УДК 629.7.001.25

Расчетный метод для прогнозирования безопасности авиационных объектов при внештатных ситуациях

В.В. Тишков, В.В.Фирсанов

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 06-08-01005).
Рассматривается метод расчета динамического состояния объектов авиационной техники при внештатных ситуациях. Приведена модель, построенная на основании обобщения данных экспериментов с подобными образцами.

Внештатные ситуации, встречающиеся при эксплуатации авиационной техники делают проблему прогнозирования их возможных последствий чрезвычайно актуальной. С точки зрения механики твердого деформируемого тела такие задачи сводятся к задачам динамического контактного взаимодействия тела с преградой. Существующие модели, построенные на теории механического удара, достаточно сложны в математическом плане и не всегда позволяют учесть весь набор параметров, интересующих исследователей. Учитывая, что часто ударные процессы исследуются экспериментально и, следовательно, имеется набор данных, характеризующих протекающий процесс, возможно формирование расчетных моделей, построенных с помощью теории подобия и размерностей. Одна из возможных моделей предлагается в данной работе.

Будем рассматривать объект авиационной техники (ОАТ) как некоторую систему, находящуюся в поле внешних воздействий. Факторы воздействия обозначим через f_i. Обычно имеется несколько классов систем, отличающихся техническими характеристиками, поэтому введем параметр p_j, который будет обозначать присущие системе внутренние свойства, определяющие отличие конкретной системы от подобных ей систем. Любые внешние воздействия вызывают ответную реакцию системы, которая может определяться через набор соответствующих параметров r_k, именуемых откликами. Таким образом, в нашем распоряжении имеются наборы:

- внешних воздействующих факторов (ВВФ) f_i, $i=\overline{1,n}$;
- параметров p_j, $j=\overline{1,m}$;
- откликов r_k, $k=\overline{1,l}$,

которые математически могут быть увязаны некоторой функциональной зависимостью вида

$$\Phi(f_1,\dots f_n, p_1,\dots p_m, r_1,\dots r_l)=0, \tag{1}$$

где i - порядковый номер ВВФ, n - общее количество рассматриваемых ВВФ, j - порядковый номер внутреннего параметра системы, m - общее количество учитываемых параметров, k - порядковый номер отклика, l - общее количество учитываемых откликов системы.

На основании теории подобия и размерностей [1], размерности любых механических величин, выражаются в виде произведения размерностей основных величин (килограмм - M, метр - L, секунда - T). Поэтому если некоторая механическая величина имеет размерность $[A]$, то для нее справедливо записать:

$$[A] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}, \qquad (2)$$

где α, β, γ - суть некоторые числа, известные для любой величины.

Это позволяет представить выражение (1) не в виде зависимости от конкретных параметров, характеризующих вышеназванные наборы, а в виде зависимости от безразмерных симплексов и комплексов, количество которых меньше, чем элементов в (1), т.е.

$$\Pi(\pi_1, \ldots, \pi_s) = 0, \qquad (3)$$

где $\pi_u \left(u = \overline{1, s}\right)$ - безразмерная переменная, а s - количество безразмерных переменных.

Для записи зависимости типа (3) должны быть сформированы соответствующие π - переменные. Их формирование начинается с определения списка существенных переменных задачи, т.е. выбираются параметры f_i, p_j и r_k, при этом считается, что $n + m + l = \lambda$.

Так как мы рассматриваем задачу о контактном взаимодействии ОАТ с твердой преградой, то выберем следующие параметры:

- в качестве ВВФ – скорость V и угол δ встречи с преградой;
- в качестве параметров изделий – длину l, диаметр d и массу m ОАТ, а также частоту первого тона собственных колебаний конструкции ν и координату измерения отклика x;
- в качестве отклика системы – виброударное ускорение a.

Полагаем вышеперечисленные факторы существенными для рассматриваемой задачи и сведем их в таблицу № 1.

