На правах рукописи

Немыченков Григорий Игоревич

МОДЕЛИРОВАНИЕ И СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ДИСКРЕТНЫХ НЕТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Специальность 05.13.18

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Специальность 05.13.01

Системный анализ, управление и обработка информации

(авиационная и ракетно-космическая техника)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва, 2019 год

Работа выполнена на кафедре «Математическая кибернетика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

Научный руководитель:	Доктор физико-математических наук, доцент **Бортаковский Александр Сергеевич**
Официальные оппоненты:	**Канатников Анатолий Николаевич** доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Математическое моделирование», ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» **Царьков Кирилл Александрович** кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ФГБУН «Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН»
Ведущая организация:	ФГБУН Институт программных систем имени А.К. Айламазяна Российской академии наук (ИПС им. А.К. Айламазяна РАН)

Защита состоится «20» декабря 2019 года в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке: https://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=108198.

Автореферат разослан «____» ______________ 2019 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет МАИ.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.04, кандидат физико-математических наук, доцент ____________________ Рассказова Варвара Андреевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена разработке методов синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений пучками траекторий переключаемых системам, а также их применению в актуальных приложениях в области авиационной и ракетно-космической техники.

Актуальность работы. Важными направлениями современной теории управления являются анализ и синтез систем управления в условиях параметрической неопределенности. Вопросы моделирования и оптимизации возникают в ходе проектирования систем управления летательными аппаратами при неполной информации о положении объекта управления и его конструктивных параметрах. В этом случае исследуются задачи управления пучками траекторий динамических систем. Такие исследования представлены в работах Борисова А.В., Бортаковского А.С., Казакова И.Е., Кейна В.М., Кибзуна А.И., Куржанского А.Б., Малышева В.В., Меликяна А.А., Миллера Б.М., Овсянникова Д.А., Пакшина П.В., Пантелеева А.В., Параева Ю.И., Пугачева В.С., Рыбакова К.А., Субботина А.И., Субботиной Н.Н., Филипповой Т.Ф., Хрусталева М.М., Ченцова А.Г., Черноусько Ф.Л., Chu J., Chen S., Dietz S.G., Duan J.-A., Fleming W.H., Gang C., Lu X., Li H.-X., Ning C., Rishel R., Roux F.S., Scherer C.W., Schmitendorf W.E., Sun D., Wonham W.M., Wu D., Wu J., и других ученых.

Непрерывное изменение состояния детерминированных переключаемых систем (ПС) описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные дискретные изменения состояния (переключения) – рекуррентными уравнениями. Дискретные изменения процесса управления моделируют работу автомата с памятью, который осуществляет переключения режимов непрерывного движения объекта управления. Моменты переключений, а также их количество заранее не заданы. Качество управления одной траекторией характеризуется функционалом, в котором учитываются затраты на каждое переключение. При этом не исключаются многократные переключения в фиксированный момент времени. ПС относятся к гибридным системам. В свою очередь ПС обобщают дискретные системы автоматного типа (САТ), непрерывно-дискретные и логико-динамические системы. Исследования гибридных и ПС посвящены работы Аграчева А.А., Болтянского В.Г., Бортаковского А.С., Дмитрука А.В., Дыхты В.А., Завалищина С.Т., Миллера Б.М, Сесекина А.Н., Axelsson H., Barbot J.P., Bett C.J., Boccadoro M., Branicky M.S., Egerstedt M., Hedlund S., Lemmon M.D.,Li Z., Liberzon D., Lu J., Park Ju.W., Rantzer A., Silva G.N., Soh Y., Sussmann H.J., Valigi P., Vinter R.V., Wardi Y., Wen C, Zheng G., и других ученых.

В диссертационной работе исследуются проблемы моделирования и синтеза субоптимальных в среднем детерминированных ПС в условиях параметрической неопределенности. Главной проблемой моделирования детерминированных ПС является адекватное описание множеств возможных состояний. Здесь применяются способы, разработанные для моделирования пучков траекторий непрерывных и дискретных систем. Множества состояний линейных систем описываются, как правило, опорными функциями, неравенствами, эллипсоидами, вершинами многогранников и т.п. Для нелинейных систем используются – плотность, аппроксимации многогранниками или эллипсоидами, конечный набор точек границы и т.п.

Для решения задачи синтеза применяется принцип разделения, на основе которого для управления пучком траекторий применяется оптимальное управление одной, специальным образом выбранной траекторией пучка. В этом случае решение задачи оптимального управления пучком можно разделить на два этапа: синтез оптимального управления и нахождение начального состояния для выбранной траектории. Если принцип разделения выполняется, то получаемое таким способом управление пучком является оптимальным в среднем. В противном случае это управление – субоптимальное. Однако оно может оказаться удовлетворительным для практики.

Важной особенностью рассматриваемых задач управления пучком траекторий ПС является наличие дискретных неточных измерений. Предполагается, что в результате каждого измерения определяется множество возможных в этот момент состояний системы. Накопление поступающей информации осуществляется естественным образом – путем пересечения всех известных ("измеренных") к настоящему времени множеств, а управление пучком траекторий, исходящих из найденного пересечения, выбирается оптимальным. Наличие неточных измерений и накопление информации о возможных состояниях системы существенно усложняют процесс моделирования пучков траекторий ПС. В работе сочетается применение двух подходов – принципа разделения и учета дискретных неточных измерений.

Таким образом, проблемы моделирования и синтеза субоптимальных в среднем ПС при наличии дискретных неточных измерений представляют теоретический интерес, поскольку рассматриваемые задачи отличаются от классических задач управления пучками траекторий детерминированных систем, а методы их решения не разработаны. Необходимость исследований определяется современными задачами проектирования сложных авиационных и ракетно-космических систем, а полученные результаты имеют практическую направленность и могут использоваться при создании систем автоматического управления.

Целью работы является разработка методов моделирования и алгоритмов синтеза субоптимальных в среднем детерминированных ПС и стационарных САТ в условиях параметрической неопределенности и при наличии дискретных неточных измерений. В диссертации были решены следующие задачи:

1) разработать математические модели функционирования ПС и стационарных САТ в условиях параметрической неопределенности при разных способах описания множеств возможных состояний с учетом дискретных неточных измерений;
2) разработать численно-аналитические методы синтеза субоптимального в среднем управления пучками траекторий ПС и стационарных САТ на основе принципа разделения при наличии дискретных неточных измерений;
3) разработать комплекс программ, реализующий методы синтеза субоптимального управления пучком траекторий стационарных САТ при наличии дискретных неточных измерений;
4) разработать комплекс программ, реализующий методы синтеза оптимальной и субоптимальной в среднем стабилизации спутника при наличии дискретных неточных измерений.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались математическое моделирование, теория управления, теория дифференциальных уравнений, системный анализ, теория оптимизации, численные методы. Для разработки программного комплекса и проведения вычислительного эксперимента использовались современные компьютерные технологии.

Научная новизна. В диссертационной работе получены новые результаты: разработаны модели функционирования ПС и стационарных САТ в условиях параметрической неопределенности при разных способах описания множеств возможных состояний с учетом дискретных неточных измерений; доказаны достаточные условия субоптимальности в среднем управления пучком траекторий ПС и стационарных САТ при наличии дискретных неточных измерений; разработаны численно-аналитические методы субоптимального и оптимального в среднем управлений детерминированными ПС в условиях параметрической неопределенности на основе принципа разделения при наличии дискретных неточных измерений; разработаны алгоритм и программное обеспечение для решения задачи синтеза оптимального управления детерминированными стационарными САТ в условиях параметрической неопределенности; решена задача субоптимальной стабилизации колебаний спутника в классе ПС в условиях параметрической неопределенности при наличии дискретных неточных измерений.

Практическая значимость. В диссертационной работе разработаны алгоритмы решения задач анализа и синтеза управления пучками ПС, которые применимы в области авиационной и ракетно-космической техники, в робототехнике и экономике. Созданы комплексы программ для решения прикладных задач поиска оптимального управления в условиях параметрической неопределенности, с помощью которых были решены прикладные задачи оптимизации технических систем и управления авиационно-космическими системами. Получены свидетельства о государственной регистрации (№ 2017618981 от 29 июня 2017 г., № 2018616558 от 29 марта 2018 г.).

