического атласа неприводимой системы с тремя степенями свободы, зависящей от некоторого набора физических параметров. В этом случае грубый изоэнергетический инвариант уже не является одномерным графом, а может быть представлен в виде так называемой оснащенной изоэнергетической диаграммы – бифуркационной диаграммы ограничения отображения момента на уровень энергии, стратифицированной рангом отображения и типами критических точек в прообразе.

В работах М.П.Харламова (2004–2005) построена стратификация шестимерного фазового пространства обобщенного волчка Ковалевской рангом отображения момента на основе нахождения всех критических подсистем и сформулирована задача описания аналога инварианта Фоменко на изоэнергетических уровнях для волчка Ковалевской в двойном поле. Общее определение топологического инварианта для интегрируемых гамильтоновых систем со многими степенями свободы приводится в работах А.Т.Фоменко (1988–1991). Критические подсистемы имеют не более двух степеней свободы, и к ним применим весь накопленный опыт топологического анализа. Уравнения фазовых пространств критических подсистем позволяют явно вычислить *внешний* тип любой точки критической подсистемы, в частности, всех точек ранга 2. Приводится классификация всех невырожденных критических точек – положений равновесия (невырожденных особенностей ранга 0), особых периодических движений (невырожденных особенностей ранга 1), а также критических двухчастотных движений (невырожденных особенностей ранга 2); предъявлены явные формулы характеристических уравнений для собственных чисел соответствующих симплектических операторов, которые определяют тип невырожденной особенности. Комбинируя эту информацию, получаем полную классификацию критических точек по их типам в исходной системе с тремя степенями свободы. В данной главе последовательно реализованы все шаги метода критических подсистем, позволившие решить задачу классификации бифуркационных диаграмм ограничений интегральных отображений на уровни энергии, дать параметрическую классификацию бифуркаций, определяющих фазовую топологию системы. Полный список значений топологического инварианта представлен в виде девятнадцати типов оснащенных диаграмм на пятимерных изоэнергетических уровнях.

Результаты второй главы опубликованы в работах [A06], [A07], [A08].

В третьей главе представлены результаты топологического анализа одного частного случая интегрируемости Д. Н. Горячева в динамике твердого тела.

Уравнения Кирхгофа движения твердого тела в жидкости в общем случае имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^3$ – импульсивный момент, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ – импульсивная сила, $H = H(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha})$ – полная энергия. Известными интегралами системы (1) являются геометрический интеграл

$$\Gamma = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

интеграл площадей

$$L = M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + M_3\alpha_3$$

и полная энергия H. На совместном уровне

$$P_{a,\ell} = \{\Gamma = a^2, \quad L = \ell\}, \quad \dim P_{a,\ell} = 4$$

система (1) гамильтонова с двумя степенями свободы, в связи с чем для ее интегрируемости достаточно в дополнение к интегралу H указать еще один интеграл, независимый с H почти всюду.

В работе [34] найден случай интегрируемости, в котором

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2) + M_3^2 + \frac{1}{2}[c(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \frac{b}{\alpha_3^2}].$$

В предположении

$$L = 0 \tag{2}$$

система (1) на $P_{a,0}$ имеет первый интеграл

$$F = [M_1^2 - M_2^2 - \frac{b(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{a^2\alpha_3^2} + c\alpha_3^2]^2 + 4[M_1M_2 - \frac{b\alpha_1\alpha_2}{a^2\alpha_3^2}]^2.$$

В частном случае $b = 0$ этот интеграл найден С. А. Чаплыгиным в статье [35], там же выполнено и сведение задачи при $b = 0$ к эллиптическим квадратурам. Дальнейшие обобщения рассматриваемая интегрируемая система получила в работе Х. М. Яхья [36]. В работе [37] на основе идей бигамильтонова подхода предложен вариант выбора переменных разделения случая Горячева.

Вместо одного из интегралов H, F можно рассматривать интеграл в форме, указанной в [37]:

$$K = [M_1^2 + M_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2}]^2 + 2c\alpha_3^2(M_1^2 - M_2^2) + c^2\alpha_3^4.$$

При условии (2) он выражается через H и F следующим образом:

$$K = F + \frac{4b}{a^2}H - \frac{b^2}{a^4}.$$

В настоящей главе представлено явное вещественное разделение переменных для случая Горячева, отличное от [37] и основанное на геометрическом подходе к разделению переменных, предложенном в [38, 39].

Обозначим

$$p_1(u) = 2b + k - u^2, \qquad p_2(u) = 2b - k + u^2, \qquad p_3(u) = (u-b)^2 - f^2,$$
$$p_{ij} = p_i(u_j), \qquad r_{ij} = \sqrt{p_{ij}} \qquad (i = 1,2,3; \quad j = 1,2),$$

и пусть u_1, u_2 — корни квадратного уравнения

$$zu^2 - 2bu + (2b\xi - kz) = 0, \qquad z = \alpha_3^2, \quad \xi = M_1^2 + M_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2}.$$

Теорема 1. [A09] *Переменные u_1, u_2 являются переменными разделения и их эволюция определяется уравнениями Абеля–Якоби*

$$\frac{du_1}{\sqrt{W(u_1)}} - \frac{du_2}{\sqrt{W(u_2)}} = 0, \qquad \frac{u_1du_1}{\sqrt{W(u_1)}} - \frac{u_2du_2}{\sqrt{W(u_2)}} = dt,$$