Так как в рассматриваемой задаче содержится восемь факторов, которые признаны существенными, то любая π-переменная может быть представлена как их произведение, в котором каждый сомножитель будет возводиться в определенную степень, т.е.

$$\pi = \prod_{i=1}^{i=n} f_i^{z_i} \times \prod_{j=n+1}^{j=n+m} p_j^{z_j} \times \prod_{k=n+m+1}^{k=n+m+l} r_k^{z_k},$$

где параметры f_i, i, n, p_j, j, m, r_k, k, l соответствуют формуле (1), z_q $q = \{i, j, k\}$ - степени, в которые будут возводиться существенные факторы задачи таким образом, чтобы их произведение стало безразмерным.

Таблица № 1

№ п/п	Переменная	Обозначение	Размерность в системе единиц СИ
1	2	3	4
Отклик системы			
1	Виброускорение	a	$M^0L^1T^{-2}$
Внешние параметры			
2	Скорость объекта V	$M^0L^1T^{-1}$	
3	Угол встречи объекта с преградой	δ	$M^0L^0T^0$
Параметры ОАТ			
4	Масса ОАТ	m	$M^1L^0T^0$
5	Длина ОАТ	l	$M^0L^1T^0$
6	Диаметр ОАТ	d	$M^0L^1T^0$
7	Частота 1-го тона собственных колебаний	ν	$M^0L^0T^{-1}$
8	Координата измерения отклика	x	$M^0L^1T^0$

Если в последнее выражение подставить конкретные значения n, m и l, то оно будет иметь вид

$$\pi = \prod_{i=1}^{i=2} f_i^{\,z_i} \times \prod_{j=3}^{j=7} p_j^{\,z_j} \times \prod_{k=8}^{k=8} r_k^{\,z_k} \; . \tag{4}$$

Заменив в (4) сомножители на их размерности в соответствии с (2) и приравняв полученное произведение безразмерной величине $M^0L^0T^0 \equiv 1$, получим

$$\prod_{q=1}^{q=8} \left[M^{\alpha_q} L^{\beta_q} T^{\gamma_q} \right]^{z_q} = M^0 L^0 T^0 . \tag{5}$$

где $\alpha_q, \beta_q, \gamma_q$ - суть известные числа.

Для соблюдения равенства (5) степени z_q $\left(q = \overline{1,8}\right)$ выбираются таким образом, чтобы одновременно выполнялись соотношения

$$\left.\begin{aligned} \sum_{q=1}^{8} \alpha_q z_q &= 0, \\ \sum_{q=1}^{8} \beta_q z_q &= 0, \\ \sum_{q=1}^{8} \gamma_q z_q &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

При этом очевидно, что количество уравнений в (6) равно количеству повторяющихся переменных, а количество неизвестных – количеству существенных факторов.

В рассматриваемом частном случае выражение (4), с учетом данных таблицы № 1 и объединения ВВФ в единый параметр ($V_\delta = V \cdot \sin\delta$, т.к. угол встречи объекта с преградой является величиной безразмерной), примет вид

$$V_\delta^{z_1} m^{z_2} l^{z_3} d^{z_4} v^{z_5} x^{z_6} a^{z_7} = 1.$$

Последняя формула на основании (5) преобразуется к выражению

$$\left[M^0 L^1 T^{-1}\right]^{z_1} \times \left[M^1 L^0 T^0\right]^{z_2} \times \left[M^0 L^1 T^0\right]^{z_3} \times \left[M^0 L^1 T^0\right]^{z_4} \times \left[M^0 L^0 T^{-1}\right]^{z_5} \times \left[M^0 L^1 T^0\right]^{z_6} \times$$
$$\times \left[M^0 L^1 T^{-2}\right]^{z_7} = M^0 L^0 T^0.$$

Для того, чтобы последняя комбинация была безразмерной, должны одновременно удовлетворяться уравнения типа (6), которые в рассматриваемом случае записываются как:

– для размерности M : $0 + z_2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$; (7)

– для размерности L : $z_1 + 0 + z_3 + z_4 + 0 + z_6 + z_7 = 0$; (8)

– для размерности T : $-z_1 + 0 + 0 + 0 - z_5 + 0 - 2z_7 = 0$; (9)

Матрица коэффициентов системы (7)÷(8) имеет вид:

	V_δ	m	l	d	v x	a	
M	0	1	0	0	0	0	0
L	1	0	1	1	0	1	1
T	−1 0	0	0	−1	0	−2	

и её ранг 3. Так как ранг матрицы меньше количества неизвестных, то система обладает решением, отличным от нулевого.