Достоверность результатов. Разработанные алгоритмы имеют строгое математическое обоснование. Приближенные решения академических примеров, полученные предложенными алгоритмами, совпадает с аналитическими решениями. Приближенное решение прикладной задачи полностью отвечает физическим представлениям.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на семи международных научных конференциях [6-12]. На XLIV Международной молодежной научной конференции Гагаринские чтения представленная работа заняла I место. Работа выполнялась и докладывалась на кафедре "Математическая кибернетика" Московского авиационного института (национального исследовательского университета). Представленные в диссертационной работе результаты использованы в научно-исследовательских работах, поддержанных грантами РФФИ №15-08-01902-а «Методы оценивания состояния и синтеза ПС управления подвижными объектами в конфликтной среде при ограниченных ресурсах», №18-08-00128-а «Методы синтеза переключаемых и дискретных систем управления подвижными объектами при ограниченных ресурсах».

Личный вклад. Все излагаемые в диссертации результаты получены лично автором. Научному руководителю принадлежат постановки исследуемых задач и уравнения для синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в пяти статьях [1-5] в журналах, входящих в перечень ВАК РФ, в том числе три статьи [1-3] опубликованы в журналах, цитируемых международными базами Web of Science и SCOPUS, а так же в трудах научных конференций [6-12]. Получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ [13, 14]. Всего по теме диссертации опубликовано 14 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов основной части, заключения, списка использованных источников (149 наименований). Работа изложена на 119 страницах и содержит 15 иллюстраций и 4 таблицы.

Диссертационная работа соответствует паспорту специальности 05.13.18 (области исследования 1, 2, 4) и паспорту специальности 05.13.01 (области исследования 1, 2, 4).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обзор известных методов и задач управления гибридными системами, а также работ по моделированию и управлению детерминированными динамическими системами в условиях параметрической неопределенности, указана область проведенных исследований, обоснованы их научная новизна и актуальность, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, представлены положения, выносимые на защиту, описана структура диссертации.

В первом разделе разработаны численно-аналитические методы синтеза субоптимального управления пучками траекторий ПС при наличии дискретных неточных измерений.

Пусть на заданном промежутке времени $T=[t_0,t_F]$ динамическая система совершает N переключений (скачков) в моменты времени t_i, $i=1,\ldots,N$, образующие неубывающую последовательность $\boldsymbol{\mathcal{T}}=\{t_1,\ldots,t_N\}$:

$$t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_N \le t_{N+1} \doteq t_F. \qquad (1.1)$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t)=f\big(t,x(t),u(t)\big), \qquad t\in T_i, \qquad i\in\boldsymbol{\mathcal{N}}, \qquad (1.2)$$

а в моменты переключений – дискретно в соответствии с рекуррентным уравнением

$$x_i=g(t_i,x_{i-},v_i), \quad i=1,\ldots,N. \qquad (1.3)$$

В соотношениях (1.2) обозначены: $\boldsymbol{\mathcal{N}}\doteq\{i=0,1,\ldots,N|t_i<t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i\doteq[t_i,t_{i+1})$ непрерывного движения системы; $x(t)\in X\doteq\mathbf{R}^n$, $u(t)\in U\subset\mathbf{R}^q$, U – заданное множество допустимых значений управления. В уравнении (1.3): $x_i\doteq x(t_i)$ – состояние системы сразу после i - го переключения, x_{i-} – состояние системы непосредственно перед i - м переключением:

$$x_{i-}\doteq\begin{cases} x(t_i-0), & t_{i-1}<t_i, \\ x_{i-1}, & t_{i-1}=t_i; \end{cases} \qquad (1.4)$$

v_i – управление переключением системы в момент $t_i\in\boldsymbol{\mathcal{T}}$, $v_i\in V\subset\mathbf{R}^{\mathrm{q}}$, V – заданное множество допустимых управлений переключениями. Предполагаем, что в уравнении (1.3) исключаются так называемые фиктивные переключения, когда $x_i=x_{i-}$. Начальное состояние системы $x(t_0)=x_0$ и момент t_F окончания процесса управления заданы, а конечное состояние свободно.

Обозначим через $\boldsymbol{\mathcal{W}}(\mathrm{t}_0,x_0)$ множество допустимых программных управлений $w=(u(\cdot),\{v\})$, каждое из которых порождает допустимую траекторию $x(\cdot)$ для начального состояния x_0. Количество $N = |\boldsymbol{\mathcal{T}}|$ переключений и моменты $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \{t_1, \dots, t_N\}$ переключений не фиксированы и у разных допустимых управлений могут не совпадать.

На множестве $\boldsymbol{\mathcal{W}}(t_0, x_0)$ допустимых управлений задан функционал качества

$$I(t_0, x_0, w) = \int\limits_{t_0}^{t_F} f^0\big(t, x(t), u(t)\big)dt + \sum_{i=1}^{N} g^+(t_i, x_{i-}, v_i) + F\big(x(t_F)\big), \tag{1.5}$$

где функции $f^0: T \times X \times U \to \mathbf{R}$ и $F: X \to \mathbf{R}$ непрерывны и ограничены снизу, а функция $g^+: T \times X \times V \to \mathbf{R}_+$ неотрицательная, $g^+(\cdot) \geq 0$.

В *задаче оптимального управления одной траекторией* требуется найти минимальное значение функционала (1.5) и оптимальное управление $w^* = (u^*(\cdot), \{v^*\}) \in \boldsymbol{\mathcal{W}}(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, w) = \min_{w \in \boldsymbol{\mathcal{W}}(t_0, x_0)} I(t_0, x_0, w). \tag{1.6}$$

В *задаче управления пучком траекторий* предполагается, что начальное состояние $x_0 \in X$ точно не известно, а известно множество σ_0 возможных начальных состояний ($\sigma_0 \subset X$). Обозначим через $\boldsymbol{\mathcal{W}}(t_0, \sigma_0)$ множество допустимых программных управлений $w = (u(\cdot), \{v\})$, каждое из которых порождает допустимую траекторию $x(\cdot)$ для любого начального состояния $x(t_0) \in \sigma_0$. Объединение этих траекторий образует пучок $t \to \sigma(t)$, исходящий из множества возможных начальных состояний $\sigma(t_0) = \sigma_0$. Качество программного управления пучком траекторий, исходящих из множества σ_0, оценивается средним значением функционала (1.5):

$$I^{\text{c}}(t_0, \sigma_0, w) = \frac{1}{\operatorname{mes} \sigma_0} \int\limits_{\sigma_0} I(t_0, x_0, w) dx_0, \tag{1.7}$$

где $\operatorname{mes} \sigma_0$ – мера множества σ_0. Требуется найти оптимальное в среднем управление w^{c}, минимизирующее функционал (1.7):

$$I^{\text{c}}(t_0, \sigma_0, w^{\text{c}}) = \min_{w \in \boldsymbol{\mathcal{W}}(t_0, \sigma_0),} I^{\text{c}}(t_0, \sigma_0, w).$$

Обозначим через $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t_0)$ множество оптимальных программных управлений $\widehat{w} = (\hat{u}(\cdot), \{\hat{v}\})$ отдельными траекториями, т.е. каждое программное управление $\widehat{w} \in \widehat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t_0)$ хотя бы для одного начального состояния $\hat{x}_0 \in X$ порождает в силу уравнений движения (1.2),(1.3) оптимальный процесс, минимизирующий функционал (1.5). В *задаче субоптимального в среднем управления пучком траекторий* любое управление, оптимальное для одной траектории, считаем допустимым для всех траекторий пучка, т.е. $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t_0) \subset \boldsymbol{\mathcal{W}}(t_0, \sigma_0)$. Требуется найти субоптимальное в среднем управление $\widehat{w}^{\text{c}}$, минимизирующее функционал (1.7) на множестве $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t_0)$:

$$I^{\text{c}}(t_0, \sigma_0, \widehat{w}^{\text{c}}) = \min_{w \in \widehat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t_0),} I^{\text{c}}(t_0, \sigma_0, w). \tag{1.8}$$

Если для каждого начального состояния $\hat{x}_0$ известно оптимальное программное управление $\widehat{w}(t_0, \hat{x}_0) \in \widehat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t_0)$, то минимизацию по управлению в (1.8) можно заменить минимизацией по состоянию $\hat{x}_0$:

$$I^{\text{c}}(t_0, \sigma_0, \widehat{w}^{\text{c}}) = \min_{\hat{x}_0 \in X,} I^{\text{c}}(t_0, \sigma_0, \widehat{w}(t_0, \hat{x}_0)). \tag{1.9}$$

Наилучшее состояние $\hat{x}_0^{\text{с}}$, для которого достигается минимум в (1.9), будем называть *субоптимальной в среднем оценкой* множества возможных начальных состояний системы.

