

## **Математическое моделирование чистого изгиба балки из авиационного материала в условиях ползучести**

Кузнецов Е.Б.\*, Леонов С.С.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),*

*МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*\*e-mail: kuznetsov@mai.ru*

### **Аннотация**

В статье рассмотрено решение задачи чистого изгиба балки прямоугольного сечения из сплава Д16Т при постоянной температуре, нагруженной постоянным изгибающим моментом. Проводится исследование данной конструкции на ползучесть и длительную прочность. Численный расчет задачи проводится с использованием уравнений энергетического варианта теории ползучести, а также метода продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации. Приводится сравнение двух методов решения задачи по результатам численного расчета, а также сравнение полученных численных решений с экспериментальными данными.

### **Ключевые слова**

ползучесть; разрушение; удельная энергия рассеяния; параметр поврежденности; величина изгиба балки; метод продолжения решения по параметру; наилучшая параметризация; наилучший параметр; обыкновенные дифференциальные уравнения.

1. Теория ползучести – это одно из направлений механики деформируемого твердого тела, сложившееся во второй половине XX века и занявшее свое место наряду с такими разделами механики, как теория упругости и теория пластичности. Термином «ползучесть» будем называть всю совокупность явлений, которые можно объяснить, допустив, что зависимость между напряжениями и деформациями содержит время, явно или через посредство некоторых операторов. Свойства ползучести обнаруживают материалы различной

природы: металлы, пластмассы, горные породы, бетон, естественные и искусственные камни, лед и другие [1].

Ползучесть у металлических материалов в холодном состоянии практически отсутствует. Но при повышенных температурах, например, в паропроводах, паровых котлах и турбинах авиационных двигателей при длительной эксплуатации ползучесть может достигать таких значительных величин, при которых металлические материалы могут разрушиться. В связи с этим возникает необходимость расчета элементов конструкций на длительную прочность, т.е. расчета времени, в течение которого рассматриваемый элемент конструкции под действием заданных внешних нагрузок не разрушится. Общепринятая схема расчета на длительную прочность разбивается на две самостоятельные задачи: на базе какой-либо из теорий ползучести (теория старения, теория упрочнения и т.д.) находится напряженно-деформированное состояние, а затем, используя один из критериев длительной прочности, определяется долговечность конструкции. В данной статье используются уравнения энергетического варианта теории ползучести. Одно из преимуществ энергетического варианта теории ползучести заключается в том, что эти две задачи совмещаются [2,3].

Основные гипотезы, на которых базируется энергетический вариант теории ползучести следующие [2]:

1. Процессы ползучести и разрушения – есть два сопутствующих и влияющих друг на друга процесса.

2. За меру интенсивности процесса ползучести принимается величина удельной мощности  $W$  рассеяния, которая в линейном случае определяется выражением  $W = \sigma\eta$ , где  $\sigma$  – линейное напряжение,  $\eta = d\varepsilon/dt$  – скорость линейной деформации ползучести  $\varepsilon$ , за меру повреждаемости материала – величина удельной работы  $A$  рассеяния, которая в линейном случае определяется выражением  $\int_0^t W dt$ . Разрушение материала наступает при достижении удельной работой рассеяния критического значения  $A_*$ , являющегося функцией температуры.

3. Предполагается существование уравнения состояния, связывающего оба процесса ползучести и разрушения по выбранным выше мерам в виде

$$W = F(\sigma_e, A, T), \quad (1)$$

где  $\sigma_e$  – эквивалентное напряжение, являющееся функцией инвариантов тензора напряжений и коэффициентов анизотропии материала,  $T$  – температура.

4. Предполагается справедливым закон течения вплоть до разрушения в виде:

$$\eta_{ij} = \lambda \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений.

5. Материал считается пластически несжимаемым вплоть до разрушения

$$\eta_{kl} \delta_{kl} = 0,$$

где  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера.

Экспериментально показано [2], что кривые ползучести  $A = A(t)$  подобны при различных уровнях напряжений и температур. Из подобия этих кривых следует, что уравнение состояния (1) должно иметь вид

$$\frac{dA}{dt} = f(\sigma, T) \varphi(A). \quad (3)$$

Функция  $f(\sigma, T)$  обычно принимается в виде степенной –  $f(\sigma, T) = B(T) \sigma^{n(T)}$  или экспоненциальной –  $f(\sigma, T) = K(T) e^{\beta(T) \sigma}$  зависимости. Функцию  $\varphi(A)$  можно аппроксимировать в виде:  $\varphi(A) = A^{-\alpha} (A_*^{\alpha+1} - A^{\alpha+1})^{-m}$ .

Таким образом, уравнение состояния в энергетической форме имеет вид

$$\frac{dA}{dt} = \frac{B \sigma^n}{A^\alpha (A_*^{\alpha+1} - A^{\alpha+1})^m} \quad (4)$$

или

$$\frac{dA}{dt} = \frac{K e^{\beta \sigma}}{A^\alpha (A_*^{\alpha+1} - A^{\alpha+1})^m}. \quad (5)$$

2. Одной из простейших конструкций для численного расчета на ползучесть и длительную прочность, является балка, нагруженная постоянным изгибающим моментом. Численное решение задачи неустановившейся ползучести изгибаемого бруса получены многими авторами для материалов с одинаковыми свойствами на растяжение и сжатие, например [1, 4, 5]. Для материалов с разными характеристиками ползучести на растяжение и сжатие данная задача решена в предположении установившейся ползучести [6] и неустановившейся ползучести по теории старения [6]. Данная задача с использованием уравнений энергетического варианта теории ползучести была решена для материала с одинаковыми свойствами на растяжение и сжатие [2] и материала с различными свойствами на растяжение и сжатие [2, 7, 8].

Ниже рассматривается чистый изгиб балки из материала с одинаковыми свойствами на растяжение и сжатие, нагруженной постоянно действующим изгибающим моментом. Расчет проводится с учетом всей картины перераспределения напряжений вплоть до разрушения. Под разрушением балки будем понимать не только разделение ее на части, но и исчерпывание несущей способности, происшедшей вследствие неограниченной интенсификации процесса ползучести в некоторой ее области. В данном случае, достижение в некотором волокне удельной энергии рассеяния критического значения  $A_*$ . Расчет по уравнениям энергетического варианта теории ползучести [9] сводится к решению системы двух интегро-дифференциальных уравнений.

Считая, что полная деформация в произвольной точке балки в любой момент времени складывается из упругой деформации и деформации ползучести, и предполагая справедливой гипотезу плоских сечений, из выражения для изгибающего момента находим величину кривизны балки  $\kappa$  и закон распределения напряжений  $\sigma$  по сечению балки в зависимости от накопленной деформации ползучести  $\varepsilon$ :

$$\kappa = \frac{M}{EJ} + \frac{2}{J} \int_0^{\frac{h}{2}} b \varepsilon \xi d\xi, \quad (6)$$

$$\sigma = \left( \frac{M}{J} + \frac{2E}{J} \int_0^{\frac{h}{2}} b \varepsilon \xi d\xi \right) y - E\varepsilon, \quad y \in [0; h/2], \quad (7)$$

где  $J$  – осевой момент инерции сечения балки;  $b$ ,  $h$  – соответственно ширина и высота сечения балки;  $E$  – модуль упругости материала;  $M$  – внешний изгибающий момент. Балка имеет ось симметрии, изгибающий момент действует в плоскости перпендикулярной оси симметрии.

Подставляя выражение (7) для напряжения в уравнения ползучести энергетического варианта (4):

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{B\sigma^n}{(A_* - A)^m}; \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{B\sigma^{n-1}}{(A_* - A)^m}, \end{cases} \quad (8)$$

имеем систему двух интегро-дифференциальных уравнений относительно  $\varepsilon$ ,  $A$  для решения поставленной задачи.

Разбивая сечение балки по высоте на  $k$  равных интервалов, начиная от серединной плоскости, и заменяя интегралы по сечению балки конечными суммами по формуле

Симпсона, получим систему  $2k$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка,  $i = \overline{1, k}$ :

$$\begin{cases} \frac{dA_i}{dt} = \frac{B\sigma_i^n}{(A_* - A_i)^m}; \\ \frac{d\varepsilon_i}{dt} = \frac{B\sigma_i^{n-1}}{(A_* - A_i)^m}. \end{cases} \quad (9)$$

Нижний индекс определяет точку разбиения балки по высоте. В срединной плоскости ( $i = 0$ ) уравнения не выписываются, так как выполняются тождественно. Выражение для  $\sigma_i$  имеет вид:

$$\sigma_i = \left[ \frac{M}{J} + \frac{d \cdot b \cdot E}{3J} (\varepsilon_0 y_0 + 4(\varepsilon_1 y_1 + \dots + \varepsilon_{k-1} y_{k-1}) + 2(\varepsilon_2 y_2 + \dots + \varepsilon_{k-2} y_{k-2}) + \varepsilon_k y_k) \right] y_i - E \varepsilon_i, \quad (10)$$

где  $d$  – длина интервала разбиения,  $y_i$  – значение высоты в  $i$ -ой точке разбиения.

Система (9) может быть проинтегрирована одним из численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве начального напряженно-деформированного состояния берется однородное:

$$t = 0: \varepsilon_i = A_i = 0, i = \overline{1, k}. \quad (11)$$

Расчет проводится для балки прямоугольного сечения длиной 200 мм ( $b = 10$  мм,  $h = 20$  мм) из сплава Д16Т при температуре 250 °С. Характеристики ползучести в уравнении (9):

$$A_* = 1,5 \text{ кг} \cdot \frac{\text{мм}}{\text{мм}^3}, B = 8,1 \cdot 10^{-8} (\text{кг}/\text{мм}^2)^{m-n+1} \text{ч}^{-1}, m = 10, n = 6. \quad (12)$$

Модуль упругости материала для этой температуры  $E = 5,6 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{мм}^2$ .

Задача (9), (11) решалась в вычислительной среде Mathcad 14 с использованием метода Рунге-Кутты с переменным шагом интегрирования. Смена шага производится в соответствии с принципом Рунге – Ромберга – Ричардсона. Шаг уменьшается вдвое, если главный членпогрешности с таким шагом  $R > 7 \cdot 10^{-5}$ , шаг увеличивается вдвое при  $R < 2 \cdot 10^{-5}$ . Число интервалов разбиения  $k = 40$ . Счет прекращался при достижении величиной удельной энергии рассеяния на внешнем наиболее нагруженном контуре значения  $A_{**} \approx 1.45 \text{ кг} \cdot \frac{\text{мм}}{\text{мм}^3}$ . Вычисления проводятся на персональном компьютере IntelCore i5 – 2410М CPU 2.30 ГГц, 4,00 ГБ ОЗУ, видеокарта NVIDIA GeForce GT540М 2 ГБ, 64 – разрядная операционная система Windows 7 Домашняя базовая ServicePack 1. Основные данные о процессе вычисления приведены в Таблице 1, где  $t$  – значение времени;  $\varepsilon$  – значение деформации ползучести на

внешнем слое;  $A$  – значение удельной энергии рассеяния на внешнем слое;  $s$  – шаг интегрирования;  $j$  – количество шагов по независимой переменной;  $t_*$  – время счета.

Таблица 1

$t$ , ч	$\varepsilon$	$A$ , кг · мм/мм <sup>3</sup>	$s$	$j$	$t_*$ , с
107,25	0,011	0,1	0,25	429	8,9168
192,5	0,024	0,2	0,25	770	14,7356
247,25	0,037	0,3	0,125	1020	19,8306
280,875	0,05	0,4	0,125	1289	24,7478
300,563	0,065	0,5	0,063	1589	31,2936
311,406	0,08	0,6	0,031	1895	38,3484
316,984	0,097	0,7	0,016	2211	46,8594
319,582	0,115	0,8	$3,906 \cdot 10^{-3}$	2569	56,263
320,662	0,135	0,9	$1,953 \cdot 10^{-3}$	2942	65,6786
321,045	0,158	1	$4,883 \cdot 10^{-4}$	3352	77,1796
321,154	0,183	1,1	$1,221 \cdot 10^{-4}$	3796	91,2948
321,176	0,211	1,2	$1,526 \cdot 10^{-5}$	4309	107,808
321,178	0,246	1,3	$9,537 \cdot 10^{-7}$	4900	131,2198
321,179	0,267	1,35	$5,96 \cdot 10^{-8}$	5248	142,7308
321,179	0,292	1,4	$3,725 \cdot 10^{-9}$	5646	153,4107
321,179	0,322	1,45	$1,455 \cdot 10^{-11}$	6097	169,1227

Для проверки результатов численного расчета были проведены три эксперимента [2,9] на чистый изгиб балки постоянным изгибающим моментом на установке, описанной в работе [10]. В процессе эксперимента измерялся прогиб балки  $\delta = \delta(t)$  в центре на базе  $l_0 = 100$  мм, кривизна пересчитывалась по формуле  $\kappa = 8 \cdot \delta / l_0^2$ . Эксперименты прекращались при величине  $\kappa \approx 0,6 \cdot 10^{-2}$  мм<sup>-1</sup>, когда процесс ползучести резко интенсифицировался.

На рис. 1 сплошной линией представлены расчетные значения, полученные при решении задачи в системе Mathcad 14, квадратами – расчетные значения, полученные в работе [2], точками – экспериментальные значения  $\kappa = \kappa(t)$  для величины изгибающего момента при максимальном напряжении в начальный момент  $\sigma(0)_{max} = 12$  кг/мм<sup>2</sup> [2].

На рис. 2 и 3 соответственно показано распределение напряжения и удельной энергии рассеяния по высоте балки в различные моменты времени (указано в часах против соответствующей диаграммы) в эксперименте с  $\sigma(0)_{max} = 12 \text{ кг/мм}^2$ .

Достаточно удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных значений  $\kappa = \kappa(t)$  позволяет косвенно судить о достоверности процесса перераспределения внутренних напряжений и накопления повреждений в балке вплоть до разрушения.

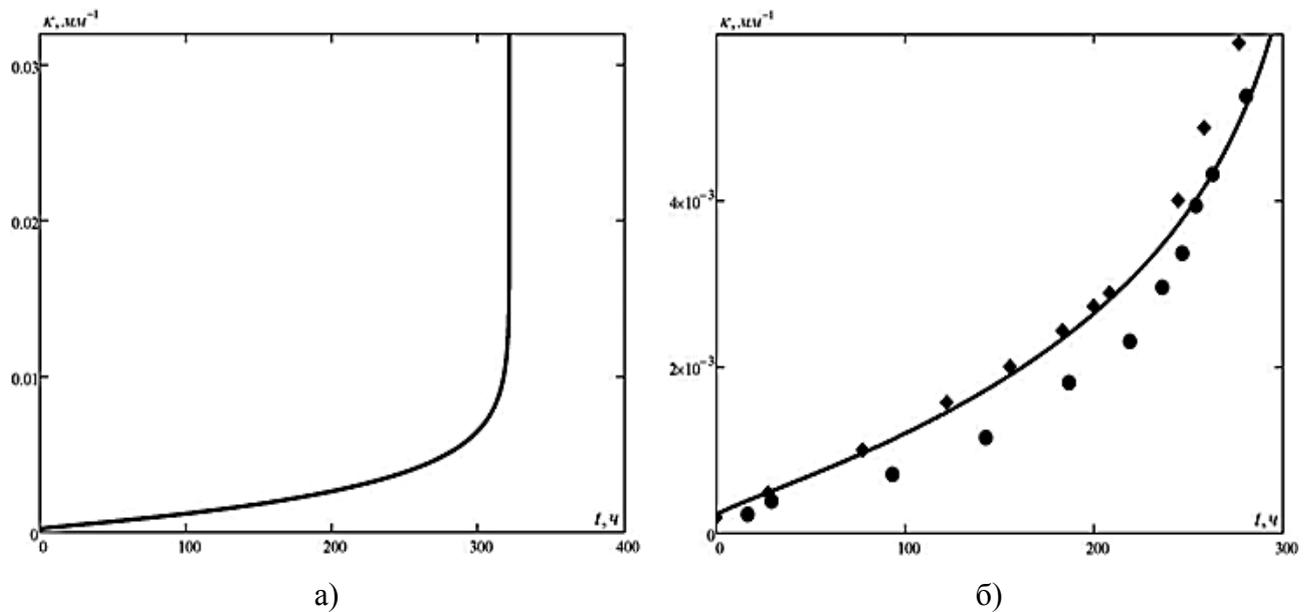


Рис. 1. Зависимость величины изгиба балки от времени для задачи (9), (11)

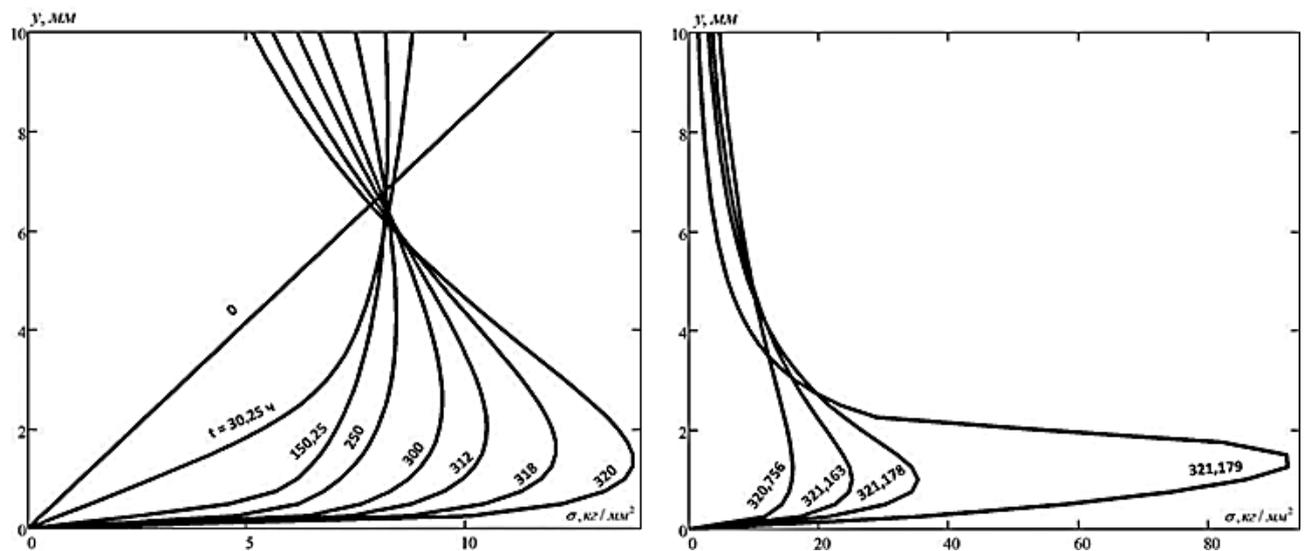


Рис. 2. Распределение напряжений по высоте сечения балки для задачи (9),(11)

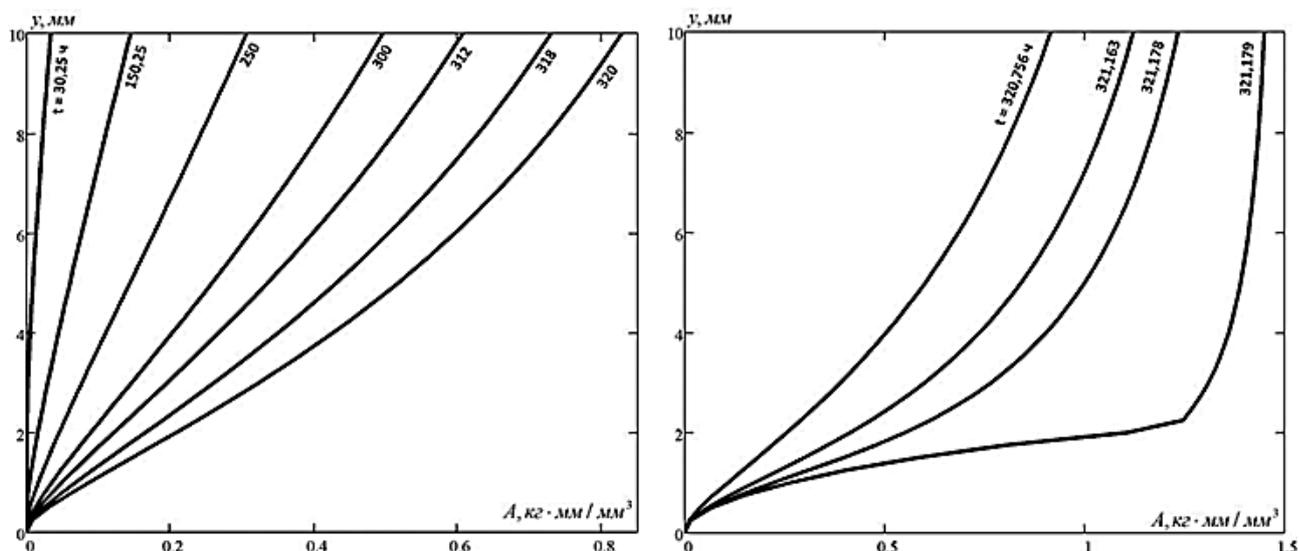


Рис. 3. Распределение удельной энергии рассеяния по высоте сечения балки для задачи (9),  
(11)

3. Как видно из системы уравнений (8) при приближении удельной энергии рассеяния к значению  $A_*$  правые части уравнений неограниченно возрастают. Это приводит к возникновению вычислительных трудностей, а именно, необходимости уменьшения шага интегрирования до  $10^{-3}$  и ниже, что приводит к увеличению времени счета. Этим же недостатком обладает и система уравнений (9).

Параметризуем уравнения системы (9), полагая, что неизвестные  $\varepsilon_i$ ,  $A_i$  и независимая переменная  $t$  являются функциями параметра  $\lambda$ :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\lambda), \dots, \varepsilon_k = \varepsilon_k(\lambda), A_1 = A_1(\lambda), \dots, A_k = A_k(\lambda), t = t(\lambda). \quad (13)$$

В работе [11] показано, что для того, чтобы задачу Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений преобразовать в рамках метода продолжения решения по параметру к наилучшему аргументу, необходимо и достаточно в качестве такового выбрать длину дуги, отсчитываемую вдоль интегральной кривой этой задачи:

$$d\lambda^2 = (dA_1)^2 + \dots + (dA_k)^2 + (d\varepsilon_1)^2 + \dots + (d\varepsilon_k)^2 + dt^2. \quad (14)$$

Используя соотношение (14) для параметра  $\lambda$  и выражение для напряжения (10), получим систему  $2k + 1$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка,  $i = \overline{1, k}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_i}{d\lambda} = \pm \frac{B\sigma_i^n}{(A_* - A_i)^m \sqrt{1 + B^2 \sum_{j=1}^k \frac{\sigma_j^{2n} + \sigma_j^{2n-2}}{(A_* - A_j)^{2m}}}}; \\ \frac{d\varepsilon_i}{d\lambda} = \pm \frac{B\sigma_i^{n-1}}{(A_* - A_i)^m \sqrt{1 + B^2 \sum_{j=1}^k \frac{\sigma_j^{2n} + \sigma_j^{2n-2}}{(A_* - A_j)^{2m}}}}; \\ \frac{dt}{d\lambda} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + B^2 \sum_{j=1}^k \frac{\sigma_j^{2n} + \sigma_j^{2n-2}}{(A_* - A_j)^{2m}}}}. \end{array} \right. \quad (15)$$

Выбирая положительное направление движения вдоль интегральной кривой задачи и занося множитель  $(A_* - A_i)^m$  под знак корня, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_i}{d\lambda} = \frac{B\sigma_i^n}{\sqrt{(A_* - A_i)^{2m} + B^2 \sum_{j=1}^k (\sigma_j^{2n} + \sigma_j^{2n-2}) \left(\frac{A_* - A_i}{A_* - A_j}\right)^{2m}}}; \\ \frac{d\varepsilon_i}{d\lambda} = \frac{B\sigma_i^{n-1}}{\sqrt{(A_* - A_i)^{2m} + B^2 \sum_{j=1}^k (\sigma_j^{2n} + \sigma_j^{2n-2}) \left(\frac{A_* - A_i}{A_* - A_j}\right)^{2m}}}; \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 + B^2 \sum_{j=1}^k \frac{\sigma_j^{2n} + \sigma_j^{2n-2}}{(A_* - A_j)^{2m}}}}. \end{array} \right. \quad (16)$$

или, преобразовав правые части системы (16), приходим к системе вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_i}{d\lambda} = \frac{B\sigma_i^n \prod_{j=1, j \neq i}^k (A_* - A_j)^m}{\sqrt{\prod_{j=1}^k (A_* - A_j)^{2m} + B^2 \sum_{l=1}^k (\sigma_l^{2n} + \sigma_l^{2n-2}) \prod_{j=1, j \neq l}^k (A_* - A_j)^{2m}}}; \\ \frac{d\varepsilon_i}{d\lambda} = \frac{B\sigma_i^{n-1} \prod_{j=1, j \neq i}^k (A_* - A_j)^m}{\sqrt{\prod_{j=1}^k (A_* - A_j)^{2m} + B^2 \sum_{l=1}^k (\sigma_l^{2n} + \sigma_l^{2n-2}) \prod_{j=1, j \neq l}^k (A_* - A_j)^{2m}}}; \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\prod_{j=1}^k (A_* - A_j)^m}{\sqrt{\prod_{j=1}^k (A_* - A_j)^{2m} + B^2 \sum_{l=1}^k (\sigma_l^{2n} + \sigma_l^{2n-2}) \prod_{j=1, j \neq l}^k (A_* - A_j)^{2m}}}. \end{array} \right. \quad (17)$$

Легко заметить, что система уравнений (17) не обладает указанным выше недостатком систем (8) и (9), более того, все правые части уравнений системы (17) по модулю меньше единицы.

В качестве начального напряженно-деформированного состояния берется однородное:

$$\lambda = 0: \varepsilon_i = A_i = t = 0, i = \overline{1, k}. \quad (18)$$

Расчет проводится для балки аналогичных размеров из сплава Д16Т. Характеристики ползучести в уравнениях системы (17) те же, что и для уравнений системы (9).

Задача (17), (18) решалась в вычислительной среде Mathcad 14 с использованием метода Рунге-Кутты с переменным шагом интегрирования. Смена шага производится в соответствии с принципом Рунге – Ромберга – Ричардсона. Шаг уменьшается вдвое, если главный член погрешности с таким шагом  $R > 7 \cdot 10^{-5}$ , шаг увеличивается вдвое при  $R < 2 \cdot 10^{-5}$ . Число интервалов разбиения  $k = 40$ . Счет прекращался при достижении величиной удельной энергии рассеяния на внешнем наиболее нагруженном контуре значения  $A_{**} \approx 1.45 \text{ кг} \cdot \text{мм}/\text{мм}^3$ . Вычисления проводятся на персональном компьютере описанном выше. Основные данные о процессе вычисления приведены в Таблице 2, обозначения такие же, как и для Таблицы 1.

Таблица 2

$t, \text{ч}$	$\varepsilon$	$A,$ $\text{кг} \cdot \text{мм}/\text{мм}^3$	$s$	$j$	$t_*, \text{с}$
107,249	0,011	0,1	0,25	429	8,9166
192,499	0,024	0,2	0,25	770	16,5796
247,247	0,037	0,3	0,125	1020	22,2832
280,87	0,05	0,4	0,125	1289	27,5932
300,553	0,065	0,5	0,063	1589	34,9284
311,418	0,08	0,6	0,031	1896	44,554
316,975	0,097	0,7	0,016	2212	52,2446
319,584	0,115	0,8	$3,906 \cdot 10^{-3}$	2567	62,2378
320,662	0,135	0,9	$1,953 \cdot 10^{-3}$	2950	74,771
321,045	0,158	1	$1,953 \cdot 10^{-3}$	3315	86,0808
321,154	0,183	1,1	$1,953 \cdot 10^{-3}$	3655	98,0148
321,176	0,211	1,2	$1,953 \cdot 10^{-3}$	4035	112,1486
321,178	0,246	1,3	$1,953 \cdot 10^{-3}$	4480	126,3444

Таблица 2

$t, \text{ч}$	$\varepsilon$	$A,$ кг · мм/мм <sup>3</sup>	$s$	$j$	$t_*, \text{с}$
321,179	0,267	1,35	$1,953 \cdot 10^{-3}$	4738	135,2148
321,179	0,292	1,4	$1,953 \cdot 10^{-3}$	5029	144,316
321,179	0,322	1,45	$1,953 \cdot 10^{-3}$	5363	156,9478

На рис. 4 сплошной линией представлены расчетные значения, полученные при решении задачи в системе Mathcad 14, квадратами – расчетные значения, полученные в работе [2], точками – экспериментальные значения  $\kappa = \kappa(t)$  для величины изгибающего момента при максимальном напряжении в начальный момент  $\sigma(0)_{max} = 12 \text{ кг/мм}^2$  [2].

На рис. 5 и 6 соответственно показано распределение напряжения и удельной энергии рассеяния по высоте балки в различные моменты времени (указано в часах против соответствующей диаграммы) в эксперименте с  $\sigma(0)_{max} = 12 \text{ кг/мм}^2$ .

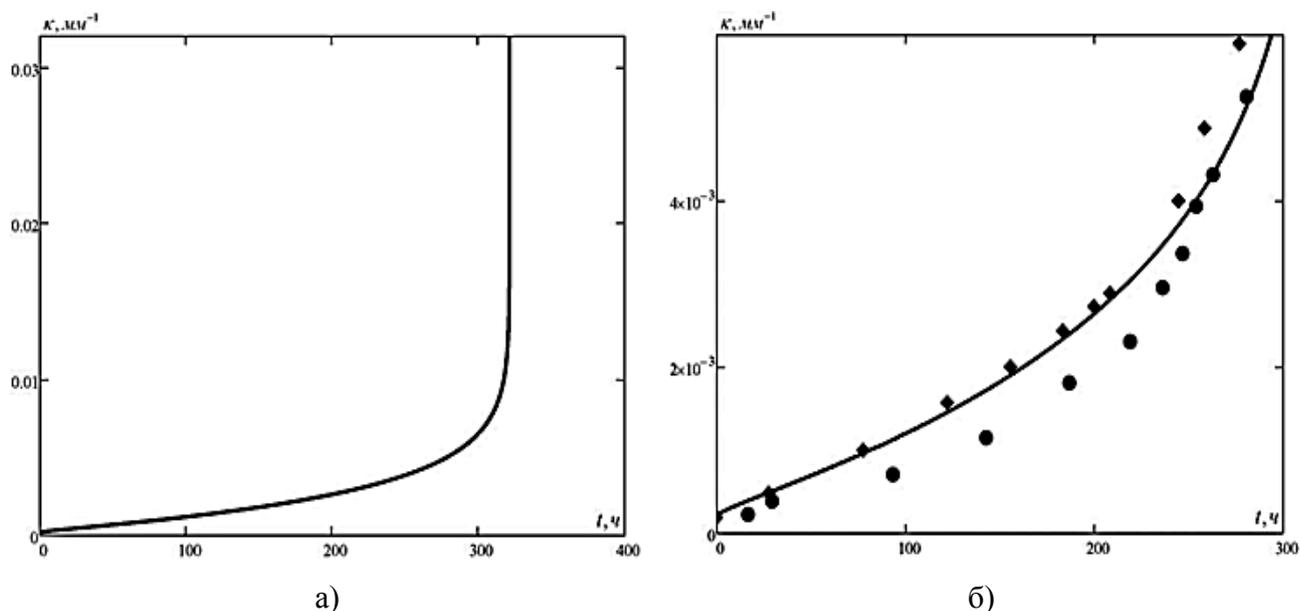


Рис. 1. Зависимость величины изгиба балки от времени для задачи (17), (18)

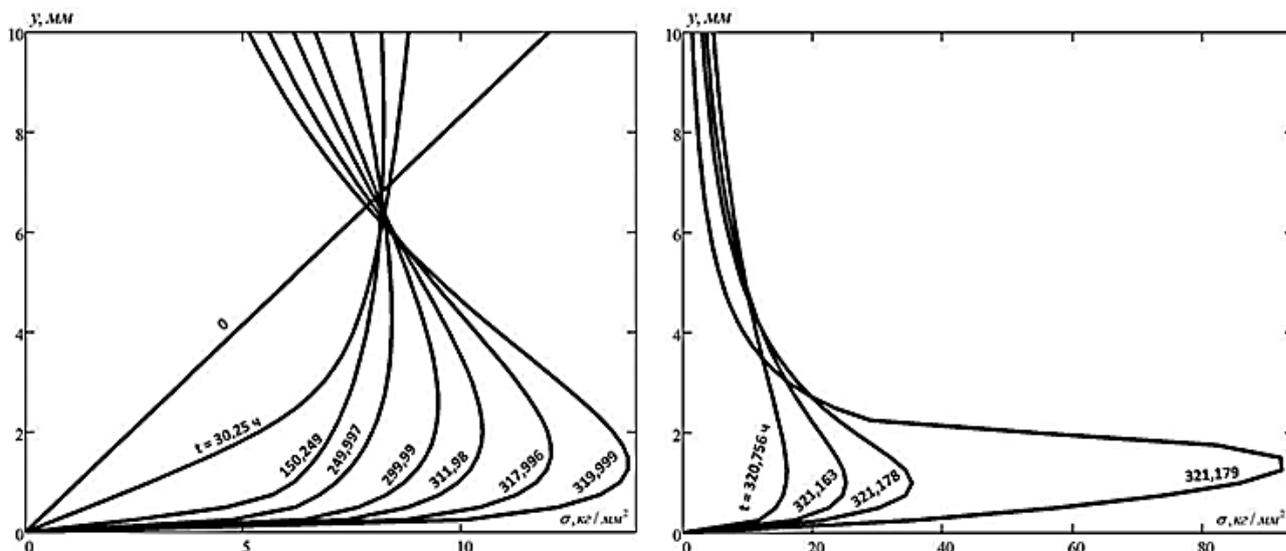


Рис. 5. Распределение напряжений по высоте сечения балки для задачи (17), (18)

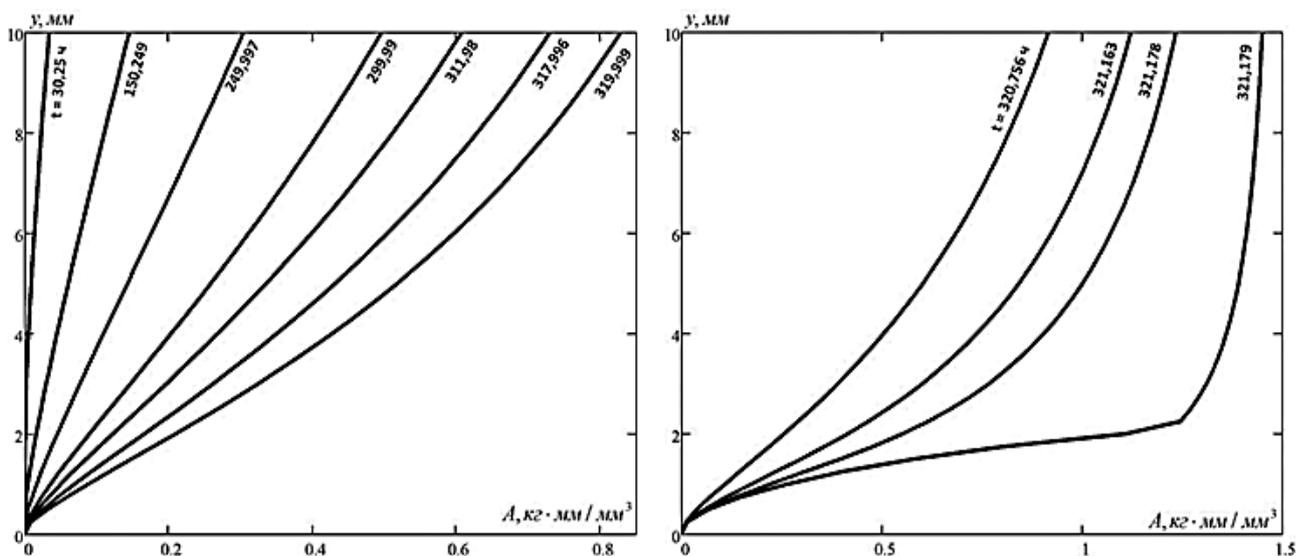


Рис. 6. Распределение удельной энергии рассеяния по высоте сечения балки для задачи (17), (18)

#### 4. Выводы:

1. вполне удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных значений для величины кривизны балки подтверждает правильность выбора определяющих уравнений в энергетической форме для описания процесса ползучести балки вплоть до разрушения;
2. сравнение решений полученных с использованием уравнений энергетического варианта теории ползучести и параметризованных уравнений в энергетической форме показывает, что метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация может применяться для исследования конструкций на

ползучесть и длительную прочность;

3. по результатам вычислений, приведенных в Таблице 1 и 2, видно, что использование метода продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации позволяет увеличить шаг интегрирования, уменьшить количество шагов по независимой переменной время счета, по сравнению с не параметризованной задачей.

### **Библиографический список**

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф. Энергетический вариант теории ползучести. – Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1986. – 95 с.
3. Горев Б.В., Панамарев В.А., Перетяцько В.Н. Энергетический вариант теории ползучести в обработке металлов давлением // Изв. Вузов. Черная металлургия. 2011. №6. С.16-18.
4. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. –455 с.
5. Лепин Г.Ф., Бондаренко Ю.Д. Ползучесть прямого бруса при изгибе с учетом повреждаемости материала. // Проблемы прочности. – 1970. – №7. – С. 68-70.
6. Никитенко А.Ф., Соснин О.В. Изгиб балки с разными характеристиками ползучести при растяжении и сжатии. // Проблемы прочности. – 1971. – №6. – С. 67-70.
7. Горев Б.В. К расчету на неустановившуюся ползучесть изгибаемого бруса из материала с разными характеристиками на растяжение и сжатие. // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. – 1973. – Вып. 14. – С. 44-51.
8. Горев Б.В., Клопотов И.Д. Описание процесса ползучести и разрушения при изгибе балок и кручении валов уравнениями со скалярным параметром повреждаемости. // ПМТФ. – 1999. – Т. 40. – № 6. – С. 157-162.
9. Соснин О.В., Горев Б.В., Рубанов В.В. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести. Сообщение 2. Расчет элементов конструкций и экспериментальная проверка результатов. // Проблемы прочности. – 1976. – №11. – С.9-13.
10. Соснин О.В., Торшенов Н.Г. К проведению испытаний на чистый изгиб при ползучести. // Заводская лаборатория. – 1969. – №10. – С.1273-1274.
11. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения и наилучшая параметризация. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.