Из уравнения (7) следует, что $z_2 = 0$, поэтому достаточно рассмотреть систему, составленную из уравнений (8) и (9), т.е.

$$\left.\begin{aligned} z_1 + z_3 + z_4 + z_6 + z_7 = 0,\\ -z_1 - z_5 - 2z_7 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Последняя система будет иметь фундаментальную систему решений, которая состоит из четырех решений. Общее решением системы (11) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} z_3 = -z_1 - z_4 - z_6 - z_7,\\ z_5 = -z_1 - 2z_7. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Возьмем четыре линейно независимых четырехмерных вектора $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$.

Подставляя компоненты каждого из них в решение (12), в качестве значений свободных неизвестных получают фундаментальную систему решений исходной системы (7)÷(9), что с учётом (4) позволяет сформировать четыре π -переменных, а именно:

$$\pi_1 = V_\delta^0 m^0 l^{-1} d^0 v^{-2} x^0 a^1 = l^{-1} v^{-2} a^1 , \tag{13}$$

$$\pi_2 = V_\delta^0 m^0 l^{-1} d^0 v^0 x^1 a^0 = l^{-1} x^1 , \tag{14}$$

$$\pi_3 = V_\delta^0 m^0 l^{-1} d^1 v^0 x^0 a^0 = l^{-1} d^1 , \tag{15}$$

$$\pi_4 = V_\delta^1 m^0 l^{-1} d^0 v^{-1} x^0 a^0 = V_\delta^1 l^{-1} v^{-1} . \tag{16}$$

Это позволяет переписать соотношение (3) в виде

$$\prod \left(l^{-1} v^{-2} a^1 , (V \sin\delta)^1 l^{-1} v^{-1} , l^{-1} d^1 , l^{-1} x \right) = 0 .$$

Данное уравнение можно разрешить относительно любой π -переменной.

Экспериментальные исследования процессов динамического контактного взаимодействия позволяют замерять уровень виброускорений в различных зонах исследуемого объекта. Поэтому последнее уравнение целесообразно разрешить относительно той π -переменной, которая содержит указанный параметр. Тогда будем иметь

$$\frac{a}{l \cdot v^2} = \Psi\left(\frac{V \sin\delta}{l \cdot v} , \frac{d}{l} , \frac{x}{l} \right).$$

Заменив в последнем равенстве функцию Ψ согласующим коэффициентом K и проведя несложные алгебраические преобразования, получим следующее выражение:

$$\frac{a}{l \cdot v^2} = K \cdot \left(\frac{V \sin\delta}{l \cdot v} \right) \cdot \left(\frac{d}{l} \right) \cdot \left(\frac{x}{l} \right)$$

или

$$a = K \cdot (v V \sin\delta) \cdot \left(\frac{d}{l} \right) \cdot \left(\frac{x}{l} \right),$$

что сокращенно можно записать так

$$a = K \cdot \pi_I \cdot \pi_{II} , \tag{17}$$

где:

$$\pi_I = v \cdot V \sin\delta \cdot d/l ; \tag{18}$$

$$\pi_{II} = x/l . \tag{19}$$

Естественно предположить, что полученные π -переменные являются независимыми и поэтому выражение (17) можно представить следующим образом:

$$a = K \cdot a(\pi_I) \cdot a(\pi_{II}) . \tag{20}$$

Таким образом, получена зависимость, позволяющая прогнозировать (оценивать) уровень перегрузок в той или иной области ОАТ при заданных внешних воздействиях.

Сложность применения зависимости (20) заключается в определении значения согласующего коэффициента K и конкретной зависимости для сомножителей $a(\pi_I)$ и $a(\pi_{II})$.

Для определения требуемых параметров необходимо проводить серию экспериментальных исследований, имитирующих внешнее воздействия и позволяющих замерять отклик системы (в нашем случае – параметры динамического контактного взаимодействия и виброускорение).

Имитация динамического контактного взаимодействия является не тривиальной задачей и для ее решения требуется привлечение значительных материальных ресурсов и преодоление существенных технических трудностей.

