

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Э. БАУМАНА (НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



Павлов Арсений Михайлович

**СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ПАКЕТА СТЕРЖНЕЙ**

Специальность 01.02.04 —

«Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент
Темнов Александр Николаевич

Москва — 2019

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Особенности динамики стержневых систем типа «пакет» и применение теории групп в динамике симметричных конструкций	10
1.1 Собственные колебания стержневых систем типа «пакет»	10
1.2 Использование симметрии механической системы при анализе задачи динамики и статики конструкций	16
1.3 Заключение по первой главе	25
Глава 2. Продольные колебания стержневых систем	27
2.1 Постановка задачи	27
2.2 Групповой анализ	28
2.3 Операторная постановка	31
2.4 Классификация собственных элементов оператора A	34
2.5 Решение спектральной задачи в случае постоянных инерционно-жесткостных характеристик стержней.	38
2.5.1 Решение спектральной задачи при $N = 2$	39
2.5.2 Численный пример решения при $N = 2$	42
2.6 Решение задачи Коши	44
2.6.1 Закон баланса полной энергии	45
2.6.2 Слабое решение задачи Коши	46
2.7 Заключение по второй главе	47
Глава 3. Пространственные колебания пакета стержней	49
3.1 Стержневая модель ракеты-носителя пакетной компоновки	49
3.2 Постановка задачи о пространственных колебаниях пакета стержней	51
3.2.1 Исходная краевая задача	51
3.3 Групповой анализ	57
3.4 Операторная постановка	60

3.5	Конечные группы симметрии спектральной задачи порожденной пространственными колебаниями пакета стержней	63
3.5.1	Пакет с двумя боковыми стержнями	65
3.5.2	Пакет с четырьмя боковыми стержнями	71
3.5.3	Пакет с шестью боковыми стержнями	80
3.6	Заключение по третьей главе	97
Глава 4. Численный расчет собственных колебаний пакета стержней с четырьмя боковыми стержнями, совершающего пространственные колебания		
4.1	Особенности конечно-элементной модели	98
4.2	Исходные данные для расчета форм и частот колебаний	104
4.3	Результаты расчета	106
4.4	Приведение форм колебаний, соответствующих кратным частотам, к плоскостям стабилизации	109
4.5	Разложение вектора внешних воздействий по неприводимыми представлениям группы симметрии пакета стержней	111
4.6	Заключение по четвертой главе	113
Заключение		114
Список литературы		115

Введение

Задача о собственных колебаниях стержней является классической задачей математической физики. Возможность использования стержней в качестве расчетной модели многих механических систем обуславливает большое число практических приложений данной задачи.

В настоящее время, в различных областях науки и техники все чаще возникает необходимость исследования динамических характеристик механических объектов, моделируемых стержневыми системами, состоящими из упруго-соединенных стержней. Примерами таких объектов являются ракеты-носители (РН) пакетной компоновки, крупногабаритные космические конструкции, сборки ядерных реакторов. В то же время динамика подобных механических систем изучена относительно слабо, что в совокупности указывает на актуальность исследований в данной области.

Важным приложением стержневых систем является их использование в качестве расчетных моделей при исследовании динамических характеристик ракет-носителей (РН). При проектировании и эксплуатации РН важным этапом является обеспечение устойчивости движения РН на всех участках полета. Исследованию динамики РН выполненных по тандемной схеме посвящено большое количество научных работ, основные результаты которых отражены в таких монографиях как [1–5] и др.

Одним из способов повышения энерго-массовой эффективности многоступенчатых ракет-носителей является использование продольного деления ступеней РН или пакетная компоновка [6; 7]. В настоящее время, применение находят РН, спроектированные по комбинированной схеме: первые две ступени РН представляют собой пакет, последующие — тандем (в дальнейшем будем называть такую схему также пакетной компоновкой). Применение пакетной компоновки на первых ступенях РН имеет ряд преимуществ по сравнению с тандемом:

- Дробление ракетного блока первой ступени на несколько боковых блоков позволяет уменьшать диаметр баков, при значительном увеличении массы компонентов топлива (КРТ)
- Одновременное включение двигательной установки (ДУ) ракетных блоков первой и второй ступени позволяет снизить потери характери-

ческой скорости, вызванные действием гравитационных сил, а также, уменьшить вероятность возникновения нештатной ситуации, обусловленной необходимостью включения ДУ второй ступени во время полета РН

- При использовании пакетной компоновки появляется возможность для дальнейшего совершенствования энерго-массовых характеристик РН за счет перераспределения КРТ в процессе полета РН между ракетными блоками первой и второй ступеней

С точки зрения экономической и технологической эффективности применение пакетной компоновки делает возможной разработку модельного ряда РН модульной схемы на основе унифицированного ракетного блока (модуля). Такой подход позволяет создать серию ракет-носителей начиная с легкой (или средней) и заканчивая тяжелой и сверхтяжелой. Повышение грузоподъемности ракеты-носителя в данном случае обеспечивается объединением нескольких ракетных блоков, расположенных по окружности вокруг центрального [8; 9].

В то же время, вопросы динамики РН пакетной компоновки сравнительно слабо освещены в специализированной литературе и научных работах, при этом, с точки зрения задач теории колебаний и устойчивости движения, данный тип РН представляет собой более сложный объект по сравнению с РН тандемной компоновки. Одним из основных аспектов, обуславливающих данную особенность является то, что блоки РН пакетной компоновки совершают совместные изгибно-продольно-крутильные колебания, что в свою очередь приводит к большому разнообразию возможных форм колебаний, необходимости их классификации для отнесения к тому или иному каналу управления, значительному росту порядка системы уравнений, описывающих движение РН, вследствие возникновения механических и гидравлических связей между каналами управления [10–13] и т.д.

В настоящей диссертационной работе проводится исследование динамики стержневых систем типа «пакет» с использованием теоретико-группового подхода, основанного на свойствах симметрии анализируемой механической системы.

Целью данной работы является разработка методов расчета, анализа и классификации частот и форм собственных колебаний механических систем,

обладающих пространственной симметрией и состоящих из идентичных (боковых) стержней, упруго-соединенных с центральным (пакет стержней).

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Провести исследование задачи о собственных и свободных колебаниях пакета стержней, совершающих продольные колебания. Исследовать симметрию системы исходных дифференциальных уравнений, сформулировать операторную постановку задачи и исследовать спектр соответствующего оператора. На основании полученных результатов провести симметричную классификацию форм и частот собственных колебаний рассмотренной механической системы
2. Провести исследование задачи о собственных колебаниях пакета стержней, совершающих пространственные колебания. Получить алгебру инфинитезимальных операторов системы исходных дифференциальных уравнений. Сформулировать операторную постановку задачи и исследовать спектр соответствующего оператора. Провести классификацию собственных форм колебаний пакетов с двумя, четырьмя и шестью боковыми стержнями
3. Выполнить численный расчет собственных колебаний пакета стержней, совершающих пространственные колебания, для случая четырех боковых стержней

Научная новизна: В ходе работы над диссертацией был применен теоретико-групповой подход для исследования динамики пакета стержней, благодаря чему впервые были получены следующие результаты

1. Проведена классификация форм и частот собственных продольных колебаний пакета стержней по неприводимым представлениям группы S_n
2. Получены выражения для ортопроекторов на пространства неприводимых представлений групп симметрии пакетов стержней, совершающих пространственные колебания, для случаев двух, четырех и шести боковых стержней
3. Разработан метод приведения форм колебаний, соответствующих кратным частотам к плоскостям пространственной симметрии пакета

4. Разработан метод проектирования вектора внешних нагрузок на пространства неприводимых представлений группы симметрии пакета стержней, при записи слабого решения эволюционной задачи

Методология и методы исследования. В диссертации исследуется задача о собственных и свободных колебаниях пакетов упруго-соединенных стержней без учета демпфирования. Перемещения стержней описаны дифференциальными уравнениями в частных производных с использованием модели Эйлера-Бернулли для описания поперечных колебаний. Для получения разрешающей краевой задачи был применен метод разделения переменных. При исследовании задачи о собственных колебаниях использовалась спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Классификация форм и частот колебаний, и исследование их свойств проводились с использованием теории представлений конечных групп преобразований симметрии. Для проведения численного расчета частот и форм колебаний с помощью метода конечных элементов использован процессор NX NASTRAN.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Аналитическое решение задачи о собственных колебаниях пакета стержней, совершающих продольные колебания, с использованием ретико-группового подхода
2. Постановка задачи о собственных колебаниях пакета стержней, совершающих пространственные колебания
3. Классификация форм собственных колебаний пакета стержней, совершающих пространственные колебания, по неприводимым представлениям соответствующих групп симметрии. Ортопроекторы и базисные вектора, отвечающие неприводимым представлениям указанных групп для пакета с двумя, четырьмя и шестью боковыми стержнями
4. Методика приведения форм собственных колебаний пакета стержней, соответствующих кратным частотам к плоскостям пространственной симметрии
5. Результаты численного расчета собственных колебаний пакета стержней, совершающих пространственные колебания, для случая четырех боковых стержней

6. Способ разложения вектора внешних нагрузок на слагаемые, относящиеся к различным неприводимым представлениям группы симметрии пакета стержней

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением строгих, апробированных моделей и математических методов для решения и исследования задач теории колебаний и математической физики. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. 4-ая международная научная конференция «Ракетно-космическая техника: фундаментальные и прикладные проблемы», 2013, Москва, Россия
2. Международная конференция «XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2015), 2015, Симферополь, Россия
3. Современные методы теории краевых задач «Понтрягинские чтения – XXVII», 2016, Воронеж, Россия
4. Всероссийская конференция, посвященная 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева, 2016, Москва, Россия
5. «International graduate summer school in aeronautics & astronautics» IGSS 2016, 2016, Beijing, China
6. Шестая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», 2017, Москва, Россия
7. Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодёжная научная конференция, 2017, Москва, Россия

Личный вклад. Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, проведены лично соискателем. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь принадлежащий непосредственно соискателю материал.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 7 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составля-

ет 125 страниц с 28 рисунками и 9 таблицами. Список литературы содержит 113 наименований.

Глава 1. Особенности динамики стержневых систем типа «пакет» и применение теории групп в динамике симметричных конструкций

1.1 Собственные колебания стержневых систем типа «пакет»

При исследовании динамики конструкций, широкое применение находит абстракция исходной механической системы с помощью различных стержневых моделей. Примерами таких механических систем могут служить пространственные фермы, сборки ядерных реакторов, ракеты-носители и т.п. Так, при разработке и эксплуатации жидкостных ракет-носителей (РН) одной из важных задач является обеспечение устойчивости движения ракеты по отношению к короткопериодическим колебаниям, возникающим вследствие возбуждения упругих колебательных движений корпуса ракеты, а также возмущенного движения жидкости в баках. Исследованию динамики жидкостных ракет-носителей посвящено большое число монографий, научных статей и пособий. Среди них можно выделить такие фундаментальные работы как [1—5].

Колебания корпуса и узлов ракеты-носителя оказывают различное влияние на устойчивость движения ракеты. Так продольные колебания, возникающие в системе корпус – топливные магистрали – двигатель, при определенном соотношении параметров колебательных звеньев могут перерасти в автоколебания с резким ростом их амплитуды, который может привести к серьезным нарушениям работы агрегатов ракеты, вплоть до ее разрушения за короткий промежуток времени.

Поперечные колебания ракеты также могут приводить к возникновению автоколебаний, но в данном случае они вызываются не пульсациями тяги, как это происходит в случае с продольными колебаниями, а характером ее приложения (упругие автоколебания при наличии следящей силы). При возникновении таких колебаний негативный эффект проявляется в возникновении паразитных ускорений, влияющих на работу автомата стабилизации, а также увеличению нагрузок на несущие элементы ракеты.

При решении задач прочности, управления и обеспечения устойчивости движения РН широко используется подход, в котором решение той или иной за-

дачи раскладывается в ряд по базисным функциям, в качестве которых обычно выступают нормированные формы упругих колебаний корпуса РН [14]. Несмотря на то, что современные вычислительные методы и инструменты позволяют использовать различные механические модели ракеты, стержневая осцилляторная модель жидкостной РН на сегодняшний день является актуальной и используется на различных этапах анализа.

Так, при прочностных расчетах, из информации о напряженно-деформированном состоянии стержневой модели можно получить данные о нагрузках, которые могут использоваться в дальнейших уточняющих расчетах с применением более подробных оболочечных и трехмерных механических моделей конструкции. При этом, найденные формы колебаний стержневой модели используются в расчете «как есть», без необходимости дополнительного анализа и классификации.

При анализе устойчивости движения РН, а также при формировании алгоритмов управления требуется распределение набора форм колебаний по принадлежности их к тому или иному каналу управления либо динамическому контуру. В случае стержневой модели многоступенчатой РН, выполненной по тандемной схеме, такая классификация не составляет труда, так как та или иная форма колебаний обычно представлена определенным типом колебаний стержневой модели: продольными, изгибными или крутильными колебаниями (случай параметрических колебаний, при которых продольные колебания корпуса РН возбуждают поперечные колебания жидкости в баках и, как следствие поперечные колебания корпуса РН, обычно рассматривается отдельно).

Упругие колебания корпуса ракеты тандемной схемы можно разделить на три типа: продольные, поперечные (изгибные) и крутильные колебания. Стоит отметить, что частоты собственных колебаний одного типа, ракеты тандемной схемы, достаточно разделены между собой, что позволяет, при расчете, учитывать небольшое количество низших тонов колебаний. Динамике ракет-носителей тандемной схемы посвящено большое количество монографий, учебных пособий и научных статей. В настоящее время основные исследования динамики ракет тандемной компоновки направлены на детальное изучение влияния отдельных составляющих РН на динамические характеристики [15–18], учет различных видов демпфирования в системе [19–21], синтез систем управления с учетом новых, уточненных данных [22–24].

На сегодняшний день, несмотря на эксплуатацию и разработку новых РН, выполненных по тандемной схеме, перспективными являются многоступенчатые РН, выполненные по комбинированной схеме, где ускорители первой ступени соединены параллельно (пакетная компоновка), а последующие ступени следуют друг за другом по тандемной схеме (эту комбинированную схему в дальнейшем будем называть пакетной компоновкой, так как РН, выполненные только по пакетной схеме, в настоящее время не встречаются). Подобная компоновка обладает большей эффективностью по сравнению с тандемной [7], при этом значительное увеличение эффективности может быть достигнуто при использовании перераспределения компонентов топлива между боковыми и центральными блоками [6]. В то же время, анализ динамики РН пакетной компоновки значительно усложняется по сравнению с тандемом [10; 25–29].

Расчеты показывают, что формы собственных колебаний стержневых моделей РН пакетной компоновки имеют значительно более сложную структуру по сравнению с формами колебаний аналогичных моделей РН тандемной компоновки [12; 30]. Боковые стержни совершают совместные изгибно-продольно-крутильные колебания. Одними из первых опубликованных работ, выявляющих данную особенность являются исследования [31–34]. В них рассматриваются методы, позволяющие использовать существующие подходы для тандемных РН при анализе динамики РН пакетной компоновки. Так, в работе [32] предлагается модификация метода начальных параметров для расчета частот и форм колебаний, в работе [31] автор в результате исследования распределения собственных частот указывает на высокую размерность задачи и вычислительную сложность, в исследованиях [33; 34] содержатся практические рекомендации по расчету динамических характеристик РН пакетной компоновки. В работе [35] рассматривается математическая модель РН пакетной компоновки Н-II и ее экспериментальная отработка на динамически подобной модели (рисунок 1.1)

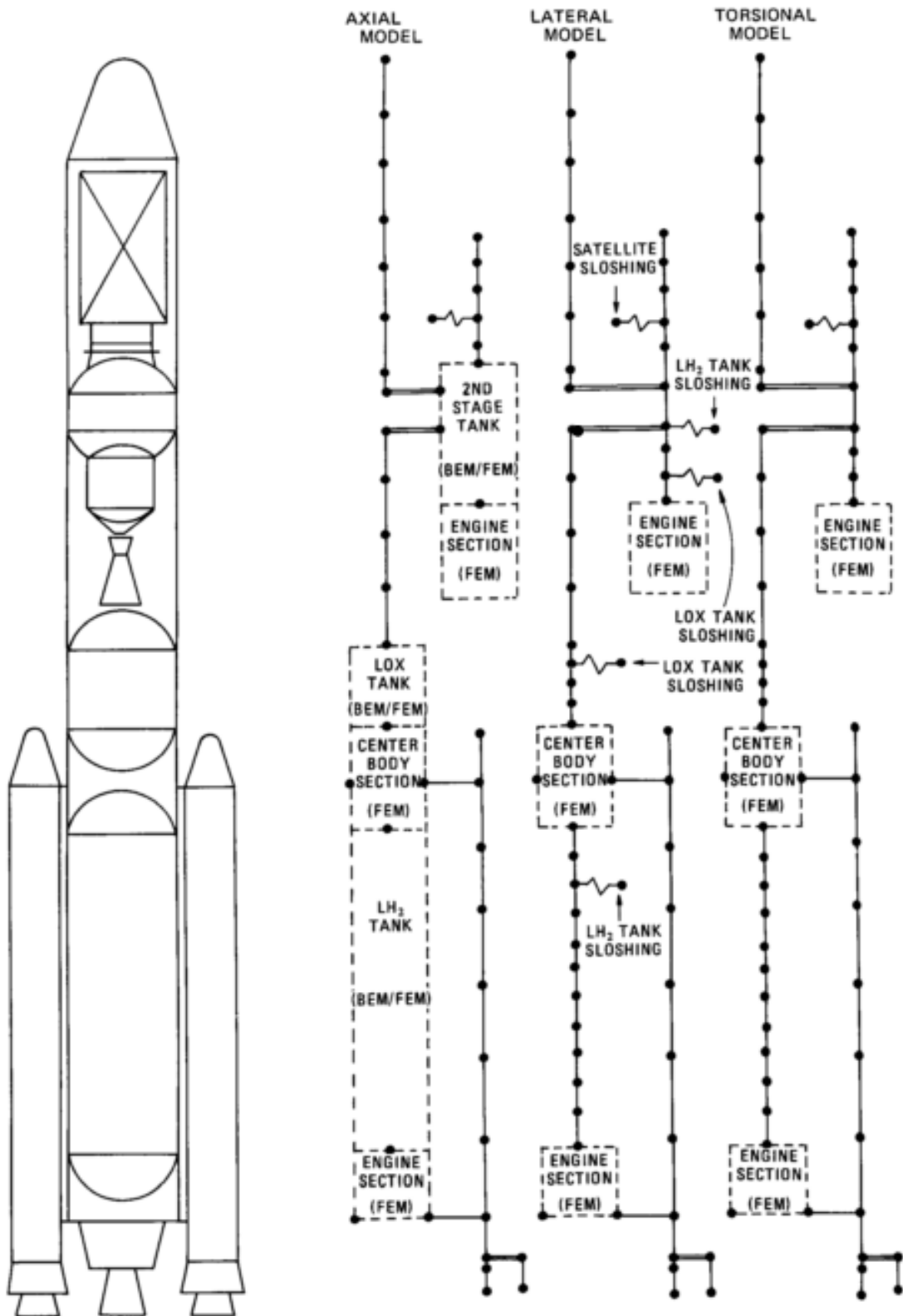
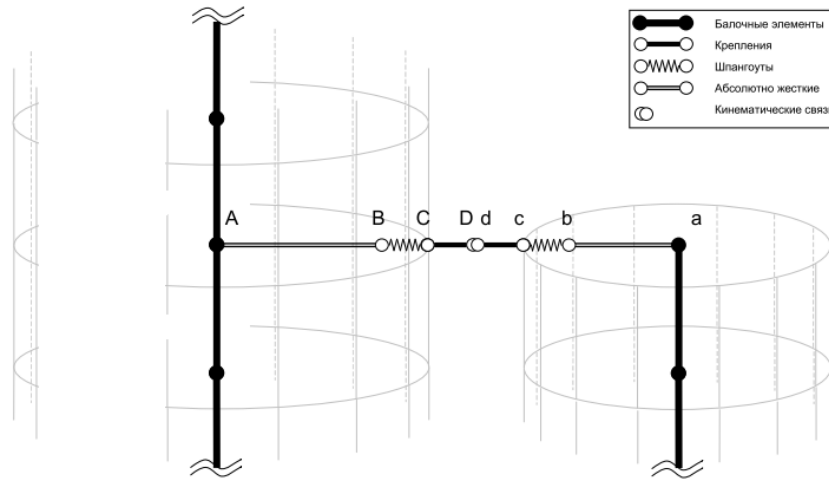


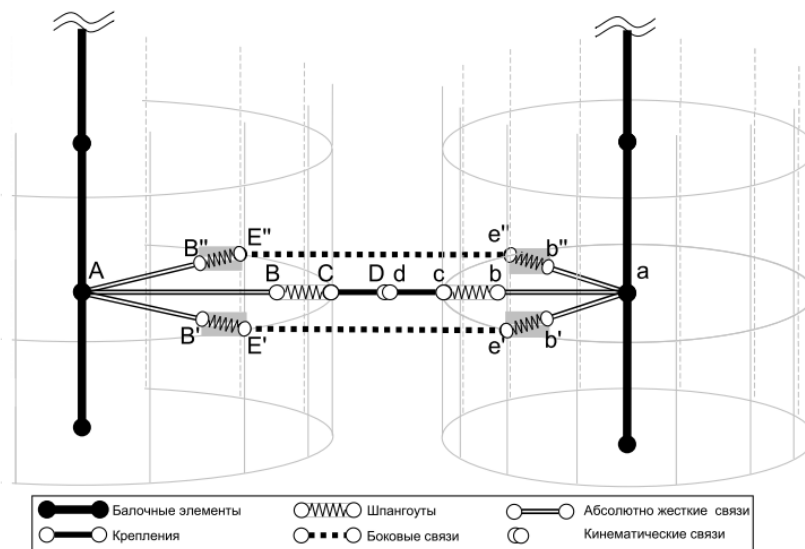
Рисунок 1.1 — Математическая модель РН Н-II для исследования собственных колебаний

Стоит отметить, что перечисленные работы содержат лишь частичный анализ форм колебаний и трудностей возникающих при их вычислении. В то же время, в СССР, при проектировании новых РН (в частности Р-7), сложность динамических задач, обусловленная особенностями пакетной компоновки приводила к аварийности на первых испытательных пусках и увеличению времени и объема отработки изделий [36; 37]. В результате исследований, проведенных в ЦНИИМаш, была опубликована серия работ, в которой проводился глубокий анализ как расчета собственных форм и частот колебаний РН пакетной компоновки, так и связанных с ними особенностей синтеза систем управления и анализа их устойчивости [10—13]. Основной идеей в данных работах является классификация форм колебаний РН пакетной компоновки исходя из различных возможных движений центрального блока, которые выполняют функцию силового возбуждения для боковых блоков.

Также стоит отметить возросший интерес к исследованию динамики РН пакетной компоновки в Украине. В работе [38] изучено влияние учета инерции вращения и деформации сдвига элементов балочного типа на расчетные значения собственных частот колебаний, в работе [39] представлена методика построения расчетной модели узлов крепления межблочных связей с применением конечных элементов балочного типа, суперэлементов, абсолютно жестких и кинематических связей для динамической стержневой модели РН пакетной компоновки (рисунок 1.2).



а) Схема моделирования межблочных связей верхнего пояса



б) Схема моделирования межблочных связей нижнего пояса

Рисунок 1.2 — Схема моделирования межблочных связей поясов РН с применением стержневых элементов балочного типа, суперэлементов, абсолютно жестких связей, кинематических связей (Цибенко)

В работах [40; 41] исследуются особенности динамики РН пакетной компоновки при наличии перераспределения компонентов топлива между боковыми и центральным блоком.

При исследовании динамики РН широко используются различные стержневые модели. Исследованию колебаний стержневых систем посвящено большое число работ, например, [42–44]. Так, в диссертационной работе А. А. Пожалостина [42] исследованы некоторые типы движений, возникающих при решении задачи о собственных колебаниях стержневых систем с учетом колебаний жидкости.

Несмотря на проведенную в ЦНИИМаш классификацию собственных форм колебаний РН пакетной компоновки, определенные сложности вызывает наличие кратных частот в спектре. В этом случае собственное подпространство содержит несколько ортогональных форм колебаний, и их линейная комбинация также является формой колебаний, соответствующей данной частоте. В итоге численный решатель на выходе дает результаты, соответствующие произвольным линейным комбинациям форм, относящимся к различным каналам управления.

В силу того, что при проектных расчетах можно считать боковые блоки РН пакетной компоновки идентичными, то соответствующая механическая система обладает пространственной симметрией, и, следовательно, к исследованию ее собственных колебаний может быть применен такой математический аппарат как теория представлений групп, элементами которых являются преобразования симметрии.

1.2 Использование симметрии механической системы при анализе задачи динамики и статики конструкций

К настоящему времени, использованию свойств симметрии механической системы для упрощения решения задач статики, динамики и устойчивости посвящено большое количество статей и монографий.

При решении задач механики широко используется прием, редуцирующий исходную механическую систему, в случае если она симметрична относительно отражения в какой либо плоскости (симметричные и кососимметричные перемещения и силовые факторы). В случае если симметрия механической системы имеет больший порядок, то редуцирование исходной системы возможно, но без применения специальных математических средств весьма затруднено.

Исторически, наиболее ранними работами, в которых использована симметрия системы высокого порядка, являются работы по исследованию колебаний атомов в кристаллических решетках [45] (теория теплоемкости) и колебаний отдельных многоатомных молекул [46]. В данных работах приведены подходы к вычислению частот и форм колебаний указанных механических си-

стем, полученные с помощью элементарных методов и преобразований, исходя из эвристических соображений, которые позволили редуцировать эти сложные механические системы, используя их симметрию. Тем не менее, данные подходы достаточно громоздки и не позволяют обобщить использование свойств симметрии для других задач.

Для анализа динамики механических систем, обладающих регулярной и, в частности, циклически симметричной структурой, широкое применение находит подход, при котором рассматривается упругое поведение типового (регулярного) элемента, а динамические характеристики всей системы рассчитываются после последовательного соединения типовых элементов с помощью различных математических методов (методы склейки, континуальный подход и т.п.). Основы указанных подходов рассмотрены в [47; 48]. В пособии [49] приведены приложения метода переходных матриц к расчету циклически симметричных конструкций в конечно-элементной постановке. В работе [50] исследовано деформирование упругих труб переменного поперечного сечения с выделением ячейки периодичности в случае короткопериодических малых отклонений поперечного сечения трубы. В работах [51; 52] исследованы задачи об определении напряженно-деформированного состояния циклических систем, представленных диском компрессора, с закрепленными в нем лопатками. Строгое математическое изложение дискретно-континуального анализа регулярных конструкций приведено в диссертационной работе Л.С. Рыбакова [53].

В начале XX века с развитием квантовой механики началось широкое применение развивающейся в то время теории групп, которая со временем стала широко использоваться для получения новых результатов и интерпретации уже существующих аспектов. Оказалось, что симметрию некоторой физической системы удобно описывать как набор преобразований симметрии, образующих группу. Основы использования теории групп в квантовой механике были заложены в работах Ю. Вигнера. В его работе [54] впервые применен теоретико-групповой подход к решению задачи о колебаниях механических систем. В данной работе рассмотрена классификация собственных колебаний механической системы с конечным числом степеней свободы (например, многоатомной молекулы) на основе неприводимых представлений группы симметрии рассматриваемой системы, и, далее, нахождение частот этих колебаний.

Идеи Вигнера, изложенные в данной статье нашли развитие во многих монографиях по физической химии, спектроскопии, квантовой механике [55—58].

При этом, несмотря на возможность классификации форм колебаний по неприводимым представлениям группы симметрии, открытым оставался вопрос о нахождении или, хотя бы, некотором описании формы колебаний. В монографии [56] данная задача решается с помощью теорем классической механики, примененных совместно с матричными элементами неприводимых представлений. Но такой подход сложно формализовать, и его применение для систем с большим числом степеней свободы крайне затруднительно.

Применение теории представлений конечных групп к задачам строительной механики было предложено сербским ученым Дж. Злоковичем. В своей монографии [59], используя проекционные операторы вида

$$P^{(R_\varphi^i)} = \frac{\beta_\varphi}{G(S_n)} \sum_{S_n} T_{ii}^{(R_\varphi^i)}(g) T(g) \quad (1.1)$$

полученные ранее во многих работах по теории групп [60], [61], Злокович получил новые сведения о перемещениях упругих систем в задачах статики и колебаний. В частности с помощью данных операторов были получены новые переменные, позволяющие приводить структурные матрицы (жесткости, масс) к блочно-диагональной форме, а также редуцировать размерность исходного конфигурационного пространства и получать количественные соотношения перемещений системы с точностью до константы.

Наряду с [59] одной из первых работ, в которых было рассмотрено применение теории групп к исследованию задач о колебаниях симметричных механических систем, является работа [62].

Теоретико-групповой подход, предложенный Злоковичем, нашел широкое развитие в последующих работах по приложениям теории групп к таким областям механики как теория устойчивости конструкций, задачи о собственных колебаниях и задачи статики.

По сравнению с другими, описанными выше методами анализа динамики симметричных систем, теоретико-групповой подход является более абстрактным и общим, что позволяет рассмотреть более широкий класс механических систем и расширить область возможных приложений.

Теоретико-групповые методы нашли широкое применение в численных методах, в частности в методе конечных элементов и методе конечных разностей. В работе [63] приведен подробный обзор существующих приложений теории групп в механике конструкций.

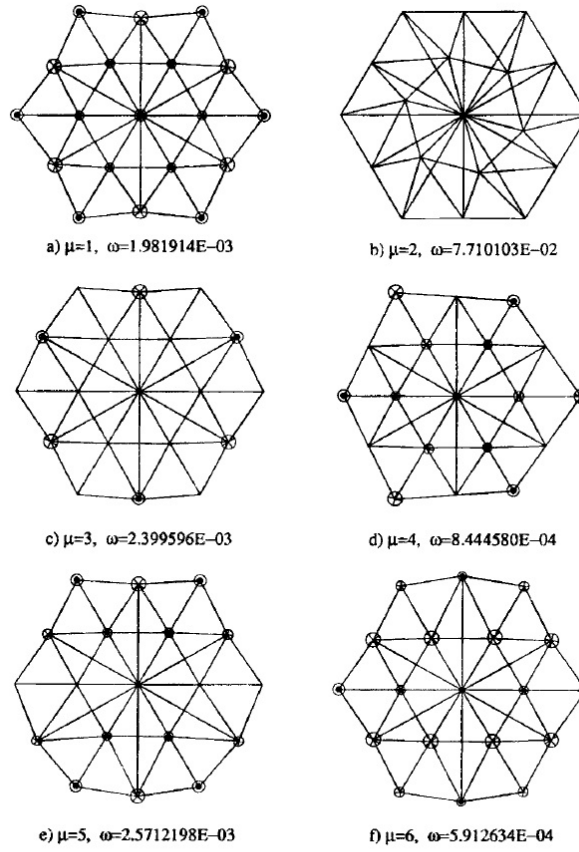
Помимо задач о собственных колебаниях, теория групп нашла применение и в других областях механики: в работах [64–67] рассматривается применение теории групп к исследованию прочности и свойств упругости композиционных материалов.

Возможность сведения задачи об устойчивости равновесия механической системы к спектральной задаче для некоторого оператора позволила применить теорию групп к бифуркационным проблемам механики. В одной из наиболее ранних работ, посвященных данной теме [68], рассматривается применение теории групп к задаче устойчивости ферменных конструкций, обладающих симметрией. В работе [69] исследуется задача о сжатии призматического стержня после потери устойчивости. Для различных симметрий поперечного сечения приведены бифуркационные диаграммы и классификация возможных решений задачи.

Исследованию устойчивости механических систем, таких как ферменные купольные сооружения, обладающих различными типами симметрии посвящена работа [70]. Авторами показано, что потеря устойчивости механических систем, обладающих симметрией, представляет собой существенно более сложную задачу, так как потеря устойчивости может проходить по большому количеству различных путей, которые можно классифицировать используя теорию групп. Дальнейшее приложение идей, сформулированных в данной статье, изложено в работах [71–73]. Основные преимущества теоретико-группового подхода, выявленные в данных исследованиях состоят в: 1) упрощение вычислительных процедур (например приведение матрицы жесткости к блочно-диагональной форме), 2) обход проблем возникающих при численном решении (плохая обусловленность исходной задачи), 3) получение информации о формах потери устойчивости до решения задачи.

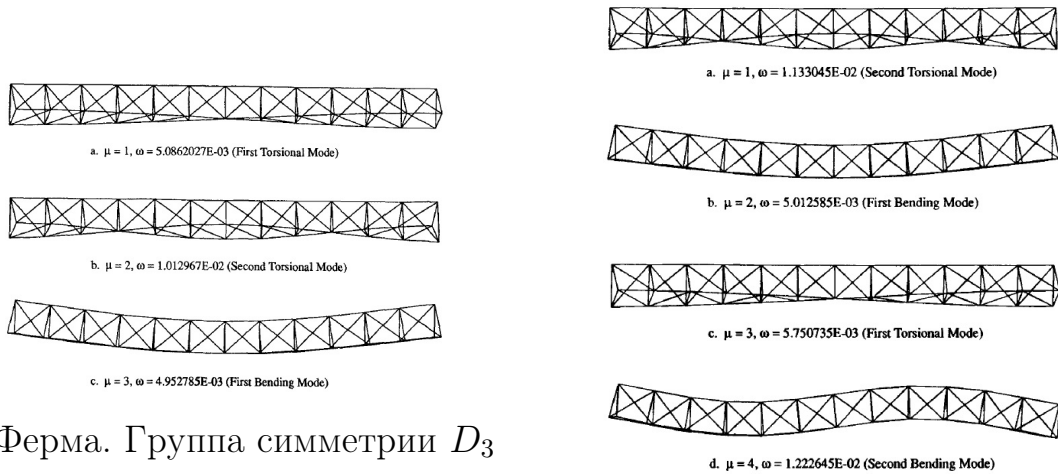
Применение теоретико-группового подхода в задачах о собственных колебаниях конструкций было развито такими авторами как А. Зингони (A. Zingoni), Т. Дж. Хили (T. J. Healey), Дж. А. Трейси (J. A. Treacy), Р. Д. Кангвай (R. D. Kangwai), А. Кавех (A. Kaveh), С. Дж. Мохан (S. J. Mohan).

В работе [74] приведены решения задачи о собственных колебаниях таких стержневых систем как антенны и фермы космических аппаратов, динамике которых посвящено большое число научных работ [75—79]. На рисунке 1.3 приведены формы низших частот колебаний полученные в данной работе для указанных конструкций.



⊙ Displacement into page
 ⊗ Displacement out of page

а) Параболическая антенна. Группа симметрии C_{6v}



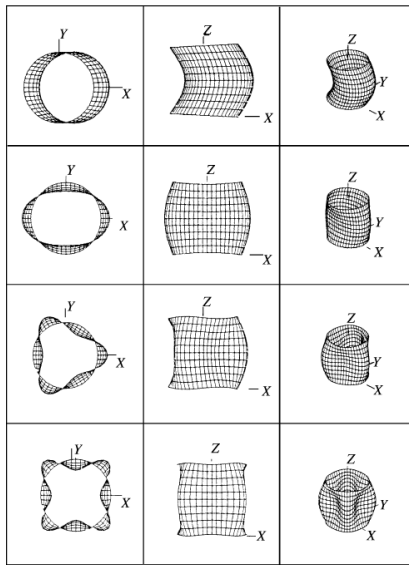
б) Ферма. Группа симметрии D_3

в) Ферма. Группа симметрии C_{3h}

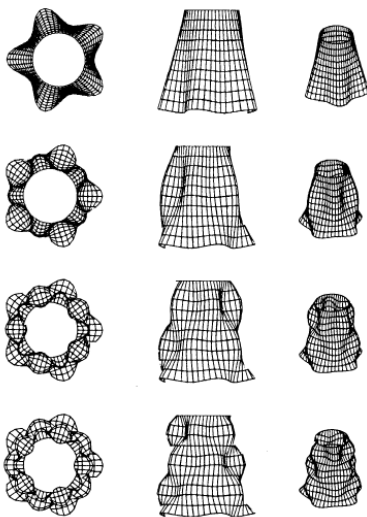
Рисунок 1.3 — Формы колебаний стержневых систем Healey

В статье [80] рассмотрены задачи статики для плоских стержневых систем, обладающих симметрией. В работе [81] исследуются собственные колебания оболочек вращения в конечно-элементной (КЭ) постановке. Так как рассмотренная в задаче КЭ модель представляет собой регулярную сетку, то к ее

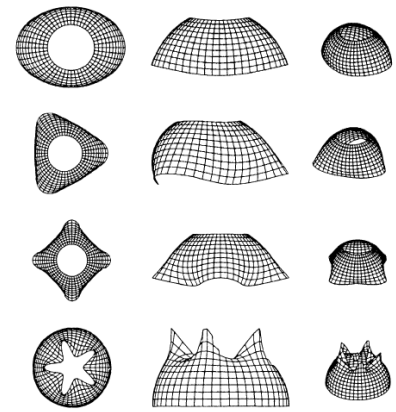
матрицам жесткости и масс можно применить теоретико-групповые методы. В статье приведены результаты вычисления частот колебаний для цилиндрической, сферической и конической оболочек, а также их комбинации. Проведена оценка затрат машинного времени для различной дискретизации модели и отмечена его значительная экономия при использовании факторизации с помощью теории групп по сравнению с решением задачи «целиком». На рисунке 1.4 приведены формы колебаний оболочек полученные в данной работе.



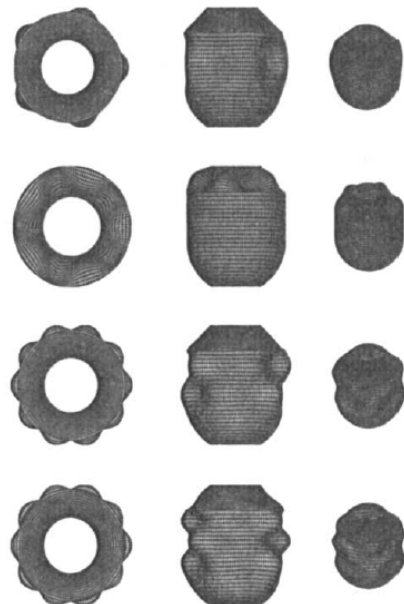
а) Цилиндрическая оболочка



в) Коническая оболочка



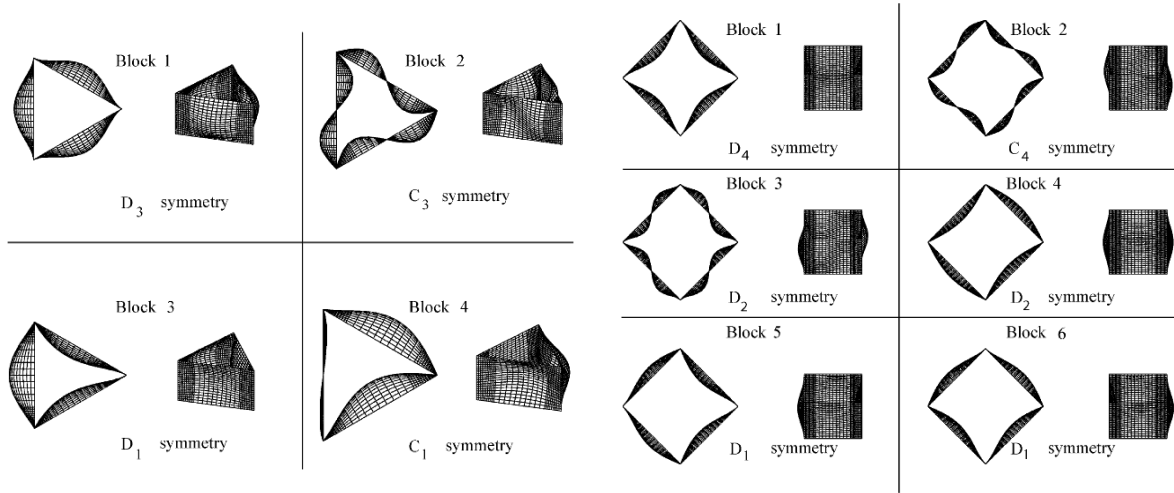
б) Сферическая оболочка



г) Комбинация оболочек

Рисунок 1.4 — Колебания оболочек вращения, соответствующие различным неприводимым представлениям соответствующих групп симметрии Mohan

В статье [82] рассмотрены колебания оболочек, представляющих собой полигональные каналы. Приведены результаты численных расчетов и их интерпретация. Некоторые примеры найденных форм колебаний приведены на рисунке 1.5.



а) Треугольный канал

б) Квадратный канал

Рисунок 1.5 — Формы колебаний полигональных каналов Mohan

В работах [83], [84] рассмотрено применение теоретико-групповых методов к пружинно-массовым моделям. Для определения группы симметрии систем с большим числом степеней свободы предложено использование теории графов. В итоге для определения симметрии систем, в которых достаточно сложно определить группу симметрии, можно исследовать соответствующий граф, тем самым раскрывая внутренние взаимосвязи в системе. Примеры систем и их графов приведены на рисунке 1.6.

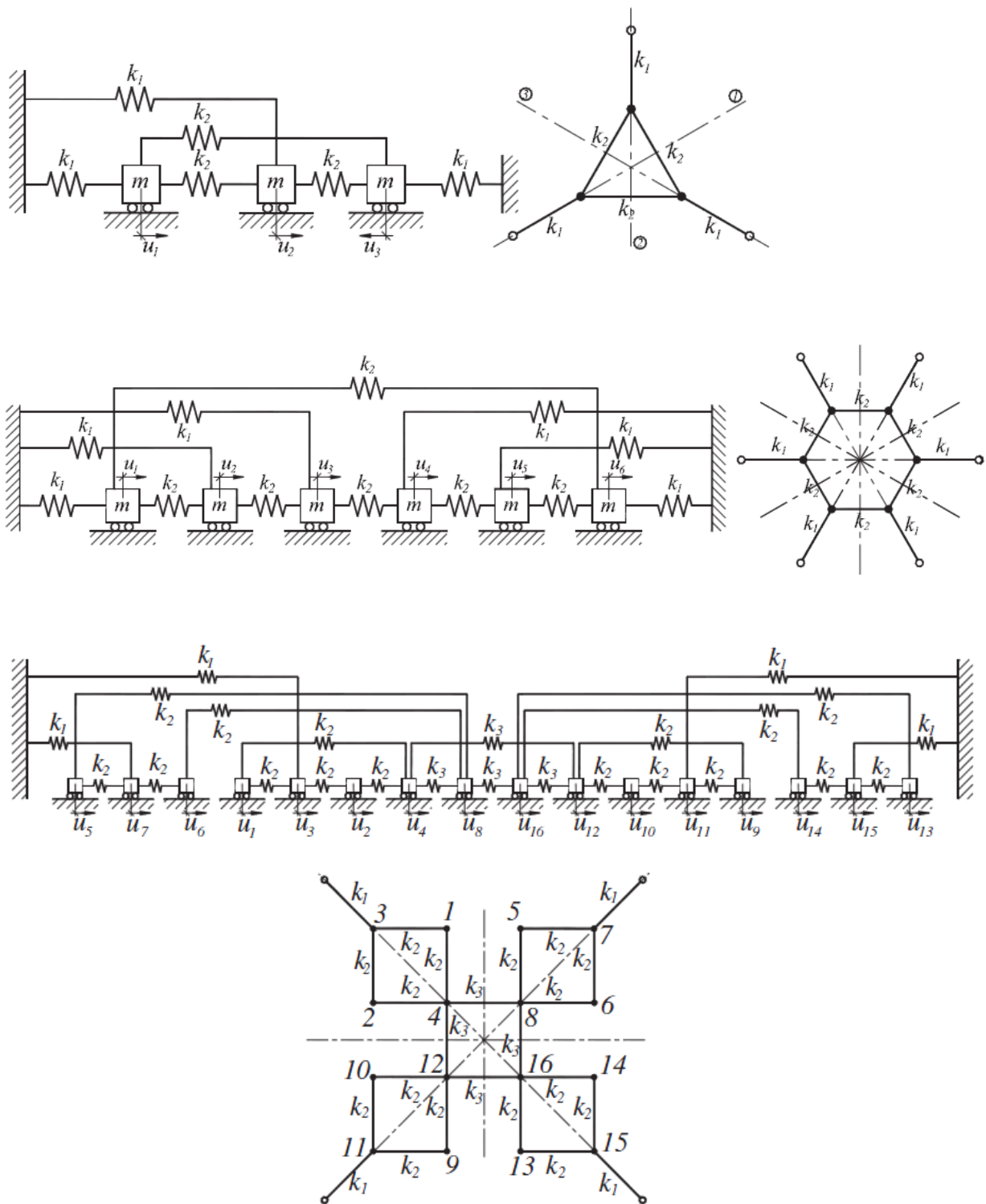


Рисунок 1.6 — Симметричные пружинно-массовые модели и их графы

В работах [85] рассмотрены задачи о собственных колебаниях многослойных стержневых систем. Для различных конфигураций приведены группы симметрии и соответствующие их неприводимым представлениям инвариантные подпространства. На рисунке 1.7 приведен пример такого решения.

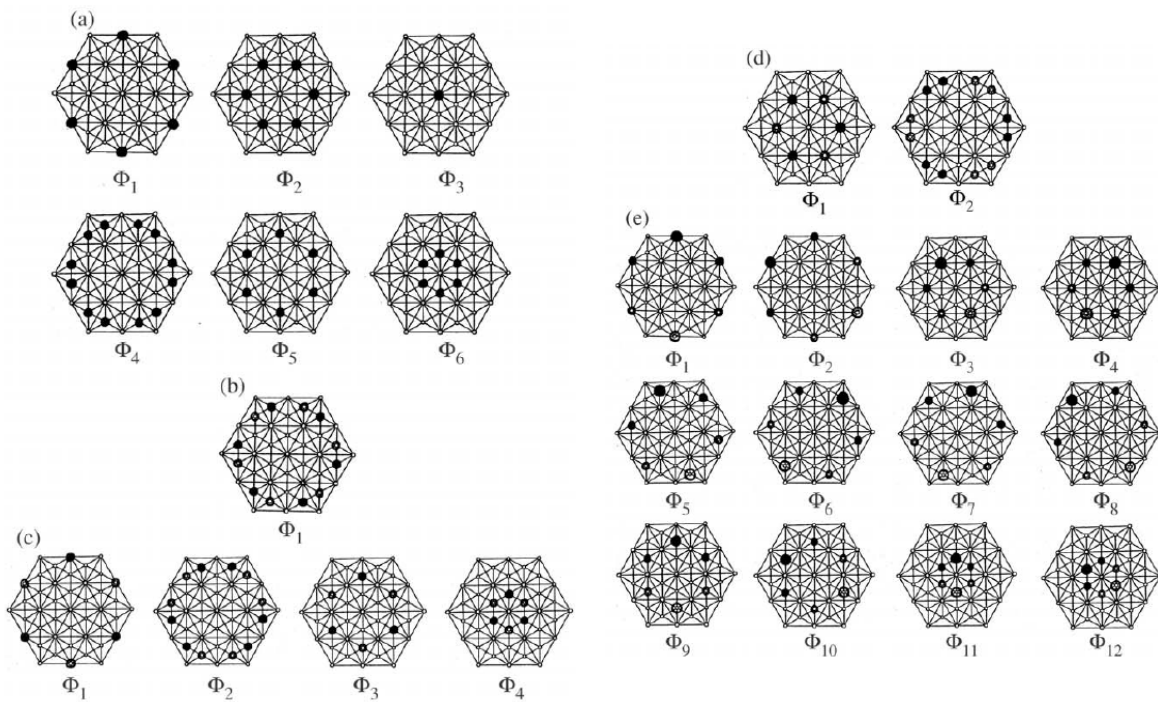


Рисунок 1.7 — Базисные вектора подпространств неприводимых представлений для гексагональной фермы

В статье [86] предложен алгоритм определения симметрии из системы произвольно расположенных точек. Приведена блок схема и результаты использования программной реализации данного алгоритма. Статья [87] содержит компиляцию исследований автора по данной тематике, а также подробное библиографическое исследование. В статье рассмотрены задачи о колебаниях пружинно-массовых моделей, многослойных космических стержневых конструкций, тросовых систем находящихся в преднатянтом состоянии, пластин в конечно-разностной постановке. Задача о колебаниях пластин также рассмотрена в [88]. Автором Zingoni также была опубликована монография, в которой представлены результаты его исследований в приложении к строительной механике конструкций [89].

1.3 Заключение по первой главе

Общей особенностью всех упомянутых выше работ является то, что для исследования задач о собственных колебаниях, методы теории групп в них при-

меняются к системам с конечным числом степеней свободы: либо к системам с сосредоточенными параметрами, либо к дискретным моделям систем с распределенными параметрами.

Если механическая система включает в себя сплошную среду, то возникает вопрос, возможно ли исследовать симметричные свойства соответствующей спектральной задачи, используя стандартные методы отыскания групп симметрии систем дифференциальных уравнений, и как полученные результаты будут соотноситься с группой пространственной симметрии механической системы?

Для исследования данного вопроса рассмотрим модельную задачу о продольных колебаниях стержней, соединенных с помощью линейно-упругих элементов.

Глава 2. Продольные колебания стержневых систем

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим стержневую систему, состоящую из N идентичных стержней длиной l («боковых» стержней), одним концом соединенных с помощью линейно-упругих связей со стержнем, имеющим отличные от них инерционно-жесткостные характеристики (будем называть его «центральным»)[90—94]. Для боковых стержней будем использовать индексы $1...N$, для центрального – нулевой индекс. Продольная жесткость стержней $p_j(x) \in C^1[0, l], j = 0...N$, погонная масса $m_j(x) \in C^0[0, l], j = 0...N$ являются положительными ограниченными функциями координаты x . Боковые стержни соединены с центральным сечением с координатой l . Расчетная схема представлена на рисунке 2.1.

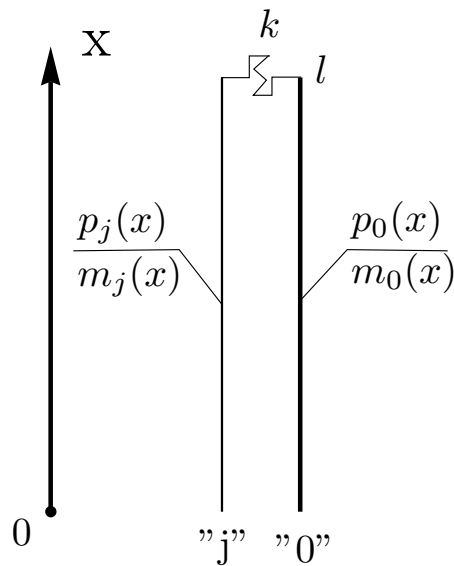


Рисунок 2.1 — Стержневая система, совершающая продольные колебания

Будем рассматривать продольные колебания стержней, описываемые уравнениями

$$m_j(x) \frac{\partial^2 u_j(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p_j(x) \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x} \right) = 0, j = 0 \dots N \quad (2.1)$$

Граничные условия для сечений с координатами $x = 0$ и $x = l$ имеют вид

$$\begin{aligned}
u'_j(0,t) &= 0, \quad j = 0 \dots N \\
p_j(l) u'_j(l,t) + k(u_j(l,t) - u_0(l,t)) &= 0, \quad j = 1 \dots N \\
p_0(l) u'_0(l,t) + k\left(N \cdot u_0(l,t) - \sum_{j=1}^N u_j(l,t)\right) &= 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Примем $(u_j(x,t) = u_j(x) \cdot e^{i\omega t})$. Перепишем уравнения (2.1) в следующем виде:

$$\frac{1}{m_j(x)} \frac{d}{dx} \left(p_j(x) \frac{du_j(x)}{dx} \right) + \lambda \cdot u_j(x) = 0, \quad j = 0 \dots N \tag{2.3}$$

где $\lambda = \omega^2$.

2.2 Групповой анализ

Уравнения (2.3) можно рассмотреть как систему дифференциальных уравнений. Пусть $M \subset \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ открытое подмножество пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$, где $\mathcal{X} := \{x\}$, $\mathcal{U} := \{u_0, u_1, \dots, u_N\}$. Определим пространство $\mathcal{X} \times \mathcal{U}^{(2)}$, являющееся вторым продолжением пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$. Здесь $\mathcal{U}^{(2)} := \left\{ u_0, u_1 \dots u_N, \frac{du_0}{dx}, \frac{du_1}{dx}, \dots, \frac{du_N}{dx}, \frac{d^2u_0}{dx^2}, \frac{d^2u_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^2u_N}{dx^2} \right\}$. Подмножеству M в пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{U}^{(2)}$ соответствует подмножество $M^{(2)}$. Отображение $\Delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N\}$, определяемое левыми частями уравнений (2.3) переводит $M^{(2)}$ в $N + 1$ -мерное евклидово пространство: $\Delta : M^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$. Система уравнений (2.3) определяет подмногообразие $\wp_{\Delta}^{(2)} = \{\mu \in M^{(2)} : \Delta(\mu) = \{0\}\}$, состоящее из ее решений.

Определение 1. Будем называть локальную группу G преобразований, действующую на открытом подмножестве $M \subset \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, группой симметрии системы дифференциальных уравнений $\Delta(\mu) = \{0\}$, $\mu \in M^{(2)}$, если ее продолжение оставляет инвариантным подмногообразие $\wp_{\Delta}^{(2)}$, т. е. для $\forall \mu \in \wp_{\Delta}^{(2)}$ следует, что $pr^{(2)}g \cdot \mu \in \wp_{\Delta}^{(2)}$, где $pr^{(2)}g$ – второе продолжение действия группы G .

Однопараметрические группы симметрии G_i системы (2.3) найдем, определив алгебру Ли их инфинитезимальных генераторов v_i , удовлетворяющих критерию инфинитезимальной инвариантности [95]:

$$\text{pr}^{(2)}v_i(\Delta_j(\mu)) = 0, j = 0 \dots N \quad (2.4)$$

В пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ инфинитезимальный генератор v в общем случае имеет $N + 2$ компоненты:

$$v = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=0}^N \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j}$$

Второе продолжение оператора v запишем в виде:

$$\text{pr}^{(2)}v = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=0}^N \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{j=0}^N \eta_j^x \frac{\partial}{\partial u_{j[x]}} + \sum_{j=0}^N \eta_j^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{j[x,x]}} \quad (2.5)$$

Здесь $u_{j,[x]} = \frac{\partial u_j}{\partial x}$, $u_{j,[x,x]} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}$. Компоненты η_j^x и η_j^{xx} определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \eta_j^x &= D_x (\eta_j - \xi u_{j,[x]}) + \xi u_{j,[x,x]} \\ \eta_j^{xx} &= D_{xx} (\eta_j - \xi u_{j,[x]}) + \xi u_{j,[x,x,x]} \end{aligned}$$

где D_x, D_{xx} – полные производные,

$$u_{j,[x,x,x]} = \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3}$$

Подстановка (2.3) и (2.5) в (2.4) позволяет записать систему уравнений для определения функций ξ и η_j :

$$\eta_j^{xx} \cdot \frac{p_j(x)}{m_j(x)} + \eta_j^x \cdot \frac{dp_j(x)}{dx} \frac{1}{m_j(x)} + \lambda \cdot \eta_j(x) = 0, j = 0 \dots N \quad (2.6)$$

Исходя из идентичности боковых стержней примем $p_j(x) = p_s(x)$, $m_j(x) = m_s(x)$, $j = 1 \dots N$. Пусть $\alpha_j(x)$, $j = 0 \dots N$ является произвольным

решением j -ого уравнения системы (2.3). Тогда решения системы (2.6) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\xi &= 0; \\ \eta_0 &= C_0 u_0 + \alpha_0(x) \\ \eta_j &= \sum_{i=1}^N C_{ij} u_i + \alpha_j(x), \quad j = 1 \dots N\end{aligned}$$

Таким образом, алгебра Ли инфинитезимальных симметрий системы (2.3) порождается $N^2 + 1$ векторными полями

$$\begin{aligned}v_0 &= u_0 \frac{\partial}{\partial u_0}; \\ v_{ij} &= u_i \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad i = 1 \dots N, j = 1 \dots N;\end{aligned}\tag{2.7}$$

и $N + 1$ бесконечными подалгебрами

$$v_{\alpha_j} = \alpha_j(x) \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad j = 0 \dots N\tag{2.8}$$

Действия однопараметрических групп, соответствующих найденным инфинитезимальным операторам, найдем проэкспоненцировав выражения (2.7), (2.8):

$$\begin{aligned}G_j &: (x, \dots, e^\varepsilon u_j, \dots), \quad j = 0 \dots N \\ G_{ij} &: (x, \dots, u_i + \varepsilon u_j, \dots), \quad i = 1 \dots N, j = 1 \dots N, i \neq j \\ G_{\alpha_j} &: (x, \dots, u_j + \alpha_j(x), \dots), \quad j = 0 \dots N\end{aligned}\tag{2.9}$$

Найденные группы симметрии демонстрируют линейность уравнений (2.3), при этом, группы G_{ij} указывают на возможность перестановки функций перемещений боковых стержней.

2.3 Операторная постановка

Для исследования задачи о собственных колебаниях стержневой системы приведем операторную постановку сформулированных выше задач. Введем гильбертово пространство $H = \left(\sum_{j=0}^N \oplus L_{2j}([0, l], m_j(x)) \right) \ominus \{1\}$, вектор-функции $U(t) = \{u_j(t)\}^T$, где $u_j(t) \in C^{2,2}(L_{2j}([0, l], m_j(x)), [0, \infty))$, $\{1\}$ – единичный вектор.

Скалярное произведение в H запишем следующим образом

$$(U^r(t), U^s(t)) = \sum_{j=0}^N (u_j^r(t), u_j^s(t)) = \sum_{j=0}^N \int_0^l m_j(x) u_j^r(t) u_j^s(t) dx$$

Введем матричный оператор $A = \text{diag} \left(-\frac{1}{m_j(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(p_j(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \right)$ действующий на множестве $H \supset D(A) : \Omega U(t) = 0$, где Ω – оператор граничных условий, определяемый соотношениями (2.2). Приняв $U(t) = U \cdot e^{i\omega t}$, из уравнений (2.1), дополненных граничными условиями (2.2) получим спектральную задачу для оператора A

$$AU = \lambda U \quad (2.10)$$

Лемма 1. *Оператор A – неограниченный, самосопряженный, положительно определенный в H оператор. Квадрат нормы в энергетическом пространстве оператора A имеет вид*

$$\|U\|_A^2 = \sum_{j=0}^N \int_0^l p_j(x) \left(\frac{du_j}{dx} \right)^2 dx + k \sum_{j=1}^N (u_0(l) - u_j(l))^2 = 2\Pi > 0 \quad (2.11)$$

Доказательство. Неограниченность оператора A непосредственно следует из того, что каждый из матричных элементов A неограничен. Самосопряженность

и положительная определенность оператора A проверяются непосредственно:

$$\begin{aligned}
(AU, V)_H &= \sum_{j=0}^N \int_0^l m_j(x) \left(-\frac{1}{m_j(x)} \frac{d}{dx} \left(EF_j(x) \frac{du_j(x)}{dx} \right) \right) v_j(x) dx = \\
&= \dots = \sum_{j=0}^N \int_0^l EF_j(x) u'_j(x) v'_j(x) dx - \sum_{j=0}^N EF_j(x) u'_j(x) v_j(x) \Big|_0^l = \\
&= \sum_{j=0}^N \int_0^l EF_j(x) u'_j(x) v'_j(x) dx - \sum_{j=0}^N EF_j(l) u'_j(l) v_j(l) = \\
&= \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) u'_j(x) v'_j(x) dx + \\
&+ \sum_{j=1}^N k(u_0(l) - u_j(l))(v_0(l) - v_j(l)) = (U, AV)_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(AU, U)_H &= \dots = \sum_{j=0}^N \int_0^l EF_j(x) u_j'^2(x) dx - \\
&- \sum_{j=1}^N EF_j(x) u'_j(x) u_j(x) \Big|_0^l = \sum_{j=1}^N \int_0^l EF_j(x) u_j'^2(x) dx - \\
&- u_j(l) \sum_{j=1}^N k(u_0(l) - u_j(l)) + u_0(l) \sum_{j=1}^N k(u_0(l) - u_j(l)) = \\
&= \sum_{j=0}^N \int_0^l EF_j(x) u_j'^2(x) dx + k \sum_{j=1}^N (u_0(l) - u_j(l))^2 \geq c^2(U, U)_H
\end{aligned}$$

Из приведенных результатов следует, что энергетическая норма оператора выражается формулой (2.11). \square

Теорема 1. *Оператор A имеет положительный дискретный спектр собственных значений*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots, \lambda_m \rightarrow \infty$$

и систему собственных функций $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ полную и ортогональную в пространствах H и H_A , при этом справедливы следующие соотношения ортогональности

$$\begin{aligned} (U_m, U_s) &= \sum_{j=0}^N \int_0^l m_j(x) u_{mj} u_{sj} dx = \delta_{ms} \\ (U_m, U_s)_A &= \sum_{j=0}^N \int_0^l p_j(x) \left(\frac{du_{mj}}{dx} \right) \left(\frac{du_{sj}}{dx} \right) dx + \\ &+ k \sum_{j=1}^N (u_0(l) - u_{mj}(l)) (u_0(l) - u_{sj}(l)) = \lambda \delta_{ms} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Доказательство. Положительность и вещественность спектра непосредственно следуют из Леммы 1. Для доказательства дискретности спектра рассмотрим пространство Соболева [96] $W_2^1 = \sum_{j=0}^N \oplus W_{2j}^1([0, l])$ с соответствующим скалярным произведением:

$$(V, W)_{W_2^1} = \sum_{j=0}^N \int_0^l \left[\left(\frac{dv_j}{dx} \right) \left(\frac{dw_j}{dx} \right) + v_j w_j \right] dx$$

Будем называть нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентными, если $\exists (c_1, c_2) : 0 < c_1 \leq c_2$ и выполняются следующие соотношения для $\forall U$:

$$c_1 \|U\|_2 \leq \|U\|_1 \leq c_2 \|U\|_2$$

Принимая во внимание, что функции $p_j(x)$ и $m_j(x)$ положительны и ограничены и, используя неравенство Пуанкаре несложно показать, что норма в пространстве H эквивалентна норме в пространстве $L_2 = \left(\sum_{j=0}^N \oplus L_{2j}([0, l]) \right)$, а также норма в пространстве H_A эквивалентна норме в пространстве W_2^1 . Следовательно, так как пространство W_2^1 компактно вложено в L_2 , то пространство H_A компактно вложено в H , из чего можно утверждать, что спектр оператора A является дискретным [97; 98]. \square

2.4 Классификация собственных элементов оператора A

Проведенный выше анализ инфинитезимальных симметрий позволил определить все возможные преобразования симметрии уравнений (2.3). Постановка спектральной задачи (2.10) накладывает дополнительные ограничения на допустимые преобразования симметрии, а именно инвариантным должно оставаться множество собственных функций оператора A , являющееся подмножеством множества решений уравнений (2.3) [99]. Данное требование выражается в том, что если $T(g)$ оператор представления группы G в пространстве H , соответствующий элементу $g \in G$, то

$$\begin{aligned} \forall U \in D(A) &\Rightarrow T(g)U \in D(A) \\ \|T(g)U\| &= \|U\|, \quad \|T(g)U\|_A = \|U\|_A \end{aligned} \quad (2.13)$$

Теорема 2. *Оператор A коммутирует с операторами представления $T(S_n)$ и имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} T(S_n)AU_m &= AT(S_n)U_m = \lambda_m T(S_n)U_m \\ T(S_n)U_m &\in \Lambda \end{aligned}$$

где Λ – множество собственных функций оператора A . Собственные функции оператора A являются базисными функциями неприводимых представлений группы S_n .

Доказательство. Если рассматривать преобразования, касающиеся только боковых стержней, то симметриям (2.9) можно сопоставить группу $GL(N)$. Для выполнения условия сохранения нормы из (2.13) данная группа редуцируется до ортогональной группы $O(N)$.

Для выполнения первого условия из (2.13) необходимо, чтобы

$$\sum_{j=0}^N \Upsilon_{i,j} = 1, \quad i = 0 \dots N$$

где $\Upsilon_{i,j}$ компоненты матриц $O(N)$. Оставшиеся, после редукции группы $O(N)$ преобразования представляют собой перестановки функций перемещений боковых стержней и их линейные комбинации, не изменяющие нормы вектора U

и удовлетворяющие граничным условиям. Таким образом выявленные симметрии совпадают с интуитивно определяемыми из физической сущности задачи, т. е. произвольными перестановками боковых стержней.

Отсюда можно сделать вывод, что группой симметрии оператора A является симметрическая группа S_n , где $n = N$.

□

Групповая классификация собственных функций оператора позволяет сделать ряд полезных выводов о его спектре:

Теорема 3. *Спектр оператора A распадается на два подспектра $\sigma(A) = \sigma^{(e)}(A) \cup \sigma^{(s)}(A)$. Для собственных элементов оператора A , отвечающих $\lambda_m \in \sigma^{(e)}(A)$ справедливы соотношения*

$$u_1 = u_2 = \dots = u_N$$

а для элементов, отвечающих $\lambda_m \in \sigma^{(s)}(A)$:

$$\begin{aligned} u_0 &\equiv 0 \\ u_1 &= a_2 \cdot u_2 = \dots = a_N \cdot u_N \end{aligned}$$

причем $\sum_{i=2}^N a_i = -1$.

Доказательство. Пусть E – тривиальное неприводимое представление группы S_n . Характеры всех элементов группы в этом представлении равны единице: $\forall \chi^E(g) = 1, g \in S_n$ [61]. Обозначим R_φ неприводимое представление группы S_n , где индекс φ пробегает все неприводимые представления, отличные от E . Из теоремы об ортогональности характеров неприводимых представлений следует

$$\sum_{S_n} \chi^{(E)}(g) \cdot \chi^{(R_\varphi)}(g) = 0 \quad (2.14)$$

Ортопроекторы на подпространства одномерных неприводимых представлений имеют вид

$$P^{(R_\varphi)} = \frac{1}{G(S_n)} \sum_{S_n} \chi^{(R_\varphi)}(g) T(g) \quad (2.15)$$

а на строки многомерных соответственно

$$P^{(R_\varphi^i)} = \frac{\beta_\varphi}{G(S_n)} \sum_{S_n} T_{ii}^{(R_\varphi^i)}(g) T(g) \quad (2.16)$$

где β_φ – размерность φ -ого неприводимого представления, $G(S_n)$ – порядок группы S_n , $T_{ii}^{(R_\varphi^i)}(g)$ – диагональные матричные элементы, соответствующие рассматриваемой строке представления [99]. В пространстве вектор-функций H операторам представления $T(g)$ соответствуют матрицы $T_{ij}(g)$. Тогда, если $(g, U) = T(g)U$, то $(g, u_0) = \sum_{j=0}^N T_{0j}(g) u_j$. Так как в перестановках участвуют только боковые стержни, то

$$\begin{aligned} \forall j \neq 0, \forall g \in S_n : T_{0j}(g) &= 0 \\ T_{00}(g) &= 1 \end{aligned}$$

Очевидно, что ортопроекторы $P^{(R_\varphi)}$, являясь линейной комбинацией операторов $T(g)$ также имеют матричную форму. С учетом того, что $T_{00}(g) = \chi^{(E)}(g) = 1$, из (2.14) и (2.15) получим, что

$$\begin{aligned} u_0^{(E)} &= \sum_{j=0}^N P_{0j}^{(E)} u_0 = \frac{1}{G(S_n)} \cdot G(S_n) \cdot 1 \cdot 1 \cdot u_0 = u_0 \\ u_0^{(R_\varphi)} &= \sum_{j=0}^N P_{0j}^{(R_\varphi)} u_0 = \frac{\beta_\varphi}{G(S_n)} \cdot \sum_{S_n} \chi^{(R_\varphi)} \cdot 1 \cdot u_0 = 0 \end{aligned}$$

где $u_0^{(E)}$, $u_0^{(R_\varphi)}$ – проекции компоненты u_0 на соответствующие подпространства неприводимых представлений. Так как для собственных элементов оператора A выполняется соотношение $P^{(R)}U_m = U_m$, если U_m принадлежит неприводимому представлению R , то, следовательно, весь спектр оператора A распадается на два подспектра, для одного из которых $u_0 \equiv 0$.

Соотношения между формами колебаний боковых стержней следуют из граничных условий.

□

Соотношения связывающие формы колебаний боковых стержней можно получить, не прибегая к граничным условиям. Коэффициенты a_i могут быть

в явном виде получены из соотношения $P^{(R)}U_m = U_m$. В случае, если $R = E$ несложно показать прямой подстановкой, что $a_i = 1, i = 1 \dots N$.

Замечание 1. В соответствии с Теоремой 2 исходное пространство H распадается на сумму подпространств, натянутых на собственные элементы оператора A , которые являются в свою очередь базисными функциями соответствующих неприводимых представлений.

$$H = \sum_{R_\varphi} \oplus H^{(\varphi)}$$

где φ пробегает все неприводимые представления.

Определение 2. Алгебраически ортогональными векторами в пространстве вектор-функций H будем называть такие вектор-функции, которые являются ортогональными независимо от вида выражения для скалярного произведения их компонент (или иными словами, ортогональны в смысле пространства \mathbb{R}^n).

Теорема 4. Собственные элементы оператора A , отвечающие различным неприводимым представлениям (различным строкам многомерных неприводимых представлений) соответствующей группы S_n являются алгебраически ортогональными.

Доказательство. Так как проекционные операторы P разбивают исходное пространство на прямую сумму ортогональных подпространств, то следовательно они являются самосопряженными операторами. Тогда:

$$(U, V) = (PU, V) = (U, PV) = 0$$

если $PU = U$, а $PV = 0$. Последние соотношения следуют из ортогональности характеров (матричных элементов) неприводимых представлений, и никак не зависят от вида скалярного произведения в исходном пространстве. (Миллер стр. 93). □

2.5 Решение спектральной задачи в случае постоянных инерционно-жесткостных характеристик стержней.

Рассмотрим случай, когда

$$\begin{aligned} m_0(x) &\equiv m_0 = \text{const} \\ m_j(x) &\equiv m_s = \text{const}, j = 1 \dots N \\ p_0(x) &\equiv p_0 = \text{const} \\ p_j(x) &\equiv p_s = \text{const}, j = 1 \dots N \end{aligned}$$

Обозначим $\sqrt{\frac{\lambda m_0}{p_0}} = \tilde{\lambda}$, $\sqrt{\frac{m_s p_0}{p_s m_0}} = a$, $\frac{p_0}{k} = b$, $\frac{p_s}{k} = c$. С учетом однородного граничного условия для сечения стержня с координатой $x = 0$ формы колебаний стержней запишутся как

$$\begin{aligned} u_0(x) &= C_0 \cos(\tilde{\lambda}x) \\ u_j(x) &= C_j \cos(a\tilde{\lambda}x), j = 1 \dots N \end{aligned} \tag{2.17}$$

Уравнения для определения $\tilde{\lambda}$ для соответствующих подспектров получим, подставив функции из (2.17) в оставшиеся граничные условия из (2.2). Приравнявая определители, отвечающие соответствующим системам уравнений нулю получим для подспектра $\sigma^{(e)}$

$$b\tilde{\lambda} \tan(\tilde{\lambda}l) \left(1 - ca\tilde{\lambda} \tan(a\tilde{\lambda}l)\right) + Nca\tilde{\lambda} \tan(a\tilde{\lambda}l) = 0$$

для подспектра $\sigma^{(s)}$

$$\tan(a\tilde{\lambda}l) = \frac{1}{ca\tilde{\lambda}}$$

2.5.1 Решение спектральной задачи при $N = 2$

Для сравнения традиционного способа нахождения собственных значений и способа с использованием теоретико-группового подхода рассмотрим подробнее случай, когда $N = 2$.

Группа S_2 состоит из двух элементов: тождественного преобразования g_I и перестановки g_{1-2} . В пространстве H представление группы $T(S_2)$ состоит из двух матричных операторов $T(g_I)$ и $T(g_{1-2})$, соответствующих элементам группы.

$$T(g_I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad T(g_{1-2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

В таблице 1 приведены характеры $\chi^{(R_E, R_\beta)}$ неприводимых представлений E и R_β группы S_2 , и характеры $\chi^{(R_\tau)}$ полного представления R_τ группы S_2 в пространстве H .

Таблица 1 — Характеры представлений группы S_2 в пространстве H

Представление	g_I	g_{1-2}
E	1	1
R_β	1	-1
R_τ	3	1

Проекторы на подпространства неприводимых представлений в пространстве H имеют вид

$$P^{(E)} = \frac{1}{2} (T(g_I) + T(g_{1-2}))$$

$$P^{(R_\beta)} = \frac{1}{2} (T(g_I) - T(g_{1-2}))$$

Так как для собственного элемента U_k , принадлежащего подпространству φ -ого неприводимого представления должно выполняться равенство

$$P^{(R_\varphi)} U_k = U_k$$

то получаем что собственные элементы оператора A , принадлежащие подпространству неприводимого представления E имеют компоненты $\{u_0, u_s, u_s\}^T$, элементы принадлежащие подпространству неприводимого представления R_β имеют компоненты $\{0, u_s, -u_s\}^T$. Соответствующие инвариантные подпространства определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} H &= H^{(E)} \oplus H^{(R_\beta)} \\ H^{(E)} &= P^{(E)} H \\ H^{(R_\beta)} &= P^{(R_\beta)} H \end{aligned}$$

В подпространстве $H^{(E)}$ выполняется равенство $u_1(x) = u_2(x) = C_1 \cos(a\tilde{\lambda}x)$. Характеристическая матрица $L^{(E)}$ для нахождения собственных чисел λ , полученная с помощью подстановки функций (2.17) в граничные условия из (2.2) для координаты $x = l$, запишется следующим образом:

$$L^{(E)} = \begin{pmatrix} -\cos(\tilde{\lambda}) & -ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) + \cos(a\tilde{\lambda}l) \\ -b\tilde{\lambda} \sin(\tilde{\lambda}l) + 2\cos(\tilde{\lambda}l) & -2\cos(a\tilde{\lambda}l) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Собственные числа λ , соответствующие элементам из данного подпространства являются корнями определителя матрицы $L^{(E)}$:

$$\begin{aligned} \det(L^{(E)}) &= b\tilde{\lambda} \sin(\tilde{\lambda}l) \left(\cos(a\tilde{\lambda}l) - ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) \right) + \\ &+ 2\cos(\tilde{\lambda}l) ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Пусть $C_1 = 1$. Собственные функции подпространства $H^{(E)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_0(x) &= -\frac{\left(ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) - \cos(a\tilde{\lambda}l) \right)}{\cos(\tilde{\lambda}l)} \cos(\tilde{\lambda}x) \\ u_1(x) &= u_2(x) = \cos(a\tilde{\lambda}x) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Выделение части коэффициента для $u_0(x)$ в (2.20) сделано для удобства дальнейшего изложения. Для подпространства $H^{(R_\beta)}$: $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = -u_2(x) = C_1 \cos(a\tilde{\lambda}x)$. Получим аналогичные соотношения для подпростран-

ства $H^{(R_\beta)}$ при $C_1 = 1$:

$$L^{(R_\beta)} = \left(-ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) + \cos(a\tilde{\lambda}l) \right) \quad (2.21)$$

$$\det(L^{(R_\beta)}) = -\left(ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) - \cos(a\tilde{\lambda}l) \right) = 0 \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 0 \\ u_1(x) &= -u_2(x) = \cos(a\tilde{\lambda}l) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Рассмотрим решение спектральной задачи (2.10) в исходном пространстве H . Подставив функции (2.17) в граничные условия из (2.2) для координаты $x = l$, запишем характеристическую матрицу для определения собственных чисел λ

$$L = \begin{pmatrix} -\cos(\tilde{\lambda}l) & -ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) + \cos(a\tilde{\lambda}l) & 0 \\ -\cos(\tilde{\lambda}l) & 0 & -ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) + \cos(a\tilde{\lambda}l) \\ -b\tilde{\lambda} \sin(\tilde{\lambda}l) + 2\cos(\tilde{\lambda}l) & -\cos(a\tilde{\lambda}l) & -\cos(a\tilde{\lambda}l) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Собственные числа λ являются корнями определителя матрицы L :

$$\begin{aligned} \det(L) &= \left(ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) - \cos(a\tilde{\lambda}l) \right) \left(b\tilde{\lambda} \sin(\tilde{\lambda}l) \left(\cos(a\tilde{\lambda}l) - ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\cos(\tilde{\lambda}l) ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Пусть $C_2 = 1$, тогда собственные функции запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= -\frac{(ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) - \cos(a\tilde{\lambda}l))}{\cos(\tilde{\lambda}l)} \cos(\tilde{\lambda}x) \\ u_1(x) &= \frac{(b\tilde{\lambda} \sin(\tilde{\lambda}l) - \cos(\tilde{\lambda}l))(ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l) - \cos(a\tilde{\lambda}l)) - \cos(\tilde{\lambda}l)(ca\tilde{\lambda} \sin(a\tilde{\lambda}l))}{\cos(\tilde{\lambda}l) \cos(a\tilde{\lambda}l)} \cos(a\tilde{\lambda}x) \\ u_2(x) &= \cos(a\tilde{\lambda}x) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Выражение (2.25) для определителя матрицы L состоит из двух сомножителей, первый из которых выделен полужирным шрифтом и равен $\det(L^{(R_\beta)})$ с точностью до знака. В случае, если этот сомножитель равен нулю, то найденные собственные числа будут совпадать с собственными числами, отвечающими

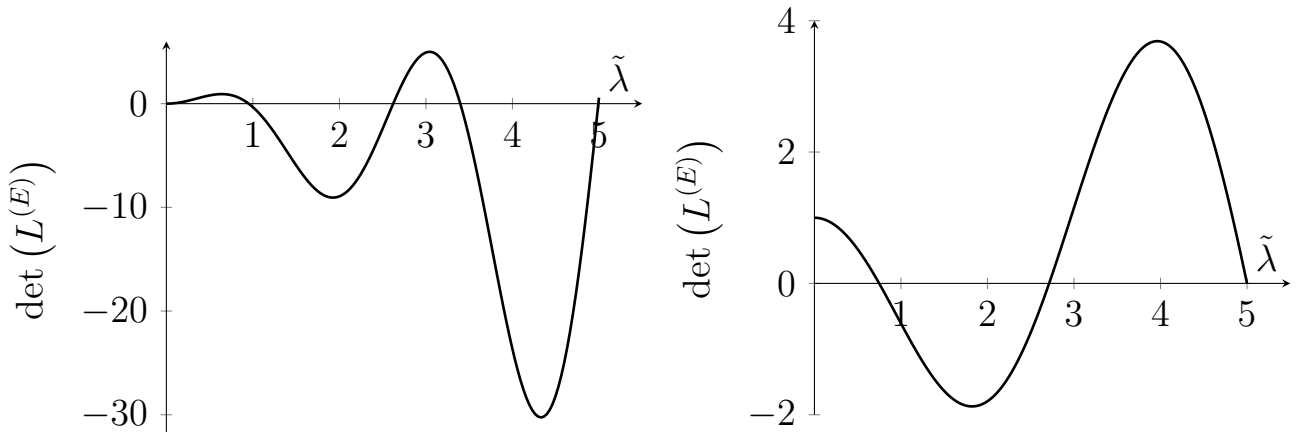
собственным элементам из подпространства $H^{(R_\beta)}$. При этом в (2.26) функция $u_0(x)$ станет тождественно равной нулю, а $u_1(x)$ станет равной $-u_2(x)$.

Второй сомножитель в (2.25) равен $\det(L^{(E)})$ и соответствующие его нулям собственные элементы будут принадлежать $H^{(E)}$. При этом коэффициент при $\cos(a\tilde{\lambda}x)$ в (2.26) станет равным единице.

Таким образом, мы видим, что решение задачи традиционным способом совпадает с решением с применением группового подхода, но во втором случае снижается порядок матриц, определители которых нужно найти (особенно это актуально для большого числа стержней). Также упрощаются выражения для коэффициентов при соответствующих функциях формы.

2.5.2 Численный пример решения при $N = 2$.

Примем $a = 1,3$, $b = 2,5$, $c = 0,7$, $l = 1$. На рисунках 2.2а и 2.2б изображены графики $\det(L^{(E)})$ и $\det(L^{(R_\beta)})$ соответственно. На рисунке 2.3 изображен общий график для $\det(L^{(E)})$, $\det(L^{(R_\beta)})$ и $\det(L)$.



а) График $\det(L^{(E)})$

б) График $\det(L^{(R_\beta)})$

Рисунок 2.2 — Графики определителей $\det(L^{(E)})$ и $\det(L^{(R_\beta)})$

Приведем значения $\tilde{\lambda}$, соответствующие первым четырем собственным числам оператора A и графики соответствующих им собственных функций.

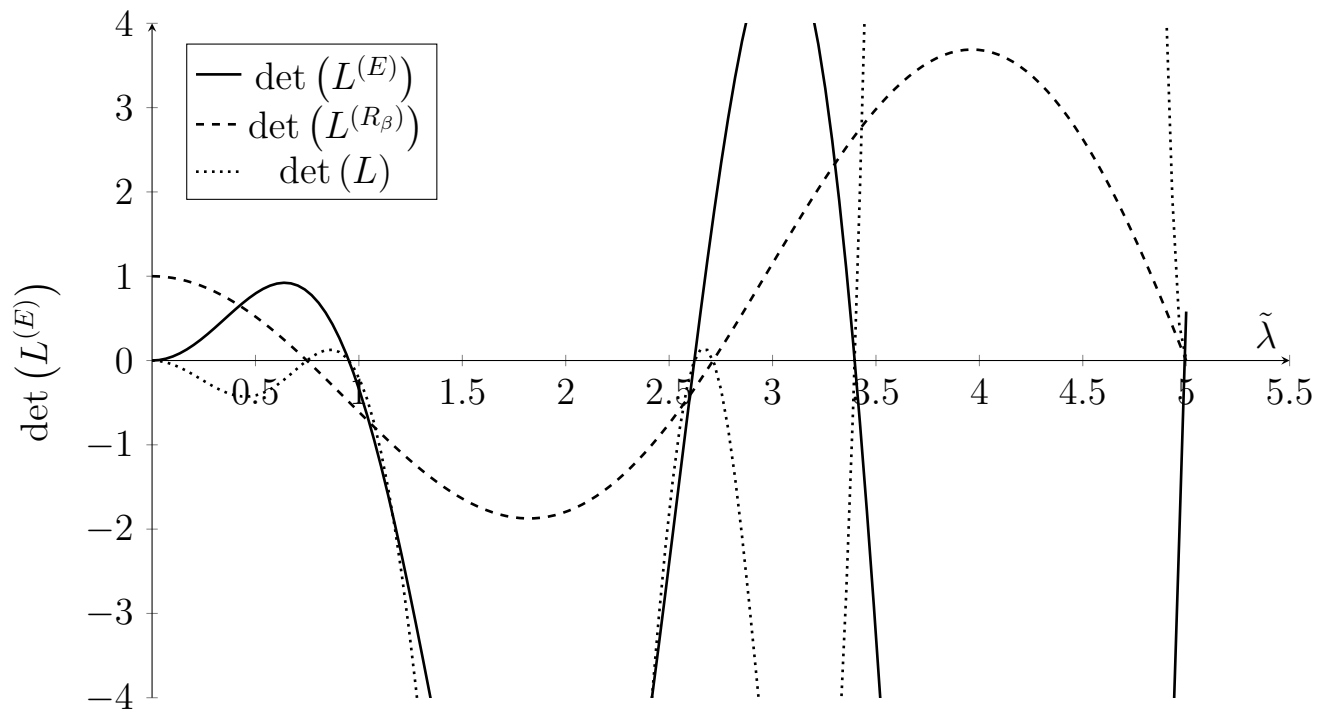


Рисунок 2.3 — Совместный график $\det(L^{(E)})$, $\det(L^{(R_\beta)})$, $\det(L)$

Таблица 2 — Значения $\tilde{\lambda}$, соответствующие первым четырем собственным числам оператора A

№	$\tilde{\lambda}$	Подспектр
1	0,75	$\sigma^{(s)}$
2	0,95	$\sigma^{(e)}$
3	2,62	$\sigma^{(e)}$
4	2,71	$\sigma^{(s)}$

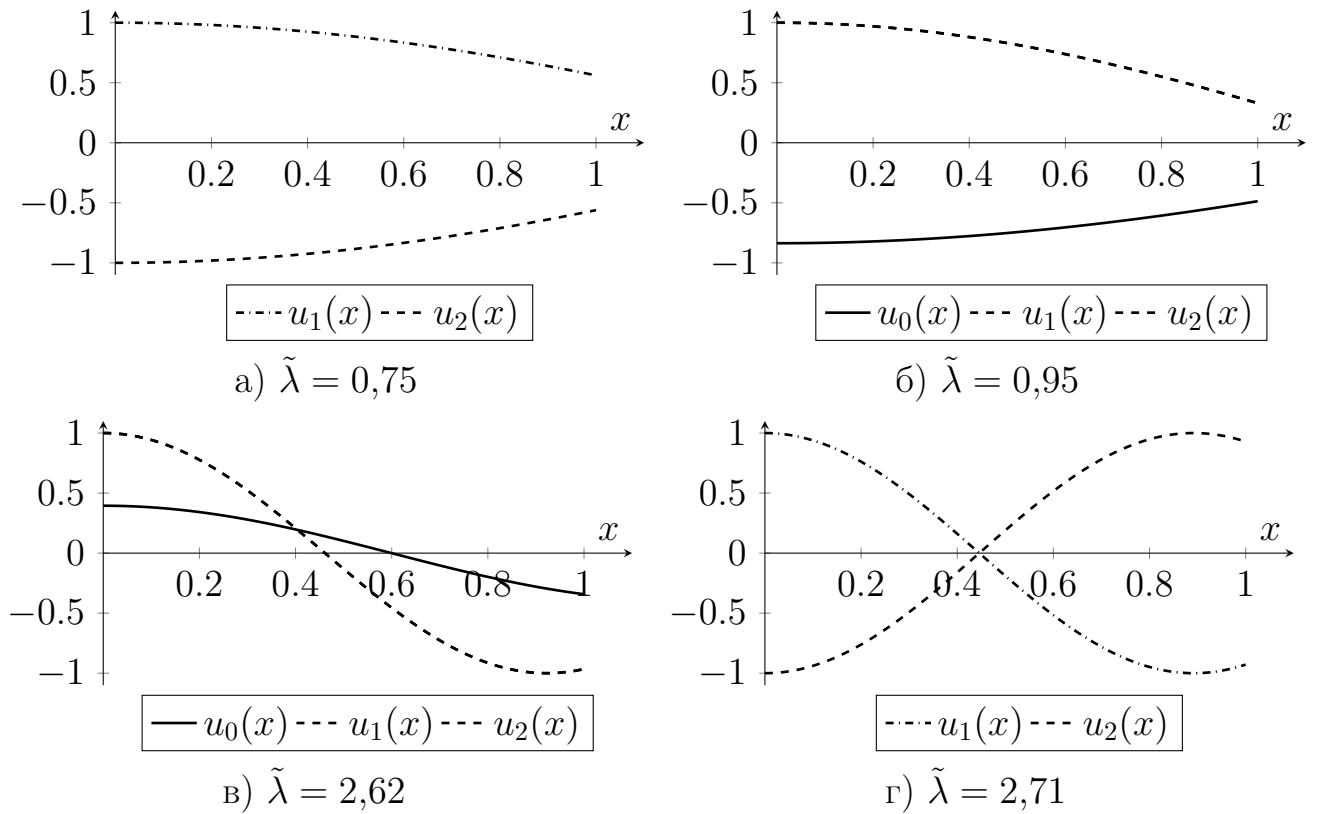


Рисунок 2.4 — Графики форм колебаний, соответствующих первым четырем собственным числам оператора A

2.6 Решение задачи Коши

Использование свойств симметрии задачи может быть полезно при решении задачи Коши, в случае если начальные условия и правая часть обладают симметрией относительно группы симметрии соответствующей спектральной задачи.

Дополним уравнения (2.1) правыми частями $q_j(x)$, обусловленной внешним воздействием, где $q_j(x)$ — ограниченные функции координаты x

$$m_j(x) \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p_j(x) \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \right) = q_j(x), j = 0 \dots N \quad (2.27)$$

и начальными условиями

$$\begin{aligned} u_j(x,0) &= \psi_j^0(x), \\ \frac{\partial u_j}{\partial t}(x,0) &= \psi_j^1(x), \quad j = 0,1,2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.6.1 Закон баланса полной энергии

Домножим уравнения (2.27) на $\dot{u}_j(x,t)$, проинтегрируем по длине каждого стержня и сложим результаты, используя граничные условия (2.2). В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} m_j(x) \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} k(u_0 - u_j)^2 dx \right\} = \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} q_j(x,t) \dot{u}_j(x,t) dx \end{aligned} \quad (2.29)$$

В уравнении (2.29) первое слагаемое в фигурных скобках представляет собой кинетическую энергию $T(t)$ системы, второе – потенциальную энергию $\Pi_F(t)$, обусловленную деформацией стержней, а последнее – потенциальную энергию $\Pi_k(t)$ пружинных элементов.

Уравнение (2.29) показывает, что изменение полной энергии в единицу времени рассматриваемой механической системы равно мощности внешнего воздействия. При отсутствии внешнего возмущения $q_j(x,t)$ получаем закон сохранения полной энергии:

$$T(t) + \Pi_F(t) + \Pi_k(t) = T(0) + \Pi_F(0) + \Pi_k(0)$$

Выполнение закона сохранения (изменения) полной энергии позволяет утверждать о разрешимости задачи (2.27), (2.2), (2.28).

2.6.2 Слабое решение задачи Коши

Введем вектор $F(t) = \{f_j(t)\}^T$, где $f_j(t) \in C([0, \infty), L_{2j}([0, l], m_j(x)))$ и $f(x, t) = \frac{q_j(x, t)}{m_j(x)}$.

Тогда задачу (2.27), (2.2), (2.28) можно записать в виде неоднородной задачи Коши для гиперболического уравнения в операторной форме:

$$\begin{aligned} \ddot{U}(t) + AU(t) &= F(t) \\ U(0) &= \Psi^0, \dot{U}(0) = \Psi^1 \end{aligned} \quad (2.30)$$

В (2.30) оператор A определен аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.3.

Рассмотрим слабое решение задачи (2.30). В метрике пространства $H_{+1} = H \oplus \{1\}$ разложение решения $U(t)$ по собственным элементам оператора A имеет вид [96]:

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(t) U_k, \\ \phi_k(t) &= (U(t), U_k) \end{aligned} \quad (2.31)$$

где коэффициенты $\phi_k(t)$ являются решениями задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi_k(t)}{dt^2} + \lambda_k \phi_k(t) &= f_k(t), k = 0 \dots \infty \\ \phi_k(0) &= (\Psi^0, U_k), \dot{\phi}_k(0) = (\Psi^1, U_k), f_k(t) = (F(t), U_k) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Здесь $U_0 = \{1\}$, $\lambda_0 = 0$ - решение системы (2.3), ортогонально дополняющее пространство H . $\{1\}$ представляет собой единичный вектор, нормированный в пространстве H . Несложно заметить, что U_0 преобразуется по тривиальному неприводимому представлению E соответствующей группы S_n .

С учетом (2.31) и (2.32) слабое решение задачи (2.30) запишется в виде [96; 100]

$$\begin{aligned}
U(t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left((\Psi^0, U_k) \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{(\Psi^1, U_k)}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_k}(t-s)) (F(t), U_k) ds \right) U_k + \\
& + \left(\int_0^t \int_0^s (F(t), U_0) ds ds + (\Psi^1, U_0) t + (\Psi^0, U_0) \right) U_0
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Разложим $F(t)$, Ψ^0 , Ψ^1 по базису неприводимых представлений группы S_n :

$$\begin{aligned}
F(t) &= \sum_{\varphi} P^{(\varphi)} F(t) = \sum_{\varphi} F^{(\varphi)}(t) \\
\Psi^0 &= \sum_{\varphi} P^{(\varphi)} \Psi^0 = \sum_{\varphi} \Psi^{0(\varphi)}(t) \\
\Psi^1 &= \sum_{\varphi} P^{(\varphi)} \Psi^1 = \sum_{\varphi} \Psi^{1(\varphi)}(t)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Если в разложении (2.34), проекции на какое либо из подпространств окажутся одновременно равны нулю для каждого из векторов $F(t)$, Ψ^0 , Ψ^1 , то выражении (2.33) в скалярных произведениях останутся лишь ненулевые слагаемые разложения (2.34).

Так как подпространства $H^{(\varphi)}$ попарно ортогональны, то, скалярные произведения, в которых ненулевые проекции векторов $F(t)$, Ψ^0 , Ψ^1 с одной стороны и собственный элемент U_k с другой, принадлежат разным подпространствам, обнулятся.

В итоге, при записи слабого решения (2.33) можно не использовать подспектр и соответствующие ему собственные элементы, отвечающие подпространствам, проекции векторов $F(t)$, Ψ^0 , Ψ^1 на которые одновременно равны нулю.

2.7 Заключение по второй главе

Анализ симметрий задачи о продольных колебаниях стержневой системы, рассмотренной в данной главе, несмотря на то, что данная механическая

система обладает бесконечным числом степеней свободы, позволил классифицировать собственные элементы соответствующей спектральной задачи по неприводимым представлениям конечной группы симметрии. Полученная классификация упростила решение спектральной задачи разделив спектр на два подспектра. Собственные числа, входящие в каждый подспектр определяются из частотных уравнений, имеющих значительно более простой вид, чем исходное уравнение.

Подход с использованием операторов ортогонального проектирования на подпространства неприводимых представлений позволяет строить базисы собственных подпространств, соответствующих кратным частотам. Разложение вектор-функций внешних нагрузок и начальных условий по базисам неприводимых представлений позволяет использовать при записи слабого решения задачи Коши лишь часть собственных функций, отвечающую ненулевым проекциям, что приводит к сокращению вычислительных затрат и упрощению решения задачи.

Глава 3. Пространственные колебания пакета стержней

3.1 Стержневая модель ракеты-носителя пакетной компоновки

Примем в качестве расчетной модели стержневую систему, состоящую из упруго-соединенных стержней. Упругие связи будут моделировать работу поясов крепления боковых блоков. Колебания жидкости в баках, как поперечные, так и осесимметричные, а также колебания элементов конструкции, таких как двигательная установка, трубопроводы и т.п. при необходимости могут быть учтены с помощью осцилляторного аналога. Так как перемещения осцилляторов однозначно выражаются через перемещение соответствующего сечения, то в случае, если добавление в систему осцилляторов не вызывает нарушение ее симметрии, классификация форм ее собственных колебаний также не претерпит изменений.

При крутильных колебаниях стержней будем учитывать влияние жидкости как добавочный погонный осевой момент инерции, равный моменту инерции жидкости, захватываемой демпфирующими перегородками, расположенными в баках.

На рисунке 3.1 изображена расчетная схема стержневой модели РН пакетной компоновки. Рассматриваемая механическая система состоит из центрального стержня и идентичных боковых стержней соединенных с ним с помощью линейно-упругих связей. Центральный стержень расположен вдоль оси X_0 глобальной системы координат $X_0Y_0Z_0$, и конец стержня, отвечающий нижней части ракеты, совпадает с ее началом. Боковые стержни расположены параллельно центральному на равном расстоянии от него, через угловые промежутки равные $\frac{2\pi}{N}$, где N – число боковых стержней. Боковым стержням соответствуют индексы j , причем стержень с индексом 1 лежит в плоскости X_0Y_0 , а возрастание нумерации стержней ведется против часовой стрелки вокруг оси X_0 . Нижние концы боковых стержней расположены в одной плоскости, параллельной Y_0Z_0 . В дальнейшем будем считать, что эта плоскость совпадает с Y_0Z_0 .

Каждому боковому стержню сопоставляется локальная система координат $X_jY_jZ_j$. Начало локальной системы координат совпадает с нижним концом

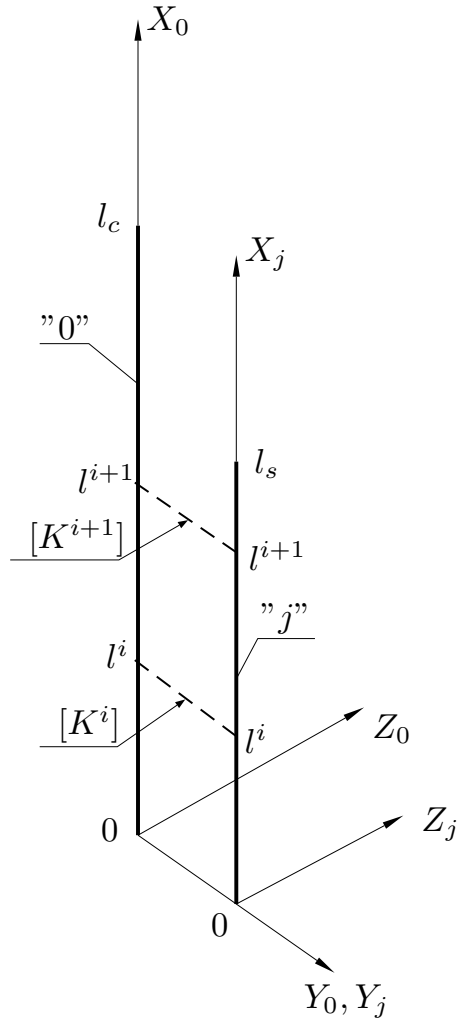


Рисунок 3.1 — Стержневая модель РН пакетной компоновки

бокового стержня, ось Y_j направлена под углом $\frac{2\pi}{N}(j-1)$ к оси Y_0 , ось X_j параллельна оси X_0 , ось Z_j дополняет систему координат до правой.

Перемещения сечений стержней вдоль осей $X_j Y_j Z_j$, обозначим как $u_j(x, t)$, $v_j(x, t)$, $w_j(x, t)$ соответственно, где $j = 0 \dots N$. Так как начала координат ЛСК лежат в плоскости $Y_c Z_c$, то можно не делать различий между СК стержней в аргументе функций перемещений. Углы поворота сечений обозначим как $\psi_j(x, t)$, $\vartheta_j(x, t)$, $\zeta_j(x, t)$, $j = 0 \dots N$ соответственно.

Будем считать, что инерционно-жесткие характеристики стержней не меняются при повороте вокруг оси X_j . Погонную массу в направлении осей X_j , Y_j и Z_j примем равной и обозначим $m_j(x)$. В случае учета колебаний жидкости с помощью осцилляторного аналога необходимо учитывать различие значений погонной массы по осям. Осевой момент инерции стержней вокруг осей X_j обозначим как $\mu J_j(x)$.

Продольную, поперечную и крутильную жесткость стержней обозначим как $EF_j(x)$, $EI_j(x)$, $GJ_j(x)$ соответственно.

3.2 Постановка задачи о пространственных колебаниях пакета стержней

3.2.1 Исходная краевая задача

Будем считать, что колебания одного типа не оказывают влияния на другой, и описываются отдельными дифференциальными уравнениями. Связь продольных, поперечных и крутильных колебаний блоков будет осуществляться через условия стыковки и граничные условия.

Приведем соответствующие уравнения для:

– Продольных колебаний стержней

$$m_j(x) \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF_j(x) \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \right) = 0, j = 0 \dots N \quad (3.1)$$

– Поперечных колебаний стержней вдоль осей Y_j и Z_j . При описании поперечных колебаний не будем учитывать инерцию сечения при повороте и сдвиговой коэффициент Тимошенко (будем рассматривать балку Эйлера-Бернулли [101]).

$$m_j(x) \frac{\partial^2 v_j(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_j(x) \frac{\partial^2 v_j(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0, j = 0 \dots N \quad (3.2)$$

$$m_j(x) \frac{\partial^2 w_j(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_j(x) \frac{\partial^2 w_j(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0, j = 0 \dots N \quad (3.3)$$

– Крутильных колебаний стержней

$$\mu J_j(x) \frac{\partial^2 \psi_j(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(GJ_j(x) \frac{\partial \psi_j(x,t)}{\partial x} \right) = 0, j = 0 \dots N \quad (3.4)$$

Углы поворота сечений $\vartheta_j(x,t)$ и $\zeta_j(x,t)$ определяются с помощью соотношений:

$$\vartheta_j(x,t) = -\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, j = 0 \dots N \quad (3.5)$$

$$\zeta_j(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}, j = 0 \dots N \quad (3.6)$$

Для записи граничных условий рассмотрим правила определения знаков внутренних силовых факторов, возникающих в случае сложного сопротивления балки.

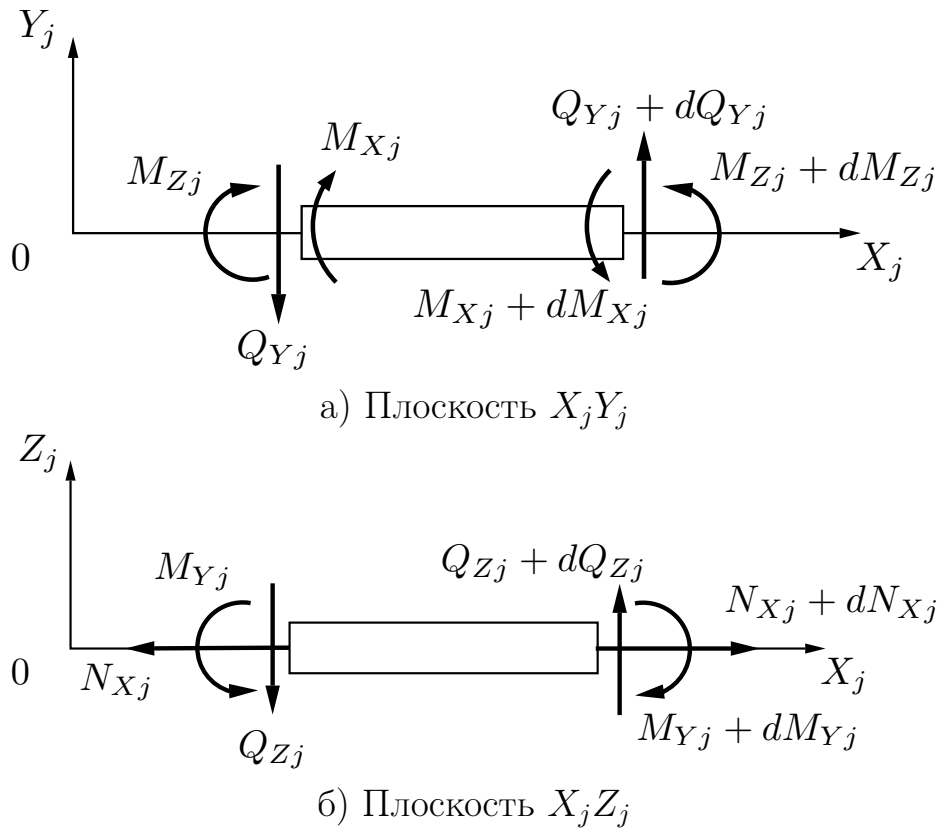


Рисунок 3.2 — Расчетная схема для определения правила знаков внутренних силовых факторов

В соответствии со схемами, изображенными на рисунке 3.2 и соотношениями (3.5), (3.6), выражения связи внутренних силовых факторов с перемещениями имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
N_{Xj}(x,t) &= EF_j(x) \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \\
M_{Xj}(x,t) &= GJ_j(x) \frac{\partial \psi_j(x,t)}{\partial x} \\
M_{Yj}(x,t) &= -EI_j(x) \frac{\partial^2 w_j(x,t)}{\partial x^2} \\
M_{Zj}(x,t) &= EI_j(x) \frac{\partial^2 v_j(x,t)}{\partial x^2} \\
Q_{Yj}(x,t) &= -\frac{\partial}{\partial x} EI_j(x) \frac{\partial^2 v_j(x,t)}{\partial x^2} \\
Q_{Zj}(x,t) &= -\frac{\partial}{\partial x} EI_j(x) \frac{\partial^2 w_j(x,t)}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Граничные условия для свободных концов стержней (в случае, если на конце стержня нет упругих связей) выражаются в равенстве внутренних силовых факторов нулю:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_k} &= 0 \\
\left. \frac{\partial \psi_j(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_k} &= 0 \\
\left. \frac{\partial^2 w_j(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=x_k} &= 0 \\
\left. \frac{\partial^2 v_j(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=x_k} &= 0 \\
\left. \frac{\partial}{\partial x} EI_j(x) \frac{\partial^2 v_j(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=x_k} &= 0 \\
\left. \frac{\partial}{\partial x} EI_j(x) \frac{\partial^2 w_j(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=x_k} &= 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Для записи граничных условий и условий стыковки в точках $x = l^i$ соединения стержней, сформулируем условия равновесия обобщенного упругого элемента $[K^i]$. В записи $[K^i]$ индекс i обозначает принадлежность упругого к i -ому поясу крепления боковых стержней. В пределах одного пояса все упругие элементы считаются идентичными.

Обобщенный упругий элемент имеет два интерфейсных узла, A – служит для крепления к центральному стержню и B – для крепления к боковому (ри-

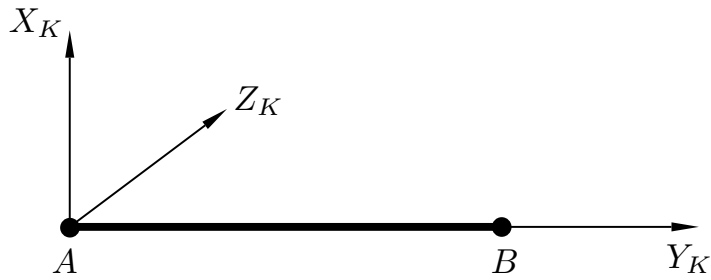


Рисунок 3.3 — Локальная система координат обобщенного упругого элемента

сунк 3.3). В локальной системе координат элемента, изображенной на рисунке 3.3 каждому из узлов соответствует 6 степеней свободы: перемещения вдоль осей X_K , Y_K , Z_K и повороты вокруг них. Для удобства будем обозначать принадлежность той или иной степени свободы к соответствующей оси также как это делалось выше для сечений стержней. Принадлежность к узлу будем обозначать верхним индексом.

В локальной системе координат элемента вектор степеней свободы Q^{loc} запишется следующим образом:

$$Q^{loc} = \{u^{(A)}, v^{(A)}, w^{(A)}, \psi^{(A)}, \vartheta^{(A)}, \zeta^{(A)}, u^{(B)}, v^{(B)}, w^{(B)}, \psi^{(B)}, \vartheta^{(B)}, \zeta^{(B)}\}^T$$

Реакции, возникающие со стороны упругого элемента компенсируются внутренними силовыми факторами стержней, что позволяет записать силовые условия стыковки при переходе через упругий элемент. Но чтобы сделать это, вначале, необходимо привести его матрицу жесткости $([K^i])^{loc}$ в соответствие с расчетной системой координат. Так как оси локальной системы координат обобщенного упругого элемента параллельны осям систем координат боковых стержней, то преобразованию подлежат только компоненты соответствующие степеням свободы узла A .

Если имеется N боковых стержней, то для j -ого стержня данное преобразование будет иметь вид:

$$([K^i])^j = S^{jT} ([K^i])^{loc} S^j$$

при этом $Q^{loc} = S^j Q^{ij}$. Компонентами вектора Q^{ij} в свою очередь являются перемещения соответствующих сечений центрального и бокового стержней.

Матрица S^j имеет вид:

$$S^j = \begin{pmatrix} S^{j(A)} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

где E единичная матрица 6×6 , а $S^{j(A)}$ имеет вид:

$$S^{j(A)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

при этом $\phi = \frac{2\pi}{N}(j-1)$.

Вектор реакций, действующих на элемент со стороны стержней, в расчетной системе координат находится из уравнения равновесия элемента:

$$([K^i])^j Q^{ij} = R_{el}^{ij}$$

и имеет компоненты:

$$R_{el}^{ij} = \{F_{X_0}^{i(A)}, F_{Y_0}^{i(A)}, F_{Z_0}^{i(A)}, M_{X_0}^{i(A)}, M_{Y_0}^{i(A)}, M_{Z_0}^{i(A)}, F_{X_j}^{i(B)}, F_{Y_j}^{i(B)}, F_{Z_j}^{i(B)}, M_{X_j}^{i(B)}, M_{Y_j}^{i(B)}, M_{Z_j}^{i(B)}\}^T$$

Обозначим вектор реакций со стороны i -ого элемента, соединяющего центральный и j -ый стержни R^{ij} . В силу 3-го закона Ньютона $R^{ij} = -R_{el}^{ij}$. Пусть вектор R^{ij} имеет компоненты:

$$R^{ij} = \{F_{X_0}^{ij}, F_{Y_0}^{ij}, F_{Z_0}^{ij}, M_{X_0}^{ij}, M_{Y_0}^{ij}, M_{Z_0}^{ij}, F_{X_j}^{ij}, F_{Y_j}^{ij}, F_{Z_j}^{ij}, M_{X_j}^{ij}, M_{Y_j}^{ij}, M_{Z_j}^{ij}\}^T$$

здесь верхние индексы обозначающие принадлежность к узлу заменены индексом обозначающим принадлежность к соответствующей матрице жесткости и боковому стержню, так как принадлежность к узлу определяется соответствующими осями в нижнем индексе.

Таким образом для каждого внутреннего силового фактора стержней можно записать условия равновесия (силовые условия стыковки):

– Для центрального стержня:

$$\begin{aligned}
& EF_0(x) \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l_i+0} - EF_0(x) \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l_i-0} + \sum_{j=1}^N F_{X_0}^{ij} = 0 \\
& - \frac{\partial}{\partial x} EI_0(x) \frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i+0} + \frac{\partial}{\partial x} EI_0(x) \frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i-0} + \sum_{j=1}^N F_{Y_0}^{ij} = 0 \\
& - \frac{\partial}{\partial x} EI_0(x) \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i+0} + \frac{\partial}{\partial x} EI_0(x) \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i-0} + \sum_{j=1}^N F_{Z_0}^{ij} = 0 \\
& GJ_0(x) \frac{\partial \psi_0(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l_i+0} - GJ_0(x) \frac{\partial \psi_0(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l_i-0} + \sum_{j=1}^N M_{X_0}^{ij} = 0 \\
& - EI_0(x) \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i+0} + EI_0(x) \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i-0} + \sum_{j=1}^N M_{Y_0}^{ij} = 0 \\
& EI_0(x) \frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i+0} - EI_0(x) \frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i-0} + \sum_{j=1}^N M_{Z_0}^{ij} = 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

– Для боковых стержней $j = 1 \dots N$:

$$\begin{aligned}
& EF_j(x) \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l_i+0} - EF_j(x) \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l_i-0} + F_{X_j}^{ij} = 0 \\
& - \frac{\partial}{\partial x} EI_j(x) \frac{\partial^2 v_j(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i+0} + \frac{\partial}{\partial x} EI_j(x) \frac{\partial^2 v_j(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i-0} + F_{Y_j}^{ij} = 0 \\
& - \frac{\partial}{\partial x} EI_j(x) \frac{\partial^2 w_j(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i+0} + \frac{\partial}{\partial x} EI_j(x) \frac{\partial^2 w_j(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i-0} + F_{Z_j}^{ij} = 0 \\
& GJ_j(x) \frac{\partial \psi_j(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l_i+0} - GJ_j(x) \frac{\partial \psi_j(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l_i-0} + M_{X_j}^{ij} = 0 \\
& - EI_j(x) \frac{\partial^2 w_j(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i+0} + EI_j(x) \frac{\partial^2 w_j(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i-0} + M_{Y_j}^{ij} = 0 \\
& EI_j(x) \frac{\partial^2 v_j(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i+0} - EI_j(x) \frac{\partial^2 v_j(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i-0} + M_{Z_j}^{ij} = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

В случае, если упругий элемент крепится на конце стержня, слагаемое с координатой не принадлежащей стержню исключается.

Пусть функции перемещений $u_j(x,t)$, $v_j(x,t)$, $w_j(x,t)$, $\psi_j(x,t)$, зависят от времени по закону $e^{i\omega t}$. Тогда уравнения (3.1) — (3.4) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m_j(x)} \frac{d}{dx} \left(EF_j(x) \frac{du_j(x)}{dx} \right) + \lambda \cdot u_j(x) = 0, j = 0 \dots N \\
& - \frac{1}{m_j(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_j(x) \frac{d^2v_j(x)}{dx^2} \right) + \lambda \cdot v_j(x) = 0, j = 0 \dots N \\
& - \frac{1}{m_j(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_j(x) \frac{d^2w_j(x)}{dx^2} \right) + \lambda \cdot w_j(x) = 0, j = 0 \dots N \\
& \frac{1}{\mu J_j(x)} \frac{d}{dx} \left(GJ_j(x) \frac{d\psi_j(x)}{dx} \right) + \lambda \cdot \psi_j(x) = 0, j = 0 \dots N
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где $\lambda = \omega^2$.

3.3 Групповой анализ

Прежде чем приступить к формулировке спектральной задачи на основании постановок приведенных выше, исследуем непрерывные симметрии уравнений (3.11).

В общем случае инфинитезимальный генератор для системы (3.11) запишется в следующей форме:

$$v = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=0}^N \eta_{uj} \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{j=0}^N \eta_{vj} \frac{\partial}{\partial v_j} + \sum_{j=0}^N \eta_{wj} \frac{\partial}{\partial w_j} + \sum_{j=0}^N \eta_{\psi j} \frac{\partial}{\partial \psi_j}$$

Воспользовавшись стандартными методами поиска непрерывных симметрий систем дифференциальных уравнений, подробно рассмотренными в главе 2, и учтя идентичность инерционно-жесткостных свойств боковых стержней, запишем общее выражение для решений определяющей системы уравнений для нахождения компонент ξ , η_{uj} , η_{vj} , η_{wj} , $\eta_{\psi j}$:

$$\begin{aligned}
\xi &= 0; \\
\eta_{u0} &= C_{u0}u_0 + \alpha_{u0}(x) \\
\eta_{v0} &= C_{vv0}v_0 + C_{vw0}w_0 + \alpha_{v0}(x) \\
\eta_{w0} &= C_{ww0}w_0 + C_{wv0}v_0 + \alpha_{w0}(x) \\
\eta_{\psi 0} &= C_{\psi 0}\psi_0 + \alpha_{\psi 0}(x) \\
\eta_{uj} &= \sum_{i=1}^N C_{uij}u_i + \alpha_{uj}(x), j = 1 \dots N \\
\eta_{vj} &= \sum_{i=1}^N C_{vvi j}v_i + \sum_{i=1}^N C_{vwi j}w_i + \alpha_{vj}(x), j = 1 \dots N \\
\eta_{wj} &= \sum_{i=1}^N C_{wvi j}v_i + \sum_{i=1}^N C_{wii j}w_i + \alpha_{wj}(x), j = 1 \dots N \\
\eta_{\psi j} &= \sum_{i=1}^N C_{\psi ij}\psi_i + \alpha_{\psi j}(x), j = 1 \dots N
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что алгебра Ли инфинитезимальных симметрий системы уравнений (3.11) порождена $6(N^2 + 1)$ векторными полями

$$\begin{aligned}
v_{u0} &= u_0 \frac{\partial}{\partial u_0}; \\
v_{vv0} &= v_0 \frac{\partial}{\partial v_0}; \\
v_{vw0} &= w_0 \frac{\partial}{\partial v_0}; \\
v_{ww0} &= w_0 \frac{\partial}{\partial w_0}; \\
v_{wv0} &= v_0 \frac{\partial}{\partial w_0}; \\
v_{\psi 0} &= \psi_0 \frac{\partial}{\partial \psi_0}; \\
v_{uij} &= u_i \frac{\partial}{\partial u_j}, i = 1 \dots N, j = 1 \dots N; \\
v_{vvi j} &= v_i \frac{\partial}{\partial v_j}, i = 1 \dots N, j = 1 \dots N; \\
v_{vwi j} &= w_i \frac{\partial}{\partial v_j}, i = 1 \dots N, j = 1 \dots N; \\
v_{wvi j} &= w_i \frac{\partial}{\partial w_j}, i = 1 \dots N, j = 1 \dots N; \\
v_{wvii} &= v_i \frac{\partial}{\partial w_j}, i = 1 \dots N, j = 1 \dots N; \\
v_{\psi ij} &= \psi_i \frac{\partial}{\partial \psi_j}, i = 1 \dots N, j = 1 \dots N;
\end{aligned} \tag{3.12}$$

и $4(N + 1)$ бесконечными подалгебрами

$$\begin{aligned}
v_{\alpha u j} &= \alpha_{u j}(x) \frac{\partial}{\partial u_j}, j = 0 \dots N \\
v_{\alpha v j} &= \alpha_{v j}(x) \frac{\partial}{\partial v_j}, j = 0 \dots N \\
v_{\alpha w j} &= \alpha_{w j}(x) \frac{\partial}{\partial w_j}, j = 0 \dots N \\
v_{\alpha \psi j} &= \alpha_{\psi j}(x) \frac{\partial}{\partial \psi_j}, j = 0 \dots N
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Действия однопараметрических групп, соответствующих найденным инфинитезимальным операторам, найдем проэкспоненцировав выражения (3.12), (3.13):

$$\begin{aligned}
G_{u j} &: (x, \dots, e^\varepsilon u_j, \dots), j = 0 \dots N \\
G_{v v j} &: (x, \dots, e^\varepsilon v_j, \dots), j = 0 \dots N \\
G_{v w j} &: (x, \dots, v_j + \varepsilon w_j, \dots), j = 0 \dots N \\
G_{w w j} &: (x, \dots, e^\varepsilon w_j, \dots), j = 0 \dots N \\
G_{w v j} &: (x, \dots, w_j + \varepsilon v_j, \dots), j = 0 \dots N \\
G_{\psi j} &: (x, \dots, e^\varepsilon \psi_j, \dots), j = 0 \dots N \\
G_{u i j} &: (x, \dots, u_i + \varepsilon u_j, \dots), i = 1 \dots N, j = 1 \dots N, i \neq j \\
G_{v v i j} &: (x, \dots, v_i + \varepsilon v_j, \dots), i = 1 \dots N, j = 1 \dots N, i \neq j \\
G_{v w i j} &: (x, \dots, v_i + \varepsilon w_j, \dots), i = 1 \dots N, j = 1 \dots N, i \neq j \\
G_{w w i j} &: (x, \dots, w_i + \varepsilon w_j, \dots), i = 1 \dots N, j = 1 \dots N, i \neq j \\
G_{w v i j} &: (x, \dots, w_i + \varepsilon v_j, \dots), i = 1 \dots N, j = 1 \dots N, i \neq j \\
G_{\alpha u j} &: (x, \dots, u_j + \alpha_{u j}(x), \dots), j = 0 \dots N \\
G_{\alpha v j} &: (x, \dots, v_j + \alpha_{v j}(x), \dots), j = 0 \dots N \\
G_{\alpha w j} &: (x, \dots, w_j + \alpha_{w j}(x), \dots), j = 0 \dots N \\
G_{\alpha \psi j} &: (x, \dots, \psi_j + \alpha_{\psi j}(x), \dots), j = 0 \dots N
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Группы симметрии, приведенные в (3.14) имеют схожую структуру с результатами группового анализа, проведенного в главе 2 и демонстрируют линейность исследуемой системы уравнений. Помимо линейности, имеет место перестановочность функций перемещений, но в данном случае она более разно-

образна, чем в (2.9). Идентичность боковых стержней приводит к возможности перестановки функций, соответствующих каждому из четырех типов движений между собой. При этом, в отличие от продольных и крутильных перемещений, для которых перестановки возможны только внутри своего типа движений, для поперечных перемещений сечений стержней возможны также перестановки между перемещениями вдоль перпендикулярных осей (Y_j, Z_j) , что объясняется равенством инерционно-жесткостных свойств стержней по этим направлениям. Для центрального стержня также появляется возможность перестановки функций перемещений, которая не наблюдалась в более простой задаче в главе 2, обусловленная все теми же поперечными перемещениями.

Дальнейшее исследование собственных колебаний рассматриваемой механической системы, сведем к исследованию спектра соответствующего оператора.

3.4 Операторная постановка

Рассмотрим уравнения (3.11), дополненные граничными условиями (3.8), (3.9), (3.10) как абстрактную спектральную задачу в гильбертовом пространстве \tilde{H} .

Для этого определим пространство \tilde{H}_N следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \left(\sum_{j=0}^N \oplus L_{2j}^u([0, l], m_j(x)) \right) \oplus \left(\sum_{j=0}^N \oplus L_{2j}^v([0, l], m_j(x)) \right) \oplus \\ & \oplus \left(\sum_{j=0}^N \oplus L_{2j}^w([0, l], m_j(x)) \right) \oplus \left(\sum_{j=0}^N \oplus L_{2j}^\psi([0, l], \mu J_j(x)) \right) \ominus \{1\} \end{aligned}$$

Вектор-функция $U(t) \in \tilde{H}_N$ содержит $4(N + 1)$ компонент:

$$U(t) = \{u_j(t), v_j(t), w_j(t), \psi_j(t)\}^T$$

где

$$\begin{aligned} u_j(t) &\in C^{0,2}(L_{2j}^u([0,l], m_j(x)), [0, \infty)) \\ v_j(t) &\in C^{1,2}(L_{2j}^v([0,l], m_j(x)), [0, \infty)) \\ w_j(t) &\in C^{1,2}(L_{2j}^w([0,l], m_j(x)), [0, \infty)) \\ \psi_j(t) &\in C^{0,2}(L_{2j}^\psi([0,l], m_j(x)), [0, \infty)) \end{aligned}$$

Скалярное произведение в \tilde{H}_N запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} (U^r(t), U^s(t)) &= \sum_{j=0}^N (u_j^r(t), u_j^s(t)) + \sum_{j=0}^N (v_j^r(t), v_j^s(t)) + \\ &+ \sum_{j=0}^N (w_j^r(t), w_j^s(t)) + \sum_{j=0}^N (\psi_j^r(t), \psi_j^s(t)) = \\ &= \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} m_j(x) u_j^r(t) u_j^s(t) dx + \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} m_j(x) v_j^r(t) v_j^s(t) dx + \\ &+ \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} m_j(x) w_j^r(t) w_j^s(t) dx + \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} \mu J_j(x) \psi_j^r(t) \psi_j^s(t) dx \end{aligned}$$

Определим матричный оператор \tilde{A} действующий на множестве $\tilde{H}_N \supset D(\tilde{A}) : \tilde{\Omega}U(t) = 0$, где $\tilde{\Omega}$ – оператор граничных условий, определяемый соотношениями (3.8), (3.9) и (3.10):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^\psi \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} A^u &= \text{diag} \left(-\frac{1}{m_j(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(EF_j(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \\ A^v &= A^w = \text{diag} \left(\frac{1}{m_j(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_j(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right) \\ A^\psi &= \text{diag} \left(-\frac{1}{\mu J_j(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(GJ_j(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \end{aligned}$$

Приняв $U(t) = U \cdot e^{i\omega t}$ получим из уравнений (3.1) – (3.4) и граничных условий (3.8) – (3.10) спектральную задачу для оператора \tilde{A} :

$$\tilde{A}U = \lambda U \quad (3.15)$$

которая представляет собой абстрактную форму записи уравнений (3.11) дополненных граничными условиями (3.8) – (3.10).

Сформулируем основную теорему о свойствах оператора \tilde{A} и его спектре

Теорема 5. *Оператор \tilde{A} – неограниченный, самосопряженный, положительно определенный в \tilde{H}_N оператор. Квадрат нормы в энергетическом пространстве оператора \tilde{A} имеет вид*

$$\begin{aligned} \|U\|_{\tilde{A}}^2 &= \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) \left(\frac{du_j}{dx} \right)^2 dx + \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} EI_j(x) \left(\frac{d^2v_j}{dx^2} \right)^2 dx + \\ &+ \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} EI_j(x) \left(\frac{d^2w_j}{dx^2} \right)^2 dx + \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} GJ_j(x) \left(\frac{d\psi_j}{dx} \right)^2 dx + \\ &+ \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^K Q^{ijT} ([K^i])^j Q^{ij} = 2\Pi > 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Оператор \tilde{A} имеет положительный дискретный спектр собственных значений

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots, \lambda_m \rightarrow \infty$$

и систему собственных функций $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ полную и ортогональную в пространствах \tilde{H}_N и $\tilde{H}_{N\bar{A}}$, при этом справедливы следующие соотношения ортогональности

$$\begin{aligned}
(U_m, U_s) &= \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} m_j(x) u_{mj}(t) u_{sj}(t) dx + \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} m_j(x) v_{mj}(t) v_{sj}(t) dx + \\
&+ \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} m_j(x) w_{mj}(t) w_{sj}(t) dx + \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} \mu J_j(x) \psi_{mj}(t) \psi_{sj}(t) dx = \delta_{ms} \\
(U_m, U_s)_{\bar{A}} &= \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} EF_j(x) \left(\frac{du_{mj}}{dx} \right) \left(\frac{du_{sj}}{dx} \right) dx + \\
&+ \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} EI_j(x) \left(\frac{d^2v_{mj}}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2v_{sj}}{dx^2} \right) dx + \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} EI_j(x) \left(\frac{d^2w_{mj}}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2w_{sj}}{dx^2} \right) dx + \\
&+ \sum_{j=0}^N \int_0^{l_j} GJ_j(x) \left(\frac{d\psi_{mj}}{dx} \right) \left(\frac{d\psi_{sj}}{dx} \right) dx + \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^K Q_s^{ijT} ([K^i])^j Q_m^{ij} = \lambda \delta_{ms}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Доказательство положений теоремы 5 проводится аналогично тому, как это было сделано для леммы 1 и теоремы 1.

3.5 Конечные группы симметрии спектральной задачи порожденной пространственными колебаниями пакета стержней

Групповой анализ уравнений (3.11), проведенный в разделе 3.3 показал их инвариантность относительно линейных преобразований. Для инвариантности оператора A и последующей классификации его собственных элементов необходимо также учесть условия (2.13), выполнение которого приведет к редукции симметрий, приведенных в (3.14). Как и в главе 2, получение набора симметрий, допускаемых условиями (2.13) из выражений (3.14) приводит к группе унитар-

ных преобразований (точнее к ортогональной группе). Если в главе 2, в силу простоты граничных условий и физической сущности задачи, несложно было определить, что искомой группой симметрии является симметрическая группа S_n , то в случае более сложной задачи, рассматриваемой здесь, нахождение требуемой конечной группы уже не является таким тривиальным.

Для нахождения допустимой группы симметрии, примем во внимание тот факт, что в отличие от задачи, рассмотренной в главе 2, здесь мы исследуем механическую систему, представляющую собой пространственную структуру, с однозначно определенными положением и ориентацией входящих в нее составляющих (в данном случае стержней и упругих элементов). Поэтому, в качестве группы симметрии, удовлетворяющей условиям (2.13) будет выступать пространственная группа симметрии рассматриваемой структуры (которая и приводит к выполнению условия инвариантности граничных условий и условий стыковки) [55; 61].

Конструктивные особенности ракет носителей пакетной компоновки, в большинстве случаев, приводят к тому, что соответствующая механическая модель оказывается симметричной относительно поворотов на углы, кратные угловому расстоянию между соседними боковыми блоками и отражениям относительно плоскостей проходящих через ось центрального блока и оси боковых блоков, а также плоскостей, делящих полученные двугранные углы пополам. К таким ракетам-носителям относятся различные модификации комплекса Ангара [8], Союз [102], Delta-IV Heavy [9], Falcon Heavy [103], Ariane-5,6 [104], CZ-3B,3C,5 [105], GSLV [106] и многие другие. Исключение составляет РН Энергия [107] и некоторые модификации ракет Ariane 4 [108], PSLV [109] и подобные ракеты обладающие меньшим набором симметрий в силу различий в боковых блоках и их расположении.

По Шенфлису, такие группы пространственной симметрии обозначаются как C_{nv} . Преобразования симметрии, образующие их допускают повороты C_n на углы, кратные $\frac{2\pi}{n}$ и отражения относительно n плоскостей симметрии, расположенных через угловые промежутки $\frac{\pi}{n}$. В дальнейшем, преобразования данных групп будем описывать в глобальной системе координат $X_0Y_0Z_0$. Под поворотами понимаются *активные* повороты, то есть поворачивается сам объект, система координат же остается неподвижной.

3.5.1 Пакет с двумя боковыми стержнями

Группой симметрии пакета с двумя боковыми стержнями является группа C_{2v} . Она включает в себя 4 элемента: E — тождественное преобразование, C_2 — поворот на угол $\frac{\pi}{2}$, σ_v — отражение относительно плоскости X_0Y_0 и σ_d — отражение относительно плоскости X_0Z_0 . Группа C_{2v} имеет 4 неприводимых представления (таблица 3).

Таблица 3 — Характеры неприводимых представлений группы C_{2v}

Представление	E	C_2	σ_v	σ_d
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1

Вектор перемещений в данном случае содержит 12 компонент и имеет следующий вид:

$$U = \{u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2, w_0, w_1, w_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2\}^T$$

Так как некоторые из компонент вектора U не участвуют в перестановках с другими компонентами, то матрицы, соответствующие операторам представлений будут иметь блочно-диагональную форму, поэтому, для удобства представления запишем их в виде отдельных блоков:

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_u(g) & 0 & 0 \\ 0 & T_{vw}(g) & 0 \\ 0 & 0 & T_\psi(g) \end{pmatrix}$$

В явном виде операторы представления в соответствующем пространстве H запишутся следующим образом:

$$T_u(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{vw}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_\psi(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_u(C_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T_{vw}(C_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T_\psi(C_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_u(\sigma_v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{vw}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad T_\psi(E) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T_u(\sigma_d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T_{vw}(E) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad T_\psi(E) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Все неприводимые представления группы C_{2v} одномерные, поэтому для записи ортопроекторов можно воспользоваться формулой, аналогичной (2.15):

$$P^{(R_\varphi)} = \frac{1}{G(C_{2n})} \sum_{C_{2n}} \chi^{(R_\varphi)}(g) T(g)$$

Так как операторы представления $T(g)$ имеют блочно-диагональную структуру, то их линейная комбинация также будет обладать подобной структурой. Поэтому ортопроекторы запишем также, по отдельным блокам:

На неприводимое представление A_1

$$P_u^{(A_1)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot T_u(E) + 1 \cdot T_u(C_2) + 1 \cdot T_u(\sigma_v) + 1 \cdot T_u(\sigma_d)) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{vw}^{(A_1)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot T_{vw}(E) + 1 \cdot T_{vw}(C_2) + 1 \cdot T_{vw}(\sigma_v) + 1 \cdot T_{vw}(\sigma_d)) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_\psi^{(A_1)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot T_\psi(E) + 1 \cdot T_\psi(C_2) + 1 \cdot T_\psi(\sigma_v) + 1 \cdot T_\psi(\sigma_d)) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На неприводимое представление A_2

$$P_u^{(A_2)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot T_u(E) + 1 \cdot T_u(C_2) - 1 \cdot T_u(\sigma_v) - 1 \cdot T_u(\sigma_d)) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{vw}^{(A_2)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot T_{vw}(E) + 1 \cdot T_{vw}(C_2) - 1 \cdot T_{vw}(\sigma_v) - 1 \cdot T_{vw}(\sigma_d)) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{\psi}^{(A_2)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot T_{\psi}(E) + 1 \cdot T_{\psi}(C_2) - 1 \cdot T_{\psi}(\sigma_v) - 1 \cdot T_{\psi}(\sigma_d)) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

На неприводимое представление B_1

$$P_u^{(B_1)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot T_u(E) - 1 \cdot T_u(C_2) + 1 \cdot T_u(\sigma_v) - 1 \cdot T_u(\sigma_d)) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{vw}^{(B_1)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot T_{vw}(E) - 1 \cdot T_{vw}(C_2) + 1 \cdot T_{vw}(\sigma_v) - 1 \cdot T_{vw}(\sigma_d)) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\psi}^{(B_1)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot T_{\psi}(E) - 1 \cdot T_{\psi}(C_2) + 1 \cdot T_{\psi}(\sigma_v) - 1 \cdot T_{\psi}(\sigma_d)) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На неприводимое представление B_2

$$P_u^{(B_2)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot T_u(E) - 1 \cdot T_u(C_2) - 1 \cdot T_u(\sigma_v) + 1 \cdot T_u(\sigma_d)) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{vw}^{(B_2)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot T_{vw}(E) - 1 \cdot T_{vw}(C_2) - 1 \cdot T_{vw}(\sigma_v) + 1 \cdot T_{vw}(\sigma_d)) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{\psi}^{(B_2)} = \frac{1}{4} \cdot (1 \cdot T_{\psi}(E) - 1 \cdot T_{\psi}(C_2) - 1 \cdot T_{\psi}(\sigma_v) + 1 \cdot T_{\psi}(\sigma_d)) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Решая уравнения $P^{(R_{\varphi})}U = U$ для каждого из неприводимых представлений получим следующие соотношения:

Для неприводимого представления A_1

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ u_1 &= u_2 \\ v_0 &= 0 \\ v_1 &= v_2 \\ w_0 &= w_1 = w_2 = 0 \\ \psi_0 &= \psi_1 = \psi_2 = 0 \end{aligned}$$

Для неприводимого представления A_2

$$\begin{aligned} u_0 &= u_1 = u_2 = 0 \\ v_0 &= v_1 = v_2 = 0 \\ w_0 &= 0 \\ w_1 &= w_2 \\ \psi_0 &= \psi_0 \\ \psi_1 &= \psi_2 \end{aligned}$$

Для неприводимого представления B_1

$$\begin{aligned}
u_0 &= 0 \\
u_1 &= -u_2 \\
v_0 &= v_0 \\
v_1 &= -v_2 \\
w_0 &= w_1 = w_2 = 0 \\
\psi_0 &= \psi_1 = \psi_2 = 0
\end{aligned}$$

Для неприводимого представления B_2

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_1 = u_2 = 0 \\
v_0 &= v_1 = v_2 = 0 \\
w_0 &= w_0 \\
w_1 &= -w_2 \\
\psi_0 &= 0 \\
\psi_1 &= -\psi_2
\end{aligned}$$

Обозначив равные функции перемещений боковых стержней нижним индексом s , запишем общий вид базисных векторов неприводимых представлений группы C_{2v} в пространстве \tilde{H}_2

$$\begin{aligned}
U^{(A_1)} &= \{u_0, u_s, u_s, 0, v_s, v_s, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \\
U^{(A_2)} &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, w_s, w_s, \psi_0, \psi_s, \psi_s\}^T \\
U^{(B_1)} &= \{0, u_s, -u_s, v_0, v_s, -v_s, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \\
U^{(B_2)} &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, w_0, w_s, -w_s, 0, \psi_s, -\psi_s\}^T
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Из соотношений (3.18) видно, что размерность векторов сократилась в 4 раза: с 12 до 3 независимых функций. Графическая интерпретация векторов (3.18) изображена на рисунке 3.4

Из рисунка 3.4 видно, что колебания, отвечающие неприводимому представлению A_1 представляют собой «продольные» колебания пакета, неприводимому представлению A_2 — «крутильные» колебания пакета, а неприводимым представлениям B_1 и B_2 соответствуют «поперечные» колебания вдоль осей Y_0 и Z_0 соответственно.

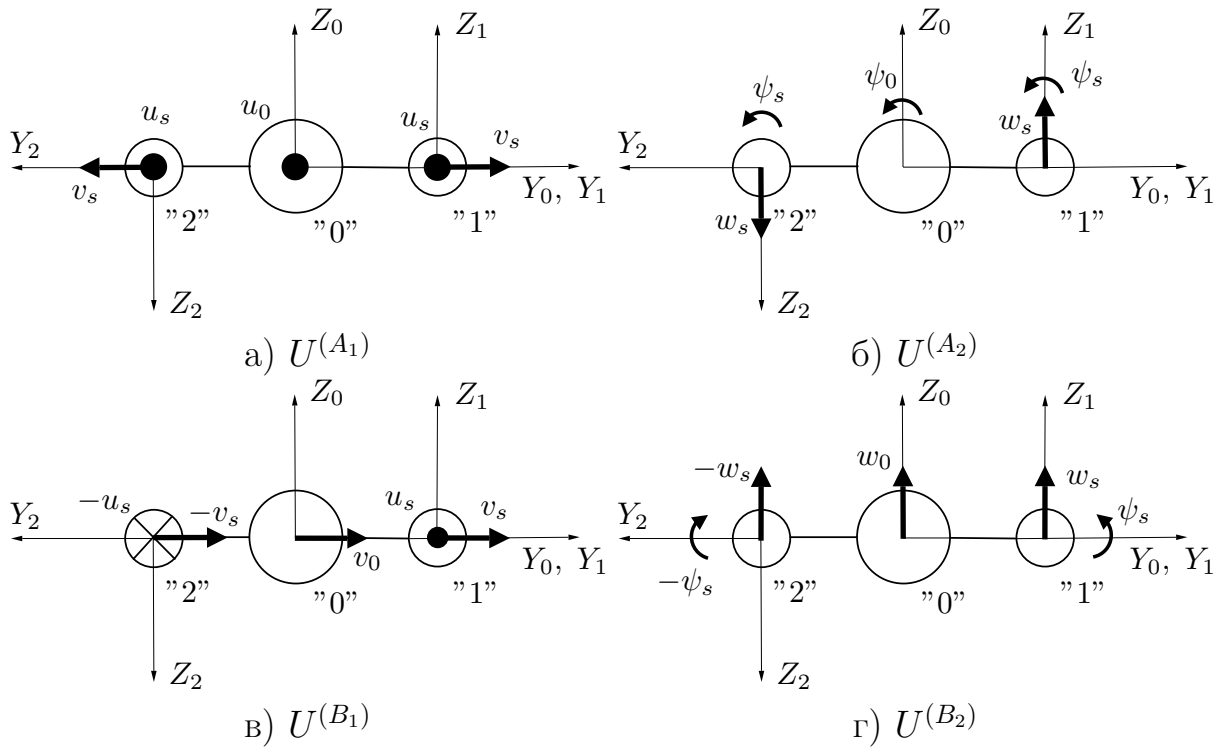


Рисунок 3.4 — Схематическое изображение форм колебаний, соответствующих различным неприводимым представлениям группы C_{2v}

3.5.2 Пакет с четырьмя боковыми стержнями

Пакету с двумя боковыми стержнями соответствует группа симметрии C_{4v} . Данная группа включает в себя 8 элементов: E , C_2 , C_4 , C_4^{-1} , σ_Y , σ_Z , σ_1 , σ_2 . Здесь σ_Y — отражение относительно плоскости X_0Y_0 , σ_Z — отражение относительно плоскости X_0Z_0 , σ_1 и σ_2 — отражения относительно плоскостей повернутых на угол $\frac{\pi}{4}$ от σ_Y и σ_Z соответственно. Группа C_{4v} имеет 5 неприводимых представлений (таблица 4).

В таблице 4 σ_v обозначены операции σ_Y и σ_Z , а σ_d — σ_1 и σ_2 . Существенным отличием группы C_{4v} от C_{2v} является наличие двумерного неприводимого представления E . Так как данное неприводимое представление имеет базис из двух функций, соответствующих двум строкам этого представления, то для нахождения ортопроекторов на эти строки необходимо найти диагональные матричные элементы неприводимого представления E . Для этого построим матрицы представления $T^{(E)}(g)$ для некоторых известных базисных функций представления E . Если осью вращения является ось X_0 , то в качестве таких функций можно рассмотреть $f(y, z) = y$ и $f(y, z) = z$. Воспользовавшись соотношением

Таблица 4 — Характеры неприводимых представлений группы C_{4v}

Представление	E	C_2	$C_4(2)$	$\sigma_v(2)$	$\sigma_d(2)$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	1	-1	1	-1
B_2	1	1	-1	-1	1
E	2	-2	0	0	0

$T(g)f(y,z) = f(g^{-1} \cdot (y,z))$ [61], запишем матрицы представления группы C_{4v} , построенные для этих функций:

$$\begin{aligned}
T^{(E)}(E) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; & T^{(E)}(C_2) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \\
T^{(E)}(C_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; & T^{(E)}(C_4^{-1}) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\
T^{(E)}(\sigma_Y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; & T^{(E)}(\sigma_Z) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\
T^{(E)}(\sigma_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; & T^{(E)}(\sigma_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Вектор перемещений в случае пакета с четырьмя боковыми стержнями содержит 20 компонент и имеет следующий вид:

$$U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}^T$$

Для нахождения ортопроекторов на одномерные представления воспользуемся формулой

$$P^{(R_\varphi)} = \frac{1}{G(C_{4n})} \sum_{C_{4n}} \chi^{(R_\varphi)}(g) T(g)$$

а на строки представления E формулой

$$P^{(E^i)} = \frac{2}{G(C_{4n})} \sum_{C_{4n}} T_{ii}^{(E)}(g) T(g), \quad i = 1, 2$$

По причине громоздкости мы не будем приводить матрицы представления для группы C_{4v} , а лишь запишем выражения и результирующие матрицы для ортопроекторов (также в блочном виде).

На неприводимое представление A_1

$$P^{(A_1)} = \frac{1}{8} \cdot \left(1 \cdot T(E) + 1 \cdot T(C_2) + 1 \cdot T(C_4) + \right. \\ \left. + 1 \cdot T(C_4^{-1}) + 1 \cdot T(\sigma_Y) + 1 \cdot T(\sigma_Z) + 1 \cdot T(\sigma_1) + 1 \cdot T(\sigma_2) \right)$$

$$P_u^{(A_1)} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad P_\psi^{(A_1)} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$P_{vw}^{(A_1)} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На неприводимое представление A_2

$$P^{(A_2)} = \frac{1}{8} \cdot \left(1 \cdot T(E) + 1 \cdot T(C_2) + 1 \cdot T(C_4) + \right. \\ \left. + 1 \cdot T(C_4^{-1}) - 1 \cdot T(\sigma_Y) - 1 \cdot T(\sigma_Z) - 1 \cdot T(\sigma_1) - 1 \cdot T(\sigma_2) \right)$$

$$P_u^{(A_2)} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad P_\psi^{(A_2)} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

На неприводимое представление B_2

$$P^{(B_2)} = \frac{1}{8} \cdot \left(1 \cdot T(E) + 1 \cdot T(C_2) - 1 \cdot T(C_4) - \right. \\ \left. - 1 \cdot T(C_4^{-1}) - 1 \cdot T(\sigma_Y) - 1 \cdot T(\sigma_Z) + 1 \cdot T(\sigma_1) + 1 \cdot T(\sigma_2) \right)$$

$$P_u^{(B_2)} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad P_\psi^{(B_2)} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$P_{vw}^{(B_2)} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

На 1-ую строку неприводимого представления E

$$P^{(E^1)} = \frac{2}{8} \cdot \left(1 \cdot T(E) - 1 \cdot T(C_2) + 0 \cdot T(C_4) + \right. \\ \left. + 0 \cdot T(C_4^{-1}) + 1 \cdot T(\sigma_Y) - 1 \cdot T(\sigma_Z) + 0 \cdot T(\sigma_1) + 0 \cdot T(\sigma_2) \right)$$

$$P_u^{(E^1)} = \frac{2}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad P_\psi^{(E^1)} = \frac{2}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Решив уравнения $P^{(R_\varphi)}U = U$, с учетом (3.19), для каждого из неприводимых представлений (строк неприводимых представлений) запишем общий вид базисных векторов неприводимых представлений группы C_{4v} в пространстве \tilde{H}_4

$$\begin{aligned}
U^{(A_1)} &= \{u_0, u_s, u_s, u_s, u_s, 0, v_s, v_s, v_s, v_s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \\
U^{(A_2)} &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, w_s, w_s, w_s, w_s, \psi_0, \psi_s, \psi_s, \psi_s\}^T \\
U^{(B_1)} &= \{0, u_s, -u_s, u_s, -u_s, 0, v_s, -v_s, v_s, -v_s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \\
U^{(B_2)} &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, w_s, -w_s, w_s, -w_s, 0, \psi_s, -\psi_s, \psi_s, -\psi_s\}^T \\
U^{(E^1)} &= \{0, u_s, 0, -u_s, 0, v_0, v_s, 0, -v_s, 0, 0, 0, -w_s, 0, w_s, 0, 0, -\psi_s, 0, \psi_s\}^T \\
U^{(E^2)} &= \{0, 0, u_s, 0, -u_s, 0, 0, v_s, 0, -v_s, w_0, w_s, 0, -w_s, 0, 0, \psi_s, 0, -\psi_s, 0\}^T
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Из выражений (3.20) видно, что полученные векторы имеют размерность значительно меньше размерности исходного пространства (размерность сократилась от 4-х до 10-ти раз). На рисунке 3.5 схематически изображены формы колебаний, соответствующие векторам (3.20).

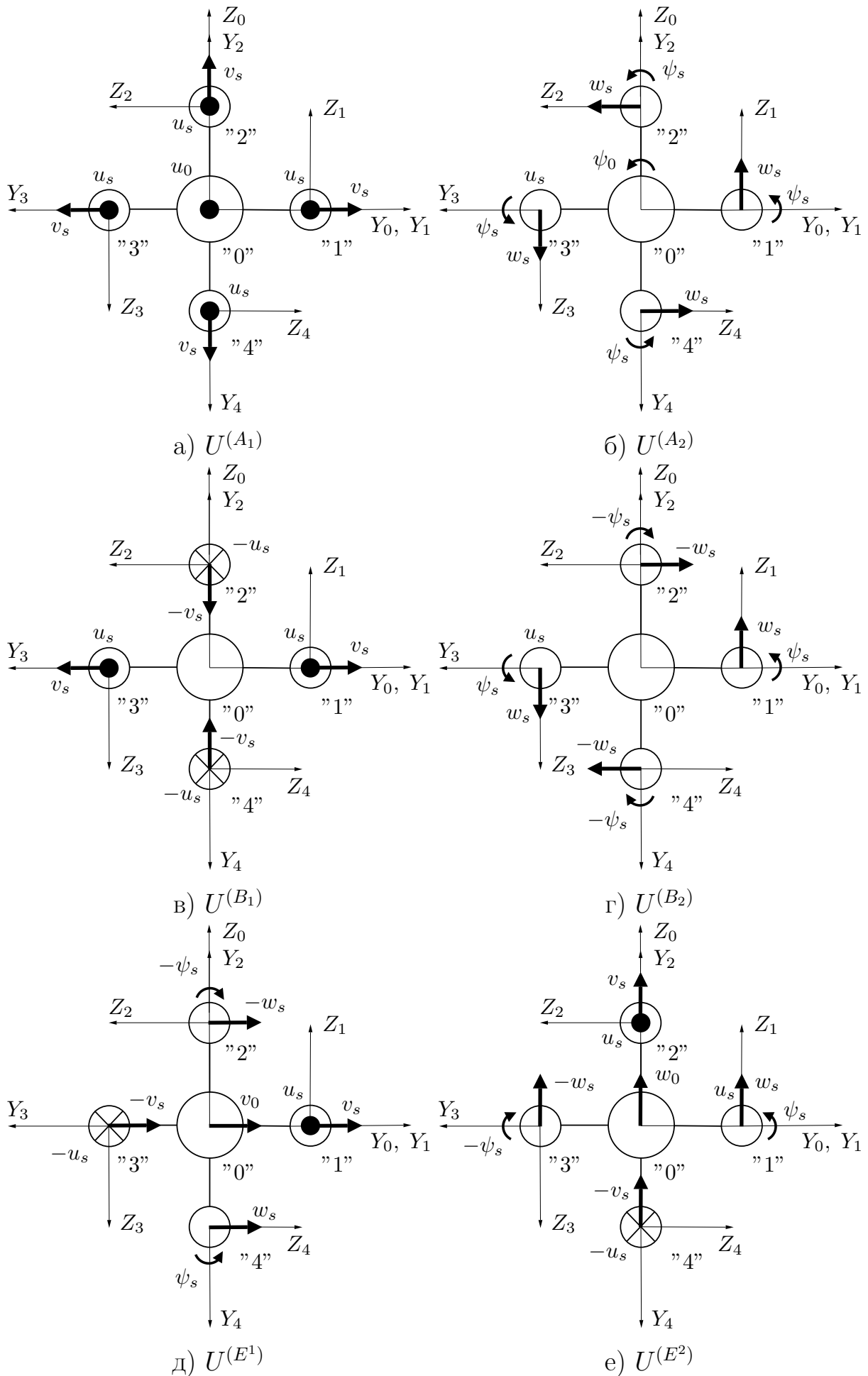


Рисунок 3.5 — Схематическое изображение форм колебаний, соответствующих различным неприводимым представлениям группы C_{4v}

Формы колебаний, отвечающие векторам $U^{(A_1)}$ представляют собой «продольные» колебания пакета, векторам $U^{(A_2)}$ — «крутильные» колебания. В случае форм, соответствующих векторам $U^{(B_1)}$ и $U^{(B_2)}$ силовое воздействие боковых блоков на центральный скомпенсировано, в результате чего получаем, что

$$u_0 = v_0 = w_0 = \psi_0 \equiv 0$$

Векторам $U^{(B_1)}$ соответствуют продольно-поперечные колебания боковых стержней (так называемые «бочкообразные» колебания), векторам $U^{(B_2)}$, в свою очередь, соответствуют поперечно-крутильные колебания боковых стержней. Двумерному неприводимому представлению E соответствуют кратные частоты колебаний с кратностью равной двум. Этим частотам отвечают «поперечные» колебания пакета в двух перпендикулярных плоскостях X_0Y_0 и X_0Z_0 .

Соотношения (3.19) выявляют дополнительные связи между векторами, отвечающими различным строкам неприводимого представления E . Обозначая верхним индексом принадлежность компоненты вектора той или иной строке неприводимого представления E запишем соотношения, отвечающие этим связям:

$$\begin{aligned} v_0^{(E^1)} &= w_0^{(E^2)} \\ u_s^{(E^1)} &= u_s^{(E^2)} \\ v_s^{(E^1)} &= v_s^{(E^2)} \\ w_s^{(E^1)} &= w_s^{(E^2)} \\ \psi_s^{(E^1)} &= \psi_s^{(E^2)} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Рассмотренная в данном разделе конфигурация пакета с четырьмя боковыми стержнями отвечает конфигурации «+». На практике также рассматривается конфигурация «X», которая может быть получена поворотом системы координат $X_0Y_0Z_0$ на угол $\frac{\pi}{4}$. Векторы, являющиеся базисными для неприводимых представлений, могут быть получены для такой схемы с помощью приведенной выше методики, после записи соответствующих операторов представления.

3.5.3 Пакет с шестью боковыми стержнями

Пакету с шестью боковыми стержнями соответствует группа симметрии C_{6v} . Данная группа включает в себя 12 элементов: $E, C_2, C_3, C_3^{-1}, C_6, C_6^{-1}, \sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Здесь нижним индексом a, b, c обозначены отражения относительно плоскостей, проходящих через оси X_1, X_2 и X_3 соответственно и ось X_0 . Нижними индексами 1, 2, 3 обозначены отражения относительно плоскостей повернутых на угол $\frac{\pi}{6}$ относительно плоскостей, отражения относительно которых обозначаются индексами a, b, c . Группа C_{6v} имеет 6 неприводимых представлений (таблица 5).

Таблица 5 — Характеры неприводимых представлений группы C_{6v}

Представление	E	C_2	$C_3(2)$	$C_6(2)$	$\sigma_v(3)$	$\sigma_d(3)$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	-1	1
B_2	1	-1	1	-1	1	-1
E_1	2	-2	-1	1	0	0
E_2	2	2	-1	-1	0	0

В таблице 5 σ_v обозначены операции σ_a, σ_b и σ_c а σ_d — σ_1, σ_2 и σ_3 . По сравнению с группой C_{4v} , группа C_{6v} содержит два двумерных представления E_1 и E_2 . Как и в случае с группой C_{4v} , для нахождения проекторов на соответствующие строки, необходимо построить матрицы данных двумерных представлений, соответствующие элементам группы.

В качестве базисных функций неприводимого представления E_1 , как и в случае с группой C_{4v} , примем функции $f(y, z) = y$ и $f(y, z) = z$

$$\begin{aligned}
T^{(E_1)}(E) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; & T^{(E_1)}(C_2) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \\
T^{(E_1)}(C_3) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; & T^{(E_1)}(C_3^{-1}) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\
T^{(E_1)}(C_6) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; & T^{(E_1)}(C_6^{-1}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\
T^{(E_1)}(\sigma_a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; & T^{(E_1)}(\sigma_b) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\
T^{(E_1)}(\sigma_c) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; & T^{(E_1)}(\sigma_1) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\
T^{(E_1)}(\sigma_2) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; & T^{(E_1)}(\sigma_3) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};
\end{aligned} \tag{3.22}$$

В качестве базисных функций неприводимого представления E_2 , примем функции $f(y,z) = y^2 - z^2$ и $f(y,z) = 2yz$

$$\begin{aligned}
T^{(E_2)}(E) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; & T^{(E_1)}(C_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\
T^{(E_2)}(C_3) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; & T^{(E_2)}(C_3^{-1}) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\
T^{(E_2)}(C_6) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; & T^{(E_2)}(C_6^{-1}) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\
T^{(E_2)}(\sigma_a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; & T^{(E_2)}(\sigma_b) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\
T^{(E_2)}(\sigma_c) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; & T^{(E_2)}(\sigma_1) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\
T^{(E_2)}(\sigma_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; & T^{(E_2)}(\sigma_3) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Запишем выражения для ортопроекторов на подпространства, соответствующие неприводимым представлениям (строкам неприводимых представлений) и приведем их явный вид для пространства \tilde{H}_6 в блочном виде

На неприводимое представление B_2

$$P^{(B_2)} = \frac{1}{12} \cdot \left(1 \cdot T(E) - 1 \cdot T(C_2) + 1 \cdot T(C_3) + 1 \cdot T(C_3^{-1}) - 1 \cdot T(C_6) - \right. \\ \left. - 1 \cdot T(C_6^{-1}) - 1 \cdot T(\sigma_a) - 1 \cdot T(\sigma_b) - 1 \cdot T(\sigma_c) + 1 \cdot T(\sigma_1) + 1 \cdot T(\sigma_2) + 1 \cdot T(\sigma_3) \right)$$

$$P_u^{(B_2)} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad P_\psi^{(B_2)} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$P_{vw}^{(B_2)} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

На 1-ую строку неприводимого представления E_1

$$P^{(E_1^1)} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 \cdot T(E) - 1 \cdot T(C_2) - \frac{1}{2} \cdot T(C_3) - \frac{1}{2} \cdot T(C_3^{-1}) + \frac{1}{2} \cdot T(C_6) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot T(C_6^{-1}) + 1 \cdot T(\sigma_a) - \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_b) - \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_c) + \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_1) - 1 \cdot T(\sigma_2) + \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_3) \right)$$

$$P_u^{(E_1^1)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; P_\psi^{(E_1^1)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_{vw}^{(E_1^1)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

На 2-ую строку неприводимого представления E_1

$$P^{(E_1^2)} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 \cdot T(E) - 1 \cdot T(C_2) - \frac{1}{2} \cdot T(C_3) - \frac{1}{2} \cdot T(C_3^{-1}) + \frac{1}{2} \cdot T(C_6) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot T(C_6^{-1}) - 1 \cdot T(\sigma_a) + \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_b) + \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_c) - \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_1) + 1 \cdot T(\sigma_2) - \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_3) \right)$$

$$P_u^{(E_1^2)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}; P_\psi^{(E_1^2)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_{vw}^{(E_1^2)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

На 1-ую строку неприводимого представления E_2

$$P^{(E_2^1)} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 \cdot T(E) + 1 \cdot T(C_2) - \frac{1}{2} \cdot T(C_3) - \frac{1}{2} \cdot T(C_3^{-1}) - \frac{1}{2} \cdot T(C_6) - \frac{1}{2} \cdot T(C_6^{-1}) + 1 \cdot T(\sigma_a) - \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_b) - \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_c) - \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_1) + 1 \cdot T(\sigma_2) - \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_3) \right)$$

$$P_u^{(E_2^1)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; P_\psi^{(E_2^1)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_{vw}^{(E_2^1)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

На 2-ую строку неприводимого представления E_2

$$P^{(E_2^2)} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 \cdot T(E) + 1 \cdot T(C_2) - \frac{1}{2} \cdot T(C_3) - \frac{1}{2} \cdot T(C_3^{-1}) - \frac{1}{2} \cdot T(C_6) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot T(C_6^{-1}) - 1 \cdot T(\sigma_a) + \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_b) + \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_c) + \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_1) - 1 \cdot T(\sigma_2) + \frac{1}{2} \cdot T(\sigma_3) \right)$$

$$P_u^{(E_2^2)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}; P_\psi^{(E_2^2)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_{vw}^{(E_2^2)} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Решив уравнения $P^{(R_\varphi)}U = U$, с учетом (3.22) и (3.23), для каждого из неприводимых представлений (строк неприводимых представлений) запишем общий вид базисных векторов неприводимых представлений группы C_{6v} в пространстве \tilde{H}_6

$$\begin{aligned}
U^{(E_1^1)} = & \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -2u_s \\ -u_s \\ u_s \\ 2u_s \\ u_s \\ -u_s \\ v_0 \\ 2v_s \\ v_s \\ -v_s \\ -2v_s \\ -v_s \\ v_s \\ 0 \\ 0 \\ -w_s \\ -w_s \\ 0 \\ w_s \\ w_s \\ 0 \\ 0 \\ \psi_s \\ \psi_s \\ 0 \\ -\psi_s \\ -\psi_s \end{array} \right\}; U^{(E_1^2)} = & \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -u_s \\ -u_s \\ 0 \\ u_s \\ u_s \\ 0 \\ 0 \\ v_s \\ v_s \\ 0 \\ -v_s \\ -v_s \\ -v_s \\ w_0 \\ 2w_s \\ w_s \\ -w_s \\ -2w_s \\ -w_s \\ w_s \\ 0 \\ 2\psi_s \\ \psi_s \\ -\psi_s \\ -2\psi_s \\ -\psi_s \\ \psi_s \end{array} \right\}; U^{(E_2^1)} = & \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 2u_s \\ -u_s \\ -u_s \\ 2u_s \\ -u_s \\ -u_s \\ 0 \\ 2v_s \\ -v_s \\ -v_s \\ 2v_s \\ -v_s \\ -v_s \\ 0 \\ 0 \\ w_s \\ -w_s \\ 0 \\ w_s \\ -w_s \\ 0 \\ 0 \\ \psi_s \\ -\psi_s \\ 0 \\ \psi_s \\ -\psi_s \end{array} \right\}; U^{(E_2^2)} = & \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ u_s \\ -u_s \\ 0 \\ u_s \\ -u_s \\ 0 \\ 0 \\ v_s \\ -v_s \\ 0 \\ v_s \\ -v_s \\ 0 \\ 0 \\ 2w_s \\ -w_s \\ -w_s \\ 2w_s \\ -w_s \\ -w_s \\ 0 \\ 2\psi_s \\ -\psi_s \\ -\psi_s \\ 2\psi_s \\ -\psi_s \\ -\psi_s \end{array} \right\} \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Как и в предыдущих случаях, из выражений (3.24) и (3.25) видно, что размерность векторов, соответствующих формам собственных колебаний, значительно сократилась (до 14-ти раз). На рисунке 3.6 представлены схематичные иллюстрации форм колебаний, соответствующих векторам (3.24).

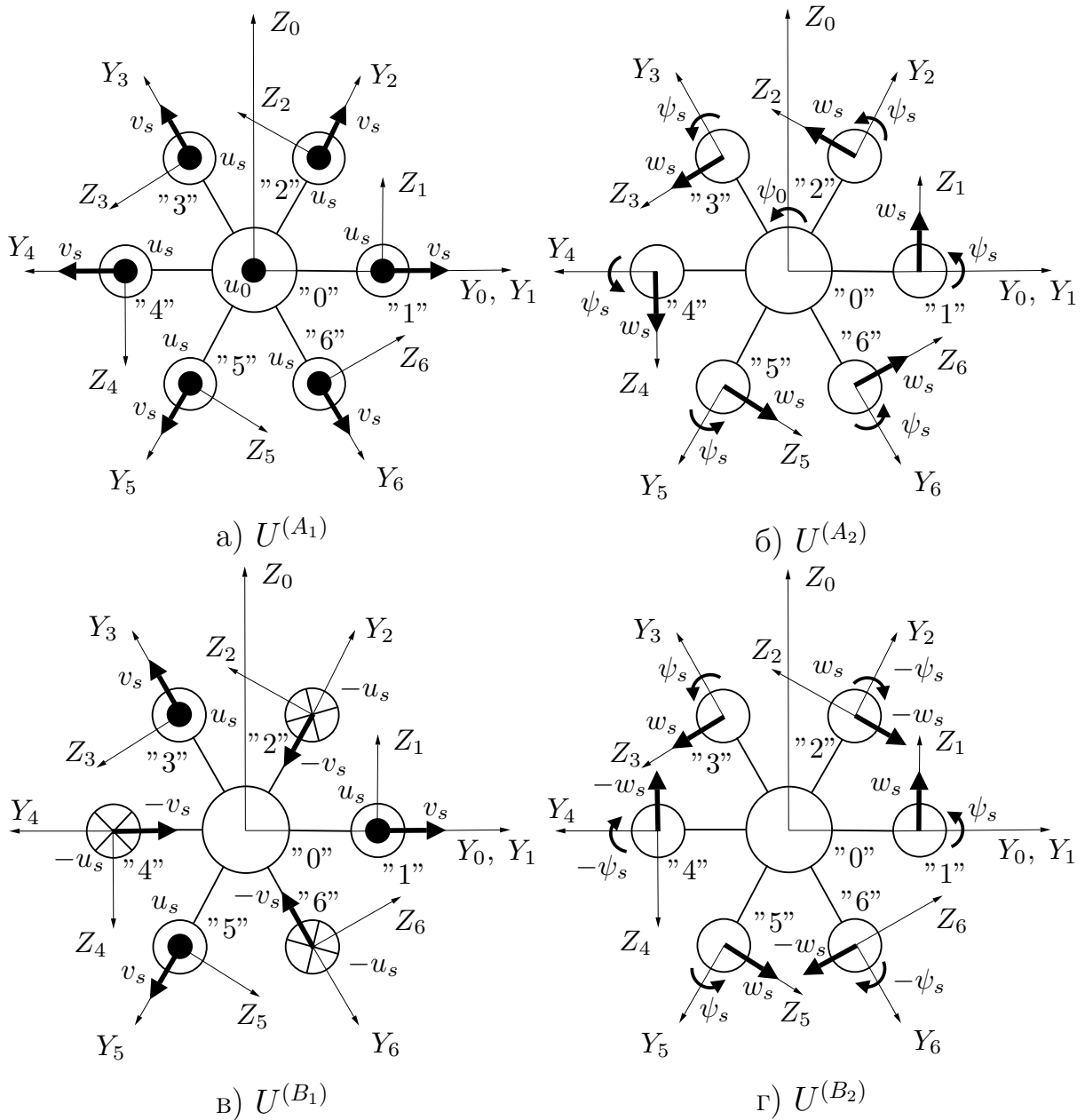


Рисунок 3.6 — Схематическое изображение форм колебаний, соответствующих одномерным неприводимым представлениям группы C_{6v}

Формы колебаний, соответствующие одномерным неприводимым представлениям группы C_{6v} имеют схожий характер с аналогичными формами для пакета с четырьмя боковыми стержнями (и группы C_{4v} соответственно). Представлению A_1 отвечают «продольные» колебания пакета, представлению A_2 — «крутильные». Представлениям B_1 и B_2 отвечают продольно-поперечные и поперечно-крутильные колебания боковых стержней соответственно при которых действие последних на центральный скомпенсировано.

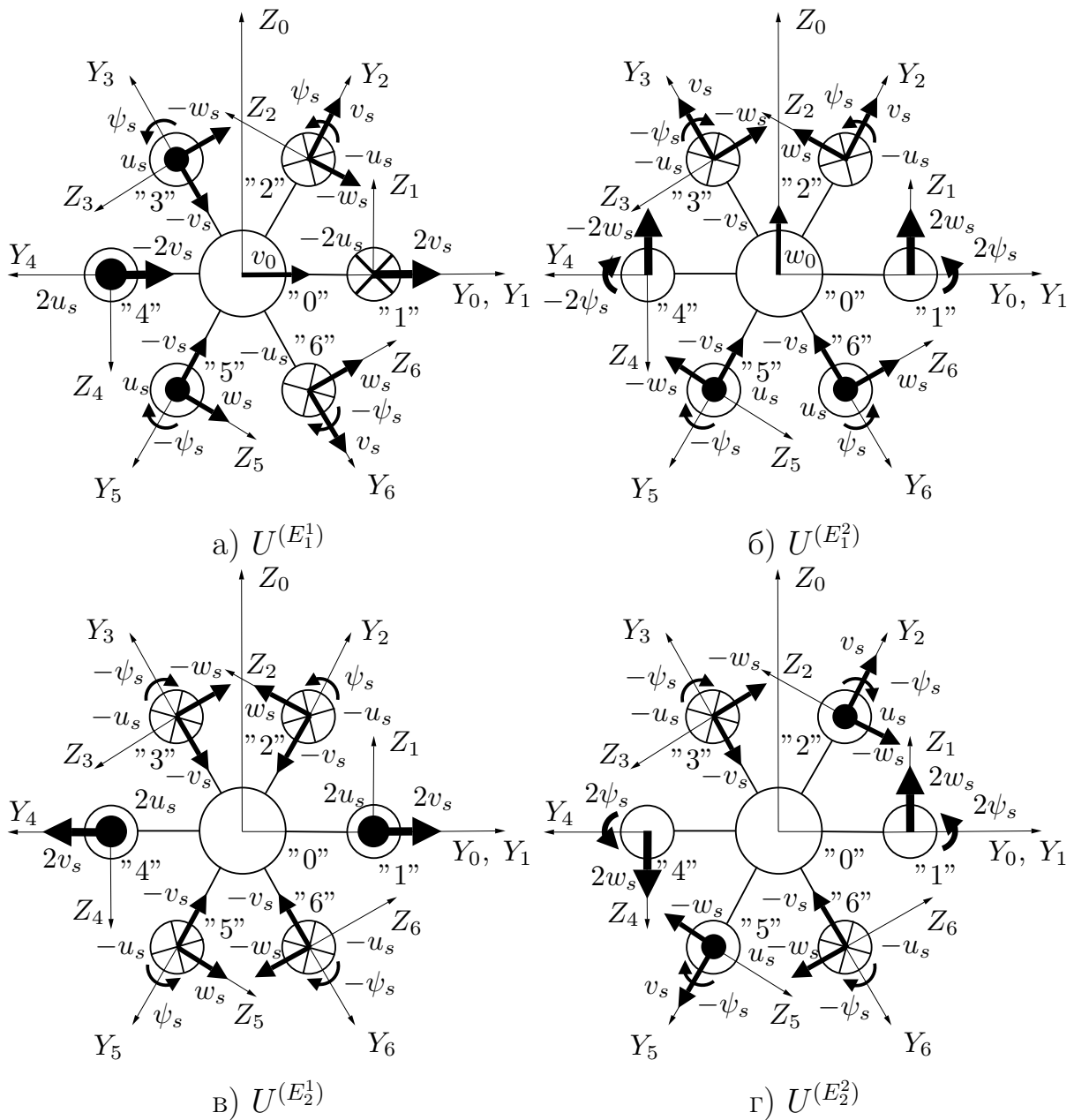
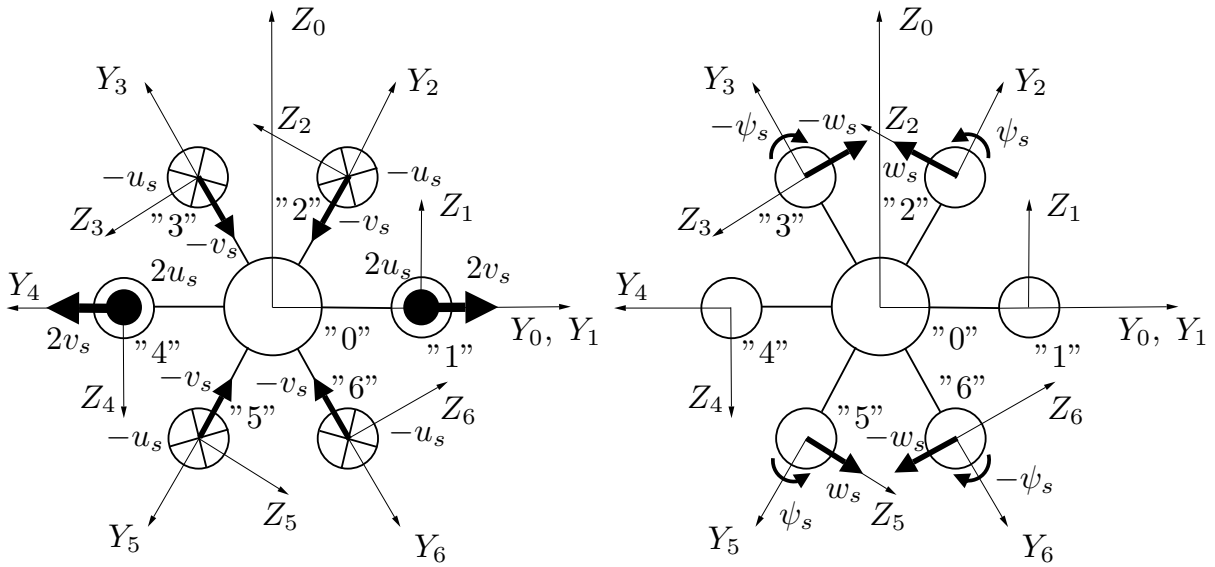


Рисунок 3.7 — Схематическое изображение форм колебаний, соответствующих двумерным неприводимым представлениям группы C_{6v}

Двумерному неприводимому представлению E_1 соответствуют «поперечные» колебания пакета. Первой строке данного представления принадлежат формы, при которых центральный стержень изгибается в плоскости X_0Y_0 , второй строке те формы, при которых центральный стержень изгибается в плоскости X_0Z_0 (рисунок 3.7). Формы колебаний, соответствующие неприводимому представлению E_2 относятся к случаю, когда центральный стержень неподвижен. Но, в отличие от базисных векторов неприводимых представлений B_1 и B_2 , вектора, принадлежащие строкам представления E_2 содержат компоненты всех трех типов колебаний (продольные, поперечные и крутильные). Но на

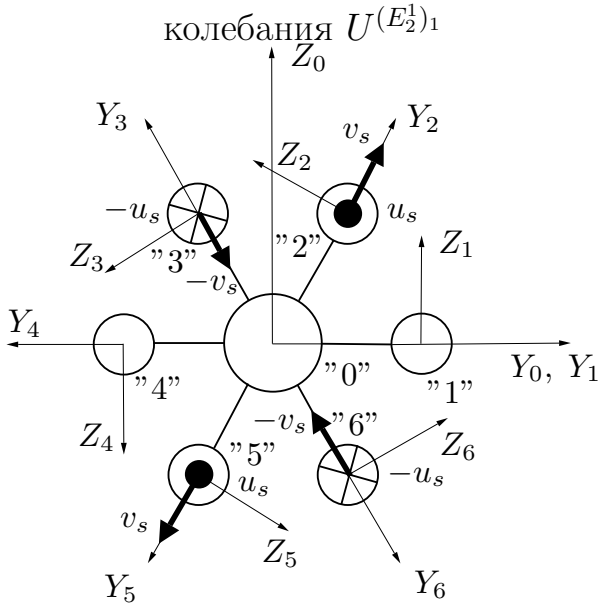
практике, одновременное наличие продольно-поперечных и поперечно-крутильных колебаний возможно лишь в случае совпадения соответствующих парциальных частот, что в свою очередь очень маловероятно. Такое, кажущееся на первый взгляд, несоответствие базисных векторов представления E_2 реальным формам колебаний объясняется тем, что каждый из полученных векторов отвечает сразу двум типам колебаний боковых стержней: продольно-поперечным и поперечно-крутильным, которые несмотря на очевидные различия, в данном случае, отвечают одному и тому же типу симметрии, и поэтому с точки зрения симметричной классификации неразличимы. Учитывая только продольно-поперечные или поперечно-продольные колебания боковых стержней, каждый базисный вектор представления E_2 можно расщепить на два вектора, в сумме дающие исходный. Формы колебаний, соответствующие этим векторам изображены на рисунке 3.8.

Частоты колебаний, соответствующие полученным типам совпадают с парциальными частотами колебаний боковых стержней, которым в свою очередь равны и частоты, соответствующие представлениям B_1 и B_2 . Таким образом спектр колебаний рассмотренной механической системы, помимо частот с кратностью 2, соответствующих «поперечным» колебаниям пакета (представление E_1), содержит частоты с кратностью 3, с двумя возможными вариантами собственных подпространств, образованных векторами $\{U^{(B_1)}, U^{(E_2^1)_1}; U^{(E_2^2)_1}\}$ и $\{U^{(B_2)}, U^{(E_2^1)_2}; U^{(E_2^2)_2}\}$.

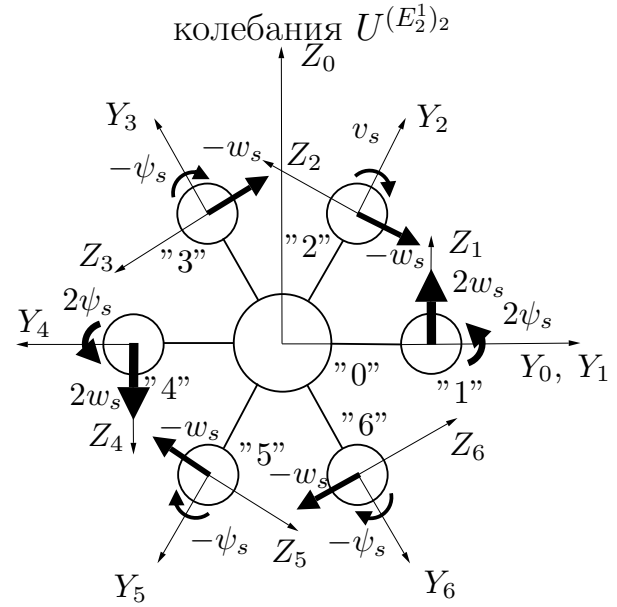


а) Продольно-поперечные

б) Поперечно-крутильные



в) Продольно-поперечные



г) Поперечно-крутильные

колебания $U^{(E_2^2)_1}$

колебания $U^{(E_2^2)_2}$

Рисунок 3.8 — Результат расщепления типов форм колебаний, соответствующих представлению E_2

Соотношения (3.22) и (3.23) выявляют дополнительные связи между векторами, отвечающими различным строкам неприводимых представлений E_1 и E_2 . Обозначая верхним индексом принадлежность компоненты вектора той или иной строке неприводимых представлений E_1 или E_2 запишем соотношения, отвечающие этим связям:

Для представления E_1

$$\begin{aligned}
 v_0^{(E_1^1)} &= w_0^{(E_1^2)} \\
 \sqrt{3}u_s^{(E_1^1)} &= u_s^{(E_1^2)} \\
 \sqrt{3}v_s^{(E_1^1)} &= v_s^{(E_1^2)} \\
 w_s^{(E_1^1)} &= \sqrt{3}w_s^{(E_1^2)} \\
 \psi_s^{(E_1^1)} &= -\sqrt{3}\psi_s^{(E_1^2)}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Для представления E_2

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3}u_s^{(E_2^1)} &= u_s^{(E_2^2)} \\
 \sqrt{3}v_s^{(E_2^1)} &= v_s^{(E_2^2)} \\
 w_s^{(E_2^1)} &= -\sqrt{3}w_s^{(E_2^2)} \\
 \psi_s^{(E_2^1)} &= -\sqrt{3}\psi_s^{(E_2^2)}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

3.6 Заключение по третьей главе

Проведенный симметричный анализ спектральных задач порожденных собственными колебаниями стержневых моделей РН пакетной компоновки, рассмотренных в данной главе, привел к результатам, аналогичным работам [10—13]. В то же время он выявил дополнительные сведения о формах колебаний, соответствующих тем или иным неприводимым представлениям.

Ортопроекторы на подпространства неприводимых представлений, полученные в данной главе, позволяют проецировать произвольные функции, определенные для рассмотренных стержневых систем (такие как начальные условия, внешние нагрузки) на эти подпространства, что в дальнейшем может быть использовано при решении эволюционных задач, подобно тому, как это было показано в главе 2.

Глава 4. Численный расчет собственных колебаний пакета стержней с четырьмя боковыми стержнями, совершающего пространственные колебания

Задача (3.15), постановка и симметричный анализ которой приведены в главе 3, может быть решена различными методами, как аналитическими, так и численными. Аналитические методы позволяют находить неограниченное число собственных значений задачи, и соответствующих им форм колебаний, с требуемой точностью. Численные методы, например, метод конечных элементов, наиболее часто используемый на практике, позволяют находить ограниченное число собственных значений задачи, определяемое числом степеней свободы расчетной модели, которое в данном случае конечно, и зависит от дискретизации исходной системы уравнений в частных производных. Точность решения, получаемого МКЭ падает с ростом собственных чисел, и для дальнейших расчетов может быть использовано некоторое число низших тонов колебаний. Тем не менее, на практике, в силу многих факторов, обычно ограничиваются лишь низшими тонами колебаний, требуемая точность которых может быть достигнута соответствующим разбиением исходной расчетной модели [110].

В данной главе мы рассмотрим решение задачи о собственных колебаниях пакета стержней с четырьмя боковыми стержнями с помощью МКЭ и сравним полученные результаты с результатами симметричного анализа приведенного в главе 3.

4.1 Особенности конечно-элементной модели

Для решения задачи будем использовать процессор NASTRAN [111], решатель SOL 103 Real Eigenvalues. В качестве элементов, моделирующих стержни, будем использовать элементы CBAR. Матрица жесткости данных элементов соответствует балочной теории Эйлера-Бернулли с возможностью учета дополнительных сдвиговых деформаций по теории Тимошенко. В NASTRAN используется две формулировки для матриц масс элемента CBAR: Lumped и Coupled.

Обе матрицы масс учитывают массу только по линейным степеням свободы (здесь под линейными понимаются отличные от угловых).

Матрица масс построенная по формулировке Lumped имеет диагональную форму, с ненулевыми компонентами соответствующими линейным степеням свободы и равными $\frac{1}{2}$ массы всего элемента.

Матрица масс Coupled совпадает с согласованной матрицей масс балочно-го элемента за тем исключением, что значение компонент матрицы для перемещений в осевом направлении равны среднему между Lumped формулировкой и формулировкой для согласованной матрицы, а также масса для поворота вокруг оси элемента (кручение) не учитывается. Формулировка Coupled дает наиболее точные результаты при небольшом количестве элементов, но, вследствие того, что в матрице масс появляются внедиагональные компоненты, возрастает машинное время счета и требуется большее количество вычислительных ресурсов. При достаточной густоте сетки формулировка Lumped также дает удовлетворительный результат, при этом в матрице масс присутствуют только диагональные компоненты. В данном расчете будем пользоваться формулировкой Lumped.

При расчете необходимо учесть массы элементов не входящих в массу оболочки, моделируемой балочными элементами. Массу жидкости в трех направлениях, определяемых локальной системой координат стержня, а также момент инерции жидкости, захватываемой демпфирующими перегородками в баках учтем добавлением матриц масс с соответствующими компонентами в узлы стержневой модели. Данную процедуру можно выполнить с помощью добавления в модель элементов CONM2. Так как в рассматриваемой модели жидкость считается «замороженной», то погонную массу жидкости можно принять равной для каждого направления. Элемент CONM2 определяет матрицу масс размером 6×6 с помощью задания таких величин как значение массы, компоненты тензора инерции и смещение массы относительно узла (опционально). При добавлении данных элементов будем моделировать дополнительную массу как сосредоточенную, по аналогии с формулировкой Lumped. Такой учет массы не нарушает диагональную структуру матрицы масс всей конструкции. В общем случае матрица масс, соответствующая элементу CONM2 имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ 0 & 0 & 0 & I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ 0 & 0 & 0 & I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

Матрицы жесткости $([K^i])^j$ элементов, моделирующих пояса крепления боковых блоков могут быть получены различными способами. На практике, обычно, их получают с помощью статической конденсации матриц жесткости трехмерных КЭ сеток реальных конструкций узлов силовых поясов. В нашем случае, для примера расчета нет необходимости в подобном моделировании жесткостных характеристик силовых поясов, требуемые матрицы жесткости должны позволить проиллюстрировать взаимодействие различных компонент вектора перемещений, соответствующее реальным конструкциям и иметь значения коэффициентов, по возможности близкие к реальным. Поэтому воспользуемся комбинированным методом, и жесткость узлов силовых поясов будем моделировать двухузловыми упругими элементами CBUSH, а характер их внецентренного крепления на блоках будем учитывать с помощью элементов статической конденсации RBE2. Элементы RBE2 позволяют, на основании своей геометрии, задавать зависимости между степенями свободы управляющего (или независимого) и зависимых узлов, обеспечивающие "затвердевание" данных элементов, при этом не вносящих дополнительную жесткость в матрицу жесткости, как это происходит в случае обычных балочных элементов, с искусственно многократно завышенной по сравнению с другими элементами жесткостью для получения свойств квази-абсолютно жесткого тела. Далее, на основании полученных зависимостей производится соответствующее редуцирование остальных матриц и векторов, входящих в исходное уравнение МКЭ. Данная процедура, в общем случае, может быть записана следующим образом: пусть уравнения связи записаны в однородной форме

$$(RG) \{U\} = \{0\}$$

Разделим вектор степеней свободы $\{U\}$ на управляющие $\{U_N\}$ и зависимые $\{U_M\}$ степени свободы. Получим следующее соотношение

$$\begin{pmatrix} RG_M & RG_N \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_M \\ U_N \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Выразим зависимые степени свободы через управляющие степени свободы

$$\{U_M\} = -(RG_M)^{-1} (RG_N) \{U_N\} = (GM) \{U_N\} \quad (4.1)$$

Пусть исходное уравнение движения до редуцирования имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} M_{MM} & 0 \\ 0 & M_{NN} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_M \\ \ddot{U}_N \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} K_{MM} & 0 \\ 0 & K_{NN} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_M \\ U_N \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Тогда, с учетом (4.1) его можно преобразовать к редуцированному виду, тем самым обеспечив требуемую связь узлов:

$$\begin{aligned} & \left((GM)^T (M_{MM}) (GM) + (M_{NN}) \right) \{ \ddot{U}_N \} + \\ & + \left((GM)^T (K_{MM}) (GM) + (K_{NN}) \right) \{ U_N \} = 0 \end{aligned}$$

В качестве расчетного случая рассмотрим крепление боковых стержней с помощью трех поясов упругих связей.

Нижний пояс упругих связей [K^1]. Данный пояс состоит из двух тяг, шарнирно закрепленных на обечайках баков и воспринимающих усилия в направлении оси Y_j . Также на линии, соединяющей оси блоков находится упор, воспринимающий усилия вдоль оси Z_j .

Упругие свойства элементов CBUSH задавались в СК соответствующего бокового блока $(X_j Y_j Z_j)$, таким образом, что элементы, моделирующие толкатели, обеспечивали упругость в направлении оси Y_j , а элемент, моделирующий упор, в направлении Y_j .

На рисунке 4.1 схематично изображено крепление бокового стержня в нижнем поясе упругих связей.

Средний пояс упругих связей [K^2]. Крепление боковых стержней в среднем поясе упругих связей аналогично нижнему поясу упругих связей, за тем исключением, что отсутствует упор, воспринимающий усилия вдоль оси Z_j .

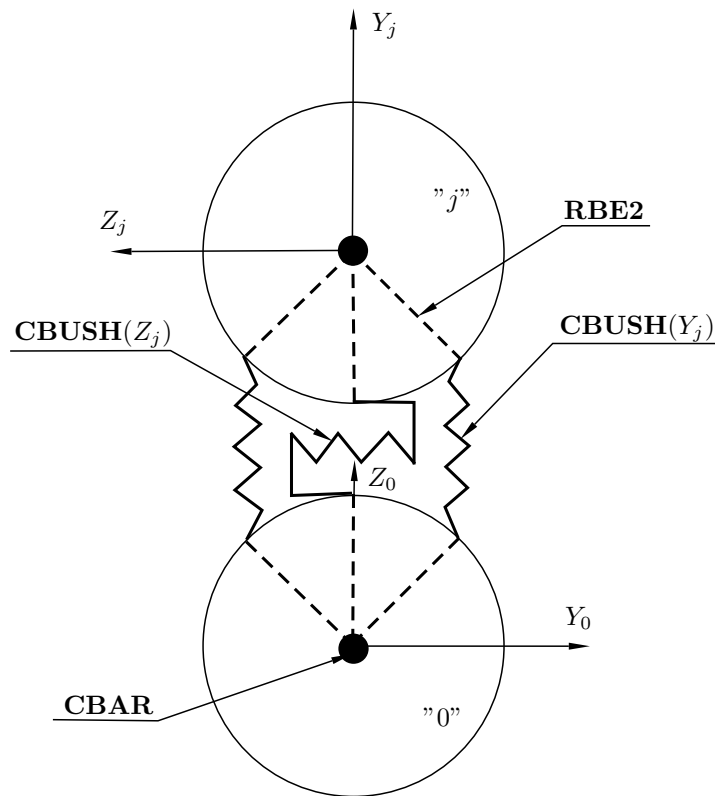


Рисунок 4.1 — Модель крепления бокового стержня в нижнем поясе упругих связей

Схема крепления бокового стержня в среднем силовом поясе приведена на рисунке 4.2.

Верхний пояс упругих связей [K^3]. Верхний пояс представлен упором, воспринимающим усилия в направлениях X_j и Z_j . Упругие характеристики данного упора также можно смоделировать с помощью элемента CBUSH, но в данном случае, помимо упругости в направлении оси Z_j данный элемент должен обеспечивать упругость в направлении оси X_j . Так как для элемента CBUSH возможно задать различную жесткость, одновременно, для нескольких степеней свободы (вплоть до 6-ти), то в нашем случае, для моделирования верхнего силового пояса можно обойтись одним элементом CBUSH на каждый боковой стержень. На рисунке 4.3 представлена схема крепления бокового стержня в верхнем поясе упругих связей.

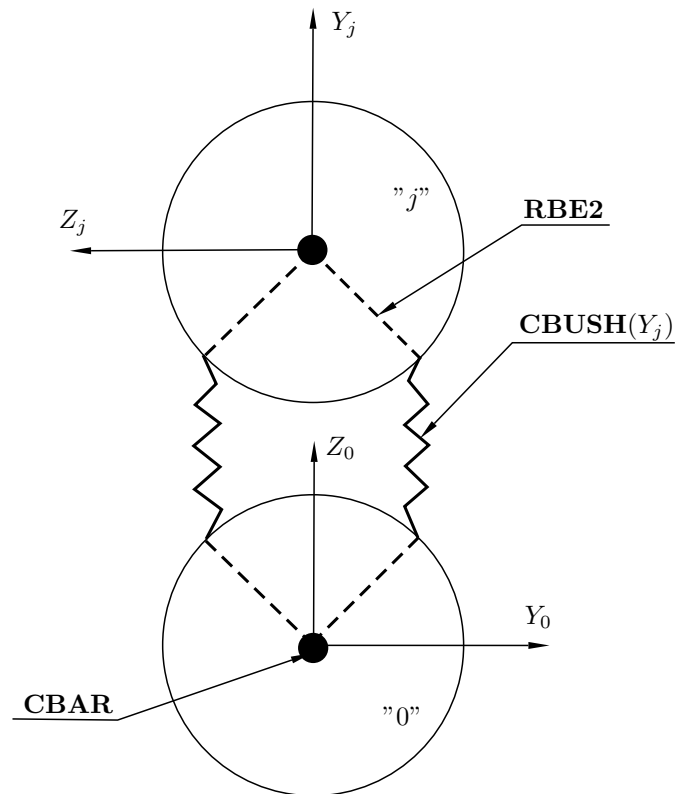


Рисунок 4.2 — Модель крепления бокового стержня в среднем поясе упругих связей

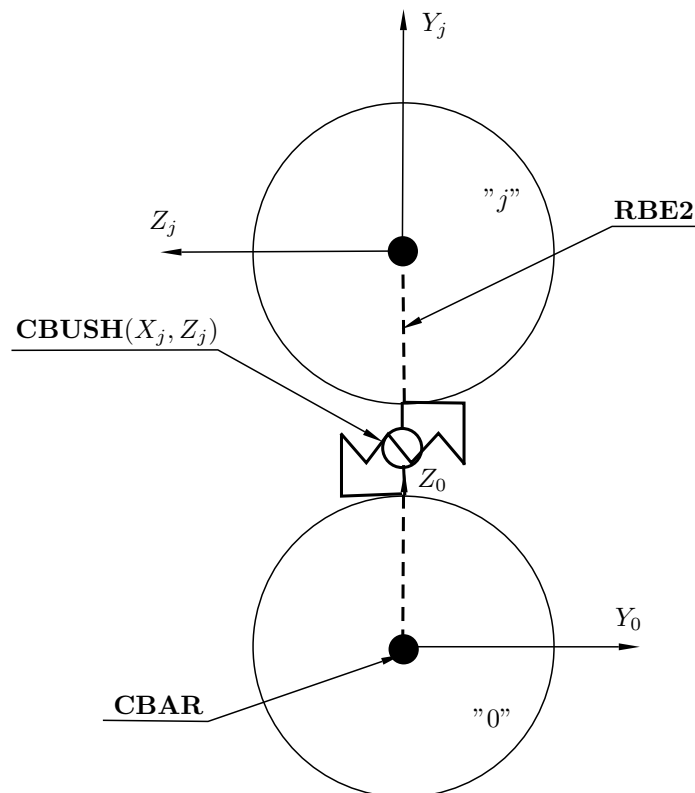


Рисунок 4.3 — Модель крепления бокового стержня в верхнем поясе упругих связей

4.2 Исходные данные для расчета форм и частот колебаний

Для всех стержневых элементов СВАР задавалось сечение соответствующее тонкостенной трубе, с внешним диаметром 2900 мм, и толщиной стенки 3,5 мм. Свойства заданного материала (АМг6) приведены в таблице 6.

Таблица 6 — Свойства материала стержневых элементов (АМг6)

Характеристика	Значение
E , МПа	$7,1 \cdot 10^4$
μ	0,33
ρ , кг/м ³	2640

Жесткости элементов СВУШН, образующих пояса упругих связей $[K^i]$ приведены в таблице 7

Таблица 7 — Жесткости линейно-упругих элементов, моделирующих пояса упругих связей $[K^i]$

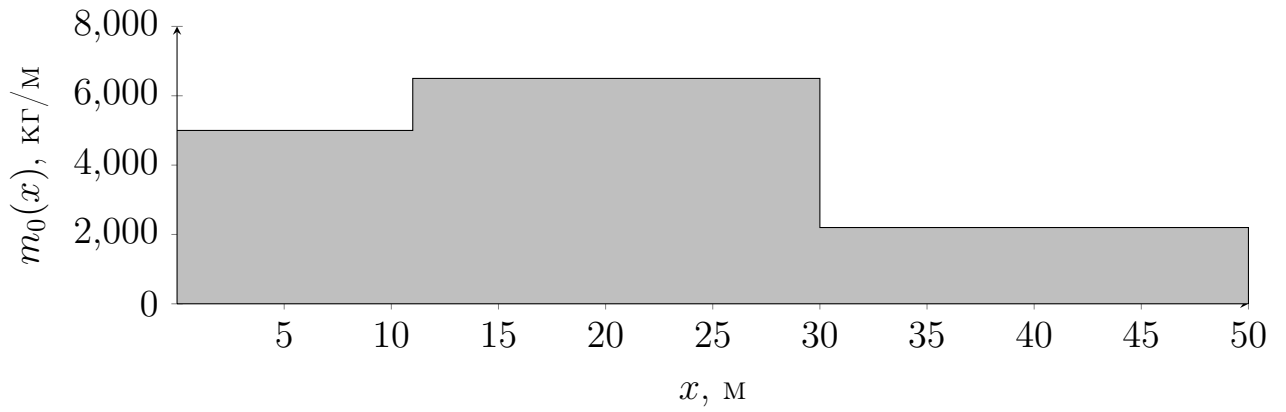
Силовой пояс	k_{Xj} , Н/м	k_{Yj} , Н/м	k_{Zj} , Н/м
$[K^1]$	0	$7,5 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^7$
$[K^2]$	0	$7,5 \cdot 10^7$	0
$[K^3]$	$8 \cdot 10^7$	0	$8 \cdot 10^7$

Длины стержней и координаты поясов упругих связей приведены в таблице 8.

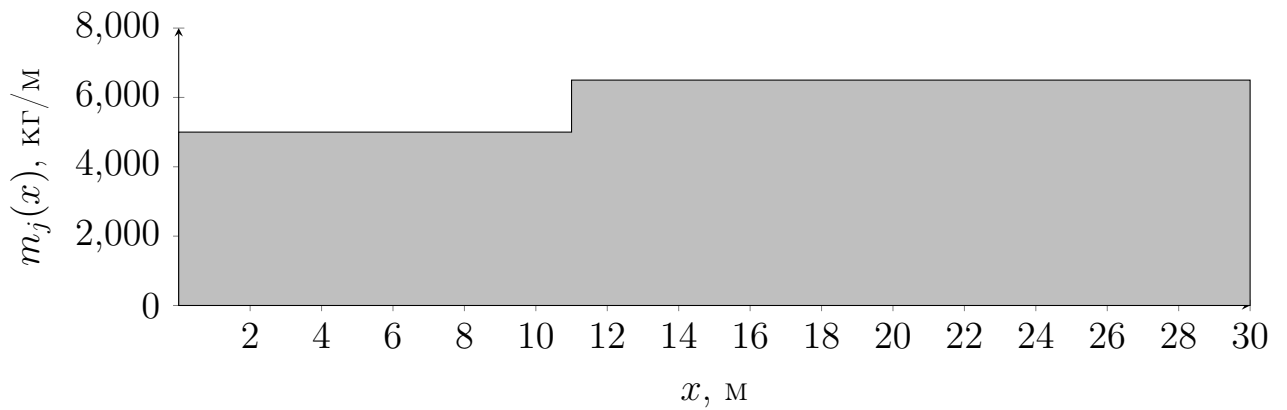
Таблица 8 — Длины стержней и координаты поясов упругих связей

l_0 , м	$l_j, j = 1 \dots 4$, м	l^1 , м	l^2 , м	l^3 , м
50	30	0	25	30

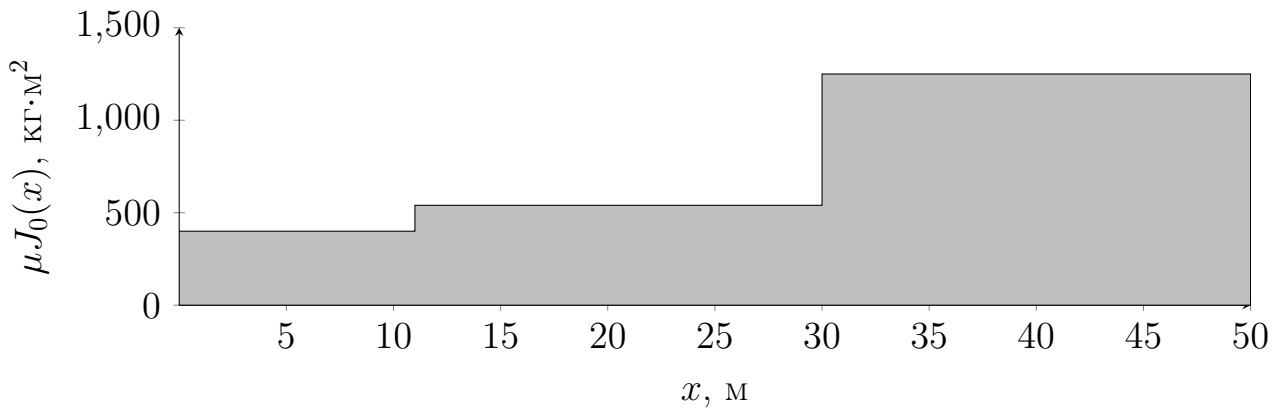
Распределение неконструкционной массы и распределенного момента инерции относительно оси X_j приведено на рисунке 4.4.



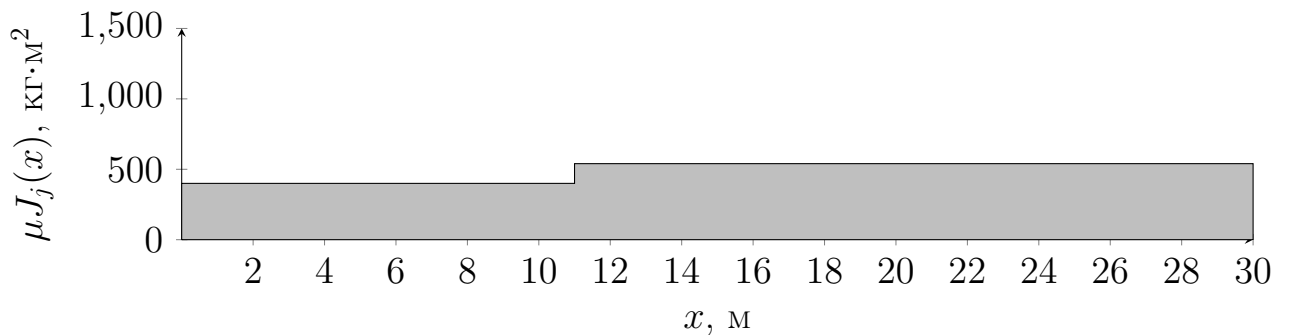
а) Распределенная неконструкционная масса $m_0(x)$, кг/м



б) Распределенная неконструкционная масса $m_j(x)$, $j = 1 \dots 4$, кг/м



в) Момент инерции μJ_0



г) Момент инерции μJ_j $j = 1 \dots 4$

Рисунок 4.4 — Распределение неконструкционной массы и моментов инерции относительно оси X_j

Для каждого стержня использовались элементы СВАР длиной 100 мм. В узлах элементов размещались элементы сосредоточенных масс, с параметрами, определяемыми распределениями из диаграмм на рисунке 4.4.

4.3 Результаты расчета

Результаты расчета первых десяти частот собственных колебаний без учета кратности и нулевых корней приведены в таблице 9.

Таблица 9 — Первые десять частот собственных колебаний пакета с четырьмя боковыми стержнями

№	Частота, Гц	Неприводимое представление	Кратность
1	0,762	E	2
2	1,069	B_2	1
3	1,219	E	2
4	1,469	B_1	1
5	1,562	A_1	1
6	1,708	E	2
7	2,219	E	2
8	2,494	A_2	1
9	2,522	B_1	1
10	2,766	A_2	1

Формы колебаний нормированы в соответствии с соотношениями (3.17). Приведем графики форм колебаний, соответствующих различным неприводимым представлениям и частотам из таблицы 9.

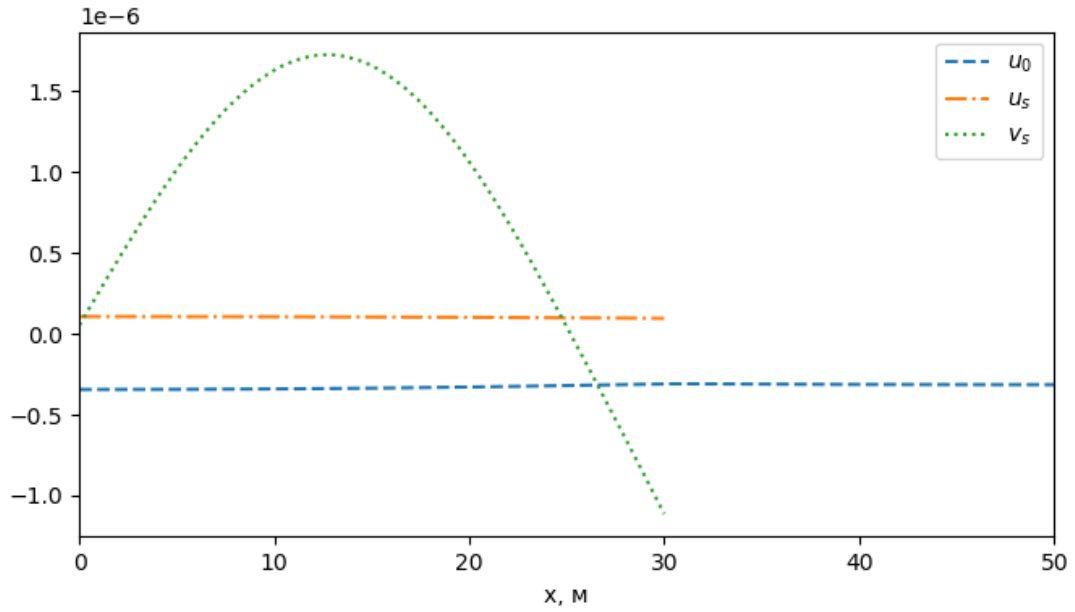


Рисунок 4.5 — Форма колебаний, соответствующая частоте 1,562 Гц, неприводимому представлению A_1

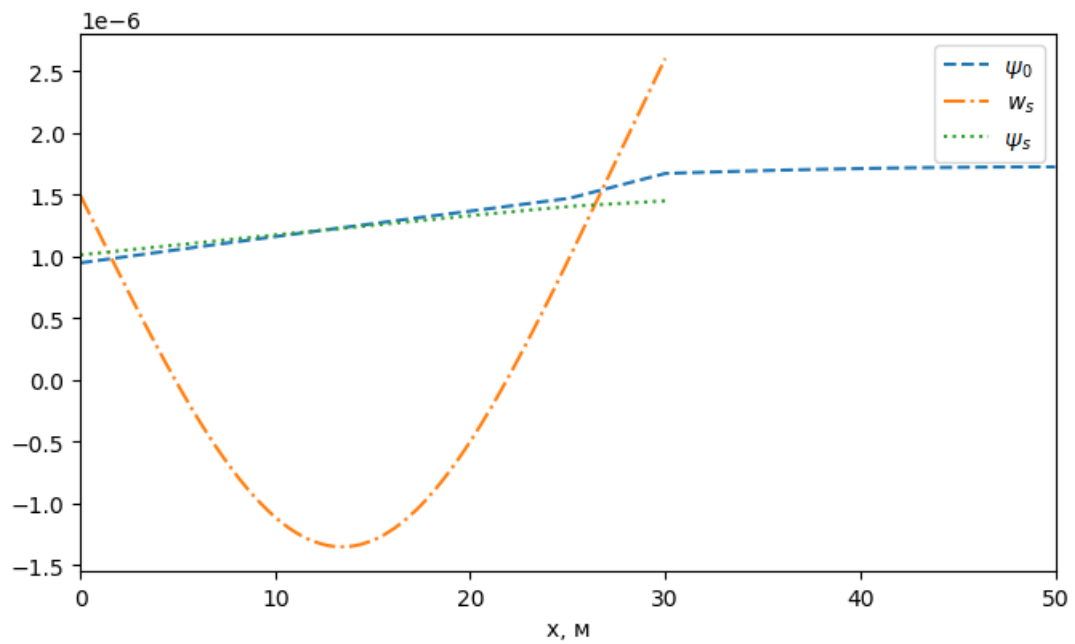


Рисунок 4.6 — Форма колебаний, соответствующая частоте 2,494 Гц, неприводимому представлению A_2

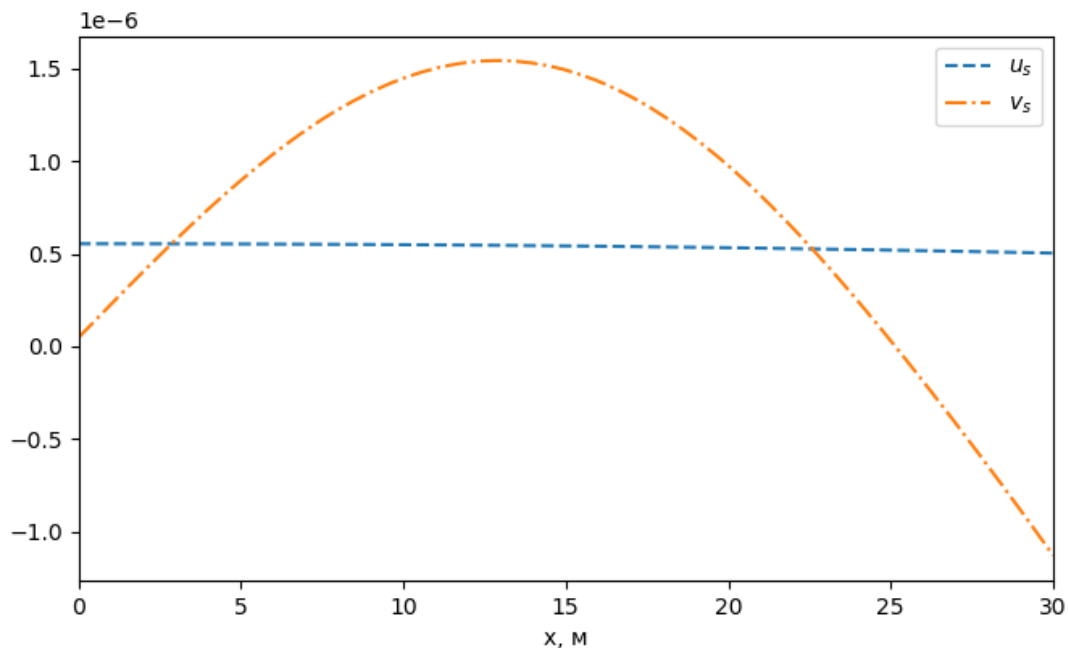


Рисунок 4.7 — Форма колебаний, соответствующая частоте 1,469 Гц, неприводимому представлению B_1

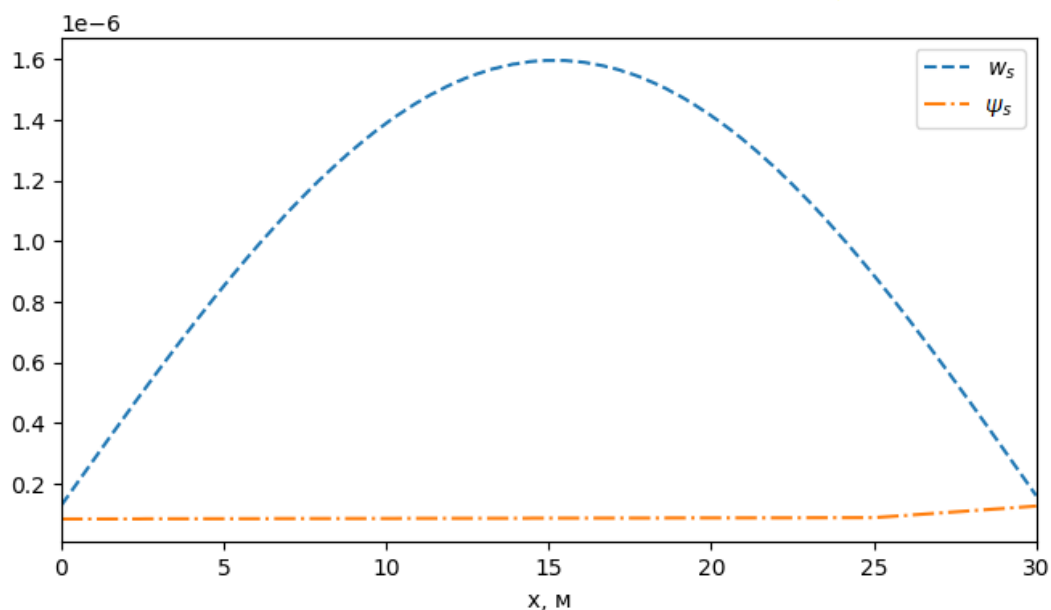


Рисунок 4.8 — Форма колебаний, соответствующая частоте 1,069 Гц, неприводимому представлению B_2

Для первой частоты, равной 0,762 Гц, которой соответствуют формы, являющиеся базисными функциями неприводимого представления E приведем график, соответствующий первой строке неприводимого представления, т.е.

$U^{(E^1)}$. Форма колебаний, соответствующая второй строке строится с использованием соотношений (3.21).

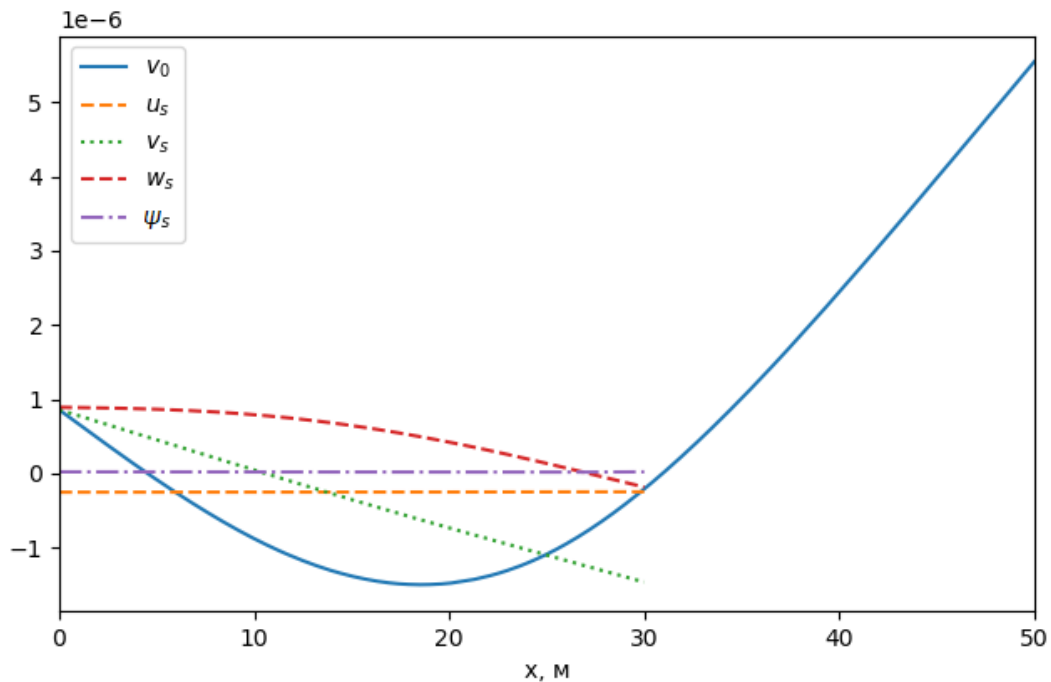


Рисунок 4.9 — Форма колебаний, соответствующая частоте 0,762 Гц, неприводимому представлению E

4.4 Приведение форм колебаний, соответствующих кратным частотам, к плоскостям стабилизации

Одним из важных этапов исследования динамики летательных аппаратов является решение задачи о собственных колебаниях [112]. В дальнейшем, полученные результаты используются при анализе устойчивости вынужденных колебаний, динамике возмущенного движения, прочностных расчетах и пр.

При решении задачи о собственных колебаниях механических систем, обладающих симметрией (в частности пакет стержней) численными методами, возникают сложности с интерпретацией и дальнейшим использованием форм колебаний, отвечающих кратным частотам. В случае с пакетом стержней с четырьмя боковыми стержнями, рассматриваемом в данной главе, кратными частотами, являются частоты, формы которых образуют базис неприводимого

представления E . Эти частоты имеют кратность равную двум, и имеют собственное подпространство, натянутое на два базисных вектора. Из рисунков 3.5 д) — е) можно видеть, что формы колебаний, принадлежащие строкам неприводимого представления E , представляют собой колебания, которые можно охарактеризовать как поперечные колебания пакета в плоскостях X_0Y_0 и X_0Z_0 соответственно, которые в свою очередь совпадают с плоскостями стабилизации ракеты пакетной компоновки, как возможного приложения (возможно и другое расположение плоскостей стабилизации: по схеме «X». Данный вопрос был рассмотрен в разделе 3.5.2).

При этом, в процессе численного решения, например, с помощью итерационного метода Ланцоша [113], если не накладывать на систему дополнительных граничных условий (предположений), то результат расчета данных форм колебаний не будет однозначным, а будет определяться первым приближением, задаваемом в соответствующем итерационном процессе. В итоге полученные формы могут не соответствовать строкам неприводимого представления E , и, как следствие, плоскостям стабилизации ракеты (плоскостям симметрии). С точки зрения спектральной теории это объясняется тем, что линейная комбинация базисных векторов собственного подпространства также является решением спектральной задачи, и принадлежит данному собственному подпространству. Очевидно, что это должно быть линейное преобразование сохраняющее скалярное произведение, т.е. ортогональное. Получаемый в процессе численного решения результат можно рассматривать как исходный, соответствующий неприводимому представлению базис, повернутый на некоторый угол φ , с учетом возможного «отражения».

Обозначив векторы, получаемые при численном расчете, как $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$, выразим их через векторы, принадлежащие строкам неприводимого представления E :

$$\begin{Bmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(E^1)} \\ U^{(E^2)} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Для построения собственных векторов, соответствующих плоскостям стабилизации и строкам неприводимого представления E достаточно одного из

векторов, полученных при численном расчете. Рассмотрим вектор $U^{(1)}$:

$$U^{(1)} = \alpha_{11}U^{(E^1)} + \alpha_{12}U^{(E^2)}$$

Поочередно подействовав на вектор $U^{(1)}$ ортопроекторами $P^{(E^1)}$ и $P^{(E^2)}$ получим:

$$P^{(E^1)}U^{(1)} = \alpha_{11}U^{(E^1)}$$

$$P^{(E^2)}U^{(1)} = \alpha_{12}U^{(E^2)}$$

В итоге получим:

$$U^{(E^1)} = \frac{1}{\alpha_{11}} \left(P^{(E^1)}U^{(1)} \right)$$

$$U^{(E^2)} = \frac{1}{\alpha_{12}} \left(P^{(E^2)}U^{(1)} \right)$$

Коэффициенты α_{11} и α_{12} можно определить из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1 \\ \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{v_0^{(1)}}{w_0^{(1)}} \end{cases} \quad (4.3)$$

где $v_0^{(1)}$ и $w_0^{(1)}$ соответствующие компоненты вектора $U^{(1)}$.

4.5 Разложение вектора внешних воздействий по неприводимыми представлениям группы симметрии пакета стержней

При формулировке слабого решения задачи Коши воспользуемся подходом, рассмотренным в разделе 2.6.2. Рассмотрим пакет с четырьмя боковыми стержнями. Пусть в боковой стержень с индексом $j = 1$ действует возмущение вдоль продольной оси. Вектор $F(t)$ в данном случае будет содержать одну

компоненту:

$$F(t) = \begin{Bmatrix} F_u(t) \\ F_{vw}(t) \\ F_\psi(t) \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

$$F_u(t) = \{0, f(t), 0, 0, 0\}^T; \quad F_{vw}(t) = \{0\}; \quad F_\psi(t) = \{0\}$$

Для разложения вектора $F(t)$ по неприводимым представлениям группы C_{4v} воспользуемся выражениями для ортопроекторов $P^{(R_\varphi)}$ из раздела 3.5.2. Далее будем рассматривать блоки $F_u(t)$ так как только они будут содержать ненулевые компоненты. Обозначив $f(t)$ как f , в результате проецирования получим:

$$F_u^{(A_1)}(t) = P^{(A_1)} F_u(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ f/4 \\ f/4 \\ f/4 \\ f/4 \end{Bmatrix}; \quad F_u^{(A_2)}(t) = P^{(A_2)} F_u(t) = \{0\}$$

$$F_u^{(B_1)}(t) = P^{(B_1)} F_u(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ f/4 \\ -f/4 \\ f/4 \\ -f/4 \end{Bmatrix}; \quad F_u^{(B_2)}(t) = P^{(B_2)} F_u(t) = \{0\} \quad (4.5)$$

$$F_u^{(E^1)}(t) = P^{(E^1)} F_u(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ f/2 \\ 0 \\ -f/2 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad F_u^{(E^2)}(t) = P^{(E^2)} F_u(t) = \{0\}$$

Несложно видеть, что сумма всех найденных проекций дает исходный вектор $F(t)$. Из выражений 4.5 можно сделать вывод о том, что рассмотренное силовое воздействие возбуждает три типа движений: «продольные» колебания пакета (неприводимое представление A_1), продольно-поперечные колебания боковых стержней (неприводимое представление B_1) и «поперечные» колебания пакета в плоскости X_0Y_0 (1-ая строка неприводимого представления E).

4.6 Заключение по четвертой главе

Рассмотренный в данной главе пример численного расчета частот и форм собственных колебаний стержневой модели РН пакетной компоновки с четырьмя боковыми блоками проиллюстрировал основные результаты групповой классификации форм собственных колебаний, приведенные в главе 3. Использование группового подхода при анализе форм колебаний позволяет использовать минимум информации, необходимой для их визуализации. Ортогональное проектирование вектора внешних воздействий на подпространства неприводимых представлений позволяет выявить типы движений пакета, возбуждаемые рассматриваемым вектором.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Получено решение задачи о собственных колебаниях механической системы, состоящей из упруго-соединенных стержней, совершающих продольные колебания, как с применением теории представлений, так и обычным способом. Выявлено, что использование теоретико-группового подхода при решении данной задачи позволило сократить вычислительные затраты, упростить решение задачи и классифицировать спектр и формы собственных колебаний.
2. Для пакета с двумя, четырьмя и шестью боковыми стержнями получены ортопроекторы на подпространства неприводимых представлений соответствующих групп симметрии и структура базисных векторов этих подпространств. Анализ базисных векторов подпространств неприводимых представлений выявил существенное сокращение размерности задачи.
3. Для пакета с 4-мя боковыми стержнями проведен численный расчет собственных колебаний. Полученные формы классифицированы по неприводимым представлениям. Приведено графическое изображение форм колебаний, с учетом вида полученных ранее базисных векторов.
4. Разработан метод приведения форм колебаний, соответствующих кратным частотам к плоскостям симметрии механической системы.
5. Предложен способ разложения вектора внешних нагрузок на слагаемые, относящиеся к различным спектрам, определяемым неприводимыми представлениями группы симметрии пакета стержней.

Список литературы

1. *Колесников К. С.* Динамика ракет. — М. : Машиностроение, 1980. — 375 с.
2. Динамика ракет / К. А. Абгарян [и др.]. — М. : Машиностроение, 1990. — 464 с.
3. *Натанзон М. С.* Продольные автоколебания жидкостной ракеты. — М. : Машиностроение, 1977. — 205 с.
4. *Колесников К. С.* Продольные колебания ракеты с жидкостным ракетным двигателем. — М. : Машиностроение, 1971. — 260 с.
5. *Пиллипенко В. В., Задонцев В. А., Натанзон М. С.* Кавитационные автоколебания и динамика гидросистем. — М. : Машиностроение, 1977. — 352 с.
6. *Келдыш М. В.* Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика. — М. : Наука, 1988. — 493 с.
7. *Сердюк В. К.* Проектирование средств выведения космических аппаратов. — М. : Машиностроение, 2009. — 504 с.
8. Семейство ракет-носителей Ангара // ГКНПЦ им. Хруничева: [электронный ресурс]. URL: <http://www.khrunichev.ru/main.php?id=44> (дата обращения: 19.02.2018).
9. Delta IV Heavy // United Launch Alliance : [электронный ресурс]. URL: <https://www.ulalaunch.com/rockets/delta-iv> (дата обращения: 19.02.2018).
10. *Балакирев Ю. Г.* Исследование устойчивости системы упругий корпус-топливные магистрали-двигатели для жидкостных ракет пакетной компоновки // Известия Академии наук. Механика твердого тела. — 1994. — № 2. — С. 129—137.
11. *Докучаев Л. В., Соболев О. В.* Совершенствование методов исследований динамики ракеты-носителя пакетной конструкции с учетом ее симметрии // Космонавтика и ракетостроение. — 2005. — № 2. — С. 112—121.

12. *Балакирев Ю. Г.* Особенности математической модели жидкостной ракеты пакетной компоновки как объекта управления // Избранные проблемы прочности современного машиностроения. — 2008. — С. 43—55.
13. *Кобычкин В. С., Кириченко В. Н.* Программа расчета динамических характеристик упругих корпусов РН пакетной компоновки при пространственных колебаниях // Международная конференция «Научно-технические проблемы космонавтики и ракетостроения» 23–25 апреля 1996 г. Тезисы и аннотации докладов — Калининград Моск. обл: ЦНИИМАШ. — 1996. — С. 278—279.
14. Основы отработки прочности ракетно-космических конструкций / Д. В. Кармишин [и др.]. — Москва : Машиностроение, 2007. — 480 с.
15. *Селиверстов А. И., Шевченко И. В.* Динамическая модель упругой ракеты с тяжелым управляющим двигателем // Механики XXI века. — 2013. — № 12. — С. 47—50.
16. Альтернативные способы описания динамики ракет-носителей в диапазоне частот упругой подвески управляющего двигателя / В. В. Афанасьева [и др.] // Космонавтика и ракетостроение. — 2013. — № 3. — С. 172—172.
17. Продольные колебания верхней ступени и проблема продольной устойчивости жидкостной ракеты-носителя / И. Д. Блоха, А. Д. Николаев [и др.] // Авиационно-космическая техника и технология. — 2007. — № 7. — С. 175—177.
18. Проблема уточнения математической модели гидропривода при анализе устойчивости объектов ракетно-космической техники в диапазоне частот колебаний упругой подвески управляющих маршевых двигателей / А. В. Бабин [и др.] // Космонавтика и ракетостроение. — 2014. — № 3. — С. 52—57.
19. *Николаев А. Д., Хоряк Н. В.* Определение параметров собственных продольных колебаний конструкции корпуса жидкостных ракет-носителей с учетом диссипации энергии // Авиационно-космическая техника и технология. — 2004. — № 4. — С. 62—73.

20. *Хоряк Н. В., Николаев А. Д.* Математическое моделирование взаимодействия продольных колебаний корпуса жидкостной ракеты как многосвязной упруго-диссипативной системы и динамических процессов в двигательной установке // *Техническая механика*. — 2010. — № 3. — С. 27—37.
21. *Бужинский В. А.* О колебаниях жидкости в топливных баках с демпфирующими решетками // *Космонавтика и ракетостроение*. — 2007. — № 1. — С. 110—120.
22. *Бабин А. В., Козлов И. П.* Проектирование системы стабилизации сложного объекта с учетом особенностей его динамических характеристик // *Вестник Московского государственного университета леса—Лесной вестник*. — 2012. — 6 (89).
23. *Бужинский В. А., Новоселецкий Д. В.* О стабилизации движения верхних ступеней ракет-носителей при собственной динамической их неустойчивости // *Космонавтика и ракетостроение*. — 2017. — № 4. — С. 84—91.
24. *Крамарь В. А.* Гарантоспособность аэрокосмических систем в условиях упругих колебаний // *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. — 2012. — № 6. — С. 78—83.
25. *Павлов А. М., Темнов А. Н.* Продольные колебания жидкостной многоступенчатой ракеты пакетной схемы // 4-ая международная научная конференция РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА: фундаментальные и прикладные проблемы: Сборник трудов. — 2013.
26. *Павлов А. М., Темнов А. Н.* Проблемы динамики ракет-носителей пакетной схемы // *Механика и математическое моделирование в технике*. Сборник трудов Всероссийской конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева. — 2016.
27. *Pavlov A.* The analysis of the clustered rocket natural modes and frequencies // *International graduate summer school in aeronautics & astronautics IGSS 2016. Collection of abstracts*. — 2016.

28. *Павлов А. М.* Особенности расчета форм собственных упругих колебаний корпуса ракет-носителей пакетной компоновки // Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов. — 2017.
29. *Дьяченко М. И., Павлов А. М., Темнов А. Н.* Продольные упругие колебания корпуса многоступенчатой жидкостной ракеты пакетной схемы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. — 2015. — № 5. — С. 53–66.
30. *Балакирев Ю. Г., Борисов М. А.* Особенности частотного спектра упругих колебаний корпусов многоблочных ракет-носителей симметричной компоновки // Космонавтика и ракетостроение. — 2016. — № 3. — С. 54–59.
31. *Lianis G., Fontenot L. L.* Analysis of vibrations of clustered boosters // AIAA Journal. — 1963. — Vol. 1, no. 3.
32. *Loewy R. G.* A Matrix-Holzer Analysis for Bending Vibrations of Clustered Launch Vehicles // J. Spacecraft a. Rockets. — 1966. — Vol. 3. — P. 1625.
33. *Keith J. S., Lincoln J. W.* Methods in structural dynamics for thin shell clustered launch vehicles: tech. rep. / LTV Aerospace Corp. Dallas TX. — 1965.
34. *Storey R.* Dynamic analysis of clustered boosters with applications to TITAN III // AIAA Summer Meeting. — 1963. — P. 208.
35. *Morino Y.* Vibration test of 1/5 scale H-II launch vehicle // 28th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. — 1987. — Pp. 243–252.
36. *Балакирев Ю. Г.* Решение проблемы продольных колебаний советских жидкостных ракет в полёте: достижения и неудачи. Часть 1 // Космонавтика и ракетостроение. — 2014. — № 6. — С. 185–191.
37. *Балакирев Ю. Г.* Решение проблемы продольных колебаний советских жидкостных ракет в полёте: достижения и неудачи. Часть 2 // Космонавтика и ракетостроение. — 2015. — № 2. — С. 149–154.
38. Собственные колебания жидкостных ракет-носителей пакетной компоновки / А. С. Конюхов [и др.] // Проблемы прочности. — 2001.

39. Цибенко А. С., Крищук М. Г., Конюхов А. С. Методика учета межблочных связей в динамической пакетно-стержневой модели жидкостных ракет-носителей // Вісник Національного технічного університету України Київський політехнічний інститут. Серія: Машинобудування. — 2015. — № 1. — С. 15—21.
40. Дьяченко М. И., Темнов А. Н. Задачи устойчивости движения при перераспределении топлива в ракетах-носителях и космических аппаратах // Решетневские чтения. — 2012. — Т. 1, № 16.
41. Темнов А. Н. Собственные колебания жидкого топлива в условиях перераспределения // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия «Машиностроение». — 2012. — № 3.
42. Пожалостин А. А. Разработка приближенных аналитических методов расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек с жидкостью: дис. ... д-ра техн. наук: 01.02.06, 01.02.05. — М., 2004. — 292 с.
43. Antman S. S. The theory of rods // Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity. — Springer, 1973. — С. 641—703.
44. Eugster S. R. On the Foundations of Continuum Mechanics and its Application to Beam Theories: PhD thesis / Eugster Simon Raphael. — ETH Zurich, 2014.
45. Born M. Über Schwingungen in Raumgittern. — Hirzel, 1912.
46. Brester C. J. Kristallsymmetrie und Reststrahlen // Zeitschrift für Physik. — 1924. — Vol. 24, no. 1. — Pp. 324—344.
47. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. — М. : Высшая школа, 1980. — 408 с.
48. Иванов В. П. Некоторые вопросы колебаний лопаточных венцов и других упругих тел, обладающих циклической симметрией // Прочность и динамика авиационных двигателей. — 1971. — Т. 6. — С. 113—131.
49. Численный анализ элементов конструкций машин и приборов / С. С. Гаврюшин [и др.]. — М. : Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. — 479 с.

50. *Бураго Н. Г., Никитин И. С.* Экономичный численно-аналитический метод расчета трехмерных деформаций упругих труб переменного поперечного сечения // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2011. — № 3. — С. 59—66.
51. *Бураго Н. Г., Журавлев А. Б., Никитин И. С.* Анализ напряженного состояния контактной системы "диск-лопатка" газотурбинного двигателя // *Вычислительная механика сплошных сред.* — 2011. — № 2. — С. 5—16.
52. Аэроупругий анализ элементов конструкции компрессора / Н. Н. Беклемишев [и др.] // *Вестник Московского авиационного института.* — 2011. — № 5. — С. 49—61.
53. *Рыбаков Л. С.* Дискретно-континуальный анализ регулярных упругих систем: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04. — М., 1995. — 327 с.
54. *Wigner E.* Ueber de elastischen Eigenschwingungen symmetrischer Systeme // *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse.* — 1930. — Vol. 1930. — Pp. 133—146.
55. *Банкер Ф. Р.* Симметрия молекул и молекулярная спектроскопия: Пер. с англ. — Мир, 1981. — 451 с.
56. *Герцберг Г.* Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул. — Москва : ИЛ, 1949. — 643 с.
57. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика в 10 томах. Том 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — Москва : Физматлит, 1989. — 765 с.
58. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике. — Москва : Физматлит, 1958. — 354 с.
59. *Злокович Д.* Теория групп G-векторных пространств в колебаниях, устойчивости и статике конструкций. — Москва : Стройиздат, 1977. — 168 с.
60. *Вигнер Ю.* Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. — Москва : ИЛ, 1961. — 444 с.
61. *Вигнер Ю.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам. — Москва : Мир, 1966. — 588 с.

62. *Yang T.-L.* Symmetry properties and normal mode vibrations // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 1968. — Vol. 3, no. 3. — Pp. 367–381.
63. *Zingoni A.* Group-theoretic exploitations of symmetry in computational solid and structural mechanics // International journal for numerical methods in engineering. — 2009. — Vol. 79, no. 3. — Pp. 253–289.
64. *Цветков С. В.* Критерии прочности трансверсально-изотропных материалов различных классов симметрии структуры // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. — 2009. — № 1. — С. 86–99.
65. *Цветков С. В., Кулиш Г. Г.* Критерии прочности однонаправленного органопластика при трехосном напряженном состоянии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. — 2011. — SP. — С. 19–28.
66. *Цветков С. В.* Упругая и пластическая анизотропия // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2012. — № 8. — С. 157–163.
67. *Барышев А. Н., Цветков С. В.* Построение критерия прочности углерод-углеродного композиционного материала типа 4ДЛ при трехосном напряженном состоянии // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. — 2017. — 6(687). — С. 78–85.
68. *Renton J. D.* On the stability analysis of symmetrical frameworks // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1964. — Vol. 17. — Pp. 175–197.
69. *Buzano E.* Secondary bifurcations of a thin rod under axial compression // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1986. — Vol. 17. — Pp. 312–321.
70. *Ikeda K., Murota K., Fujii H.* Bifurcation hierarchy of symmetric structures // International Journal of Solids and Structures. — 1991. — Vol. 27. — Pp. 1551–1573.
71. *Ikeda K., Murota K.* Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalisation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1991. — Vol. 86. — Pp. 215–243.

72. *Healey T. J.* A group-theoretic approach to computational bifurcation problems with symmetry // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 1988. — Vol. 67. — Pp. 257–295.
73. Improvement of the scaled corrector method for bifurcation analysis using symmetry-exploiting block-diagonalization / K. Ikeda [et al.] // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2007. — Vol. 196. — Pp. 1648–1661.
74. *Healey T. J., Treacy J.* Exact block diagonalization of large eigenvalue problems for structures with symmetry // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. — 1991. — Vol. 31, no. 2. — Pp. 265–285.
75. *Зимин В. Н.* Моделирование динамики раскрытия космических конструкций ферменного типа // *Полет*. — 2008. — № 10. — С. 42–48.
76. Экспериментальные исследования элементов космических конструкций / В. Н. Зимин [и др.] // *Инженерный журнал: наука и инновации*. — 2013. — № 3. — С. 1–14.
77. Особенности расчета раскрытия крупногабаритных трансформируемых конструкций различных конфигураций / В. Н. Зимин [и др.] // *Наука и образование: научное издание*. — 2014. — № 10. — С. 179–191.
78. *Крылов А. В., Чурилин С. А.* Моделирование разворачивания многозвенных замкнутых космических конструкций // *Инженерный журнал: наука и инновации*. — 2014. — № 8. — С. 80–91.
79. *Мешковский В. Е.* Геометрическая модель раскрывающейся крупногабаритной космической конструкции ферменного типа // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. — 2009. — 4(35). — С. 56–71.
80. *Kangwai R. D., Guest S., Pellegrino S.* An introduction to the analysis of symmetric structures // *Computers & structures*. — 1999. — Vol. 71, no. 6. — Pp. 671–688.
81. *Mohan S., Pratap R.* A group theoretic approach to the linear free vibration analysis of shells with dihedral symmetry // *Journal of sound and vibration*. — 2002. — Vol. 252, no. 2. — Pp. 317–341.

82. *Mohan S. J., Pratap R.* A natural classification of vibration modes of polygonal ducts based on group theoretic analysis // Journal of sound and vibration. — 2004. — Vol. 269, no. 3. — Pp. 745–764.
83. *Kaveh A., Nikbakht M.* Decomposition of symmetric mass–spring vibrating systems using groups, graphs and linear algebra // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. — 2007. — Vol. 23, no. 7. — Pp. 639–664.
84. *Kaveh A., Nikbakht M.* Improved group-theoretical method for eigenvalue problems of special symmetric structures, using graph theory // Advances in Engineering Software. — 2010. — Vol. 41, no. 1. — Pp. 22–31.
85. *Zingoni A.* On the symmetries and vibration modes of layered space grids // Engineering Structures. — 2005. — Vol. 27, no. 4. — Pp. 629–638.
86. *Zingoni A.* Symmetry recognition in group-theoretic computational schemes for complex structural systems // Computers & Structures. — 2012. — Vol. 94. — Pp. 34–44.
87. *Zingoni A.* Group-theoretic insights on the vibration of symmetric structures in engineering // Phil. Trans. R. Soc. A. — 2014. — Vol. 372, no. 2008. — P. 20120037.
88. Group-theory considerations of finite-difference plate eigenvalue problems / A. Zingoni [et al.] // Developments in Computational Engineering Mechanics, Civil-Comp Press, Edinburgh. — 1993. — Pp. 243–256.
89. *Zingoni A.* Vibration Analysis and Structural Dynamics for Civil Engineers: Essentials and Group-theoretic Formulations. — Boca Raton : CRC Press, 2014.
90. *Павлов А. М., Темнов А. Н.* Продольные колебания пакета стержней // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2014. — № 6. — С. 53–66.
91. *Pavlov A. M., Temnov A. N.* Symmetry Exploitation in the Natural Vibrations of Rod Systems // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Mashinostr. [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.] — 2017. — No. 4. — Pp. 28–41.

92. *Темнов А. Н., Павлов А. М.* Колебания симметричного «пакета» упругих стержней // Международная конференция XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2015): сборник тезисов. — 2015.
93. *Павлов А. М., Темнов А. Н.* Теоретико-групповой подход к решению уравнений движения механических систем, обладающих симметрией // Современные методы теории краевых задач. Материалы ВВМШ «Понтырягинские чтения – XXVII». — 2016.
94. *Павлов А. М.* Групповой анализ спектральной задачи, порождённой колебаниями стержневой системы // Шестая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». — 2017.
95. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — Москва : Мир, 1989. — 639 с.
96. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — Москва : Высшая школа, 1977. — 431 с.
97. *Копачевский Н. Д.* Операторные методы математической физики. — Симферополь : Форма, 2008. — 142 с.
98. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М. : Наука, 1988. — 333 с.
99. *Miller W.* Symmetry groups and their applications. Vol. 50. — New York, London : Academic Press, 1973.
100. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М. : Наука, 1967. — 464 с.
101. *Работнов Ю. Н.* Сопротивление материалов. — М. : Физматгиз, 1962. — 456 с.
102. РН Союз // РКЦ Прогресс: [электронный ресурс]. URL: https://samspace.ru/products/launch_vehicles/rn_soyuz_2/ (дата обращения: 19.02.2018).
103. Falcon Heavy // SpaceX: [электронный ресурс]. URL: <http://www.spacex.com/falcon-heavy> (дата обращения: 19.02.2018).

104. Ariane Launch Vehicles // Ariane Group: [электронный ресурс]. URL: <https://www.ariane.group/fr/lancement-spatial/ariane-6/> (дата обращения: 19.02.2018).
105. Long March (rocket family) // China Academy of Launch Vehicle Technology: [электронный ресурс]. URL: <http://www.calt.com/n840/index.html> (дата обращения: 19.02.2018).
106. Geosynchronous Satellite Launch Vehicle // Indian Space Research Organisation: [электронный ресурс]. URL: <https://www.isro.gov.in/launchers/gslv> (дата обращения: 19.02.2018).
107. Ракета-носитель "Энергия" // Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С. П. Королёва: [электронный ресурс]. URL: https://www.energia.ru/ru/history/systems/vehicles/vehicle_energia.html (дата обращения: 19.02.2018).
108. Ariane 4 User's Manual, Arianespace, 1999.
109. Polar Satellite Launch Vehicle // Indian Space Research Organisation: [электронный ресурс]. URL: <https://www.isro.gov.in/launchers/pslv> (дата обращения: 19.02.2018).
110. *Стренг Г., Фикс Д.* Теория метода конечных элементов. — Москва : Мир, 1977. — 349 с.
111. NX Nastran User's Guide.
112. *Карклэ П. Г., Смыслов В. И.* Модальные испытания летательных аппаратов и воспроизведение силовых воздействий. — М. : Техносфера, 2017. — 152 с.
113. NX Nastran Numerical Methods User's Guide.