М а т е м а т и ч е с к а я м о д е л ь и з м е р е н и й. Пусть в некоторые моменты времени $t^1, \dots, t^m$, образующие возрастающую последовательность $t_0 < t^1 < \cdots < t^m < t_F$ на промежутке $[t_0, t_F]$, производятся неточные измерения, в результате которых соответственно определяются «*измеренные*» множества $\sigma^1, \dots, \sigma^m$ возможных состояний системы. Иначе говоря, в момент измерения состояние системы определяется «с точностью до множества». Это множество детерминированное, так как никаких случайных помех нет. Предполагаем, что моменты измерений t^i не совпадают с моментами переключений t_k. Измерения позволяют «сузить» пучок траекторий. Множество σ_0^m всех возможных состояний системы в момент времени t^m с учетом m измерений, проведенных до этого момента включительно, получается последовательным пересечением

$$\sigma_0^0 \doteq \sigma_0 = \sigma^0(t_0), \qquad \sigma_0^1 = \sigma^0(t^1) \cap \sigma^1, \dots, \sigma_0^m = \sigma^{m-1}(t^m) \cap \sigma^m. \tag{1.10}$$

В *задаче субоптимального в среднем управления пучком траекторий с учетом дискретных неточных измерений* процесс управления пучком происходит на промежутке времени $[t^m, t_F]$ и начинается с множества σ_0^m. Требуется найти субоптимальное в среднем управление $\hat{w}^m$, минимизирующее функционал $I^{\text{с}}(t^m, \sigma_0^m, w)$ на множестве $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t^m)$:

$$I^{\text{с}}(t^m, \sigma_0^m, \hat{w}^m) = \min_{w \in \widehat{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(t^m)} I^{\text{с}}(t^m, \sigma_0^m, w). \tag{1.11}$$

Минимизацию по управлению в (1.11) можно заменить минимизацией по состоянию $\hat{x}_0$ как в (1.9). Тогда задача управления будет фактически отделена от задачи наблюдения.

Решение *задачи синтеза оптимального позиционного управления* связано с нахождением функции цены (функции Гамильтона – Якоби – Беллмана (ГЯБ)). Обозначим через $\boldsymbol{\mathcal{W}}(t, x)$ множество допустимых управлений, порождающих допустимые траектории, удовлетворяющие начальному условию $x(t) = x$, каждая из которых имеет конечное число переключений на $[t, t_F]$. Оставшиеся переключения происходят в моменты $t_1, \dots, t_k$, образующие неубывающую последовательность на промежутке $[t, t_F]$: $t \doteq t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_k \le t_{k+1} \doteq t_F$. Заметим, что количество k оставшихся переключений и сами моменты $t_1, \dots, t_k$ переключений не фиксированы и у разных допустимых управлений могут не совпадать.

На множестве $\boldsymbol{\mathcal{W}}(t, x)$ допустимых управлений определим функционал оставшихся потерь, аналогичный (1.5):

$$I(t, x, w) = \int_t^{t_F} f^0\big(t, x(t), u(t)\big)dt + \sum_{i=1}^{N} g^+(t_i, x_{i-}, v_i) + F\big(x(t_F)\big). \tag{1.12}$$

Функция цены $\varphi(t, x)$, по определению, равна значению функционала оставшихся потерь (1.12), вычисленному на оптимальном управлении для начального позиции (t, x):

$$\varphi(t, x) = \min_{w \in \boldsymbol{\mathcal{W}}(t, x)} I(t, x, w). \tag{1.13}$$

Для задачи (1.6) определим образующую функции цены с k переключениями, значение $\varphi^k(t, x)$ которой равно значению функционала оставшихся потерь (1.12), вычисленному на процессе, который оптимален среди всех допустимых процессов, исходящих из начальной позиции (t, x) и имеющих ровно k переключений, быть может фиктивных. Если обозначить через $\boldsymbol{\mathcal{W}}^k(t,x)$ множество допустимых управлений из $\boldsymbol{\mathcal{W}}(t,x)$, имеющих ровно k переключений, быть может фиктивных, а через $I^k(t,x,w)$ – функционал (1.12) при фиксированном количестве k оставшихся переключений, то

$$\varphi^k(t,x)=\min_{w\in\boldsymbol{\mathcal{W}}^k(t,x)} I^k(t,x,w).$$

Согласно определению, функция цены (1.13) является нижней огибающей своих образующих, а наименьшее значение функционала (1.5) вычисляется по функции цены

$$\min_{w\in\boldsymbol{\mathcal{W}}(t_0,x_0)} I(t_0,x_0,w)=\varphi(t_0,x_0)=\min_{k\in\boldsymbol{Z}_+}\varphi^k(t_0,x_0). \tag{1.14}$$

Ключевую роль при нахождении образующих играет так называемая *двухпозиционная* функция цены $\phi(\theta,x_\theta|\tau,x_\tau)$. Она определяется как решение задачи Лагранжа для системы (1.2) с фиксированными концами траектории:

$$\dot{x}(t)=f\big(t,x(t),u(t)\big),\;\; x(\theta)=x_\theta,\;\; x(\tau)=x_\tau,\;\; \int_\theta^\tau f^0\big(t,x(t),u(t)\big)\,dt\to\min. \tag{1.15}$$

Эта функция, как функция начальной позиции $(t,x)\to\phi(t,x|\tau,x_\tau)$, удовлетворяет уравнению ГЯБ с нулевым терминальным условием

$$\min_{u\in U}[\phi_t(t,x|\tau,x_\tau)+\phi_x(t,x|\tau,x_\tau)f(t,x,u)+f^0(t,x,u)]=0,\;\; \phi(t,x|\tau,x_\tau)=0. \tag{1.16}$$

В результате минимизации в (1.16) определяется так называемое *двухпозиционное* оптимальное управление

$$\boldsymbol{u}(t,x|\tau,x_\tau)=\arg\min_{u\in U}[\phi_t(t,x|\tau,x_\tau)+\phi_x(t,x|\tau,x_\tau)f(t,x,u)+f^0(t,x,u)].$$

Для некоторых пар позиций решение задачи (1.15) не существует, при этом доопределяем функцию, полагая $\phi(\theta,x_\theta|\tau,x_\tau)=+\infty$.

Алгоритм синтеза оптимального позиционного управления. Предполагаются известными двухпозиционные функция цены $\phi(\theta,x_\theta|\tau,x_\tau)$ и управление $\boldsymbol{u}(t,x|\tau,x_\tau)$.

1. Нулевую образующую $\varphi^0(t,x)$ находим, решая уравнение ГЯБ

$$\min_{u\in U}[\varphi_t^0(t,x)+\varphi_x^0(t,x)f(t,x,u)+f^0(t,x,u)]=0$$

с терминальным условием $\varphi^0(t_F,x)=F(x)$.

2. Определяем условное оптимальное позиционное управление

$$\boldsymbol{u}^0(t,x)=\arg\min_{u\in U}\;[\varphi_t^0(t,x)+\varphi_x^0(t,x)f(t,x,u)+f^0(t,x,u)]$$

непрерывным движением при отсутствии переключений. Полагаем $k=1$.

3. Находим условное оптимальное позиционное управление первым из оставшихся k переключений системы

$$\boldsymbol{v}^k(\tau,x)=\arg\min_{v\in V}\;[\varphi^{k-1}(\tau,g(\tau,x,v))+g^+(\tau,x,v)].$$

4. Находим k -ю образующую функции цены

$$\varphi^k(t,x)=\min_{t\le\tau\le t_F}\min_{x_\tau\in X}\Big\{\phi(t,x|\tau,x_\tau)+\varphi^{k-1}\Big(\tau,g(\tau,x_\tau,\boldsymbol{v}^k)\Big)+g^+(\tau,x_\tau,\boldsymbol{v}^k)\Big\}, \tag{1.17}$$

где $\boldsymbol{v}^k=\boldsymbol{v}^k(\tau,x_\tau)$.

5. Выполняя минимизацию в (1.17), определяем оптимальную позицию $(\boldsymbol{\tau}^k,\boldsymbol{x}^k)$ первого из оставшихся k переключений, т.е. оптимальный момент переключения

$$\boldsymbol{\tau}^k(t,x) = \arg\min_{t\le\tau\le t_F}\min_{x_\tau\in X}\left\{\phi(t,x|\tau,x_\tau) + \varphi^{k-1}\Big(\tau, g(\tau,x_\tau,v^k)\Big) + g^+(\tau,x_\tau,v^k)\right\}$$

и оптимальное состояние перед переключением

$$\boldsymbol{x}^k(t,x) = \arg\min_{x_\tau\in X}\min_{t\le\tau\le t_F}\left\{\phi(t,x|\tau,x_\tau) + \varphi^{k-1}\Big(\tau, g(\tau,x_\tau,v^k)\Big) + g^+(\tau,x_\tau,v^k)\right\}.$$

6. Проверяем условия окончания. Они могут быть разные. Например, если задано максимальное число N переключений, то проверяем неравенство $k > N$. Если оно выполняется, то процесс заканчивается. Иначе полагаем $k := k + 1$ и переходим к пункту 3.

Процесс построения образующих заканчивается, если неравенство

$$\min_{k=0,1\ldots,N}\varphi^k(t,x) \le \min_{k=0,1\ldots,N+1}\varphi^k(t,x)$$

выполняется для всех позиций $(t,x) \in T \times X$. Это условие труднопроверяемое.

Решение **задачи синтеза субоптимального в среднем программного управления** пучком траекторий ПС связано с нахождением, так называемой, функции стоимости полуоптимального процесса, значение $\beta(t,x,\hat{x})$ которой по определению равно значению функционала оставшихся потерь (1.12): $\beta(t,x,\hat{x}) = I(t,x,\widehat{w})$, вычисленному на траектории, исходящей из позиции (t,x), при управлении $\widehat{w} = (\hat{u}(\cdot),\{\hat{v}\})$, оптимальном для траектории, исходящей из позиции $(t,\hat{x})$. Если функция цены $\varphi(t,\hat{x})$ показывает стоимости оптимального процесса $(\hat{x}(\cdot),\widehat{w})$, то функция $\beta(t,x,\hat{x})$ равна стоимости полуоптимального процесса $(x(\cdot),\widehat{w})$, в котором управление $\widehat{w}$ оптимальное, а траектория $x(\cdot)$ нет.

Используя функцию $\beta(t,x,\hat{x})$, можно определить субоптимальное управление пучком траекторий. Заменяя выбор наилучшего управления $\widehat{w}$, согласно (1.9) выбором наилучшего начального состояния $\hat{x}$ опорной траектории, получаем субоптимальную в среднем оценку начального состояния:

$$\hat{x}^{\text{c}} \in \operatorname*{Arg\,min}_{\hat{x}\in X}\int\limits_{\sigma_0}\rho(x_0)\,\beta\,(t_0,x_0,\hat{x})\,dx_0.$$

Если выполняется принцип разделения, то управление $\widehat{w}^{\text{c}}$ оптимальное для траектории, исходящей из позиции $(t_0,\hat{x}^{\text{c}})$, будет оптимальным в среднем управлением пучком траекторий.

Для нахождения функции стоимости $\beta(t,x,\hat{x})$ будем использовать, как и для функции цены, вспомогательные функции – образующие $\beta^k(t,x,\hat{x})$, $k \in \mathbf{Z}_+$, значение $\beta^k(t,x,\hat{x})$ которой полагаем равным значению $I^k(t,x,\widehat{w})$ функционала оставшихся потерь (1.12), вычисленному на траектории с k переключениями, исходящей из позиции (t,x), при управлении $\widehat{w}$, оптимальном для траектории, исходящей из позиции $(t,\hat{x})$. Образующие функции цены и стоимости связаны между собой, согласно, равенством $\varphi^k(t,\hat{x}) = \beta^k(t,\hat{x},\hat{x}),\ \ k \in \mathbf{Z}_+$.

Алгоритм синтеза субоптимального управления.

1. Находим нулевую образующую $\beta^0(t,x,\hat{x})$, соответствующую оптимальному процессу без переключений, решая уравнение

$$\begin{gathered}\beta_t^0(t,x,\hat{x}) + \beta_x^0(t,x,\hat{x})f\big(t,x,\boldsymbol{u}^0(t,\hat{x})\big) + \\ +\beta_{\hat{x}}^0(t,\hat{x},\hat{x})f\big(t,\hat{x},\boldsymbol{u}^0(t,\hat{x})\big) + f^0\big(t,x,\boldsymbol{u}^0(t,\hat{x})\big) = 0\end{gathered}\tag{1.18}$$

с терминальным условием $\beta^0(t,x,\hat{x}) = F(x)$.

2. Остальные образующие $\beta^k(t,x,\hat{x})$, $k \in \boldsymbol{\mathcal{N}}$, получаем, решая уравнение

$$\beta_t^k(t,x,\hat{x}) + \beta_x^k(t,x,\hat{x}) f\Big(t,x,\boldsymbol{u}^k(t,\hat{x})\Big) +$$
$$+\beta_x^k(t,\hat{x},\hat{x}) f\Big(t,\hat{x},\boldsymbol{u}^k(t,\hat{x})\Big) + f^0\Big(t,x,\boldsymbol{u}^k(t,\hat{x})\Big) = 0 \qquad (1.19)$$

с терминальным условием

$$\beta^k(\tau,x,\hat{x}) = \beta^{k-1}\Big(\tau, g\Big(\tau,x,\boldsymbol{v}^k(\tau,\hat{x})\Big), g\Big(\tau,\hat{x},\boldsymbol{v}^k(\tau,\hat{x})\Big)\Big) + g^+\Big(\tau,x,\boldsymbol{v}^k(\tau,\hat{x})\Big). \qquad (1.20)$$

В уравнении (1.19) применяется управление $\boldsymbol{u}^k(t,\hat{x}) \doteq \boldsymbol{u}(t,\hat{x}|\boldsymbol{\tau}^k(t,\hat{x}),\boldsymbol{x}^k(t,\hat{x}))$, $k \in \boldsymbol{\mathcal{N}}$.

3. Находим субоптимальную оценку текущего состояния системы по формуле

$$\hat{x}^{\text{c}} \in \operatorname*{Arg\,min}_{\hat{x}\in X} \int\limits_{\sigma} \rho(t,x)\, \beta^{\hat{k}}(t,x,\hat{x})\, dx, \qquad (1.21)$$

где $\rho(t,x) = 1/\text{mes}\ \sigma$, $\hat{k} = \boldsymbol{k}(t,\hat{x}^{\text{c}})$ – количество переключений в текущий момент времени t.

4. Находим субоптимальное в среднем позиционное управление $\widehat{\boldsymbol{w}} = \widehat{\boldsymbol{w}}(t,\hat{x}^{\text{c}})$ для множества σ возможных в момент времени t состояний системы.

Оценку (1.21) можно улучшить, если использовать не оптимальное управление опорной траекторией, а условно оптимальное. Поэтому **алгоритм синтеза условного субоптимального управления** повторяет все пункты алгоритма синтеза субоптимального, но отличается только выбором оценки.

3. Находим условную субоптимальную оценку текущего состояния системы

$$\hat{x}^* \epsilon \operatorname*{Arg\,min}_{\hat{x}\in X} \min_{k\in\mathbf{Z}_+} \int\limits_{\sigma} \rho(t,x)\, \beta^k(t,x,\hat{x}) dx, \qquad (1.22)$$

где $\rho(t,x) = 1/\text{mes}\ \sigma$. Оптимальное количество переключений вычисляется по формуле

$$k^* = \operatorname*{arg\,min}_{k\in\mathbf{Z}_+} \min_{\hat{x}\in X} \int\limits_{\sigma} \rho(t,x)\, \beta^k(t,x,\hat{x}) dx.$$

При наличии дискретных неточных измерений множество возможных состояний системы уточняется. После каждого измерения находим новую условную субоптимальную оценку состояния системы, которую затем используем для синтеза управления пучком. Если в результате m дискретных неточных измерений в моменты времени $t^1, \ldots, t^m$ получено множество σ_0^m возможных состояний (см. (1.10)) в момент t^m, то оптимальное в среднем управление нужно формировать на промежутке $[t^m, t_F]$. Для этого берем оценку состояния в момент t^m аналогичную (1.22)

$$\hat{x}^m \epsilon \operatorname*{Arg\,min}_{\hat{x}\in X} \min_{k\in\mathbf{Z}_+} \int\limits_{\sigma_0^m} \rho(t^m,x)\, \beta^k(t^m,x,\hat{x}) dx, \qquad (1.23)$$

где $\rho(t^m,x) = 1/(\text{mes}\ \sigma_0^m)$. Оптимальное количество переключений находится по формуле

$$k^m = \operatorname*{arg\,min}_{k\in\mathbf{Z}_+} \min_{\hat{x}\in X} \int\limits_{\sigma_0^m} \rho(t^m,x)\, \beta^k(t^m,x,\hat{x}) dx. \qquad (1.24)$$

Теорема 1 (достаточные условия субоптимальности управления пучком траекторий ПС при наличии дискретных неточных измерений). Если существует последовательность функций $\beta^k: T \times X \times X \to \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}_+$, удовлетворяющая на всей области определения уравнениям (1.18)–(1.20), то программное управление $(\hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot))$, оптимальное для траектории, исходящей в момент времени t^m из начального состояния (1.23) и имеющей k^m переключений (1.24), будет условным субоптимальным в среднем управлением пучком траекторий при наличии m дискретных неточных измерений в моменты времени $t^1, \dots, t^m$.

Алгоритм синтеза условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений повторяет все пункты алгоритма синтеза условного субоптимального управления, но отличается выбором оценки, которая находится с учетом m дискретных неточных измерений в моменты времени $t^1, \dots, t^m$.

3. Найти условную субоптимальную оценку состояния системы после m измерений по формуле (1.23), а оптимальное количество переключений – по формуле (1.24).

Применение алгоритмов синтеза субоптимального управления демонстрируется на академических примерах оптимального управления пучками траекторий линейных ПС с квадратичным критерием качества. В первой линейно-квадратичной задаче

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N},$$
$$x_{1i} = x_{2i-}, \quad x_{2i} = x_{1i-}, \quad i = 1, \dots, N,$$
$$I(x_0, w) = \int_0^3 \frac{1}{2}[u^2(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t)]\,dt + \lambda N,$$

один канал управления: первая координата управляема, а вторая – нет. В момент переключения происходит взаимная замена координат состояния – неуправляемая координата становится управляемой и наоборот. Таким образом, совершая переключения, можно попеременно управлять координатами системы. Множество возможных начальных состояний – прямоугольник $\sigma_0 = [7.8, 8.2] \times [2, 4]$. Эта задача служит контрпримером, в котором принцип разделения не выполняется. Оптимальное в среднем управление не совпадает с субоптимальным, и оба этих управления отличаются от оптимального управления для геометрического центра тяжести пучка траекторий. На рис. 1 изображены начальное σ_0 и конечное σ_1 множества возможных состояний системы, а также оптимальная траектория с одним переключением, исходящая из центра $\bar{x}_0$ при оптимальном в среднем управлении.

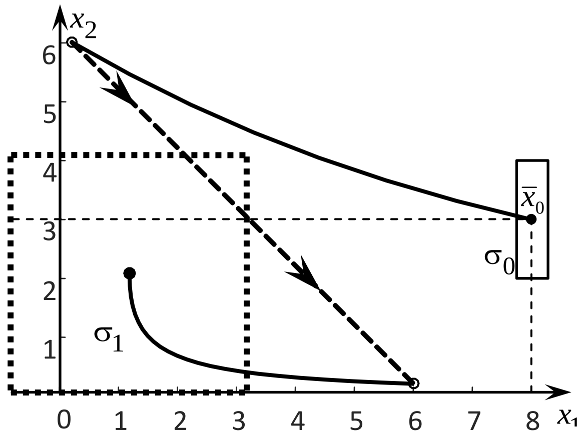

Рис. 1.

Во втором примере управления пучком траекторий линейной системой

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t), \quad t \in T_i, \quad i \in \boldsymbol{\mathcal{N}},$$
$$x_{1i} = x_{1i-}, \quad x_{2i} = x_{2i-} + v_i, \quad i = 1, \dots, N,$$
$$I(t_0, x_0, w) = \int_0^2 \frac{1}{40} u^2(t)dt + \sum_{i=1}^{N} \left[0.02 + \frac{1}{20} v_i^2\right] + \frac{1}{2} x_1^2(2) + \frac{1}{2} x_2^2(2),$$

исходящим из множества $\sigma_0 = [1,3] \times [0,2]$, принцип разделения выполняется и применяется для получения оптимального в среднем управления при наличии дискретных неточных измерений после двух неточных измерений x_2 в моменты времени $t^1 = 0.5$, $t^2 = 1.5$. Эффективность измерений можно оценить, сравнивая средние значения функционала без измерений, с одним или двумя измерениями: $\bar{I}^{\text{c}} = 1.160446 > \bar{I}_1^{\text{c}} = 0.64735 > \bar{I}_2^{\text{c}} = 0.54809$.

Во втором разделе разработаны численно-аналитические методы синтеза субоптимального управления пучками траекторий стационарных САТ при наличии дискретных неточных измерений.

Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ САТ совершает N переключений в моменты времени t_i, $i = 1, \dots, N$, образующие неубывающую последовательность (1.1). Между неравными последовательными моментами переключений система сохраняет свое состояние $x(t) = x(t_{i-1})$, $t_{i-1} \le t < t_i$, при $t_{i-1} < t_i$, а в моменты переключений состояние меняется согласно рекуррентным соотношениям

$$x_i = g(x_{i-1}, v_i), \quad v_i \in V(x_{i-1}),$$

где $x_i = x(t_i)$ и $v_i = v(t_i)$ – состояние системы и управление в момент переключения t_i соответственно, причем $x_i \ne x_{i-1}$, $x_i \in X \subset \mathbf{R}^n$, $v_i \in V \subset \mathbf{R}^q$, $i = 1, \dots, N$. Начальное состояние системы задано $x(t_0) = x_0$.

Обозначим через $\mathcal{V}(t_0, x_0)$ множество допустимых программных управлений $v(\cdot) \doteq \{v_1, \dots, v_N\}$, каждое из которых порождает допустимую траекторию $x(\cdot)$ для начального состояния x_0. Количество N и моменты $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \{t_1, \dots, t_N\}$ переключений и моменты переключений не фиксированы и у разных допустимых управлений могут не совпадать.

На множестве $\mathcal{V}(t_0, x_0)$ задан функционал качества управления

$$I(t_0, x_0, v) = \int_{t_0}^{t_F} f\big(x(t)\big)dt + \sum_{i=1}^{N} g^+\big(x_{i-1,}v_i\big) + F\big(x(t_F)\big). \tag{2.1}$$

Скалярные функции $f(x)$, $g^+(x, v)$, $F(x)$ ограничены снизу, причем $g^+(x, v)$ – неотрицательная.

Для САТ рассматриваются те же задачи, что и для ПС. В *задаче оптимального управления одной траекторией* требуется найти минимальное значение функционала (2.1) и оптимальное управление $v^*(\cdot) \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается. В *задаче управления пучком траекторий* качество программного управления пучком траекторий, исходящих из множества σ_0, оценивается средним значением функционала (2.1)

$$I^{\text{c}}(t_0, \sigma_0, v) = \int_{\sigma_0} \rho\,(x_0)\, I\,(t_0, \sigma_0, v) dx_0, \tag{2.2}$$

где $\rho(x_0) = 1/\text{mes}\,\sigma_0$. Требуется найти оптимальное в среднем управление $v^{\text{c}}(\cdot)$, минимизирующее функционал (2.2). В *задаче субоптимального в среднем управления пучком траекторий* рассматривается множество оптимальных программных управлений $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{V}}}(t_0)$. Требуется найти субоптимальное в среднем управление $\hat{v}^{\text{c}}(\cdot)$, минимизирующее функционал (2.2) на множестве $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{V}}}(t_0)$. В *задаче субоптимального в среднем управления пучком траекторий при наличии дискретных неточных измерений* процесс управления пучком происходит на промежутке $[t^m, t_F]$ и начинается с множества σ_0^m (1.10). Требуется найти субоптимальное в среднем управление $\hat{v}^m(\cdot)$, минимизирующее функционал $I^c(t^m, \sigma_0^m, v)$ на $\widehat{\boldsymbol{V}}(t^m)$.

Алгоритм синтеза оптимального позиционного управления. Учитывая, что переключения оптимальных процессов стационарных САТ происходят только на концах промежутка функционирования, предлагается следующий алгоритм синтеза оптимального позиционного управления. Предполагаем, что заданы максимальные количества S и K переключений в начальный и конечный моменты времени соответственно.

1. В конечный момент времени t_F находим образующие функции цены $\varphi_{0k}(t_F, x), k \le K$, решая рекуррентное уравнение

$$\varphi_{0k}(t_F, x) = \min_{v \in V(x)} [\varphi_{0k-1}(t_F, g(x, v)) + g^+(x, v))]$$

с начальным условием $\varphi_{00}(t_F, x) = F(x)$.

2. Определяем условное оптимальное позиционное управление

$$\boldsymbol{v}_{0k}(t_F, x) = \arg\min_{v \in V(x)} [\varphi_{0k-1}(t_F, g(x, v)) + g^+(x, v))]$$

при первом переключении из k оставшихся.

3. Для каждого момента $t \in [t_0, t_F]$ находим «нулевые» образующие по формуле

$$\varphi_{0k}(t, x) = f(x)(t_F - t) + \varphi_{0k}(t_F, x). \tag{2.3}$$

4. Остальные образующие $\varphi_{sk}(t, x)$, $s \le S, k \le K$, получаем, решая рекуррентное уравнение

$$\varphi_{sk}(t, x) = \min_{v \in V(x)} [\varphi_{s-1k}(t, g(x, v)) + g^+(x, v))]$$

с начальным условием (2.3).

5. Определяем условное оптимальное позиционное управление

$$\boldsymbol{v}_{sk}(t, x) = \arg\min_{v \in V(x)} [\varphi_{s-1k}(t, g(x, v)) + g^+(x, v))]$$

при первом переключении из $s + k$ оставшихся.

Алгоритм позволяет получить образующие $\varphi_{sk}(t, x)$, $s = 0,1, \dots, S$; $k = 0,1, \dots, K$, функции цены $\varphi(t, x)$ и условные оптимальные позиционные управления $\boldsymbol{v}_{sk}(t, x)$. Функция цены находится по своим образующим при оптимальном количестве переключений

$$\varphi(t_0, x_0) = \min_{(s,k) \in \mathbf{Z}_+^2} \varphi_{sk}(t_0, x_0), \qquad (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{k}) = \arg\min_{(s,k) \in \mathbf{Z}_+^2} \varphi_{sk}(t_0, x_0).$$

Алгоритмы синтеза субоптимального управления пучками траекторий стационарных САТ аналогичны соответствующим алгоритмам управления ПС и отличаются только построением функции стоимости полуоптимального процесса.

Алгоритм синтеза субоптимального управления. Предполагаем, что заданы максимальные количества S и K переключений в начальный и конечный моменты времени соответственно.

1. В конечный момент времени t_F находим образующие функции стоимости полуоптимального процесса $\beta_{0k}(t_F, x, \hat{x}), k \le K$, решая рекуррентное уравнение

$$\beta_{0k}(t_F, x, \hat{x}) = \beta_{0k-1}\Big(t_F, g\big(x, v_{0k}(t_F, \hat{x})\big), g\big(\hat{x}, v_{0k}(t_F, \hat{x})\big)\Big) + g^+\big(x, v_{0k}(t_F, \hat{x})\big), \tag{2.4}$$

с начальным условием $\beta_{00}(t_F, x, \hat{x}) = F(x)$.

2. Для каждого момента $t \in [t_0, t_F]$ находим «нулевые» образующие по формуле

$$\beta_{0k}(t,x,\hat{x}) = f(x)(t_F - t) + \beta_{0k}(t_F,x,\hat{x}). \tag{2.5}$$

3. Остальные образующие $\beta_{sk}(t,x,\hat{x})$, $s \le S, k \le K$, получаем, решая рекуррентное уравнение
$$\beta_{sk}(t,x,\hat{x}) = \beta_{sk-1}\big(t, g\big(x, \boldsymbol{v}_{sk}(t,\hat{x})\big), g(\hat{x}, \boldsymbol{v}_{sk}(t,\hat{x}))\big) + g^{+}\big(x, \boldsymbol{v}_{sk}(t,\hat{x})\big) \tag{2.6}$$

с начальным условием (2.5).

4. Находим субоптимальную оценку текущего состояния системы по формуле

$$\hat{x}^{\text{c}} \in \operatorname*{Arg\,min}_{\hat{x}\in X} \int\limits_{\sigma} \rho(t,x)\, \beta_{\hat{s}\hat{k}}\,(t,x,\hat{x})\,dx, \tag{2.7}$$

где $\rho(t,x) = 1/\text{mes}\,\sigma$, $\hat{s} = \boldsymbol{s}(t,\hat{x}^{\text{c}})$, $\hat{k} = \boldsymbol{k}(t,\hat{x}^{\text{c}})$ – количество переключений в текущий t и конечный t_F моменты времени соответственно.

5. Находим субоптимальное в среднем позиционное управление $\hat{v} = \boldsymbol{v}_{\hat{s}\hat{k}}(t,\hat{x}^{\text{c}})$ для множества σ возможных в момент времени t состояний системы.

Алгоритм позволяет получить образующие $\beta^{k}(t,x,\hat{x})$, а функция стоимости полуоптимального процесса находится по своим образующим
$$\beta(t,x,\hat{x}) = \beta_{\hat{s}\hat{k}}(t,x,\hat{x}), \qquad \big(\hat{s},\hat{k}\big) = \operatorname*{arg\,min}_{(s,k)\in\mathbf{Z}_{+}^{2}} \varphi_{sk}(t,x).$$

Оценку (2.7) можно улучшить, если использовать не оптимальное управление опорной траекторией, а условно оптимальное. Поэтому **алгоритм синтеза условного субоптимального управления** САТ повторяет все пункты алгоритма синтеза субоптимального, но отличается только выбором оценки.

3. Находим условную субоптимальную оценку текущего состояния системы

$$\hat{x}^{*} \in \operatorname*{Arg\,min}_{\hat{x}\in X} \min_{(s,k)\in\mathbf{Z}_{+}^{2}} \int\limits_{\sigma} \rho(t,x)\, \beta_{sk}\,(t,x,\hat{x})dx,$$

где $\rho(t,x) = 1/\text{mes}\,\sigma$. Оптимальное количество переключений вычисляем по формуле

$$(s^{*},k^{*}) = \operatorname*{arg\,min}_{(s,k)\in\mathbf{Z}_{+}^{2}} \int\limits_{\sigma} \rho(t,x)\, \beta_{sk}\,(t,x,\hat{x}^{*})dx.$$

При наличии дискретных неточных измерений условная субоптимальная оценка множества σ_0^m возможных состояний системы после m дискретных неточных измерений аналогична (1.23):

$$\hat{x}^{m} \in \operatorname*{Arg\,min}_{\hat{x}\in X} \min_{(s,k)\in\mathbf{Z}_{+}^{2}} \int\limits_{\sigma_0^m} \rho(t^m,x)\, \beta_{sk}\,(t^m,x,\hat{x})\,dx, \tag{2.8}$$

где $\rho(t^m,x) = 1/(\text{mes}\,\sigma_0^m)$. Оптимальное количество переключений находится по формуле

$$(s^{m},k^{m}) = \operatorname*{arg\,min}_{(s,k)\in\mathbf{Z}_{+}^{2}} \int\limits_{\sigma_0^m} \rho(t^m,x)\, \beta_{sk}\,(t^m,x,\hat{x})dx. \tag{2.9}$$

Теорема 2 (достаточные условия субоптимальности управления пучком траекторий стационарных САТ при наличии дискретных неточных измерений). Если существует последовательность функций $\beta_{sk}: T \times X \times X \to \mathbf{R}$, $s,k \in \mathbf{Z}_{+}$, удовлетворяющая на всей области определения уравнениям (2.4)–(2.6), то программное управление $\hat{v}(\cdot)$, оптимальное для траектории, исходящей в момент времени t^m из начального состояния (2.8) и имеющей (s^m, k^m) переключений (2.9), будет условным субоптимальным в среднем управлением пучком траекторий при наличии m дискретных неточных измерений в моменты $t^1, \dots, t^m$.

Алгоритм синтеза условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений повторяет пункты 1 – 3 алгоритма синтеза условного субоптимального управления, но отличается выбором оценки, которая находится с учетом m дискретных неточных измерений в моменты времени $t^1, \dots, t^m$.

4. Находим условную субоптимальную оценку состояния системы после m измерений по формуле (2.8), при этом вычисляем оптимальное количество переключений (2.9).
5. Определяем условное субоптимальное в среднем позиционное управление $\hat{v} = \boldsymbol{v}_{s^m k^m}(t, \hat{x}^m)$ для множества σ возможных в момент времени t состояний системы.

Применение разработанных алгоритмов демонстрируется на академическом примере синтеза линейной стационарной САТ второго порядка с квадратичным критерием качества

$$\hat{x}_i^1 = \hat{x}_{i-1}^1 + h\hat{x}_{i-1}^2, \qquad \hat{x}_i^2 = \hat{x}_{i-1}^2 + v_i,$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2}[x^2(t)]^2 dt + \sum_{i=1}^{N}\left(\lambda + \frac{\mu}{2}v_i^2\right) + \frac{1}{2}[x^1(1)]^2 + \frac{1}{2}[x^2(1)]^2.$$

В этом примере условный принцип разделения выполняется, поэтому условное субоптимальное в среднем управление совпадает с оптимальным.

В третьем разделе решена задача активной стабилизации колебаний искусственного спутника при помощи реактивных двигателей малой тяги.

Математическая модель колебаний спутника в плоскости круговой орбиты имеет вид:

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t), \qquad \dot{\omega}(t) = -K\sin 2\theta + Lu(t), \tag{3.1}$$

где θ – угол отклонения оси симметрии спутника от местной вертикали; ω – угловая скорость вращения спутника; время $t \in [0, T]$, T – момент окончания процесса управления. Коэффициенты K и L определяются параметрами орбиты и конструкцией аппарата. Кусочно-непрерывная функция $u: [0, T] \to [-U, U]$ определяет режим работы двигателя (при $u = 0$ двигатель выключен, а при $u \neq 0$ – включен), а также направление тяги (в одном из двух противоположных направлений $u > 0$, в другом $u < 0$). Оптимальное по расходу топлива управление – релейное с нулевой или максимальной тягой. Каждое включение и выключение двигателя (переключение управления) сопровождается неэффективным расходом топлива.

Предполагается, что начальное состояние (θ_0, ω_0) системы (3.1) точно не известно, а известно множество возможных начальных состояний (прямоугольник)

$$\sigma_0 = [\bar{\theta}_0 - \Delta\theta, \bar{\theta}_0 + \Delta\theta] \times [\bar{\omega}_0 - \Delta\omega, \bar{\omega}_0 + \Delta\omega].$$

Качество управления пучком оценивается терминальным функционалом

$$I_0 = \frac{1}{\mathrm{mes}\,\sigma(T)} \iint\limits_{\sigma(T)} h(\theta, \omega)\, d\theta\, d\omega,$$

где $\sigma(T)$ – множество возможных конечных состояний, а h – интеграл энергии: $h(\theta, \omega) = 0.5kB(\omega^2 + K\sin^2\theta)$.

Состояние объекта управления уточняется в результате дискретных неточных измерений. Оптимальное управление – релейное. Точность исполнения команд включения и выключения двигателя не превосходит 1 с. Расчеты показали, что при этом не возникает "эффекта Гурмана", который состоит в минимизации суммарного расхода топлива при импульсных включениях двигателя. Рассматривались разные схемы полета, отличающиеся числом активных участков и количеством измерений. Оптимальным в среднем оказалось управление с двумя активными участками. Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица. Характеристики субоптимального управления с двумя активными участками

Количество измерений	Моменты измерений, с	Активные участки, с	Продолжительность активных участков, с	Время стабилизации, с	Среднее значение интеграла энергии, Нм	Относительное улучшение, %
0	–	969 – 1117 3007 – 3013	148 6	3013	1.6203	–
1	3070	970 – 1090 3036 – 3070	120 34	3070	0.1846	88.6
2	2044; 3110	1045 – 1087 2998 – 3110	42 112	3110	0.1418	24.0
3	2085; 4106; 5151	3126 – 3190 5061 – 5151	64 90	5151	0.1181	16.7
4	2085; 4170; 6204; 7212	5155 – 5267 7170 – 7212	112 42	7212	0.1092	7.5

Дискретные неточные измерения угловой скорости позволяют снизить среднее значение интеграла энергии. При первом измерении относительное улучшение показателя составляет 88.6%, при втором – 24%, при третьем – 16.7%, при последующих измерениях – не более 7.5%. Таким образом, эффективность измерений заметно падает с увеличением их количества. Интересно, что наилучшими являются измерения, проводимые до активной фазы полета. Они повышают точность стабилизации, но увеличивают ее продолжительность.

На рис. 2 представлены траектории движения с двумя активными участками и двумя измерениями (штрихпунктирная линия), а также траектория с 3 измерениями при двух активных участках (штриховая линия). Моменты измерений отмечены круглыми маркерами. Первые пассивные участки траекторий совпадают. Наиболее приемлемой с практической точки зрения является схема полета с двумя активными участками и тремя измерениями.

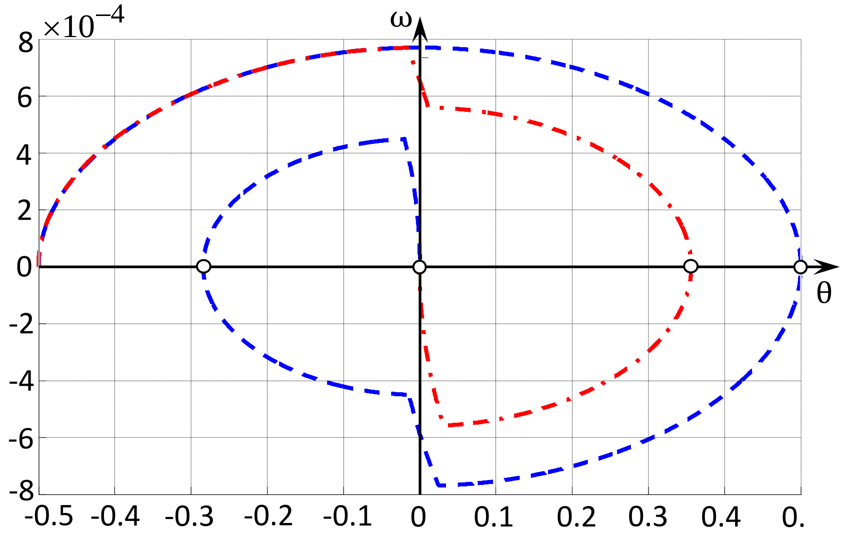

Рис. 2.

В четвертом разделе рассматриваются особенности моделирования пучков траекторий ПС и стационарных САТ при разных способах описания множества возможных состояний. В задачах управления линейными ПС множество возможных состояний представляется многогранниками или эллипсоидами. В нелинейной задаче стабилизации спутника применяется задание границы множества возможных состояний конечным числом точек. Процедура приближенного решения задачи синтеза субоптимального в среднем управления пучками траекторий ПС включает ряд вспомогательных задач, которые решаются известными численными методами. Задачи нахождения образующих функции цены и функции стоимости полуоптимального процесса, синтеза двухпозиционного оптимального управления и субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений являются новыми. Для их решения разработаны соответствующие численно-аналитические методы и программные комплексы.

Программный комплекс субоптимального управления детерминированными стационарными САТ [14] позволяет синтезировать оптимальное позиционное управление, находить оптимальную в среднем оценку неопределенного состояния системы, моделировать пучок траекторий при найденном программном управлении и вычислять характеристики движения системы в условиях параметрической неопределенности. Входные данные – математическая модель системы, показатель качества управления, множество возможных начальных состояний системы, модель измерений. Выходные данные – оптимальное в среднем управление, оценка множества возможных состояний системы при наличии дискретных неточных измерений, минимальное среднее значение функционала качества, фазовые траектории и множество возможных конечных состояний системы.

В программе применяются: целочисленная оптимизация для определения количества переключений, решение рекуррентных матричных уравнений для нахождения образующих функции цены и функций стоимости полуоптимальных процессов, а также моделирование движения САТ в условиях параметрической неопределенности.

Порядок работы программы (алгоритм решения задачи):

- строятся образующие функции цены (φ);
- строятся образующие функции стоимости полуоптимального процесса (β);
- находится оптимальное позиционное управление одной траекторией;
- находится оптимальная оценка множества возможных состояний;
- определяется оптимальное программное управление для найденной оценки;
- используя программное управление, моделируется пучок траекторий;
- изменяется множество возможных состояний с учетом дискретных неточных измерений.

Программный комплекс субоптимальной в среднем стабилизация спутника [13] позволяет находить оптимальное программное управление стабилизацией, моделировать пучки траекторий при заданном программном управлении и вычислять характеристики движения спутника в условиях параметрической неопределенности. Входные данные – математическая модель системы, показатель качества управления, множество возможных начальных состояний системы, модель измерений. Выходные данные – оптимальное и субоптимальное в среднем управления, оценка множества возможных состояний системы при наличии дискретных неточных измерений, минимальное среднее значение функционала качества, фазовые траектории и множество возможных конечных состояний системы.

В программе применяются: интегрирование дифференциальных уравнений для моделирования движений, целочисленная оптимизация на сгущающихся сетках для нахождения оптимальных моментов включения и выключения двигателя, пересечение выпуклых многоугольных множеств на плоскости для учета дискретных неточных измерений.

Порядок работы программы (алгоритм решения задачи):

- строится линия последнего включения двигателя;
- выполняется оптимизация моментов переключения при заданном количестве активных участков;
- моделируется пучок траекторий и вычисляется среднее значение интеграла энергии;
- изменяется множество возможных состояний с учетом дискретных неточных измерений угловой скорости вращения спутника.

В заключении сформулирован основной итог диссертации – разработка численно-аналитических методов моделирования и синтеза оптимальных и субоптимальных в среднем ПС, а также их применения в актуальных приложениях в области авиационной и ракетно-космической техники.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Разработаны математические модели функционирования переключаемых систем и стационарных систем автоматного типа в условиях параметрической неопределенности при разных способах описания множеств возможных состояний с учетом дискретных неточных измерений [1,2,3,5,6,7,9-12].

2. Доказаны достаточные условия субоптимальности в среднем управления пучком траекторий переключаемых систем и стационарных систем автоматного типа при наличии дискретных неточных измерений [1,3].

3. На основе достаточных условий оптимальности разработаны численно-аналитические методы синтеза оптимального и субоптимального в среднем управлений пучками траекторий переключаемых систем и стационарных систем автоматного типа с учетом дискретных неточных измерений [1,3-5,6,11,12].

4. Для линейно-квадратичных задач управления стационарными системами автоматного типа разработаны алгоритм и численный метод синтеза оптимального в среднем управления пучками траекторий при наличии дискретных неточных измерений [3,7,8].

5. Для задачи активной стабилизации колебаний искусственного спутника при помощи реактивных двигателей малой тяги разработаны алгоритм и численный метод синтеза оптимального в среднем управления в условиях параметрической неопределенности при наличии дискретных неточных измерений [2,9,10].

6. Разработаны два проблемно-ориентированных программных комплекса, реализующих предложенные алгоритмы и численные методы синтеза оптимального в среднем управления стационарными системами автоматного типа и стабилизацией спутника в условиях параметрической неопределенности при наличии дискретных неточных измерений [13,14].

Публикации в журналах, входящих в перечень ВАК

1. Бортаковский А.С., Немыченков Г.И. Оптимальное в среднем управление детерминированными переключаемыми системами при наличии дискретных неточных измерений. // Известия РАН. Теория и системы управления, 2019, № 1. С. 52-77. (WoS, Scopus).
2. Бортаковский А.С., Немыченков Г.И. Субоптимальная в среднем стабилизация спутника при наличии дискретных неточных измерений. // Известия РАН. Теория и системы управления, 2018, № 4. С. 197-207. (WoS, Scopus).
3. Бортаковский А.С., Немыченков Г.И. Субоптимальное управление пучками траекторий детерминированных стационарных систем автоматного типа. // Известия РАН. Теория и системы управления, 2017, № 6, с. 20-34. (WoS, Scopus).
4. Немыченков Г.И. Приближенный синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа, Труды МАИ, 2016, выпуск 89, 14 с. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=73376.
5. Немыченков Г.И. Управление пучками траекторий стационарных систем автоматного типа при наличии дискретных неточных измерений, Труды МАИ, 2019, выпуск 104, 24 с. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=102203.

Доклады на научных конференциях

6. Немыченков Г.И. Оптимальное управление линейными стационарными системами автоматного типа в условиях параметрической неопределенности. // Международная молодежная научная конференция Гагаринские чтения, 17-20 апреля 2018 года. Москва. Тезисы. С. 341-342.
7. Немыченков Г.И. Оптимальное управление пучками траекторий стационарных систем автоматного типа. // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 6-11 июля, 2018 года. Суздаль. Тезисы.
8. Немыченков Г.И. Приближенный синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа. // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 8-12 июля 2016 года. Суздаль. Тезисы. С. 145-146.
9. Немыченков Г.И. Субоптимальная в среднем стабилизация спутника в условиях параметрической неопределенности. // Международная конференция по математической теории управления и механике, 7-11 июля, 2017 года. Суздаль. Тезисы. С. 45-46.
10. Немыченков Г.И. Субоптимальная стабилизация спутника в условиях параметрической неопределенности. // XLII Международная молодежная научная конференция Гагаринские чтения, 5-20 апреля 2017 года. Москва. Тезисы. С. 1061.
11. Немыченков Г.И. Субоптимальное в среднем управление переключаемыми системами. // XLV Международная молодежная научная конференция Гагаринские чтения, 16-19 апреля 2019 года. Москва. Тезисы. С. 707-708.
12. Немыченков Г.И. Субоптимальное управление пучками детерминированных систем автоматного типа при неточных дискретных измерениях. // 17 Международная конференция «Авиация и космонавтика», 19-23 ноября, 2018 года. Москва. Тезисы. С. 189.

Свидетельства о государственной регистрации программ

13. Бортаковский А.С., Немыченков Г.И. Субоптимальная в среднем стабилизация спутника в условиях параметрической неопределенности // Федеральная служба по интеллект. собственности. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017618981. 2017.
14. Бортаковский А.С., Немыченков Г.И. Субоптимальное управление детерминированными стационарными системами автоматного типа в условиях параметрической неопределенности // Федеральная служба по интеллект. собственности. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018616558. 2018.