где

$$W(u) = b^{-1}p_1(u)p_2(u)p_3(u) =$$
$$= b^{-1}(2b + k - u^2)(2b - k + u^2)[(u-b)^2 - f^2].$$

При этом фазовые переменные $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha}$ алгебраически выражаются через u_1, u_2 по формулам

$$M_1 = \mathrm{i}\,\frac{r_{21}r_{22}}{2\sqrt{2b(u_1+u_2)}}, \qquad M_2 = -\frac{r_{11}r_{12}}{2\sqrt{2b(u_1+u_2)}},$$
$$M_3 = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)}(r_{12}r_{22}r_{31} + r_{11}r_{21}r_{32}),$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)}(r_{12}r_{21}r_{31} + r_{11}r_{22}r_{32}),\\
\alpha_2 &= -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)}(r_{11}r_{22}r_{31} + r_{12}r_{21}r_{32}),\\
\alpha_3 &= \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{u_1 + u_2}}.
\end{aligned}
$$

Полученные аналитические формулы позволяют исследовать фазовую топологию, в частности, бифуркации лиувиллевых торов.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [A09], [A18]. Исследования по фазовой топологии интегрируемых случаев уравнений Кирхгофа с дополнительным интегралом четвертой степени представлены также в работах автора [A10], [A11], [A12], [A13], [A14] и [A15].

В четвертой главе предложен возможный подход к описанию фазовой топологии новой интегрируемой системы с тремя степенями свободы, для которой В. В. Соколовым и А. В. Цыгановым указано представление Лакса [40]. Эта система описывает динамику так называемого двухполевого обобщенного гиростата, механическая модель которого состоит в следующем.

Рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой O (Рис. 1). Выберем триэдр с началом в O, вращающийся вместе с телом, и отнесем к нему все векторные и тензорные объекты. Обозначим через $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ канонический единичный базис в $\mathbb{R}^3$, тогда сам подвижный триэдр имеет представление $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$. Постоянное поле – это силовое поле, порождающее вращающий момент относительно точки O вида $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\alpha}$, где $\boldsymbol{r}$ – постоянный вектор, а $\boldsymbol{\alpha}$ соответствует некоторому физическому вектору, неподвижному в инерциальном пространстве; $\boldsymbol{r}$ указывает из точки O в центр приложения поля, $\boldsymbol{\alpha}$ есть вектор напряженности поля. Для двух постоянных полей вращающий момент имеет вид $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{\beta}$. Предполагается, что

$$
\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \neq 0, \quad \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} \neq 0. \tag{3}
$$

Два постоянных поля, удовлетворящие (3), называются независимыми. Полагаем, что главные моменты инерции подчинены условиям Ковалевской: $A = B = 2C$. Радиус-векторы центров приложения сил $\boldsymbol{r}_k$ параллельны экваториальной плоскости Oe_1e_2 **(**$\boldsymbol{r}_k \perp \boldsymbol{e}_3$**);** $\boldsymbol{\alpha}$**,** $\boldsymbol{\beta}$ **– векторы напряженностей полей. Гиростатический момент** $\boldsymbol{\lambda}$ **направлен по оси динамической симметрии** $\boldsymbol{\lambda} = \lambda \boldsymbol{e}_3$**, (**$\lambda = const$**).**

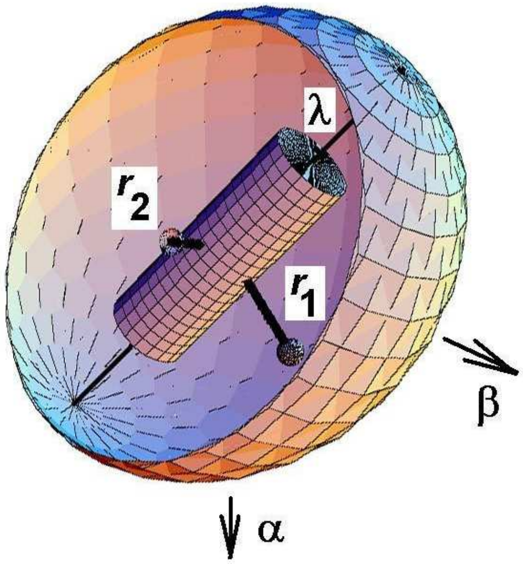

Рис. 1. Механическая модель.

Как показано в **[41]** без потери общности для независимых сил можно полагать

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{e}_2. \tag{4}$$

В **[40]** была доказана интегрируемость системы

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}, \end{gathered} \tag{5}$$

которая описывает динамику двухполевого обобщенного гиростата при наличии двух силовых полей с деформированным гамильтонианом

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 - 2\varepsilon_1 \boldsymbol{M} \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{\beta}) -$$
$$-2\varepsilon_2[(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{\beta})]$$

или, с учетом **(4)**,

$$\begin{gathered} H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 - 2\varepsilon_2(\alpha_1 + \beta_2) \\ +2\varepsilon_1(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь трехмерные векторы $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ представляют собой проекции кинетического момента и двух силовых полей на оси, жестко связанные с твердым телом; λ – параметр гиростатического момента, направленного вдоль оси динамической симметрии; ε_1 и ε_2 – параметры деформации. Если параметр деформации ε_1 обращается в нуль, то функция (6) совпадает с гамильтонианом в задаче о движении гиростата Ковалевской в системе двух полей [21, формула (3), с. 56]). Системы с такими гамильтонианами, существенно зависящими от $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, не допускают непрерывной группы симметрии, и поэтому неприводимы глобально к семейству систем с двумя степенями свободы.

Соответствующая скобка Ли–Пуассона задается формулами

$$\begin{gathered}
\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk}\alpha_k, \{M_i, \beta_j\} = \varepsilon_{ijk}\beta_k, \\
\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \{\alpha_i, \beta_j\} = 0, \{\beta_i, \beta_j\} = 0, \\
\varepsilon_{ijk} = \tfrac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i), \quad 1 \leqslant i, j, k \leqslant 3.
\end{gathered} \tag{7}$$

Функциями Казимира являются выражения $\boldsymbol{\alpha}^2$, $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\beta}^2$.

Относительно скобки Ли–Пуассона, заданной соотношениями (7), систему (5) можно представить в гамильтоновом виде:

$$\dot{x} = \{H, x\},$$

где через x обозначена любая из координат.

Фазовое пространство $\mathcal{P}$ системы уравнений (5) задается общим уровнем функций Казимира

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = a^2, \quad \boldsymbol{\beta}^2 = b^2, \quad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = c, \quad (0 < b < a, |c| < ab).$$

В работе [40] указана соответствующая $L - A$ пара для гамильтониана (6). Бигамильтонова структура для обобщенного двухполевого гиростата Ковалевской впервые получена в работе [42]. Деформации интегрируемых гамильтонианов, анонсированные в [40], также упоминаются в книгах [9] ([9, формула (4.18), с. 128]) и [41] ([41, замечание 2, с. 265]). При отсутствии второго силового поля ($\boldsymbol{\beta} = 0$) и наличии ненулевого параметра λ (параметра гиростатического момента) интегрируемость доказана В. В. Соколовым. Явное выражение дополнительного интеграла (на алгебре $e(3)$) содержится в работе [17]. В [A15] дополнительный интеграл Соколова представлен в виде, удобном для исследования фазовой топологии в системе с двумя степенями свободы. Бигамильтоновы структуры интегрируемых деформаций волчка Ковалевской и интегрируемого случая Соколова получены в [42].

Для гамильтониана (6) дополнительные интегралы K и G имеют следующий явный вид ([A17], [43], [42], [A19]):

$$
\begin{aligned}
K = Z_1^2 + Z_2^2 - \lambda[(M_3+\lambda)(M_1^2+M_2^2) + 2\varepsilon_2(\alpha_3 M_1 + \beta_3 M_2)] \\
+\lambda\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2)M_3 + 2\lambda\varepsilon_1[\alpha_2 M_1^2 - \beta_1 M_2^2 - (\alpha_1-\beta_2)M_1M_2] - 2\lambda\varepsilon_1^2\omega_\gamma,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
G = \omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + 2(M_3+\lambda)\omega_\gamma - 2\varepsilon_2(\boldsymbol{\alpha}^2\beta_2 + \boldsymbol{\beta}^2\alpha_1) \\
+2\varepsilon_1[\boldsymbol{\beta}^2(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2) - \boldsymbol{\alpha}^2(M_1\beta_3 - M_3\beta_1)] \\
+2(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})[\varepsilon_2(\alpha_2+\beta_1) + \varepsilon_1(\alpha_3M_1 - \alpha_1M_3 + \beta_2M_3 - \beta_3M_2)].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \tfrac{1}{2}(M_1^2 - M_2^2) + \varepsilon_2(\alpha_1-\beta_2) \\
&\quad +\varepsilon_1[M_3(\alpha_2+\beta_1) - M_2\alpha_3 - M_1\beta_3] + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\beta}^2 - \boldsymbol{\alpha}^2), \\
Z_2 &= M_1M_2 + \varepsilon_2(\alpha_2+\beta_1) - \varepsilon_1[M_3(\alpha_1-\beta_2) + \beta_3M_2 - \alpha_3M_1] - \varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}), \\
\omega_\alpha &= M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + M_3\alpha_3, \quad \omega_\beta = M_1\beta_1 + M_2\beta_2 + M_3\beta_3, \\
\omega_\gamma &= M_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + M_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + M_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).
\end{aligned}
$$

Если положить значения параметров деформации $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = 1$, то получаются выражения для интегралов I_1 и I_2 из работы [21, формула (5), с. 57].

Явное выражение алгебраической кривой $\mathcal{E}(z,\zeta)$ ([A17], [A19]) имеет следующий вид:

$$
\mathcal{E}(z,\zeta)\ :\ d_4\zeta^4 + d_2\zeta^2 + d_0 = 0,
$$

где

$$
\begin{aligned}
d_4 &= -z^4 - \varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2)z^2 - \varepsilon_1^4[\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta}^2 - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2],\\
d_2 &= 2z^6 + [\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2) - h - \lambda^2]z^4 + [\varepsilon_2^2(\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2) - \varepsilon_1^2 g]z^2\\
&\quad +2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2[\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta}^2 - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2],\\
d_0 &= -z^8 + hz^6 + f_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}z^4 + \varepsilon_2^2 g z^2 - \varepsilon_2^4[\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta}^2 - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2].
\end{aligned}
$$

Коэффициент $f_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ при z^4 всегда является первым интегралом [40]. В работах [A17], [A19] показано, что коэффициент $f_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ можно выразить через казимиры $\boldsymbol{\alpha}^2$, $\boldsymbol{\beta}^2$ и другие (независимые почти всюду) дополнительные интегралы (8) и (9) той же системы следующим образом:

$$
\begin{aligned}
f_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} &= \varepsilon_1^2 g + k - \varepsilon_1^4(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2 -\\
&\quad -\frac{1}{4}[h^2 + 2\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2)h + \varepsilon_1^4(\boldsymbol{\alpha}^2-\boldsymbol{\beta}^2)^2] - \varepsilon_2^2(\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2).
\end{aligned}
$$

где h, k и g – постоянные первых интегралов (6), (8) и (9).

Как показано в [44], [45], [46] без ограничения общности можно считать векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ взаимно ортогональными, причем $|\boldsymbol{\alpha}| > |\boldsymbol{\beta}|$. Тогда геометрические интегралы, порождаемые функциями Казимира, запишутся в виде

$$
|\boldsymbol{\alpha}|^2 = a^2, \quad |\boldsymbol{\beta}|^2 = b^2, \quad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = 0, \quad (a > b > 0).
$$

Тот факт, что любая задача о движении твердого тела в двух постоянных полях может быть сведена к задаче, в которой одна из пар $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ или $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ ортонормирована, известен из [41]. *Одновременная* ортогонализация обеих пар, предложенная в [44] для твердого тела и в [45] для гиростата, существенно упрощает дальнейшие исследования.

Задача о движении обобщенного гиростата относится к интегрируемым гамильтоновым системам с тремя степенями свободы. Особую роль в изучении фазовой топологии таких систем играют критические подсистемы. Понятие критической подсистемы сформировалось в работах М. П. Харламова при исследовании фазовой топологии неприводимых систем с тремя степенями свободы [47, 48]. Идея критической подсистемы состоит в следующем.

Определим интегральное отображение

$$\mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^3,$$

полагая $\mathcal{F}(x) = \{g = G(x), k = K(x), h = H(x)\}$. Отображение $\mathcal{F}$ принято называть *отображением момента*. Обозначим через $\mathcal{C}$ совокупность всех критических точек отображения момента, т.е. точек, в которых $\operatorname{rank} d\mathcal{F}(x) < 3$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^3$ называется *бифуркационной диаграммой*.

Пусть

$$\mathcal{L}(h, k, g) = 0 \tag{10}$$

уравнение двумерной поверхности $\Pi_{\mathcal{L}}$, которое содержит один из листов бифуркационной диаграммы Σ отображения $\mathcal{F}$.

Определим функцию

$$\Phi_{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \circ \mathcal{F} : \mathcal{P} \to \mathbb{R}. \tag{11}$$

Критической подсистемой $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ называется замыкание множества критических точек ранга 2, которое принадлежит нулевому уровню интеграла $\Phi_{\mathcal{L}}$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ является инвариантным подмножеством в $\mathcal{P}$, состоящим из критических точек отображения $\mathcal{F}$. Критическая подсистема $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ задается системой уравнений

$$\Phi_{\mathcal{L}} = 0, \quad d\Phi_{\mathcal{L}} = 0.$$

Напомним один общий факт из симплектической геометрии [49].

Лемма 1. *Пусть подмногообразие $\mathcal{M}$ симплектического многообразия $\mathcal{P}$ задается системой независимых уравнений вида*

$$f_1 = 0, f_2 = 0. \tag{12}$$

Тогда 2-форма на $\mathcal{M}$, индуцированная симплектической структурой из $\mathcal{P}$, вырождается в точности на множестве $\{f_1, f_2\} = 0$.

Поскольку критические подсистемы обычно описываются системой уравнений вида (12), то индуцированная симплектическая структура вырождается на множестве коразмерности 1. В этом случае такие системы называются *почти гамильтоновыми*.

Уравнения поверхностей вида **(10)** (неявные или параметрические) можно получить как дискриминантные множества некоторых многочленов, исходя из особенностей алгебраической кривой $\mathcal{E}(z,\zeta)$, ассоциированной с представлением Лакса.

В четвертой главе предъявлены в явном виде четыре новых инвариантных четырехмерных подмногообразия, на которых индуцированная динамическая система является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы. Система уравнений, задающая одно из инвариантных подмногообразий, является обобщением инвариантных соотношений интегрируемого случая О. И. Богоявленского вращения намагниченного твердого тела в однородном гравитационном и магнитном поле. Остальные три инвариантных подмногообразия являются новыми в динамике твердого тела. Для каждого из них указан дополнительный интеграл. Приведем описание одного из таких инвариантных подмногообразия при отсутствии линейного потенциала и наличии только гироскопических сил.

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{L}_1(h,k,g) = \varepsilon_1^2 g + k - \varepsilon_1^4 c^2 - \frac{1}{4}[h^2 + 2\varepsilon_1^2(a^2+b^2)h + \varepsilon_1^4(a^2-b^2)^2]$$

Следуя **(11)**, определим соответствующий интеграл $\Phi_{\mathcal{L}_1}$ формулой

$$\Phi_{\mathcal{L}_1} = \varepsilon_1^2 G + K - \varepsilon_1^4(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2 - \frac{1}{4}[H^2 + 2\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2)H + \varepsilon_1^4(\boldsymbol{\alpha}^2-\boldsymbol{\beta}^2)^2],$$

Предложение 1. *Интеграл $\Phi_{\mathcal{L}_1}$ в $\mathcal{P}$ можно представить в виде произведения двух функций F_1 и F_2, т.е.*

$$\Phi_{\mathcal{L}_1} = F_1 \cdot F_2,$$

где

$$F_1 = M_3 + \lambda + \varepsilon_1(\beta_1 - \alpha_2), \qquad (13)$$

$$\begin{gathered} F_2 = M_3^3 + [\varepsilon_1(\beta_1-\alpha_2)+\lambda]M_3^2 + [M_1^2+M_2^2+2\varepsilon_1(\alpha_3 M_2 - \beta_3 M_1)]M_3 + \\ +[(M_2^2-M_1^2)(\alpha_2+\beta_1) + 2M_1M_2(\alpha_1-\beta_2)]\varepsilon_1 + \lambda(M_1^2+M_2^2). \end{gathered} \qquad (14)$$

Замечание 1. Для уравнений Кирхгофа на алгебре $e(3)$ и уравнений Пуанкаре на $so(4)$ дополнительный интеграл также имеет вид произведения двух функций **[17, 50], [18]**.

Теорема 2. *Нулевой уровень каждой из функций* **(**13**)***,* **(**14**)** *определяет в* $\mathcal{P}$ *инвариатное пятимерное многообразие.*

Инвариантные пятимерные подмногообразия не являются критическими точками ранга 2 отображения момента $\mathcal{F}$, поэтому мы будем рассматривать совместную систему уравнений, заданную соотношениями

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0. \qquad \textbf{(15)}$$

Система **(**15**)** определяет в $\mathcal{P}$ инвариантное четырехмерное подмногообразие $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$, которое является критической подсистемой нулевого уровня интеграла $\Phi_{\mathcal{L}_1}$.

Теорема 3. *Функция*

$$F_0 = 2\varepsilon_1\{-(\beta_2+\alpha_1)M_3^2 - (\alpha_1+\beta_2)[\varepsilon_1(\beta_1-\alpha_2)+\lambda]M_3 -$$
$$-\alpha_1 M_1^2 - \beta_2 M_2^2 - (\alpha_2+\beta_1)M_1M_2 + [\varepsilon_1(2\alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3) + \lambda\alpha_3]M_1 -$$
$$-[\varepsilon_1(2\beta_2\alpha_3 - \beta_1\beta_3 - \alpha_2\beta_3) - \lambda\beta_3]M_2\}$$

является первым интегралом на подмногообразии $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$*, заданном уравнениями* **(**15**)**.

Заметим, что $\{F_1, F_2\} = F_0$. Поэтому нулевой уровень интеграла F_0, т.е. уравнение $F_0 = 0$, является множеством точек коразмерности 1 вырождения 2-формы на $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$.

Теорема 4. *Критическая подсистема* $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$*, заданная соотношениями* **(**15**)***, определяет в* $\mathcal{P}$ *почти всюду четырехмерное подмногообразие и индуцированная динамическая система является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы. В качестве независимых интегралов можно взять гамильтониан* H *и функцию* F_0.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [A17], [A19].

В пятой главе исследуется фазовая топология интегрируемой гамильтоновой системы на $e(3)$, найденной В.В.Соколовым (2001) и обобщающей случай Ковалевской. Обобщение состоит в том, что к однородному потенциальному силовому полю добавлены гироскопические силы, зависящие от конфигурационных переменных.

Коалгебра $\mathfrak{g}_0 = e(3)^*$ реализуется как $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha})$ со скобкой Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk} \alpha_k, \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0. \tag{16}$$

Интегрируемый гиростат Ковалевской – Соколова [17] задается уравнениями Гамильтона

$$\dot{x} = \{H, x\} \tag{17}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{4}(M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2) + \varepsilon_1(\alpha_3 M_2 - \alpha_2 M_3) - \varepsilon_0 \alpha_1.$$

Уравнения (17), записанные в переменных M_i, α_j, называются уравнениями Эйлера – Пуассона. Скобка (16) обладает двумя функциями Казимира

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \qquad \Gamma = \boldsymbol{\alpha}^2.$$

Точкой обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, коэффициент в L введен по традиции, сложившейся в задачах динамики твердого тела с конфигурацией типа Ковалевской.

На совместном уровне $P_\ell^4 = \{L = \ell, \Gamma = a^2\}$ скобка (16) невырождена и ограничение системы (17) становится гамильтоновой системой с двумя степенями свободы. Удобно считать фазовым пространством системы (17) пятимерное многообразие $P^5 = \mathbb{R}^3(\mathbf{M}) \times S^2(\boldsymbol{\alpha})$, заданное одним уравнением $\boldsymbol{\alpha}^2 = a^2, \quad (a > 0)$, и говорить об однопараметрическом (параметр $\ell \in \mathbb{R}$) семействе систем на P_ℓ^4. Последнее соотношение в механике называют геометрическим интегралом, определенную им сферу – сферой Пуассона. Функцию L и порожденное ей соотношение $L = \ell$ называется интегралом площадей.

Первый интеграл, найденный в [17], дополнительный к Γ, L, H и обеспечивающий интегрируемость системы (17) (соответственно, лиувиллеву полную интегрируемость семейства гамильтоновых систем на P_ℓ^4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} K &= \left[\frac{1}{4}(M_1^2 - M_2^2) + \varepsilon_1(\alpha_2 M_3 - \alpha_3 M_2) - \varepsilon_1^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \varepsilon_0 \alpha_1\right]^2 + \\ &+ \left[\frac{1}{2} M_1 M_2 + \varepsilon_1(\alpha_3 M_1 - \alpha_1 M_3) + \varepsilon_0 \alpha_2\right]^2. \end{aligned}$$

В механике большое внимание уделяется исследованию особых движений механических систем (в том числе и интегрируемых), их аналитическому описанию и изучению характера устойчивости. Количество классических работ по этой тематике весьма велико. В последнее время вопросы об устойчивости таких движений связывается с топологией соответствующих интегрируемых систем, отображением момента и так называемым бифуркационным комплексом, отражающим все особенности слоений фазового пространства (см., например, работы [31], [51]). В динамике твердого тела особое место занимает класс движений, называемых равномерными вращениями, в которых вектор угловой скорости тела постоянен в подвижной и неподвижной системах отсчета. С точки зрения системы уравнений Эйлера – Пуассона эти движения являются неподвижными точками, поэтому они также называются относительными равновесиями. Устойчивость относительных равновесий в значительной мере определяется собственными числами матрицы правой части линеаризованных уравнений для системы (17). В интегрируемой системе эти собственные числа определяют так называемый тип критической точки [12], соответствующей относительному равновесию. Типы относительных равновесий полностью определяют характер устойчивости соответствующих неподвижных точек приведенной системы: точки типа "центр-центр" устойчивы по всем переменным, точки типа "седло-седло" неустойчивы по всем переменным, а точки типа "центр-седло" устойчивы по двум переменным, а по двум – неустойчивы.

В разделах 5.2–5.3 описаны семейства относительных равновесий, образы которых в плоскости (ℓ, h) образуют кривые, формирующие диаграммы Смейла. В случае Ковалевской – Соколова существует четыре вида диаграмм Смейла, устойчивых относительно малых возмущений параметров.

В разделе 5.4 приводится классификация изоэнергетических многообразий. Пусть H_ℓ есть ограничение функции H на четырехмерное симплектическое многообразие P^4_ℓ – фазовое пространство приведенной системы. Изоэнергетические многообразия $Q^3_{\ell,h}$ – это уровни функции H_ℓ, а относительные равновесия на P^4_ℓ – это критические точки H_ℓ. Поэтому для классификации изоэнергетических многообразий нужно найти индекс Морса функции H_ℓ в точках семейств относительных равновесий. Зная количество точек и индекс Морса, находим топологические типы $Q^3_{\ell,h}$ и характер бифуркаций. В расширенном пространстве $\mathbb{R}^3(\ell, h, \varepsilon_1)$ объединение диаграмм Смейла определяет семь областей с непустыми $Q^3_{\ell,h}$. Интересно отметить, что изоэнергетическое многообразие N^3_3 в классической динамике твердого тела (движение вокруг неподвижной точки в поле только силы тяжести) возможно в случае общего положения центра масс [52] (историю вопроса можно найти в [41]), однако, в интегрируемых задачах оно ранее появлялось лишь в случаях Клебша [53] и Соколова [50] для задачи Кирхгофа движения тела в жидкости (что в соответствующей задаче о движении вокруг неподвижной точки в первом случае означает наличие центрального ньютоновского поля вместо поля силы тяжести, а во втором предполагает наличие гироскопических сил, зависящих от ориентации тела). Здесь через N^3_m обозначена связная сумма m экземпляров $S^2 \times S^1$. Изоэнергетические многообразия случая Клебша классифицированы в работе [54] (где, собственно, впервые и обнаружилось изоэнергетическое многообразие N^3_3), фазовая топология случая Соколова изучена в работе [A14].

В разделах 5.6–5.8 приводятся утверждения относительно критических подсистем и множества критических точек отображения момента для случая Ковалевской – Соколова. Для каждой из подсистем вводятся частные интегралы. Более того, инвариантные соотношения выбраны так, чтобы их скобка Пуассона была частным интегралом критической подсистемы, поэтому и множество точек вырождения описано в терминах таких интегралов. Множество критических точек полного отображения момента представлено в виде объединения четырех критических подсистем, каждая из которых при фиксированных физических параметрах является однопараметрическим семейством почти гамильтоновых систем с одной степенью свободы.
Результаты пятой главы опубликованы в работах [A20], [A21].

В Заключении приведены выводы, которые были представлены в диссертационной работе.

Все изложенные результаты могут быть использованы для исследования фазовой топологии более сложных задачах динамики твердого тела в произвольном потенциальном поле и в жидкости [9], [55], [56], [57], [58], в том числе для описания динамической модели левитрона. Полученные в диссертации результаты позволяют находить явные решения и исследовать их устойчивость, что имеет важное значение для решения прикладных задач механики, в том числе робототехники и мехатроники.

Список публикаций по теме диссертации

A01. Рябов П. Е. О вычислении бифуркационного множества в случае Ковалевской–Яхьи // Механика твердого тела. 1995. № 27. С. 36–40.

A02. Kharlamov M. P., Ryabov P. E. The bifurcations of the first integrals in the case of Kowalewski-Yehia // Regular and Chaotic Dynamics. 1997. Vol. 2, no. 2. P. 25–40.

A03. Рябов П. Е. Аналитическая классификация особенностей интегрируемого случая Ковалевской–Яхья // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2010. № 4. С. 25–30.

A04. Харламова И. И., Рябов П. Е. Электронный атлас бифуркационных диаграмм гиростата Ковалевской–Яхья // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2011. № 2. С. 147–162.

A05. Харламов М. П., Рябов П. Е. Диаграммы Смейла–Фоменко и грубые инварианты случая Ковалевской–Яхья // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2011. № 4. С. 40–59.

A06. Рябов П. Е., Смирнов Г. Е., Харламов М. П. Атлас диаграмм обобщения 4-го класса особо замечательных движений Аппельрота на гиростат в двойном поле // Механика твердого тела. 2012. № 42. С. 62–76.

A07. Харламов М. П., Рябов П. Е. Сетевые диаграммы для инварианта Фоменко в интегрируемой системе с тремя степенями свободы // Доклады Академии наук. 2012. Т. 447, № 5. С. 449–502.

A08. Рябов П. Е., Харламов М. П. Классификация особенностей в задаче о движении волчка Ковалевской в двойном поле сил // Математический сборник. 2012. Т. 203, № 2. С. 111–142.

A09. Рябов П. Е. Явное интегрирование и топология случая Д. Н. Горячева // Доклады Академии наук. 2011. Т. 439, № 3. С. 315–318.

A10. Orel O. E., Ryabov P. E. Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem // Regular & Chaotic Dynamics. 1998. Vol. 3, no. 2. P. 82–93.

A11. Ryabov P. E. Bifurcation sets in an integrable problem on motion of a rigid body in fluid // Regular and Chaotic Dynamics. 1999. Vol. 4, no. 4. P. 59–76.

A12. Orel O. E., Ryabov P. E. Topology, bifurcations and Liouville classification of Kirchoff equations with an additional integral of fourth degree // J. Phys. A: Math. Gen. 2001. Vol. 34. P. 2149–2163.

A13. Рябов П. Е. Фазовая топология задачи Чаплыгина о движении твердого тела в жидкости // Механика твердого тела. 2000. № 30. С. 140–150.

A14. Рябов П. Е. Бифуркации первых интегралов в случае Соколова // Теоретическая и математическая физика. 2003. Vol. 134, no. 2. P. 207–226.

A15. Рябов П. Е. Алгебраические кривые и бифуркационные диаграммы двух интегрируемых задач // Механика твердого тела. 2007. № 37. С. 97–111.

A16. Харламов М. П. Рябов П. Е., Савушкин А. Ю., Смирнов Г. Е. Типы критических точек гиростата Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. 2011. № 41. С. 27–38.

A17. Рябов П. Е. Фазовая топология одной неприводимой интегрируемой задачи динамики твердого тела // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 176, № 2. С. 205–221.

A18. Рябов П. Е. Фазовая топология одного частного случая интегрируемости Горячева в динамике твердого тела // Математический сборник. 2014. Т. 205, № 7. С. 115–134.

A19. Ryabov P. E. New invariant relations for the generalized two-field gyrostat // Journal of Geometry and Physics. 2015. Vol. 87. P. 415–421.

A20. Рябов П. Е., Савушкин А. Ю. Фазовая топология волчка Ковалевской–Соколова // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11, № 2. С. 287–317.

A21. Kharlamov M. P., Ryabov P. E., Savushkin A. Y. Topological atlas of the Kowalevski – Sokolov top // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, no. 1. P. 24–65.

Цитированная литература

1. Пуанкаре А. Избранные труды. В 3 т. Москва: Наука, 1971.
2. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л: ГТТИ, 1947.
3. Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1954. Т. 98, № 4. С. 527–530.
4. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // УМН. 1963. Т. 18, № 5(113). С. 13–40.
5. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18, № 6. С. 91–192.
6. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. Москва: Мир, 1973.
7. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Москва: Изд-во МГУ, 1980.
8. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 1995.
9. Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. Ижевск: Изд-во РХД, 2003.
10. Smale S. Topology and Mechanics. I, II // Inventiones Mathematicae. 1970. Vol. 10, no. 4. P. 305–331.
11. Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач ди-

намики твердого тела. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1988.

12. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. В 2-х т. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.
13. Болсинов А. В., Рихтер П., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 2. С. 3–42.
14. Комаров И. В. Базис Ковалевской для атома водорода // Теоретическая и математическая физика. 1981. Т. 47, № 1. С. 67–72.
15. Komarov I. V., Kuznetsov V. B. Kowalewski's top on the Lie algebras $o(4)$, $e(3)$ and $o(3,1)$ // J. Phys. A: Math. & Gen. 1990. Vol. 23. P. 841–846.
16. Yehia H. M. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mechanics Research Communications. 1986. Vol. 13, no. 3. P. 173–180.
17. Sokolov V. V. A generalized Kowalewski Hamiltonian and new integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$ // In «Kowalevski property», ed. V.B. Kuznetsov, CRM Proceedings and Lect. Notes, AMS. 2002. P. 304–315.
18. Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколов В. В. Новый интегрируемый случай на so(4) // Доклады Академии Наук. 2001. Т. 381, № 5. С. 614–615.
19. Борисов А. В., Мамаев И. С. Нелинейные скобки Пуассона и изоморфизмы в динамике // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. Т. 2, № 3–4. С. 72–89.
20. Bogoyavlensky O. I. Euler equations on finite-dimension Lie algebras arising in physical problems // Commun. Math. Phys. 1984. Vol. 95. P. 307–315.
21. Reyman A. G., Semenov Tian-Shansky M. A. Lax representation with a spectral parameter for the Kowalewski top and its generalizations // Lett. Math. Phys. 1987. Vol. 14, no. 1. P. 55–61.
22. Kamchatnov A. M. and Sokolov V. V. Nonlinear waves in two-component Bose-Einstein condensates: Manakov system and Kowalevski equations // Phys. Rev. A. 2015. Vol. 91. P. 043621–0436211.

23. Маркеев А. П. О плоских и близких к плоским вращениях тяжёлого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР МТТ. 1988. № 4. С. 29–36.
24. Брюм А. З. Исследование орбитальной устойчивости при помощи первых интегралов // ПММ. 1989. Т. 53, № 6. С. 873–879.
25. Маркеев А. П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ. 2001. Т. 65, № 1. С. 51–58.
26. Маркеев А. П. О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // ПММ. 2004. Т. 68, № 2. С. 282–293.
27. Маркеев А. П. О движении твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Стеклова // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 20–33.
28. Бардин Б. С. К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 14–21.
29. Бардин Б. С. Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Бобылева–Стеклова // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 4. С. 535–550.
30. Бардин Б. С. Савин А. А. Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 2. С. 249–266.
31. Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН. 2010. Т. 65, № 2(392). С. 71–132.
32. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, № 5. С. 883–938.
33. Аппельрот Г. Г. Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1940. С. 61–156.
34. Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Изв. Варшавского ун-та. 1916. № 3. С. 1–13.
35. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твердо-

го тела в жидкости // Труды отд-я физ. наук общества любителей естествознания. 1903. Т. 11, № 2. С. 7–10.
36. Yehia H. M. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration. I - The case of axisymmetric forces // Mechanics Research Communications. 1996. Vol. 23, no. 5. P. 423–427.
37. Tsiganov A. V. On the generalized Chaplygin system // J. of Math. Sciences. 2010. Vol. 168, no. 8. P. 901–911.
38. Харламов М. П. Обобщение 4-го класса Аппельрота: область существования движений и разделение переменных // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 4. С. 453–472.
39. Kharlamov M. P. Separation of variables in the generalized 4th Appelrot class // Regular and Chaotic Dynamics. 2007. Vol. 12, no. 3. P. 267–280.
40. Соколов В. В., Цыганов А. В. Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева–Чаплыгина // Теоретическая и математическая физика. 2002. Т. 131, № 1. С. 118–125.
41. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Ижевск: Изд-во РХД, 2005.
42. Вершилов А. В., Григорьев А. Ю., Цыганов А. В. Об одной интегрируемой деформации волчка Ковалевской // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 2. С. 223–236.
43. Kharlamov M. P. Extensions of the Appelrot classes for the generalized gyrostat in a double force field // Regular and Chaotic Dynamics. 2014. Vol. 19, no. 2. P. 226–244.
44. Харламов М. П. Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. 2004. № 34. С. 47–58.
45. Харламов М. П. Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях // Нелинейная динамика. 2007. Т. 3, № 3. С. 331–348.
46. Kharlamov M. P. Bifurcation diagrams and critical subsystems of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // Hiroshima Mathematical

Journal. 2009. Vol. 39, no. 3. P. 327–350.
47. Kharlamov M. P. Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // Regular and Chaotic Dynamics. 2005. Vol. 10, no. 4. P. 381–398.
48. Kharlamov M. P. Separation of variables in the generalized 4th Appelrot class. II. Real solutions // Regular and Chaotic Dynamics. 2009. Vol. 14, no. 6. P. 621–634.
49. Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. Москва: Изд-во МГУ, 1988.
50. Соколов В. В. Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа // Теоретическая и математическая физика. 2001. Т. 129, № 1. С. 31–37.
51. Борисов А. В., Мамаев И. С., Васькина А. В. Новые относительные равновесия в системе трех точечных вихрей в круговой области и их устойчивость // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 1. С. 119–138.
52. Гашененко И. Н. Интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела // Механика твердого тела. 2003. № 33. С. 20–32.
53. Clebsch A. Uber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit // Math. Ann. 1870. Vol. 3, no. 1. P. 238–262.
54. Ошемков А. А. Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1993. Т. 25, № 2. С. 23–109.
55. Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны. М: Наука, 1991.
56. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. Ижевск: Изд-во РХД, 2001.
57. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М: Наука, 1965.
58. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.- Ижевск: АНО ИИКИ, 2015.

Научное издание

Рябов Павел Евгеньевич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук на тему:

Топологический анализ неклассических интегрируемых задач

динамики твердого тела

Подписано в печать 21.03.2016. Формат 60×84 1/16. Тираж 100 экз.
Заказ №   .

АНО Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика». 426024, Ижевск, ул. Университетская, 1, каб. 207 http://shop.rcd.ru