

На правах рукописи



ВАХТЕРОВА ЯНА АНДРЕЕВНА

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК И ДЕФЕКТОВ В
УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ**

Специальность: 1.1.8. – «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2023 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: **Федотенков Григорий Валерьевич**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Сопrotивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института.

Официальные оппоненты: **Павлов Игорь Сергеевич**, доктор физико-математических наук, доцент, заместитель директора по научной работе Института проблем машиностроения РАН – филиала Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук», г. Нижний Новгород.

Хроматов Василий Ефимович, кандидат технических наук, профессор, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин (РМДиПМ) – федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Национальный исследовательский университет "МЭИ", г. Москва.

Ведущая организация: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет», г. Тула.

Защита диссертации состоится 13 сентября 2023 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=174160

Автореферат разослан « ____ » _____ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.327.07



Сердюк Дмитрий Олегович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования.

Нестационарные обратные задачи чрезвычайно актуальны и в настоящее время являются наименее исследованными. Все предлагаемые задачи диссертационного исследования являются новыми, методы построения решений – оригинальны.

Предлагаемые постановки и методы решений нестационарных обратных задач могут послужить основой создания комплексов мониторинга конструкций в реальном времени. Они позволят непосредственно во время эксплуатации следить и вовремя предотвращать возникновение и развитие повреждений, отслеживать различные структурные превращения, восстанавливать пространственно–временные законы воздействующих на конструкцию внешних нагрузок. В связи с бурным развитием ЭВМ, автоматизации и робототехники, задачи этого класса выходят на передовой край современной науки.

Целью диссертационной работы является получение решений новых нестационарных коэффициентных обратных задач для упругого стержня, в том числе задач по определению наличия и расположения дефектов, и идентификации их типов, размеров и степени поврежденности, а также, получение решений новых нестационарных ретроспективных обратных задач по восстановлению нагрузки, действующей на стержни (её зависимость от времени, характер распределения по стержню).

Методы исследования для решения прямых задач используются два подхода. Первый подход заключается в применение метода функций влияния, которая используется в каждой сведенной подзадаче в вычислении интегрального уравнения типа свертки, ядрами которых выступают упомянутые далее функции влияния. Второй подход основан на аппроксимации искомой функции–параметра кусочно–постоянной зависимостью по пространственной координате, при котором решение прямой задачи для стержня с одним кусочно–постоянным параметром поддается аналитическому решению.

Решение обратных задач строится с применением следующих подходов. Первый, как и в случае прямой задачи, базируется на методе функций влияния. Его суть состоит в использовании интегральной связи между нестационарными перемещениями исследуемого деформируемого тела и воздействующими на него нагрузками, которая приводит к разрешающим интегральным уравнениям. При этом ядрами соответствующих интегральных операторов являются функции влияния для исследуемых объектов. Разрешающие интегральные уравнения кроме внешних нагрузок содержат также и все параметры модели: плотность материала, упругие константы, геометрические параметры. В различных постановках часть параметров модели или внешние нагрузки являются искомыми неизвестными, которые требуется определить из решения обратной задачи, сводящейся к указанным разрешающим уравнениям. При использовании этого подхода основополагающими являются решения прямых задач о построении функций влияния для деформируемых тел, в данной работе – для упругих стержней. Эти функции по сути представляют собой перемещения в ответ на воздействия сосредоточенных нагрузок. При этом они разделяются на граничные функции влияния (в случае, когда сосредоточенная нагрузка приложена к одному из концов стержня) и погонные функции влияния (когда сосредоточенная нагрузка соответствует воздействию распределенного усилия). Для математического описания таких нагрузок используется аппарат обобщённых функций. Эти задачи решены аналитическими методами с получением соответствующих решений в явной форме. Функции влияния также являются обобщёнными и, в отличие от обычных функций перемещений, могут иметь разрывы и даже более сильные особенности. Для построения решений задач о функциях влияния использованы интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по пространственным переменным, в случае протяженных стержней, когда влияние границ может не учитываться. В случае стержней конечных размеров дополнительно использован аппарат разложений в ряды по собственным функциям соответствующих задач. Для решения обратных задач,

описанным выше методом, используется метод механических квадратур в сочетании с быстрым преобразованием Фурье.

Второй подход, основан на аппроксимации искомой функции–параметра кусочно–постоянной зависимостью по пространственной координате. Этот подход применяется к решению обратных геометрических задач о поиске локального дефекта в упругом стержне. При этом решение прямой задачи для стержня с одним дефектом поддается аналитическому решению. В результате получено аналитическое решение прямой задачи, в котором искомые параметры дефекта (координаты его расположения, протяжённость и площадь поперечного сечения в зоне дефекта) содержатся явно в виде параметров. Данный подход позволяет свести обратную геометрическую задачу для стержня к системе нелинейных функциональных уравнений относительно искомым параметрам дефекта, которая корректна и решается численно. В результате определяются все параметры дефекта.

Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается математически строгой и физически корректной постановкой задач, применением апробированных математических методов решения нестационарных задач механики деформируемого твёрдого тела, анализом сходимости предложенных алгоритмов решения. Полученные результаты в частных случаях полностью совпадают с известными результатами других авторов и не противоречат имеющимся физическим представлениям.

Научную новизну диссертационной работы составляют следующие результаты:

— Постановки новых нестационарных обратных геометрических и ретроспективных задач для балки Тимошенко и упругого стержня.

— Нестационарные функции влияния для упругого стержня и балки Тимошенко, в том числе с кусочно–постоянными по длине характеристиками.

— Решение прямых нестационарных задач для балки Тимошенко и упругого стержня с переменными геометрическими характеристиками.

— Решения нестационарных обратных геометрических задач для упругого стержня и ретроспективных задач для упругого стержня и балки Тимошенко.

— Реализованные на ЭВМ алгоритмы решения нестационарных прямых и обратных задач для упругого стержня и балки Тимошенко с переменными геометрическими характеристиками. Проверка работы алгоритмов при различных геометрических параметрах и различных внешних нагрузках. Проверка устойчивости работы алгоритмов для прямых и обратных задач.

— Анализ полученных результатов, выработка рекомендаций и направлений дальнейших исследований.

Практическая значимость диссертационной работы. Полученные в работе результаты и разработанные алгоритмы могут быть использованы в различных отраслях промышленности с целью предотвращения разрушения и осуществления неразрушающего контроля элементов конструкций под воздействием нестационарных возмущений.

Апробация основных результатов работы.

Основные результаты работы докладывались на:

- XXIII–XXVIII ежегодных Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред имени А.Г. Горшкова» (г. Москва, 2017–2022 гг.);
- Ежегодных научных конференциях «Ломоносовские чтения» (г. Москва, 2016–2022 гг.);
- XLII–XLVII Международных молодёжных научных конференциях «Гагаринские чтения» (г. Москва, 2016–2022 гг.);
- III–VII Международных научных семинарах «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (г. Москва, 2015–2018 гг.);
- Научных конференциях «Проблемы прочности, динамики и ресурса» (г. Нижний Новгород, 2018–2019 гг.);
- Всероссийские конференции «молодых–ученых механиков» МГУ, (г. Сочи 2017–2021 гг.);

- XII научно–практической Международной конференции, посвященной 160–летию Белорусской железной дороги (Гомель, 2022 г.)
- Конференции по строительной механике корабля, посвященной памяти В.А. Постнова и 90–летию со дня его рождения (г. Санкт–Петербург, 2017 г.);
- XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Уфа 2019 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 39 публикаций в журналах, индексируемых в РИНЦ 32, научных статей в изданиях, рекомендованных ВАК Министерства науки и высшего образования Российской Федерации 2, Scopus и Web of Science 5, а также получено 1 Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 141 наименование. Общий объем диссертации составляет 130 страниц, включая 84 рисунка и 2 таблицы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описываются цели и задачи исследования, научная новизна, актуальность, теоретическая и практическая ценность полученных результатов и их достоверность, приводятся данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе приведён аналитический обзор научных работ, связанных с темой диссертационного исследования, приведены уравнения движения для стержней, а также математические постановки нестационарных обратных задач для стержней, включающие уравнения движения, начальные и граничные условия. Указан способ сведения математических постановок нестационарных обратных задач к системам разрешающих уравнений.

Для описания движения изотропных упругих стержней будем использовать уравнения в перемещениях, в прямоугольной декартовой системе координат Oxy . Ось Ox направлена вдоль средней линии упругого стержня, а Oy перпендикулярно оси Ox . Полагаем, что искомые и заданные функции зависят только от координаты x и времени t .

Для решения прямых задач по определению перемещений или прогиба для стержней, а также обратных нестационарных ретроспективных задач для стержней, запишем математическую постановку в которой содержатся уравнения продольных колебаний или система уравнений поперечных колебаний для стержня, а также граничные и начальные условия.

Введем безразмерные параметры для балки Тимошенко (они обозначены штрихом):

$$\begin{aligned} x' = \frac{x}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad F' = \frac{FL}{c_1^2}, \quad p' = \frac{PL^3}{EI_z}, \quad Q' = \frac{Q_y L^2}{EI_z}, \quad m' = \frac{M_z L}{EI_z}, \\ \chi = \chi_x L, \quad \gamma = \frac{L}{i_z}, \quad c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \eta^2 = \frac{c_p^2}{c_2^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

И для упругого стержня

$$u' = \frac{u}{L}, \quad F' = \frac{F}{F_0}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad c = c_p, \quad p' = \frac{P}{EF_0}. \quad (2)$$

С учётом системы безразмерных величин все уравнения будем записывать в безразмерном виде. Штрихи при записи безразмерных величин в дальнейшем опускаются.

Система уравнений поперечных колебаний балки Тимошенко, граничные и начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + p(x, \tau), \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} = \eta^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \kappa^2 \gamma^2 \left(\chi - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} \Big|_{x=0,1} &= 0, \quad w \Big|_{x=0,1} = 0, \quad w \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial w}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \chi \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \chi}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение продольных колебаний консольно закреплённого упругого стержня, а также граничные и начальные условия имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, \tau), \quad u \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad u \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

Применительно к задачам идентификации дефектов в упругом стержне, рассматривается стержень ступенчатого поперечного сечения. В этом случае кроме уравнений продольных колебаний, граничных и начальных условий должны выполняться условия сопряжения в точках x_n изменения площади поперечного сечения (n – номер участка стержня с постоянным поперечным сечением, N – число этих участков):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad n = \overline{1, N}, \quad u_1 \Big|_{x=0} = 0, \quad F_N \frac{\partial u_N}{\partial x} \Big|_{x=1} = -P(\tau), \\ u_n \Big|_{x=x_n} &= u_{n+1} \Big|_{x=x_n}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad F_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \Big|_{x=x_n} = F_{n+1} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} \Big|_{x=x_n}, \quad n = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

В (3) и (4) $u(x, t)$ и $w(x, t)$ – перемещение стержня и прогиб балки в плоскости Oxy ; в (5) $u_n(x, t)$ – перемещение стержня в пределах участка с номером n ; F – площадь поперечного сечения; I_z – момент инерции поперечного сечения относительно оси Oz ; i_z – радиус инерции; ρ – плотность

материала; λ и μ – коэффициенты Ламе; E – модуль упругости первого рода; c_1 – скорости распространения волн растяжения–сжатия; c_2 – скорость волн сдвига; c_p – скорость изгибных волн; c – скорость распространения продольных волн в стержне; χ – угол поворота поперечного сечения за счет сдвиговых деформаций; $\kappa = \sqrt{5/6}$ – коэффициент сдвига; t – время, $P(t)$ – внешняя погонная поперечная сила; Q_y – перерезывающая сила; M_z – изгибающий момент; L – некоторый характерный размер; τ – безразмерное время, $P(x,t)$ – продольная распределенная нагрузка. В качестве параметра L будем использовать длину стержня. Тогда в безразмерном виде длина стержня будет равна 1.

Постановка нестационарных геометрических обратных задач для стержней

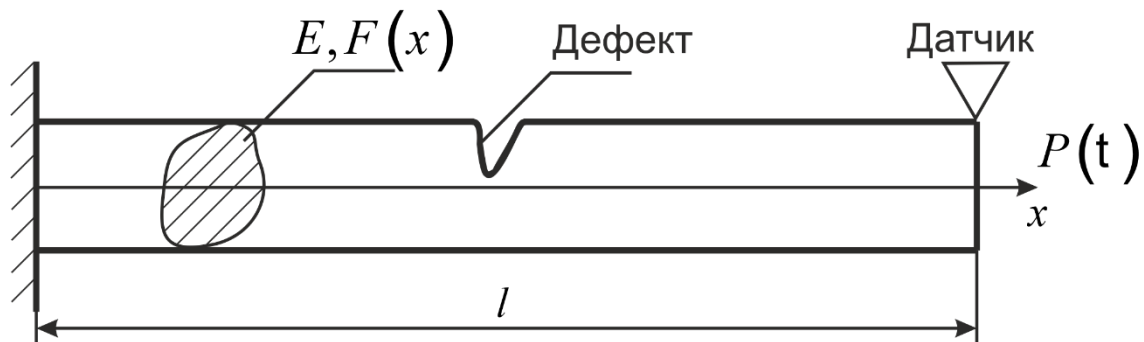


Рис. 1. Постановка задачи.

Рассматривается упругий однородный изотропный стержень конечной длины, левый конец которого жестко закреплен, правый конец стержня свободный от закрепления. В начальный момент времени на стержень начинает действовать заданная сосредоточенная нестационарная нагрузка, приложенная к правому концу стержня. Предполагается, что на правом конце стержня дополнительно известно перемещение как функция времени. На практике эта информация может поступать с датчика измерения продольных перемещений, скоростей или ускорений, установленного на свободном конце стержня. При этом перемещения правого конца стержня должны с определённой точностью совпадать с перемещениями, регистрируемыми датчиком (рисунок 1). В случае наличия дефекта стержень будет иметь переменную по длине геометрическую характеристику – площадь поперечного сечения. При этом

параметрами дефекта являются площадь поперечного сечения стержня в месте его расположения, а также координаты начала и конца изменения площади поперечного сечения. Указанные выше геометрические характеристики будем называть параметрами дефекта стержня. Отметим, что даже в такой постановке получить точное аналитическое решение поставленной прямой задачи не представляется возможным.

Для построения аналитического решения задачи, истинный дефект приближенно заменяется модельным аналогом, который представляет собой скачкообразное изменение площади поперечного сечения на некотором заранее неизвестном участке стержня (рисунок 2).

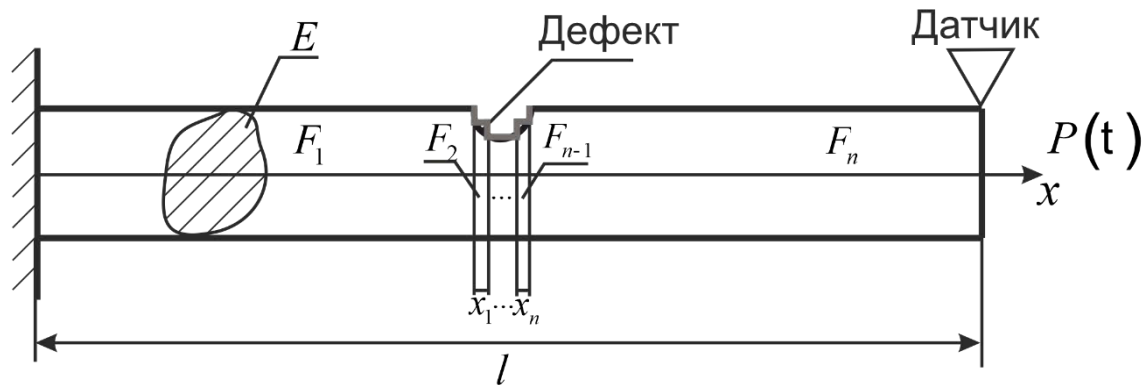


Рис. 2. Преставление дефекта в виде ступеней.

В этом случае, задача сводится к представлению стержня с реальным дефектом в виде ступенчатого стержня.

Постановка обратной задачи включает в себя уравнения и соотношения (5), в которых неизвестными являются как перемещения $u_n(x, \tau)$, так и система параметров $x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_n$, описывающая искомый дефект. Однако, дополнительно имеется информация о перемещениях на свободном конце стержня $u(1, \tau) = U_d(\tau)$, поступающая с датчика перемещений. $U_d(\tau)$ – перемещение конца стержня, регистрируемое датчиком.

Метод решения обратной задачи состоит в следующем. Допустим, удаётся найти аналитическое решение $u(x, \tau)$ прямой задачи для ступенчатого стержня

при произвольных значениях параметров $x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_n$. Тогда указанное выше дополнительное условие приводит к уравнению:

$$u(1, \tau) = u(1, \tau; x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_n) = U_d(\tau), \quad (6)$$

Уравнение (6) в заданный момент времени τ , представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение с $2n$ неизвестными в качестве которых, выступают параметры дефекта. Таким образом, для получения замкнутой системы $2n$ уравнений относительно $2n$ неизвестных достаточно зафиксировать $2n$ моментов времени $\tau_k, k = 1, 2, \dots, 2n$ и получить соответственно $2n$ уравнений, из которых могут быть определены искомые неизвестные параметры:

$$\begin{aligned} U_k(x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, \dots, F_n) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2n, \\ U_k(x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, \dots, F_n) &= u(1, \tau_k, x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, \dots, F_n) - U_{dk}, \quad U_{dk} = U_d(\tau_k). \end{aligned} \quad (7)$$

Постановка нестационарных ретроспективных обратных задач для стержней

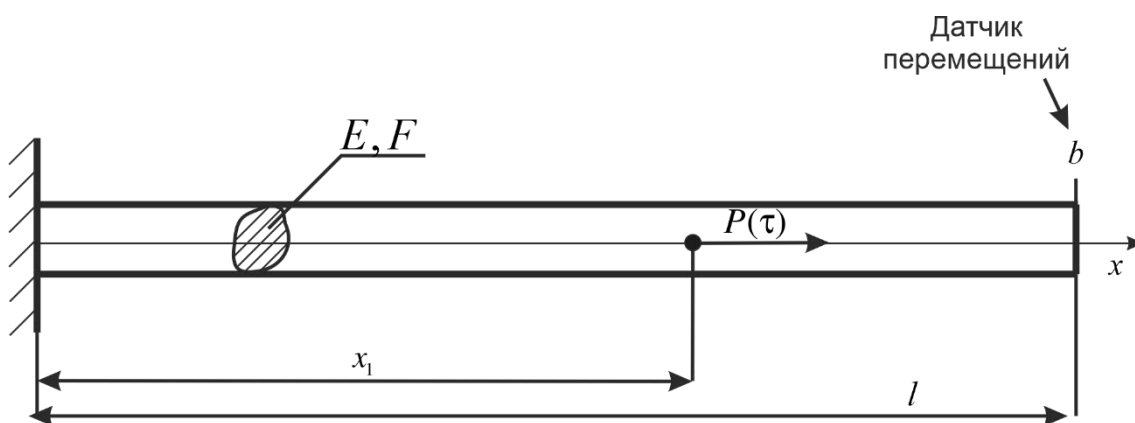


Рис. 3. Схема нагружения для упругого стержня.

Рассматривается упругий однородный изотропный стержень конечной длины, левый конец которого жестко закреплен, правый конец стержня свободный. В начальный момент времени на стержень в заданной точке начинает действовать сосредоточенная нагрузка, зависимость нагрузки от времени подлежит определению в процессе решения обратной задачи.

В обратной задаче полагается, что перемещения $u(x, \tau)$ в некоторой точке b стержня известны. На практике эта информация может поступать с датчика перемещений, скоростей или ускорений, который установлен в сечении стержня

$x = b$ (рисунок 3). Требуется, по данным, полученным с датчика перемещений, установленном в точке b , восстановить осевую нагрузку $p(\tau)$.

Обратная задача по идентификации распределённой силы для упругого стержня

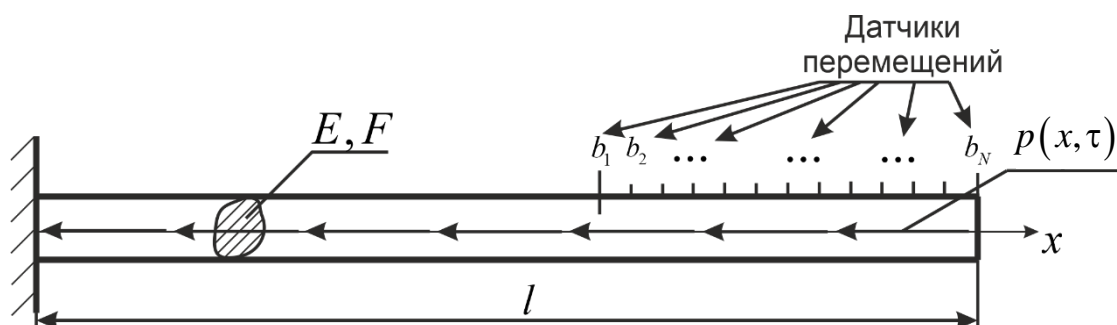


Рис. 4. Схема нагружения для упругого стержня.

Рассматривается упругий однородный изотропный стержень конечной длины, левый конец которого жестко закреплен, правый конец стержня свободный. В начальный момент времени на стержень начинает воздействовать распределенная нестационарная нагрузка, зависимость которой от времени и закон распределения по координате неизвестны и подлежат определению в процессе решения обратной задачи.

В обратной задаче полагается, что перемещения, скорости или ускорения в некоторой окрестности $x \in [b_1, b_N]$ свободного конца стержня известны. На практике эта информация может поступать с датчиков, установленных в сечениях стержня $x = b_1, b_2, \dots, b_N$ (рисунок 4). Требуется, по данным, полученным с датчиков, установленных в точках b_1, \dots, b_N , восстановить осевую нагрузку $p(x, \tau)$.

Таким образом, математическая постановка обратной задачи состоит из уравнения (4) с неизвестной правой частью $p(x, \tau)$, граничных и начальных условий, а так же дополнительных условий

$$u(b_n, \tau) = U_n(\tau), \quad n = \overline{1, N}, \quad (8)$$

где $U_n(\tau)$ – известные функции времени. На практике они представляют собой значения перемещений, поступающие с датчиков.

Вторая глава посвящена нестационарным функциям влияния для стержней. Приведены постановки нестационарных задач о функциях влияния для упругого стержня и балки Тимошенко. Дано их решение и проведено исследование функций влияния. Решены прямые нестационарные задачи для стержней. Предложен и реализован аналитический алгоритм решения.

Функции влияния построены аналитически с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени и разложений в ряды Фурье по системам собственных функций соответствующих прямых задач.

Для одноступенчатого стержня погонная функция влияния имеет вид:

$$G(x, \xi, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \xi \sin \lambda_n \tau \sin \lambda_n x}{\lambda_n}, \quad \lambda_n = \frac{2n-1}{2} \pi. \quad (9)$$

Для одноступенчатого и многоступенчатого стержня граничные функции влияния построены в изображениях по Лапласу. Оригиналы этих функций находить нет необходимости, поскольку предложенные в работе методы решения обратных задач, в которых эти функции используются, позволят использовать решения в изображениях.

Оригинал функции влияния для балки Тимошенко имеет вид:

$$G_w(x, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{wn}(\xi, \tau) \sin \lambda_n x, \quad G_{wn}(\xi, \tau) = \delta_n(\xi) \tilde{G}_{wn}(\tau), \quad (10)$$

$$\tilde{G}_{wn}(\tau) = (A_n \sin \alpha_n \tau + B_n \sin \beta_n \tau), \quad \lambda_n = \pi n, \quad A_n = \text{const}, \quad B_n = \text{const}.$$

С помощью найденных функций влияния получены решения ряда прямых нестационарных задач для балок и стержней, в том числе ступенчатого переменного сечения.

Третья глава посвящена решению нестационарных обратных задач для стержней. Решена обратная геометрическая и ретроспективная задача для упругого стержня. Решение геометрической обратной задачи основано на аппроксимации искомой функции–параметра кусочно–постоянной зависимостью, по пространственной координате которое сводится к системе нелинейных функциональных уравнений относительно искомым параметров

дефекта. Решена обратная ретроспективная задача для упругого стержня и балки Тимошенко. Решение обратной ретроспективной задачи, базируется на методе функций влияния. С его применением обратная задача сводится к решению системы интегральных уравнений типа Вольтерра II-го рода по времени относительно искомой нагрузки для балки/ упругого стержня. Для его решения используется метод последовательных приближений в сочетании с быстрым преобразованием Фурье.

Обратная геометрическая задача для стержня

Обратная нестационарная геометрическая задача состоит в определении одного, нескольких или всех неизвестных параметров дефекта при заданных остальных параметрах с учетом нулевых начальных условий и граничных условий закрепления на одном конце. Полагается, что зависимость перемещения торца стержня, на который воздействует осевая сила, известны из показания датчика перемещений, что и составляет дополнительное условие, необходимое для решения обратной задачи (рисунок 5).

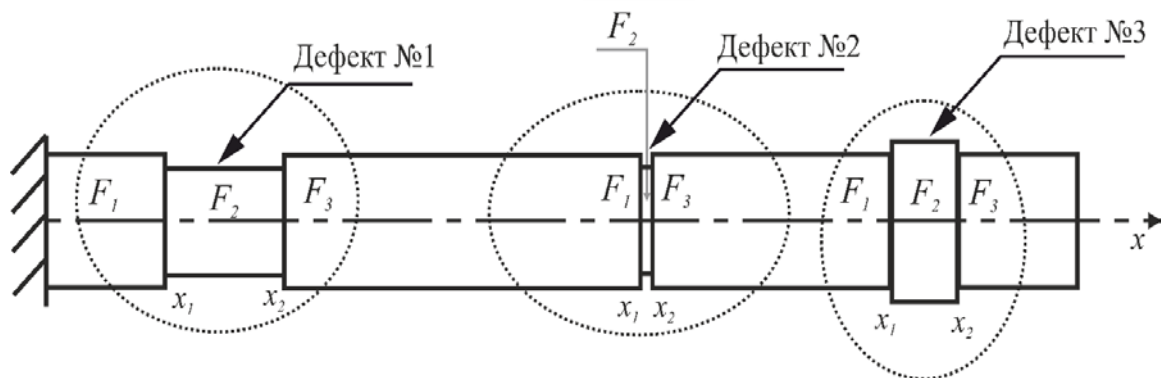


Рис. 5.

Здесь F_1 – площадь поперечного сечения стержня на участке без дефекта, F_2 – площадь стержня на участке с дефектом, x_1 и x_2 – координаты локализации дефекта. Средний участок будет описывать дефект при его наличии. При этом перемещения конца третьего участка должны совпадать с перемещениями регистрируемыми датчиком. Искомые параметры явным образом входят в найденное решение прямой задачи для многоступенчатого стержня. Таким образом, приходим к следующему уравнению:

$$u(l, \tau) = u(l, \tau; x_1, x_2, F_2) = U_d(\tau). \quad (11)$$

Уравнение (11) в заданный момент времени τ , представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение с тремя неизвестными в качестве которых, выступают параметры дефекта. Таким образом, для получения замкнутой системы трех уравнений относительно трех неизвестных достаточно зафиксировать три момента времени τ_k , $k = 1, 2, 3$ и получить соответственно три уравнения, из которых могут быть определены искомые неизвестные параметры:

$$\begin{aligned} U_k(x_1, x_2, F_2) &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \\ U_k(x_1, x_2, F_2) &= u(l, \tau_k, x_1, x_2, F_2) - U_{dk}, \quad U_{dk} = U_d(\tau_k) \end{aligned} \quad (12)$$

Для решения системы нелинейных уравнений используется метод Ньютона.

Для решения обратной задачи, зададим следующие параметры для трехступенчатого стержня (рисунок 5):

Номер дефекта	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	$p(\tau)$
1	0.1	0.2	0.07	0.06	0.07	$0.1\tau^2$
2	0.49	0.51	0.07	0.01	0.07	$10e^{-\tau}\tau^2$
3	0.7	0.9	0.07	0.1	0.07	$0.5\sin(5\tau)\tau^2$

Таблица 1

$N = 10$, $\mu = 0.01$ – заданная точность решения, $u_3(\tau)$ – перемещения, известные из решения прямой задачи для многоступенчатого стержня.

Для определения дефекта в упругом стержне нужно определить F_2 , x_1 и x_2 (Таблица 1), где при переходе на новый номер дефекта будем считать слева направо F_1 , F_2 , F_3 .

При заданных трех моментах времени $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$ и $\tau_3 = 3$, площади F_1 и F_3 полагаются известными. На искомые параметры, исходя из геометрического смысла задачи, накладываются дополнительные ограничения: $0 < F_2 < 0.25$,

$0 < x_1 < x_2 < 1$. При этом $x_1 = x_2 = F_2 = 0$ – начальные значения искомым параметров, соответствующие нулевой итерации метода Ньютона.

Подставим известные величины в решение прямой задачи для многоступенчатого стержня и решим систему нелинейных уравнений относительно F_2 , x_1 и x_2 . