УДК 519.8

Синтез оптимального управления линейными логико-динамическими системами

А.С. Бортаковский, Е.А. Пегачкова

Рассматривается задача оптимального управления логико-динамическими системами, динамическая часть которых описывается линейными дифференциальными уравнениями, а логическая часть – линейными разностными уравнениями, моделирующими работу автомата с памятью. Качество управления оценивается квадратичным функционалом. Поставленная задача аналогична классической проблеме Летова – Калмана аналитического конструирования оптимальных регуляторов. Выведены уравнения для нахождения синтезирующей функции и оптимального управления с обратной связью. Оптимальное управление динамической частью системы реализуется линейным регулятором (как и в классической задаче), а оптимальное управление логической частью описывается рекуррентными уравнениями. Разбираются примеры оптимальных процессов, в том числе со счетным множеством переключений логической части системы.

Введение

Логико-динамические системы (ЛДС) являются математическими моделями многорежимных систем автоматического управления технологическими процессами и движущимися объектами [1-5]. Эти системы могут служить моделями интеллектуальных систем управления движением. Положение объекта управления детерминированной ЛДС в фиксированный момент времени задается вектором состояния динамической части ЛДС, а траектории движения объекта управления описываются дифференциальными уравнениями. Пространство состояний логической части ЛДС имеет, как правило, дискретный характер и определяется векторами с целочисленными (или логическими) компонентами. Изменения состояния логической части ЛДС описываются рекуррентными уравнениями, моделирующими работу автомата с памятью. Логическая (автоматная) часть ЛДС влияет на поведение динамической части. Каждому состоянию логической части системы соответствует определенный тип траектории движения. Переключение логической части задает момент перехода от одной типовой траектории к другой. Возможность такого перехода зависит от состояния динамической части системы и от предыдущего состояния логической части. Причем каждое переключение с одной типовой траектории на другую оценивается, и его "стоимость" включается в критерий качества управления ЛДС (в виде штрафных слагаемых).

В настоящей статье рассматриваются детерминированные логико-динамические системы (ЛДС), динамическая часть которых описывается линейными дифференциальными уравнениями, а логическая часть – линейными разностными уравнениями, моделирующими работу автомата с памятью [1-5]. Качество управления оценивается квадратичным функционалом. Поставленная задача аналогична классической проблеме Летова – Калмана [4,6] аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), но в классе логико-динамических систем. По сравнению с классической проблемой рассматриваемая задача отличается дополнительными рекуррентными уравнениями, описывающими логическую часть ЛДС, а также наличием в критерии качества штрафных слагаемых за переключения логической (автоматной) части ЛДС.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №05-01-00458, №06-08-00882).

1. Постановка задачи

Пусть поведение детерминированной линейной ЛДС описывается соотношениями

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)y(t) + C(t)u(t), \qquad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \le t \le t_1; \tag{1}$$

$$y(\tau) = A_{\#}(\tau)x(\tau) + B_{\#}(\tau)y(\tau - 0) + C_{\#}(\tau)v(\tau), \quad y(t_0 - 0) = y_0, \quad t_0 \le \tau \le t_1; \tag{2}$$

где x, y – векторы состояния динамической и логической частей ЛДС, соответственно, $x \in X = R^n$, $y \in Y = R^m$;

u, v – векторы управления динамической и логической частями ЛДС, соответственно, $u \in U = R^p$, $v \in V = R^q$;

матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ имеют размеры $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(n \times p)$ соответственно и непрерывны на $T = [t_0, t_1]$;

матрицы $A_{\#}(t)$, $B_{\#}(t)$, $C_{\#}(t)$ имеют размеры $(m \times n)$, $(m \times m)$, $(m \times q)$ соответственно.

Допустимыми процессами считаются четверки $(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$, где $y(\cdot)$, $v(\cdot)$ – непрерывные справа кусочно-постоянные функции $y: T \to Y$, $v: T \to V$; $x(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция $x: T \to X$, а $u(\cdot)$ – измеримая функция $u: T \to U$, причем функции $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $v(t)$ удовлетворяют начальным условиям $x(t_0) = x_0$; $y(t_0 - 0) = y_0$, почти всюду на T – дифференциальному уравнению (1) и в каждой точке разрыва $\tau \in T$ функции $y(\cdot)$ – рекуррентному уравнению (2). Функции $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ определяют траектории движения динамической и логической частей ЛДС соответственно, а функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ – управления. Множество допустимых процессов обозначим через $\mathbf{D}(t_0, x_0, y_0)$.

Качество управления оценивается квадратичным функционалом

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\tfrac{1}{2} x^T(t) D(t) x(t) + x^T(t) G(t) y(t) + \tfrac{1}{2} u^T(t) Q(t) u(t) \right] dt +$$

$$+\sum_{\tau}\left\{\lambda(\tau)+\tfrac{1}{2}x^T(\tau)D_{\#}(\tau)x(\tau)+x^T(\tau)G_{\#}(\tau)y(\tau-0)+\tfrac{1}{2}y^T(\tau)F_{\#}(\tau)y(\tau)+\tfrac{1}{2}v^T(\tau)Q_{\#}(\tau)v(\tau)\right\}+$$

$$+\tfrac{1}{2}x^T(t_1)D_1\,x(t_1)+x^T(t_1)G_1\,y(t_1)+\tfrac{1}{2}y^T(t_1)F_1\,y(t_1), \qquad (3)$$

где матрицы $D(t)$, $G(t)$, $Q(t)$ имеют размеры $n\times n$, $n\times m$, $p\times p$ соответственно и непрерывны на $T=[t_0,t_1]$;

матрицы $D_{\#}(t)$, $G_{\#}(t)$, $F_{\#}(t)$, $Q_{\#}(t)$, D_1, G_1, F_1 имеют размеры $n\times n$, $n\times m$, $m\times m$, $q\times q$, $n\times n$, $n\times m$, $m\times m$ соответственно;

матрицы $D(t)$, $D_{\#}(t)$, $F_{\#}(t)$, D_1, F_1 – симметрические неотрицательно определенные;

матрицы $Q(t)$, $Q_{\#}(t)$ – симметрические положительно определенные;

$\lambda(\tau)$ – неотрицательная функция. Суммирование в (3) ведется по всем точкам разрыва τ кусочно-постоянной непрерывной справа функции $y(\cdot)$.

Требуется найти оптимальные управления $\boldsymbol{u}(t,x,y)$ и $\boldsymbol{v}(t,x,y)$ с полной обратной связью динамической и логической частями ЛДС, которые для каждого начального состояния (x_0,y_0) порождали бы оптимальный допустимый процесс $(x^*(\cdot),y^*(\cdot),u^*(\cdot),v^*(\cdot))$: $u^*(t)=\boldsymbol{u}(t,x^*(t),y^*(t))$, $v^*(t)=\boldsymbol{v}(t,x^*(t),y^*(t))$ $\forall\, t\in T$ минимизирующий функционал (3).

2. Условия оптимальности

Из достаточных условий оптимальности ЛДС [3,5] следует, что синтезирующая функция $\varphi(t,x,y)$, аналогичная функции Беллмана, а также оптимальные управления с полной обратной связью $\boldsymbol{u}(t,x,y)$ и $\boldsymbol{v}(\tau,x,y)$, динамической и логической частями ЛДС соответственно удовлетворяют уравнениям (в которых для сокращения записи опущена зависимость всех матриц от времени t):

$$\varphi(t_1,x,y)=\tfrac{1}{2}x^TD_1\,x+x^T\,G_1\,y+\tfrac{1}{2}y^T\,F_1\,y\,; \qquad (4)$$

$$\varphi_t(t,x,y)+\varphi_x(t,x,y)\cdot(A\,x+B\,y+C\,\boldsymbol{u}(t,x,y))+\tfrac{1}{2}x^TD\,x+x^T\,G\,y+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{u}^T(t,x,y)Q\,\boldsymbol{u}(t,x,y)=0\,; \qquad (5)$$

$$\varphi(\tau-0,x,y)=\varphi(\tau,x,A_{\#}\,x+B_{\#}\,y+C_{\#}\,\boldsymbol{v}(\tau,x,y))+\lambda+\tfrac{1}{2}x^TD_{\#}x+x^TG_{\#}y+$$

$$+\tfrac{1}{2}(A_{\#}\,x+B_{\#}\,y+C_{\#}\,\boldsymbol{v}(t,x,y))^T\,F_{\#}\,(A_{\#}\,x+B_{\#}\,y+C_{\#}\,\boldsymbol{v}(\tau,x,y)); \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{u}(t,x,y)=\arg\min_{u\in U}\left\{\varphi_t+\varphi_x\cdot(A\,x+B\,y+C\,u)+\tfrac{1}{2}x^T\,D\,x+x^T\,G\,y+\tfrac{1}{2}u^T\,Q\,u\right\}; \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{v}(t,x,y)=\arg\min_{v\in V}\left\{\varphi(t,x,A_{\#}\,x+B_{\#}\,y+C_{\#}v)+\lambda+\tfrac{1}{2}x^TD_{\#}x+x^TG_{\#}y+\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{2}(A_{\#}\,x+B_{\#}\,y+C_{\#}v)^T\,F_{\#}\,(A_{\#}\,x+B_{\#}\,y+C_{\#}\,v)\right\}. \qquad (8)$$

Будем искать квадратичную синтезирующую функцию вида

$$\varphi(t,x,y)=\tfrac{1}{2}x^T\Phi(t)x+x^T\Psi(t)y+\tfrac{1}{2}y^T\Gamma(t)y+\gamma(t), \tag{9}$$

где $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, $\Gamma(t)$ – матрицы размеров $n\times n$, $n\times m$, $m\times m$ соответственно, причем матрицы $\Phi(t)$, $\Gamma(t)$ симметрические неотрицательно определенные, а $\gamma(t)$ – скалярная функция.

Запишем условие (4):

$$\tfrac{1}{2}x^T\Phi(t_1)x+x^T\Psi(t_1)y+\tfrac{1}{2}y^T\Gamma(t_1)y+\gamma(t_1)=\tfrac{1}{2}x^T D_1 x+x^T G_1 y+\tfrac{1}{2}y^T F_1 y.$$

Это условие будет выполнено, если потребовать

$$\Phi(t_1)=D_1;\quad \Psi(t_1)=G_1;\quad \Gamma(t_1)=F_1,\quad \gamma(t_1)=0. \tag{10}$$

Выражение в фигурных скобках в (7) для функции (9) обозначим через

$$P(t,x,y,u)=\tfrac{1}{2}x^T\dot\Phi x+x^T\dot\Psi y+\tfrac{1}{2}y^T\dot\Gamma y+\dot\gamma+\tfrac{1}{2}x^T\Phi(Ax+By+Cu)+$$

$$+\tfrac{1}{2}(Ax+By+Cu)^T\Phi x+y^T\Psi^T(Ax+By+Cu)+\tfrac{1}{2}x^TDx+x^TGy+\tfrac{1}{2}u^TQu.$$

Учитывая положительную определенность матрицы Q, находим единственную точку глобального минимума функции $P(t,x,y,u)$ по аргументу u:

$$\boldsymbol{u}(t,x,y)=-Q^{-1}(t)C^T(t)[\Phi(t)x+\Psi(t)y]. \tag{11}$$

Подставляя (11) в выражение $P(t,x,y,u)$ и приравнивая коэффициенты квадратичной формы нулю, получаем (опуская зависимость всех матриц от времени t):

$$\begin{aligned}
&\dot\Phi+\Phi A+A^T\Phi+D-\Phi CQ^{-1}C^T\Phi=0,\\
&\dot\Psi+\Phi B+A^T\Psi+G-\Phi CQ^{-1}C^T\Psi=0,\\
&\dot\Gamma+\Psi^TB+B^T\Psi-\Psi^TCQ^{-1}C^T\Psi=0,\\
&\dot\gamma=0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Равенства (11),(12) обеспечивают выполнение условий (5), (7).

Выражение в фигурных скобках в (8) для функции (9) обозначим

$$P_\#(\tau,x,y,v)=\tfrac{1}{2}x^T\Phi x+x^T\Psi(A_\# x+B_\# y+C_\# v)+$$

$$+\tfrac{1}{2}(A_\# x+B_\# y+C_\# v)^T\Gamma(A_\# x+B_\# y+C_\# v)+\gamma+\lambda+\tfrac{1}{2}x^TD_\# x+x^TG_\# y+$$

$$+\tfrac{1}{2}(A_\# x+B_\# y+C_\# v)^T F_\#(A_\# x+B_\# y+C_\# v)+\tfrac{1}{2}v^TQ_\# v.$$

Предполагая, что матрица $Q_\#+C_\#^T(\Gamma+F_\#)C_\#$ положительно определенная, найдем единственную точку глобального минимума функции $P_\#(\tau,x,y,v)$ по аргументу v:

$$\boldsymbol{v}(\tau,x,y)=-K(\tau)C_\#^T(\tau)[L(\tau)x+M(\tau)y], \tag{13}$$

где $K=\left[Q_\#+C_\#^T(\Gamma+F_\#)C_\#\right]^{-1}$, $L=\Psi^T+(\Gamma+F_\#)A_\#$, $M=(\Gamma+F_\#)B_\#$. Подставляя (13) в (6) и приравнивая коэффициенты квадратичных функций в обеих частях равенства, получаем:

$$\begin{aligned}
&\Phi(\tau-0)=\Phi+\Psi A_\#+A_\#^T\Psi^T+A_\#^T(\Gamma+F_\#)A_\#+D_\#-L^TC_\#KC_\#^TL;\\
&\Psi(\tau-0)=L^T\left(B_\#-C_\#KC_\#^TM\right)+G_\#;
\end{aligned} \tag{14}$$

$\Gamma(\tau-0)=B_{\#}^T(\Gamma+F_{\#})B_{\#}-M^T C_{\#} K\, C_{\#}^T M$;

$\gamma(\tau-0)=\gamma(\tau)+\lambda(\tau)$.

Матрицы в правых частях уравнений (14) взяты в момент времени τ. Эти равенства должны выполняться, если синтезирующая функция $\varphi(\tau,x,y)$ имеет разрыв, т.е. при выполнении неравенства (условия разрыва):

$$\varphi(\tau,x,y)>\min_{v\in V} P_{\#}(\tau,x,y,v), \tag{15}$$

в противном случае скачка нет и синтезирующая функция непрерывна: $\varphi(\tau-0,x,y)=\varphi(\tau,x,y)$, т.е.

$$\Phi(\tau-0)=\Phi(\tau),\quad \Psi(\tau-0)=\Psi(\tau),\quad \Gamma(\tau-0)=\Gamma(\tau),\quad \gamma(\tau-0)=\gamma(\tau). \tag{16}$$

Обозначив разность

$$\Delta\varphi(\tau,x,y)=\min_{v\in V} P_{\#}(\tau,x,y,v)-\varphi(\tau,x,y)=$$

$$=\tfrac{1}{2}x^T[\Psi A_{\#}+A_{\#}^T\Psi^T+A_{\#}^T(\Gamma+F_{\#})A_{\#}+D_{\#}-L^T C_{\#}KC_{\#}^T L]x+x^T[L^T\left(B_{\#}-C_{\#}KC_{\#}^T M\right)+G_{\#}-\Psi]y+$$

$$+\tfrac{1}{2}y^T[B_{\#}^T(\Gamma+F_{\#})B_{\#}-M^T C_{\#}K\,C_{\#}^T M-\Gamma]y+\lambda, \tag{17}$$

условие разрыва (15) можно записать в виде:

$$\varphi(\tau-0,x,y)=\begin{cases}\min\limits_{v\in V} P_{\#}(\tau,x,y,v), & \Delta\varphi(\tau,x,y)<0,\\ \varphi(\tau,x,y), & \Delta\varphi(\tau,x,y)\ge 0,\end{cases} \tag{18}$$

или, что то же самое:

при $\Delta\varphi(\tau,x,y)<0$ выполняются условия (13), (14);

при $\Delta\varphi(\tau,x,y)\ge 0$ выполняются условия (16).

Другими словами, при $\Delta\varphi(\tau,x,y)<0$ синтезирующая функция (9) имеет разрыв, "величина" которого определяется равенствами (14), а оптимальное управление логической частью имеет вид (13). В противном случае, при $\Delta\varphi(\tau,x,y)\ge 0$, синтезирующая функция (9) непрерывна (выполняются равенства (16)), при этом управление логической частью находить не нужно, поскольку она сохраняет свое состояние неизменным. Равенства (13),(14) с учетом (17),(18) обеспечивают выполнение условий (6), (8).

В постановке задачи не исключается случай многократного переключения автоматной части (т.е. многократного изменения состояния логической части ЛДС) в фиксированный момент времени. В этом случае условия (13),(14),(15) нужно записать в виде рекуррентных уравнений. Обозначим синтезирующую функцию после k переключений состояний логической части системы в фиксированный момент времени τ через

$$\varphi^{(k)}(\tau,x,y)=\tfrac{1}{2}x^T\Phi_k(\tau)x+x^T\Psi_k(\tau)y+\tfrac{1}{2}y^T\Gamma_k(\tau)y+\gamma_k(\tau). \tag{19}$$

Матрицы Φ_k, Ψ_k, Γ_k и величина γ_k удовлетворяют системе рекуррентных уравнений, получающейся из (14):

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \Psi_k A_\# + A_\#^T \Psi_k^T + A_\#^T (\Gamma_k + F_\#) A_\# + D_\# - L_k^T C_\# K_k C_\#^T L_k ;$$

$$\Psi_{k+1} = L_k^T \left(B_\# - C_\# K_k C_\#^T M_k\right) + G_\# ; \tag{20}$$

$$\Gamma_{k+1} = B_\#^T (\Gamma_k + F_\#) B_\# - M_k^T C_\# K_k C_\#^T M_k ;$$

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k + \lambda(\tau),$$

где $K_k = \left[Q_\# + C_\#^T (\Gamma_k + F_\#) C_\#\right]^{-1}$, $L_k = \Psi_k^T + (\Gamma_k + F_\#) A_\#$, $M_k = (\Gamma_k + F_\#) B_\#$. Решения системы (20) должны удовлетворять начальным условиям

$$\Phi_0(\tau) = \Phi(\tau), \quad \Psi_0(\tau) = \Psi(\tau), \quad \Gamma_0(\tau) = \Gamma(\tau), \quad \gamma_0(\tau) = \gamma(\tau). \tag{21}$$

Оптимальное управление при каждом переключении определяется равенством

$$\boldsymbol{v}^{(k+1)}(\tau, x, y) = -K_k(\tau) C_\#^T(\tau) \left[L_k(\tau) x + M_k(\tau) y\right], \tag{22}$$

а оптимальное количество k^* переключений вычисляется по формуле

$$k^* = \arg \min_{k=0,1,2,\ldots} \varphi^{(k)}(\tau, x, y), \tag{23}$$

при этом выполняется равенство

$$\varphi(\tau - 0, x, y) = \min_{k=0,1,2,\ldots} \varphi^{(k)}(\tau, x, y). \tag{24}$$

Оптимальная "траектория" логической части системы

$$y(\tau - 0) = y^{(0)},\ y^{(1)},\ y^{(2)},\ \ldots,\ y^{(k^*)} = y(\tau)$$

в фиксированный момент времени τ находится согласно уравнению (2) при оптимальном управлении (22):

$$y^{(0)} = y(\tau - 0),$$

$$y^{(k+1)} = A_\#(\tau) x(\tau) + B_\#(\tau) y^{(k)} + C_\#(\tau) \boldsymbol{v}^{(k^*-k)}\left(\tau, x(\tau), y^{(k)}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, k^* - 1,$$

$$y(\tau) = y^{(k^*)},$$

где k^* – оптимальное количество переключений (23).

Если в функционале (3) "штраф" $\lambda(\tau)$ за переключение состояния логической части системы функция отсутствует (т.е. $\lambda(\tau) = 0$), то возможен режим с бесконечным (счетным) множеством переключений логической части системы в фиксированный момент времени. В этом случае число k^* в (23) не определено, а формула (24) принимает вид

$$\varphi(\tau - 0, x, y) = \lim_{k \to +\infty} \varphi^{(k)}(\tau, x, y). \tag{25}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема (о решении проблемы АКОР в классе ЛДС). *Синтезирующая функция для задачи оптимального управления* (1)–(3) *имеет вид* (24)

$$\varphi(t-0,x,y)=\min_{k=0,1,2,\dots}\varphi^{(k)}(t,x,y),$$

где $\varphi^{(k)}(t,x,y)=\frac{1}{2}x^T\Phi_k(t)x+x^T\Psi_k(t)y+\frac{1}{2}y^T\Gamma_k(t)y+\gamma_k(t)$, $k=0,1,2,\dots$; *причем функции* $\Phi_k(t)$, $\Psi_k(t)$, $\Gamma_k(t)$, $\gamma_k(t)$ *удовлетворяют системе рекуррентных уравнений* (20) *с начальными условиями* (21), *а функции* $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, $\Gamma(t)$, $\gamma(t)$ – *системе дифференциальных уравнений* (12) *с конечными условиями* (10). *Оптимальные позиционные управления динамической и логической частями* ЛДС *имеют вид* (11) *и* (22) *соответственно*:

$$\boldsymbol{u}(t,x,y)=-Q^{-1}(t)C^T(t)\left[\Phi_0(t)x+\Psi_0(t)y\right],$$

$$\boldsymbol{v}^{(k+1)}(t,x,y)=-K_k(t)C_{\#}^T(t)\left[L_k(t)x+M_k(t)y\right],\quad k=0,1,2,\dots,k^*-1,$$

где $K_k=\left[Q_{\#}+C_{\#}^T(\Gamma_k+F_{\#})C_{\#}\right]^{-1}$, $L_k=\Psi_k^T+(\Gamma_k+F_{\#})A_{\#}$, $M_k=(\Gamma_k+F_{\#})B_{\#}$. *Оптимальное количество* k^* *переключений логической части и минимальное значение функционала* (3) *для траектории* (1), (2) *определяются по синтезирующей функции*:

$$k^*(t,x,y)=\arg\min_{k=0,1,2,\dots}\varphi^{(k)}(t,x,y),\qquad \min_{d\in\mathbf{D}(t_0,x_0,y_0)}I(d)=\varphi(t_0-0,x_0,y_0).$$

Замечания. 1. При $k^*=0$ логическая часть сохраняет свое состояние (переключений нет), а синтезирующая функция является непрерывной:

$$\varphi(t-0,x,y)=\varphi(t,x,y)=\varphi^{(0)}(t,x,y).$$

2. При $k^*>0$ переключения состояний логической части системы происходят в соответствиии с (25):

$$y^{(0)}=y(t-0),$$

$$y^{(k+1)}=A_{\#}(t)x(t)+B_{\#}(t)y^{(k)}+C_{\#}(t)\boldsymbol{v}^{(k^*-k)}\left(t,x(t),y^{(k)}\right),\quad k=0,1,\dots,k^*-1,$$

$$y(t)=y^{(k^*)}.$$

где k^* – оптимальное количество переключений (23).

3. При $\lambda(t)=0$ возможен режим с бесконечным (счетным) числом переключений логической части. В этом случае синтезирующая функция находится как предел

$$\varphi(t-0,x,y)=\inf_{k=0,1,2,\dots}\varphi^{(k)}(t,x,y)=\lim_{k\to+\infty}\varphi^{(k)}(t,x,y).$$

3. Методика синтеза оптимального управления

Для нахождения оптимальных позиционных управлений ЛДС нужно выполнить следующие действия.

1. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\Phi}_0+\Phi_0A+A^T\Phi_0+D-\Phi_0CQ^{-1}C^T\Phi_0=0,\qquad \Phi_0(t_1)=D_1,$$

$$\dot{\Psi}_0 + \Phi_0 B + A^T \Psi_0 + G - \Phi_0 C Q^{-1} C^T \Psi_0 = 0, \qquad \Psi_0(t_1) = G_1,$$

$$\dot{\Gamma}_0 + \Psi_0^T B + B^T \Psi_0 - \Psi_0^T C Q^{-1} C^T \Psi_0 = 0, \qquad \Gamma_0(t_1) = F_1,$$

$$\dot{\gamma}_0 = 0, \qquad \gamma_0(t_1) = 0.$$

2. Найти оптимальное позиционное управление динамической частью ЛДС

$$\boldsymbol{u}(t,x,y) = -Q^{-1}(t) C^T(t) \left[\Phi_0(t) x + \Psi_0(t) y\right].$$

3. Решить систему рекуррентных уравнений

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \Psi_k A_\# + A_\#^T \Psi_k^T + A_\#^T (\Gamma_k + F_\#) A_\# + D_\# - L_k^T C_\# K_k C_\#^T L_k;$$

$$\Psi_{k+1} = L_k^T \left(B_\# - C_\# K_k C_\#^T M_k\right) + G_\#;$$

$$\Gamma_{k+1} = B_\#^T (\Gamma_k + F_\#) B_\# - M_k^T C_\# K_k C_\#^T M_k;$$

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k + \lambda(t), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

где $K_k = \left[Q_\# + C_\#^T (\Gamma_k + F_\#) C_\#\right]^{-1}$, $L_k = \Psi_k^T + (\Gamma_k + F_\#) A_\#$, $M_k = (\Gamma_k + F_\#) B_\#$.

4. Найти конечные разности

$$\Delta^{(k+1)} \varphi(t,x,y) = \varphi^{(k+1)}(t,x,y) - \varphi^{(k)}(t,x,y), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

где $\varphi^{(k)}(t,x,y) = \frac{1}{2} x^T \Phi_k(t) x + x^T \Psi_k(t) y + \frac{1}{2} y^T \Gamma_k(t) y + \gamma_k(t)$.

5. По знакам конечных разностей определить оптимальное количество $k^* = k^*(t,x,y)$ переключений логической части системы:

$k^*(t,x,y) = 0$ (нет переключений), если $\Delta^{(1)} \varphi(t,x,y) \ge 0$;

$k^*(t,x,y) = 1$, если $\Delta^{(1)} \varphi(t,x,y) < 0$ и $\Delta^{(2)} \varphi(t,x,y) \ge 0$;

$k^*(t,x,y) = 2$, если $\Delta^{(2)} \varphi(t,x,y) < 0$ и $\Delta^{(3)} \varphi(t,x,y) \ge 0$

и т.д.

6. Найти оптимальное позиционное управление логической частью ЛДС

$$\boldsymbol{v}^{(k+1)}(t,x,y) = -K_k(t) C_\#^T(t) \left[L_k(t) x + M_k(t) y\right], \quad k = 0,1,2,\ldots,k^*-1.$$

В п.1,3 зависимость всех функций от времени t опущена для сокращения записей.

Использование предлагаемого алгоритма для приближенного решения задачи на компьютере трудно реализуемо, поскольку в п.3 требуется найти общее решение системы рекуррентных уравнений, а в п.5 нужно минимизировать последовательность функций. Поэтому предлагается для управления логической частью системы использовать оптимальное программное управление, порождаемое оптимальным позиционным.

Для нахождения оптимального процесса, минимизирующего оставшиеся потери функционала (3), т.е. нахождения оптимального управления и оптимальной траектории ЛДС, исходящей в момент времени $\theta \in [t_0, t_1)$ из состояния $x(\theta) = x_\theta$, $y(\theta - 0) = y_\theta$, нужно выполнить следующие действия.

1. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\Phi}_0 + \Phi_0 A + A^T \Phi_0 + D - \Phi_0 C Q^{-1} C^T \Phi_0 = 0\,, \qquad \Phi_0(t_1) = D_1\,,$$

$$\dot{\Psi}_0 + \Phi_0 B + A^T \Psi_0 + G - \Phi_0 C Q^{-1} C^T \Psi_0 = 0\,, \qquad \Psi_0(t_1) = G_1\,,$$

$$\dot{\Gamma}_0 + \Psi_0^T B + B^T \Psi_0 - \Psi_0^T C Q^{-1} C^T \Psi_0 = 0\,, \qquad \Gamma_0(t_1) = F_1\,,$$

$$\dot{\gamma}_0 = 0\,, \qquad \gamma_0(t_1) = 0\,.$$

2. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ вычислить последовательно матрицы Φ_k, Ψ_k, Γ_k и величины γ_k по формулам

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \Psi_k A_\# + A_\#^T \Psi_k^T + A_\#^T (\Gamma_k + F_\#) A_\# + D_\# - L_k^T C_\# K_k C_\#^T L_k\,, \quad \Phi_0 = \Phi_0(\theta);$$

$$\Psi_{k+1} = L_k^T \left(B_\# - C_\# K_k C_\#^T M_k \right) + G_\#\,, \qquad \Psi_0 = \Psi_0(\theta),$$

$$\Gamma_{k+1} = B_\#^T (\Gamma_k + F_\#) B_\# - M_k^T C_\# K_k C_\#^T M_k\,, \qquad \Gamma_0 = \Gamma_0(\theta),$$

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k + \lambda(\theta), \qquad \gamma_0 = \gamma_0(\theta),$$

где $K_k = \left[Q_\# + C_\#^T (\Gamma_k + F_\#) C_\# \right]^{-1}$, $L_k = \Psi_k^T + (\Gamma_k + F_\#) A_\#$, $M_k = (\Gamma_k + F_\#) B_\#$,

а также значения функций

$$\varphi^{(k)}(\theta, x_\theta, y_\theta) = \tfrac{1}{2} x_\theta^T \Phi_k(\theta) x_\theta + x_\theta^T \Psi_k(\theta) y_\theta + \tfrac{1}{2} y_\theta^T \Gamma_k(\theta) y_\theta + \gamma_k(\theta), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Вычисления продолжать (для $k = 0, 1, 2, \ldots$) пока выполняется неравенство

$$\Delta^{(k+1)} \varphi(\theta, x_\theta, y_\theta) = \varphi^{(k+1)}(\theta, x_\theta, y_\theta) - \varphi^{(k)}(\theta, x_\theta, y_\theta) < 0\ .$$

Номер k^*, при котором выполняется противоположное неравенство

$$\Delta^{(k^*+1)} \varphi(\theta, x_\theta, y_\theta) = \varphi^{(k^*+1)}(\theta, x_\theta, y_\theta) - \varphi^{(k^*)}(\theta, x_\theta, y_\theta) \geq 0\ ,$$

определяет оптимальное количество $k^*(\theta, x_\theta, y_\theta)$ переключений логической части ЛДС в позиции $(\theta, x_\theta, y_\theta)$.

3. Найти оптимальную последовательность состояний логической части системы

$$y^{(0)} = y_\theta\,,$$

$$y^{(k+1)} = A_\#(\theta) x_\theta + B_\#(\theta) y^{(k)} + C_\#(\theta) \boldsymbol{v}^{(k^*-k)}\left(\theta, x_\theta, y^{(k)}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, k^* - 1\,,$$

$$y(\theta) = y^{(k^*)}\,,$$

где $\boldsymbol{v}^{(k+1)}(\theta, x, y) = -K_k(\theta) C_\#^T(t) \left[L_k(\theta) x + M_k(\theta) y \right]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, k^* - 1$.

4. Найти траекторию движения динамической части ЛДС, решая уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) y(\theta) + C(t) u(t)$$

с начальным условием $x(\theta) = x_\theta$, а также оптимальное программное управление динамической частью ЛДС

$$u(t) = \boldsymbol{u}(t, x(t), y(\theta)) = -Q^{-1}(t) C^T(t) [\Phi(t) x(t) + \Psi(t) y(\theta)]\,.$$

Интегрирование продолжать, начиная с момента времени $t = \theta$, пока выполняется условие

$$\Delta^{(1)}\varphi(t,x(t),y(\Theta))=\varphi^{(1)}(t,x(t),y(\Theta))-\varphi^{(0)}(t,x(t),y(\Theta))\ge 0.$$

Нарушение этого неравенства в момент $t=\Theta_1$ означает, что необходимо изменить состояние логической части системы. Для этого следует повторить пп.2,3,4 алгоритма для траектории системы, исходящей в момент времени $t=\Theta_1$ из состояния $x_{\Theta_1}=x(\Theta_1)$, $y_{\Theta_1}=y(\Theta_1-0)=y(\Theta)$.

4. Пример

Рассмотрим пример применения достаточных условий оптимальности. Требуется найти оптимальное позиционное управление ЛДС:

$$\dot{x}(t)=y(t)+u(t),\qquad x(0)=1,\quad 0\le t\le 1,$$

$$y(\tau)=y(\tau-0)+v(\tau),\quad y(-0)=1,\quad 0\le\tau\le 1,$$

$$I=\int_0^1\tfrac{1}{2}u^2(t)dt+\sum_{\tau}\left(\lambda+\tfrac{1}{2}v^2(\tau)\right)+\tfrac{1}{2}x^2(1)+\tfrac{1}{2}y^2(1)\to\min$$

в случаях а) $\lambda=1$; б) $\lambda=\frac{1}{8}$; в) $\lambda=0$.

По сравнению с общей постановкой (1),(2),(3) имеем:

$n=1$, $X=R$, $m=1$, $Y=R$, $p=1$, $U=R$, $q=1$, $V=R$, $t_0=0$, $t_1=1$,

$A(t)=0$, $B(t)=1$, $C(t)=1$, $D(t)=0$, $G(t)=0$, $Q(t)=1$,

$A_{\#}(t)=0$, $B_{\#}(t)=1$, $C_{\#}(t)=1$, $D_{\#}(t)=0$, $G_{\#}(t)=0$, $F_{\#}(t)=0$, $Q_{\#}(t)=1$,

$D_1=1$, $G_1=0$, $F_1=1$.

Применим методику синтеза оптимальных позиционных управлений ЛДС (см. разд.3).

1. Решим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\Phi}_0+\Phi_0A+A^T\Phi_0+D-\Phi_0CQ^{-1}C^T\Phi_0=0,\qquad \Phi_0(t_1)=D_1,$$

$$\dot{\Psi}_0+\Phi_0B+A^T\Psi_0+G-\Phi_0CQ^{-1}C^T\Psi_0=0,\qquad \Psi_0(t_1)=G_1,$$

$$\dot{\Gamma}_0+\Psi_0^TB+B^T\Psi_0-\Psi_0^TCQ^{-1}C^T\Psi_0=0,\qquad \Gamma_0(t_1)=F_1,$$

$$\dot{\gamma}_0=0,\qquad \gamma_0(t_1)=0.$$

Для рассматриваемой задачи имеем системы уравнений

$$\dot{\Phi}_0-\Phi_0^2=0,\quad \dot{\Psi}_0+\Phi_0-\Phi_0\Psi_0=0,\quad \dot{\Gamma}_0+2\Psi_0-\Psi_0^2=0,\quad \dot{\gamma}_0=0$$

с начальными условиями

$$\Phi_0(1)=D_1=1;\quad \Psi_0(1)=G_1=0;\quad \Gamma_0(1)=F_1=1;\quad \gamma_0(1)=0.$$

Интегрируя, получаем

$$\Phi_0(t)=\frac{1}{2-t},\quad \Psi_0(t)=\frac{1-t}{2-t},\quad \Gamma_0(t)=1-t+\frac{1}{2-t},\quad \gamma_0(t)=0.$$

2. Находим оптимальное позиционное управление динамической частью ЛДС

$$\boldsymbol{u}(t,x,y) = -Q^{-1}(t)C^T(t)\left[\Phi_0(t)x + \Psi_0(t)y\right] = -\Phi_0(t)x - \Psi_0(t)y = -\frac{x}{2-t} - \frac{(1-t)y}{2-t}.$$

3. Решаем систему рекуррентных уравнений

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \Psi_k A_\# + A_\#^T \Psi_k^T + A_\#^T (\Gamma_k + F_\#) A_\# + D_\# - L_k^T C_\# K_k C_\#^T L_k;$$

$$\Psi_{k+1} = L_k^T \left(B_\# - C_\# K_k C_\#^T M_k\right) + G_\#;$$

$$\Gamma_{k+1} = B_\#^T (\Gamma_k + F_\#) B_\# - M_k^T C_\# K_k C_\#^T M_k;$$

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k + \lambda(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $K_k = \left[Q_\# + C_\#^T (\Gamma_k + F_\#) C_\#\right]^{-1}$, $L_k = \Psi_k^T + (\Gamma_k + F_\#) A_\#$, $M_k = (\Gamma_k + F_\#) B_\#$.

Для рассматриваемой задачи система имеет вид

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - \frac{\Psi_k^2}{1+\Gamma_k}; \quad \Psi_{k+1} = \frac{\Psi_k}{1+\Gamma_k}; \quad \Gamma_{k+1} = \frac{\Gamma_k}{1+\Gamma_k}; \quad \gamma_{k+1} = \gamma_k + \lambda,$$

а ее решения:

$$\Phi_k = \Phi_0 - \frac{k\Psi_0^2}{1+k\Gamma_0}, \qquad \Psi_k = \frac{\Psi_0}{1+k\Gamma_0}, \qquad \Gamma_k = \frac{\Gamma_0}{1+k\Gamma_0}, \qquad \gamma_k = k\lambda.$$

4. Находим конечные разности

$$\Delta^{(k+1)}\varphi(t,x,y) = \varphi^{(k+1)}(t,x,y) - \varphi^{(k)}(t,x,y) = \lambda - \frac{\left(\Psi_0(t)x + \Gamma_0(t)y\right)^2}{2(1+k\Gamma_0)(1+\Gamma_0+k\Gamma_0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

5. По знакам конечных разностей определяем оптимальное количество $k^* = k^*(t,x,y)$ переключений логической части системы:

$k^*(t,x,y) = 0$ (нет переключений), если $\Delta^{(1)}\varphi(t,x,y) \ge 0$, т.е. $\left|\Psi_0 x + \Gamma_0 y\right| \le \sqrt{2\lambda(1+\Gamma_0)}$;

$k^*(t,x,y) = 1$, если $\Delta^{(1)}\varphi(t,x,y) < 0$ и $\Delta^{(2)}\varphi(t,x,y) \ge 0$, т.е.

$\sqrt{2\lambda(1+\Gamma_0)} < \left|\Psi_0 x + \Gamma_0 y\right| \le \sqrt{2\lambda(1+\Gamma_0)(1+2\Gamma_0)}$

и т.д.

$k^*(t,x,y) = k$, если $\Delta^{(k)}\varphi(t,x,y) < 0$ и $\Delta^{(k)}\varphi(t,x,y) \ge 0$, т.е.

$\sqrt{2\lambda(1-\Gamma_0+k\Gamma_0)(1+k\Gamma_0)} < \left|\Psi_0 x + \Gamma_0 y\right| \le \sqrt{2\lambda(1+k\Gamma_0)(1+\Gamma_0+k\Gamma_0)}$.

6. Находим оптимальное позиционное управление логической частью ЛДС

$$\boldsymbol{v}^{(k+1)}(t,x,y) = -K_k(t)C_\#^T(t)\left[L_k(t)x + M_k(t)y\right] = -\frac{\Psi_0(t)x + \Gamma_0(t)y}{1+\Gamma_0(t)+k\Gamma_0(t)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k^*-1,$$

так как $K_k = \dfrac{1}{1+\Gamma_k} = \dfrac{1+k\Gamma_0}{1+\Gamma_0+k\Gamma_0}$, $L_k = \Psi_k = \dfrac{\Psi_0}{1+k\Gamma_0}$, $M_k = \Gamma_k = \dfrac{\Gamma_0}{1+k\Gamma_0}$.

Используя эти позиционные управления, найдем оптимальную траекторию ЛДС, исходящую из заданного начального состояния: $x_0 = x(0) = 1$, $y_0 = y(-0) = 1$. Вычислим предварительно для $t = 0$: $\Phi_0(0) = \frac{1}{2}$, $\Psi_0(0) = \frac{1}{2}$, $\Gamma_0(0) = \frac{3}{2}$, $\gamma_0(0) = 0$.

а) Для $\lambda = 1$ определяем оптимальное количество переключений логической части системы. Так как для $x_0 = y_0 = 1$ выполняется неравенство

$$\left|\Psi_0 x_0 + \Gamma_0 y_0\right| \le \sqrt{2\lambda(1+\Gamma_0)} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{3}{2}\cdot 1\right| \le \sqrt{2\cdot 1\cdot(1+\tfrac{3}{2})} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \le \sqrt{5},$$

то переключений логической части нет ($k^*(0,1,1) = 0$ при $\lambda = 1$). Поэтому $y(0) = y(-0) = 1$. Интегрируя уравнение

$$\dot{x}(t) = y(t) + u(t)$$

при $y(t) = 1$ и оптимальном управлении

$$\boldsymbol{u}(t,x,y) = -\Phi_0(t)x - \Psi_0(t)y(t) = -\frac{x}{2-t} - \frac{1-t}{2-t},$$

получаем траекторию $x(t) = 1$ и оптимальное программное управление $u(t) = -1$ динамической частью ЛДС. На оптимальной траектории вычисляем минимальное значение функционала

$$\min I = \int_0^1 \tfrac{1}{2}u^2(t)dt + \tfrac{1}{2}x^2(1) + \tfrac{1}{2}y^2(1) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} = \varphi^{(0)}(0,1,1).$$

Заметим, что на оптимальной траектории $x(t) = 1$, $y(t) = 1$ переключений логической части системы нет, так как

$$\Delta^{(1)}\varphi(t,x(t),y(t)) = \lambda - \frac{1}{2(1+\Gamma_0)}\left(\Psi_0 x + \Gamma_0 y\right)^2 = 1 - \frac{\left(\frac{1-t}{2-t}\cdot 1 + \left(1 - t + \frac{1}{2-t}\right)\cdot 1\right)^2}{2\left(1 + 1 - t + \frac{1}{2-t}\right)} = 1 - \frac{(2-t)^2}{2\left(2 - t + \frac{1}{2-t}\right)} > 0,$$

поскольку дробь не больше 1 (ее числитель не больше 4, а знаменатель не меньше 4).

б) Для $\lambda = \frac{1}{8}$ определяем оптимальное количество переключений логической части системы. Так как для $x_0 = y_0 = 1$ выполняются неравенства

$$\sqrt{2\lambda(1-\Gamma_0+2\Gamma_0)(1+2\Gamma_0)} < \left|\Psi_0 x + \Gamma_0 y\right| \le \sqrt{2\lambda(1+2\Gamma_0)(1+\Gamma_0+2\Gamma_0)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2\cdot\tfrac{1}{8}\cdot(1-\tfrac{3}{2}+2\cdot\tfrac{3}{2})(1+2\cdot\tfrac{3}{2})} < \left|\tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{3}{2}\cdot 1\right| \le \sqrt{2\cdot\tfrac{1}{8}\cdot(1+2\cdot\tfrac{3}{2})(1+\tfrac{3}{2}+2\cdot\tfrac{3}{2})} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\tfrac{5}{2}} < 2 \le \sqrt{\tfrac{11}{2}},$$

то оптимальное количество переключений логической части ЛДС равно 2 ($k^*(0,1,1) = 2$ при $\lambda = \frac{1}{8}$). Оптимальное позиционное управление имеет вид

$$\boldsymbol{v}^{(k+1)}(0,x,y) = -\frac{\Psi_0(0)x + \Gamma_0(0)y}{1+\Gamma_0(0)+k\Gamma_0(0)} = -\frac{x+3y}{3k+5}, \quad k = 0,1;$$

т.е. $\boldsymbol{v}^{(1)}(0,x,y) = -\dfrac{x+3y}{5}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}(0,x,y) = -\dfrac{x+3y}{8}$. Применяя эти управления, находим последовательность состояний логической части ЛДС:

$y^{(0)} = y_0 = 1$,

$y^{(1)} = y^{(0)} + \boldsymbol{v}^{(2)}(0,1,1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

$y^{(2)} = y^{(1)} + \boldsymbol{v}^{(1)}\left(0,1,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

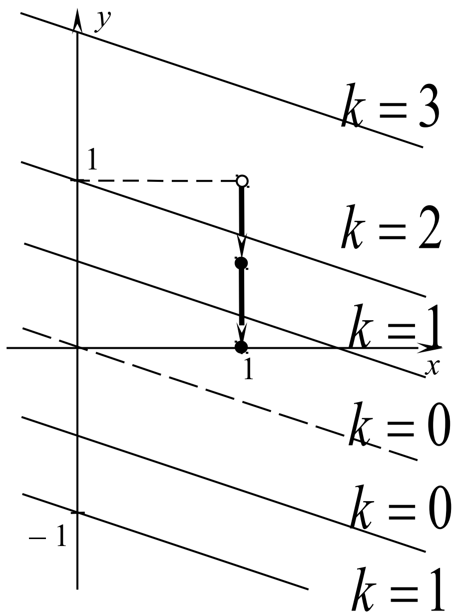

Рис.1

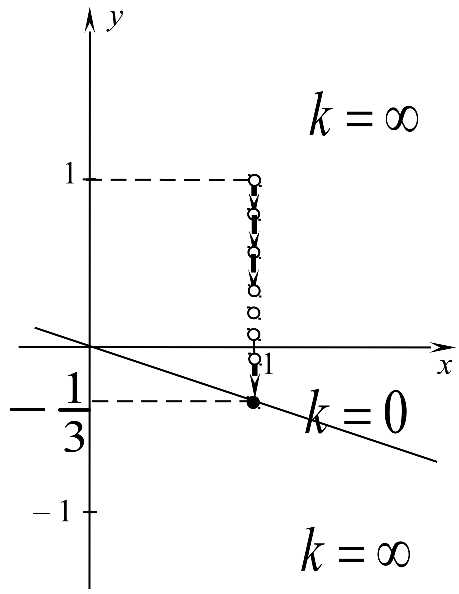

Рис.2

Следовательно, $y(0) = y^{(2)} = 0$. На рис.1 изображена траектория логической части ЛДС (двойная линия), а также показано разбиение пространства состояний в начальный момент времени ($t = 0$) прямыми $\Psi_0 x + \Gamma_0 y = \pm\sqrt{2\lambda(1+k\Gamma_0)(1+\Gamma_0+k\Gamma_0)}$ (при $\lambda = \frac{1}{8}$) на области с фиксированным количеством k переключений, штриховой линией изображена прямая $\Psi_0 x + \Gamma_0 y = 0$.

Интегрируя уравнение

$\dot{x}(t) = y(t) + u(t)$

при $y(t) = 0$ и оптимальном управлении

$$\boldsymbol{u}(t,x,y) = -\Phi_0(t)x - \Psi_0(t)y(t) = -\frac{x}{2-t},$$

получаем оптимальную траекторию динамической части системы $x = \frac{2-t}{2}$. На оптимальной траектории вычисляем минимальное значение функционала

$$\min I = \int_0^1 \tfrac{1}{2}u^2(t)\,dt + \tfrac{1}{2}x^2(1) + \tfrac{1}{2}y^2(1) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2}v_1^2 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2}v_2^2\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{2}{8} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} = \varphi^{(2)}(0,1,1).$$

Заметим, что на оптимальной траектории $x=\frac{2-t}{2}$, $y(t)=0$ больше переключений нет, так как для конечной разности

$$\Delta^{(1)}\varphi(t,x(t),y(t))=\lambda-\frac{1}{2(1+\Gamma_0)}\left(\Psi_0 x+\Gamma_0 y\right)^2=\frac{1}{8}-\frac{\left(\frac{1-t}{2-t}\cdot\frac{2-t}{2}+\left(1-t+\frac{1}{2-t}\right)\cdot 0\right)^2}{2\left(1+1-t+\frac{1}{2-t}\right)}=\frac{1}{8}-\frac{(1-t)^2}{8(2-t+\frac{1}{2-t})}$$

выполняется условие $\Delta^{(1)}\varphi(t,x(t),y(t))\geq 0$, поскольку числитель второй дроби не больше 1, а знаменатель не меньше 16.

в) В случае $\lambda=0$ все конечные разности отрицательные

$$\Delta^{(k+1)}\varphi(t,x,y)=-\frac{\left(\Psi_0(t)x+\Gamma_0(t)y\right)^2}{2(1+k\Gamma_0)(1+\Gamma_0+k\Gamma_0)}\ ,\qquad k=0,1,2,\ldots$$

Для начального состояния $x_0=y_0=1$ имеем

$$\Delta^{(k+1)}\varphi(0,1,1)=-\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{3}{2}\cdot 1\right)^2}{2(1+k\cdot\frac{3}{2})(1+\frac{3}{2}+k\cdot\frac{3}{2})}<0 \quad \text{при всех } k=0,1,2,\ldots$$

Поэтому в этом случае логическая часть системы совершает бесконечное число переключений. На рис.2 в пространстве начальных состояний (при $t=0$) изображена прямая $\Psi_0 x+\Gamma_0 y=0$. Для точек этой прямой отсутствуют переключения логической части ЛДС ($k=0$). Для всех остальных начальных состояний требуется совершить бесконечное (счетное) количество переключений ($k=\infty$).

Построим минимизирующую последовательность допустимых процессов. Пусть k^* – фиксированное количество переключений. Тогда последовательности оптимальных управлений и состояний логической части системы имеют вид:

$$v^{(k^*)}=-\frac{1+3\cdot y^{(0)}}{3k^*+2}=-\frac{4}{3k^*+2},\qquad y^{(1)}=y^{(0)}+v^{(k^*)}=1-\frac{4}{3k^*+2}=\frac{3k^*-2}{3k^*+2};$$

$$v^{(k^*-1)}=-\frac{1+3\cdot y^{(1)}}{3(k^*-1)+2}=-\frac{4}{3k^*+2},\qquad y^{(2)}=y^{(1)}+v^{(k^*-1)}=\frac{3k^*-2}{3k^*+2}-\frac{4}{3k^*+2}=\frac{3k^*-6}{3k^*+2};$$

$$\ldots,$$

$$v^{(1)}=-\frac{1+3\cdot y^{(k^*-1)}}{5}=-\frac{4}{3k^*+2},\qquad y^{(k^*)}=y^{(k^*-1)}+v^{(1)}=\frac{3k^*+2-4k^*}{3k^*+2}=\frac{2-k^*}{3k^*+2}\ .$$

Вычислим сумму штрафов за k^* переключений:

$$\sum_{k=1}^{k^*}\frac{1}{2}\left(v^{(k)}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k^*}\left(-\frac{4}{3k^*+2}\right)^2=\frac{8k^*}{(3k^*+2)^2}.$$

Найдем предельное состояние логической части системы и предельное значение суммы штрафов. При $k^*\to+\infty$ получаем

$$y^{(+\infty)} = \lim_{k^* \to +\infty} y^{(k^*)} = \lim_{k^* \to +\infty} \frac{2 - k^*}{3k^* + 2} = -\frac{1}{3};$$

$$\lim_{k^* \to +\infty} \sum_{k=1}^{k^*} \tfrac{1}{2}\left(v^{(k)}\right)^2 = \lim_{k^* \to +\infty} \frac{8k^*}{(3k^* + 2)^2} = 0 .$$

На рис.2 изображена оптимальная траектория (двойная прерывистая линия), а также отмечено состояние $x = 1$, $y = -\frac{1}{3}$, которое принадлежит прямой $\Psi_0 x + \Gamma_0 y = 0$. Напомним, что точкам этой прямой соответствует отсутствие переключений ($k = 0$) логической части ЛДС.

Таким образом, минимизирующая последовательность процессов управления может быть, например, следующая. Для любого натурального K рассмотрим стационарную последовательность управлений $v^{(k)} = -\dfrac{4}{3K}$, $k = 1, 2, \ldots, K$. Для этой последовательности в начальный момент времени имеем

$$\sum_{k=1}^{K} v^{(k)} = K \cdot \left(-\frac{4}{3K}\right) = -\frac{4}{3}, \text{ т.е. } y^{(K)} = y^{(0)} + \sum_{k=1}^{K} v^{(k)} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}.$$

В результате K переключений достигаем оптимального состояния $y(0) = -\frac{1}{3}$. Однако, сумма "штрафов" за эти K переключений равна

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \left(v^{(k)}\right)^2 = \frac{K}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3K}\right)^2 = \frac{8}{9K} .$$

Заметим, что при $y = -\frac{1}{3}$, получаем оптимальное управление $u(t) = -\frac{1}{3}$ и оптимальную траекторию $x(t) = 1 - \frac{t}{3}$ динамической части. Следовательно, минимальное значение функционала равно

$$\min I = \int_0^1 \tfrac{1}{2} u^2(t)\,dt + \tfrac{1}{2} x^2(1) + \tfrac{1}{2} y^2(1) + \sum_{k=1}^{K} \tfrac{1}{2}\left(v^{(k)}\right)^2 = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{8}{9K} .$$

Увеличивая количество переключений K , получаем $\inf I = \frac{1}{6}$, что совпадает с равенством (25):

$$\lim_{k \to +\infty} \varphi^{(k)}(0,1,1) = \frac{1}{6} .$$

5. Выводы

На основе достаточных условий оптимальности выведены уравнения для нахождения синтезирующей функции и оптимального управления с обратной связью. Оптимальное управление динамической частью системы реализуется линейным регулятором (как и в классической задаче АКОР), а оптимальное управление логической частью определяется рекуррентным уравнением. Рассмотрены примеры оптимальных процессов, в том числе со счетным множеством переключений логической части системы, которые происходят в фиксированный момент времени.

Список литературы

1. Семенов В.В. Динамическое программирование в синтезе логико-динамических систем. // М.: Приборостроение. – 1984, №2. – с.12-23.

2. Семенов В.В., Репин В.М., Журина Н.Э. Алгоритмизация процессов управления летательными аппаратами в классе логико-динамических систем. – М.: МАИ, 1987. – 50 с.

3. Бортаковский А.С. Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами. // Информатика. Сер. Автоматизация проектирования. – М.: ВНИИМИ, 1992. Вып. 2-3. – с.72-79.

4. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.

5. Bortakovsky A.S., Volokitin D.A. Synthesis of the automaton part of optimal logic-dynamical system. // Journal of mathematical sciences. – 2005, V.126, N. 6. – c.1536-1541.

6. Летов А.М. Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1973. – 390 с.

Сведения об авторах

Бортаковский Александр Сергеевич, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н.;
Телефон: 158-9337, e-mail: asbortakov@mail.ru

Пегачкова Елена Александровна, студентка факультета прикладной математики и физики Московского авиационного института (государственного технического университета);
Телефон: 490-5958, e-mail: pegachkov@mail.ru