Для иллюстрации примера определения числовых значений выражения (20) воспользуемся данными экспериментальных исследований сущностью которых было моделирования удара ОАТ, представляющего собой продолговатое тело (тело с двумя вырожденными размерами) о твердую железобетонную преграду. В ходе эксперимента испытаниям подвергались четыре объекта, причем в процессе исследований происходило одновременное варьирование параметров, характеризующих как внешнее воздействие, так и конструктивные особенности ОАТ. Экспериментальные данные представлены в таблице 2.

Таблица № 2

№	V	δ	l	m	d	ν
б / р *м / с*	*градус*	*м*	*кг*	*м*	*Гц*	
1	45	22	3,51	284	0,275	81
2	53	45	3,51	284	0,275	81
3	45	58	3,073	580	0,35	40
4	74	60	4,25	284	0,275	81

По данным таблицы № 2 в соответствии с выражениями (18) и (19) можно сформировать соответствующие комплекс и симплекс, входящие в выражение (17). Результаты вычислений сведены в таблицу № 3. При этом точки размещения датчиков виброускорений были выбраны таким образом, чтобы соответствующий симплекс π_{II} принимал бы те значения, которые представлены в таблице № 3.

Таблица № 3

№	π_I	π_{II}
1	107 0,14	
2	238	0,6
3	180	0,95
4	336	

В результате серии экспериментов со среднегабаритными ОАТ были замерены продольные $a_{пр}$ и поперечные $a_{поп}$ составляющие виброускорений, что позволяет сформировать массивы исходных данных, которые представлены в таблицах № 4 и № 5 соответственно. При этом отметим, что данные, приведенные в таблицах, поделены на постоянную величину g - ускорение свободного падения тела.

По данным таблиц видно, что каждому значению π-переменной (аргументу, фактору) соответствует три-четыре значения отклика. Для формирования биективного соответствия между факторами и откликами проведем осреднение последних, применяя логарифмы и антилогарифмы, что позволяет получить средние значения поперечных и продольных составляющих виброускорений для комплексов π_I и π_{II}. Эти данные сведены в таблицы № 6 и № 7 соответственно.

Таблица № 4

π_{II} \ π_I	107	238	180	336
0,14	215 840	1130	2200	
0,6	230	515	493	1400
0,95	175	436	645	1100

Таблица № 5

π_{II} \ π_I	107	238	180	336
0,14	367	1537 1238	1989	
0,6	331	827	795	1190
0,95	291	507	781	1200

Таблица № 6

π_I	$a_{np,cp}(\pi_I)$	$a_{non,cp}(\pi_I)$
107	205	324
238	573	864
180	711	921
336	1502	1416

0,14

Таблица № 7

π_{II}	$a_{np,cp}(\pi_{II})$	$a_{non,cp}(\pi_{II})$
818	1085	
0,6	535	705
0,95	482	604

Рассматривая переменную π_I (см. формулу (18)) можно отметить, что она будет равна нулю при равенстве нулю произведения $V \sin \delta$, т.к. частота первого тона собственных колебаний ν и приведенный диаметр d/l для современных ОАТ физически не могут принимать достаточно малые значения. Произведение $V \sin \delta$ равно нулю при равенстве нулю скорости динамического контактного взаимодействия или угла встречи с преградой. Но величина $\delta = 0^\circ$ соответствует поперечному удару и нами здесь не рассматривается. В тоже время при нулевой скорости и виброударное ускорение, и его составляющие также равны нулю. Поэтому данные таблицы № 7 можно дополнить точкой 0, 0, т.е. $\pi_I = 0$, $a_{np,cp}(\pi_I) = 0$, $a_{non,cp}(\pi_{II}) = 0$.

Модель регрессионного анализа предполагает, что полученные в результате серии экспериментов значения откликов $\vec{a}_{cp}$ можно мысленно разделить на две части: одна из них закономерно зависит от $\vec{\pi}$, т.е. определяется функциональной зависимостью $\vec{a}(\vec{\pi})$, другая часть – случайная по отношению к $\vec{\pi}$ и эту часть можно обозначить через $\vec{\varepsilon}$, причем эти величины являются векторами. В принятых нами обозначениях модель может быть записана следующим образом

$$\vec{a}_{cp} = \vec{a}_{cp}(\vec{\pi}) + \vec{\varepsilon}\,. \qquad (21)$$

Случайная величина $\vec{\varepsilon}$ выражения (21) учитывает в себе влияние на отклик факторов, не учтенных при выборе существенных факторов задачи (см. табл. № 1), несовершенство методов измерения виброускорений, внутренне присущую изменчивость отклику и т.п.

Применяя выражение (21) к имеющимся матрицам осредненных исходных данных (см. табл. № 8 и № 9) можно записать

$$a_{cp,i} = a_{cp}(\pi_i) + \varepsilon_i\,, \quad i = \overline{1,n}\,. \qquad (22)$$

При этом необходимо отметить, что выражение (22) имеет один и тот же вид как для продольной, так и для поперечной осредненных составляющих виброускорения a_{cp}, а переменная π_i равна $\pi_{I,i}$ или $\pi_{II,i}$ в зависимости от контекста.

Разделение отклика на закономерную и случайную части, на самом деле, условно, т.к. выделить отдельно любую из них невозможно, поэтому имеем дело только с их суммой. В классическом регрессионном анализе предполагается, что:

– все опыты были проведены независимо друг от друга и поэтому случайности, вызывающие отклонение отклика от закономерности в одном опыте не оказывают влияние на аналогичные отклонения в другом эксперименте;
– статистическая природа случайных составляющих откликов остается неизменной во всей серии.

В нашем случае независимость опытов обеспечивалась временными интервалами их проведения, изменением объектов испытаний и ВВФ (в каждом конкретном эксперименте подготовительные работы проводились по полному циклу).

Предполагаем также, что ошибки эксперимента, как случайные величины, распределены одинаково. Это означает, что измерение отклика имеют равную точность при всех значениях факторов, а внутренне присущая изменчивость отклика не испытывает влияние со стороны факторов.

Как правило, при выборе функции отклика $\vec{a}_{cp}(\vec{\pi})$ сама функция принадлежит параметрическому семейству функций $\vec{a}_{cp}(\vec{\pi},\vec{\theta})$, где $\vec{\theta}$ - параметр семейства, являющийся, в общем случае, вектором. Указанная функция может быть представлена как сумма произведений модельных функций $\phi_j(\pi)$ и элементов вектора θ_j, т.е.

$$a_{cp,i}(\pi_i) \approx \sum_{j=1}^{j=m} \theta_j \phi_j(\pi_i), \; i = \overline{1,n},$$

где i - порядковый номер пары «отклик-фактор», n - количество таких пар, имеющихся в нашем распоряжении, j - порядковый номер модельной функции, m - количество функций, участвующих в формировании модели.

Предположим, что модель является квадратичным полиномом, тогда последнее соотношение можно записать так

$$a_{cp,i}(\pi_i) \approx \theta_1 \pi_i^2 + \theta_2 \pi_i + \theta_3, \; i = \overline{1,n}, \tag{23}$$

где $\phi_1(\pi_i) = \pi_i^2$, $\phi_2(\pi_i) = \pi_i$, $\phi_3(\pi_i) = 1$ - заданные модельные функции, $\vec{\theta}$ - трехмерный вектор параметров модели $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Модель (23) будем использовать для обоих сомножителей, входящих в равенство (20).

С помощью модели (23) попытаемся восстановить функциональную зависимость между факторами - π-переменными и откликами – продольными и поперечными осредненными составляющими виброускорения a_{cp}. Для этого нам необходимо указать способ расчета параметров вектора $\vec{\theta}$, а точнее его оценки $[\widetilde{\theta}]$, по исходным данным $(a_{cp,i}, \pi_i)$ $i = \overline{1,n}$. Определенный вектор $[\widetilde{\theta}]$ позволит нам по заданному значению фактора π_k, $(k \notin \{1, \ldots, n\})$ предсказать отклик a_{cp}, а точнее его закономерную часть.

При выборе методов определения параметров регрессионной модели можно руководствоваться различными подходами. Один из наиболее распространенных подходов состоит в том, что при «правильном» выборе параметров модели компоненты вектора $[\widetilde{\theta}]$ должны быть подобраны таким образом, чтобы вектор невязок стремился к нулю на совокупности известных точек, т.е.

$$a_{cp,i}(\pi_i) - (\theta_1 \pi_i^2 + \theta_2 \pi_i + \theta_3) \to 0, \; i = \overline{1,n}.$$

В качестве меры стремления к нулю невязок можно принимать различные соотношения [46] (например, максимум модулей, сумму модулей и т.д.), но на практике наиболее распространенной мерой является сумма квадратов

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[a_{cp,i} - \widetilde{\theta}_1 \pi_i^2 - \widetilde{\theta}_2 \pi_i - \widetilde{\theta}_3\right]^2 \to \min_{\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, \widetilde{\theta}_3}. \tag{24}$$

Обозначим выражение (24) как функцию параметров модели $\widetilde{\theta}_j$ $(j = \overline{1,3})$, т.е.

$$F(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, \widetilde{\theta}_3) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[a_{cp,i} - \widetilde{\theta}_1 \pi_i^2 - \widetilde{\theta}_2 \pi_i - \widetilde{\theta}_3\right]^2. \tag{25}$$

Функция (25) является функцией нескольких переменных. Использую необходимые условия экстремума функции нескольких переменных [2], получаем нормальную систему для определения оценок коэффициентов модели $\tilde{\theta}_j$ $\left(j=\overline{1,3} \right)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F\left(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\tilde{\theta}_3\right)}{\partial\tilde{\theta}_1}=0, \\ \dfrac{\partial F\left(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\tilde{\theta}_3\right)}{\partial\tilde{\theta}_2}=0, \\ \dfrac{\partial F\left(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\tilde{\theta}_3\right)}{\partial\tilde{\theta}_3}=0. \end{array}\right\}$$

(26)

Получим развернутую запись системы (26), для чего продифференцируем выражение (25) как сложную функцию. В результате получим следующую систему:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\theta}_1\sum\limits_{i=1}^{i=n}\pi_i^4+\tilde{\theta}_2\sum\limits_{i=1}^{i=n}\pi_i^3+\tilde{\theta}_3\sum\limits_{i=1}^{i=n}\pi_i^2=\sum\limits_{i=1}^{i=n}a_{cp,i}\pi_i^2, \\ \tilde{\theta}_1\sum\limits_{i=1}^{i=n}\pi_i^3+\tilde{\theta}_2\sum\limits_{i=1}^{i=n}\pi_i^2+\tilde{\theta}_3\sum\limits_{i=1}^{i=n}\pi_i=\sum\limits_{i=1}^{i=n}a_{cp,i}\pi_i, \\ \tilde{\theta}_1\sum\limits_{i=1}^{i=n}\pi_i^2+\tilde{\theta}_2\sum\limits_{i=1}^{i=n}\pi_i+\tilde{\theta}_3 n=\sum\limits_{i=1}^{i=n}a_{cp,i}. \end{array}\right\} \qquad (27)$$

Решение системы (27) дает окончательные формулы для определения оценок параметров модели.

Например, для зависимости $a_{np,cp}(\pi_I)$ при определения коэффициентов системы уравнений (27) можно составить таблицу № 8.

Таблица № 8

i	π_I	π_I^2	π_I^3	π_I^4	$a_{np,cp}$	$a_{np,cp}\cdot\pi_I$	$a_{np,cp}\cdot\pi_I^2$
1	0	0	0	0	0	0	0
2	107	11449	1225043	131079601	205	21935	2347045
3	238	56644	13481272	3208542736	573	136374	32457012
4	180	32400	5832000	1049760000	711	127980	23036400
5	336	112896	37933056	12745506816	1502	504672	169569792
$\sum$	861	213389	58471371	17134889153	2991	790961	227410249

Тогда сама система будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} 171348891530\tilde{\theta}_1 + 584713710\tilde{\theta}_2 + 2133890\tilde{\theta}_3 &= 227410249, \\ 584713710\tilde{\theta}_1 + 2133890\tilde{\theta}_2 + 8610\tilde{\theta}_3 &= 790961, \\ 2133890\tilde{\theta}_1 + 8610\tilde{\theta}_2 + 50\tilde{\theta}_3 &= 2991. \end{aligned}\right\}$$

(28)

Решение системы (28) при удержании двух знаков после десятичной запятой даёт следующие значения оценок параметров модели:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\theta}_1 &= 0{,}01, \\ \tilde{\theta}_2 &= 0{,}94, \\ \tilde{\theta}_3 &= 14{,}73. \end{aligned}\right\}$$

Последний результат позволяет записать модель $a_{np,cp}(\pi_I)$ в следующем виде:

$$a_{np,cp}(\pi_I) = 0{,}01\pi_I^2 + 0{,}94\pi_I + 14{,}73. \qquad (29)$$

Из соотношения (29) видно, что при $\pi_I = 0$ значение $a_{np,cp}$ составляет 14,73, что обуславливается сущностью используемого метода [3]. Для уменьшения данной погрешности изменим координату принудительно введенной точки. Будем полагать, например, что при $\pi_I = 0$ значение $a_{np,cp}$ равно –14,73, поэтому данные таблицы № 8 нужно дополнять не точкой $(0, 0)$, а точкой $(0, -14{,}73)$, что внесет соответствующие изменения в таблицу № 10 и система уравнений (27) примет вид

$$\left.\begin{aligned} 171348891530\tilde{\theta}_1 + 584713710\tilde{\theta}_2 + 2133890\tilde{\theta}_3 &= 227410249, \\ 584713710\tilde{\theta}_1 + 2133890\tilde{\theta}_2 + 8610\tilde{\theta}_3 &= 790961, \\ 2133890\tilde{\theta}_1 + 8610\tilde{\theta}_2 + 50\tilde{\theta}_3 &= 2976{,}27. \end{aligned}\right\}$$

(30)

Решение системы (30) при удержании двух знаков после запятой дает следующие результаты:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\theta}_1 &= 0{,}01, \\ \tilde{\theta}_2 &= 1{,}07, \\ \tilde{\theta}_3 &= 0{,}95. \end{aligned}\right\}$$

Они также не является «идеальным», но при этом оно в большей степени соответствует «здравому смыслу». Дальнейшие действия могут заключаться либо в дополнительном уточнении значений принудительно вводимой точки и тогда процесс отыскания параметров формируемой модели будет носить итерационный характер, либо в принятии найденных значений допустимыми. В результате расчетов принимается модель согласно которой

$$a_{np,cp}(\pi_I) = 0{,}01\pi_I^2 + 1{,}077\pi_I + 0{,}067, \tag{31}$$

и значения параметров в формуле (31) будем считать приемлемыми.

Выполняя аналогичные действия для других исходных данных, мы получаем оставшиеся зависимости

$$\left.\begin{aligned} a_{non,cp}(\pi_I) &= 0{,}001\pi_I^2 + 3{,}857\pi_I - 0{,}089, \\ a_{np,cp}(\pi_{II}) &= 572{,}579\pi_{II}^2 - 1038{,}926\pi_{II} + 952{,}227, \\ a_{non,cp}(\pi_{II}) &= 663{,}599\pi_{II}^2 - 1317{,}151\pi_{II} + 1256{,}395. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Отметим лишь, что при получении зависимостей продольной и поперечной составляющих виброускорений от переменной π_{II} итерационные процедуры не применялись, т.к. ничего определенного о значении указанных составляющих для $\pi_{II} = 0$ сказать нельзя.

Следующим шагом в построении модели является вычисление согласующего коэффициента K. Выразим K из формулы (20)

$$K = \frac{a}{a(\pi_I) \cdot a(\pi_{II})}.$$

Вначале получим значение коэффициента K для продольной составляющей виброускорения a_{np}. Для этого воспользуемся формулой (31) и данными таблицы № 4. Значения коэффициента K для возможных комбинаций π -переменных π_I и π_{II} представлены в таблице № 9.

Таблица № 9

π_{II} \ π_I	107	238	180	336
0,14	0,001143781	0,001247999	0,002667206	0,001803936
0,6	0,001870819	0,001169882	0,0017792	0,001755198
0,95	0,001579969	0,00109933	0,002583713	0,001530726

Как видно из последней таблицы коэффициент K имеет некоторый разброс. Максимальное значение коэффициента K составляет 0,002667206, минимальное – 0,00109933, среднее – 0,00168598. Полученное среднее значение является точечной величиной. Так как данный коэффициент имеет некоторый разброс, то при построении модели для оценки значения виброускрорений, возникающих в конструкции ОАТ, требуется получить интервальную оценку указанного коэффициента. Для ее нахождения воспользуемся распределением Стьюдента [4]. Тот факт, что распределение Стьюдента при малой выборке дает не вполне определенные результаты (широкий доверительный интервал), вовсе не свидетельствует о слабости метода, а объясняется недостаточностью информации об исследуемых процессах. Но т.к. по формируемой модели предполагается определять предельные значения виброускорения, то указанное обстоятельство не является существенным ограничением на применение аппарата метода Стьюдента при ее построении.

В качестве доверительной вероятности примем значение 0,95, тогда доверительный интервал для коэффициента K будет определяться значениями 0,001356427 и 0,002015533. Это означает, что в качестве значения коэффициента K можно принять верхнюю границу интервала, т.е.

$$K = 0{,}002,$$

и поэтому окончательная формула для продольной составляющей виброускорений будет иметь вид

$$a_{np} = 0{,}002 a_{np,cp}(\pi_I) a_{np,cp}(\pi_{II}). \tag{33}$$

Проделаем аналогичные действия для поперечной составляющей виброускорения, в результате получим

$$a_{non} = 0{,}0015 a_{non,cp}(\pi_I) a_{non,cp}(\pi_{II}). \tag{34}$$

Таким образом, в результате описываемых действий получена следующая система уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&a = \sqrt{a_{np}^2 + a_{non}^2},\\
&a_{np} = 0{,}002 a_{np,cp}(\pi_I) a_{np,cp}(\pi_{II}),\\
&a_{non} = 0{,}0015 a_{non,cp}(\pi_I) a_{non,cp}(\pi_{II}),\\
&a_{np,cp}(\pi_I) = 0{,}01\pi_I^2 + 1{,}077\pi_I + 0{,}067,\\
&a_{np,cp}(\pi_{II}) = 572{,}579\pi_{II}^2 - 1038{,}926\pi_{II} + 952{,}227,\\
&a_{non,cp}(\pi_I) = 0{,}001\pi_I^2 + 3{,}857\pi_I - 0{,}089,\\
&a_{non,cp}(\pi_{II}) = 663{,}599\pi_{II}^2 - 1317{,}151\pi_{II} + 1256{,}395.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

В соотношениях (35) через a_{np} и a_{non} обозначены продольная и поперечная составляющие виброударного ускорения, а индексом $"cp"$ отмечены средние прогнозируемые значения этих же ускорений.

Система (35) представляет собой искомую регрессионную модель, с помощью которой можно на этапах проектирования прогнозировать значения виброускорений в отсеках ОАТ при внештатных ситуациях.

Так для значений $\pi_I = 180$, $\pi_{II} = 0{,}6$ система (35) даёт значение виброускорения равное $9500\, м/с^2$, а для $\pi_I = 336$, $\pi_{II} = 0{,}14$ - $33000\, м/с^2$, что согласуется с данными других расчетных исследований. При этом отметим, что получаемые результаты являются верхней границей, т.е. в реальных ситуациях в средних отсеках ОАТ возникающие ускорения не превысят расчетных с уровнем доверительной вероятности 0,95.

Список литературы

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – 10-е изд., доп. – М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1987. – 432с.
2. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу: Учеб. для ун-тов и пед. вузов/ Под ред. В.А. Садовничего – М. Высш. шк., 1999. – 695с.
3. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа (Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения): Учеб. пособие/ Под ред. Б.П. Демидовича – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – С.96-101.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – изд. 7-е стер. – М.: Высш. шк., 1999. – 479с.

Сведения об авторах

Тишков Виктор Васильевич, доцент кафедры авиационных робототехнических систем Московского авиационного институт (государственного технического университета), к.т.н.

Телефон: 158-46-02

Фирсанов Валерий Васильевич, заведующий кафедрой машиноведения и деталей машин Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н.

Телефон: 158-45-55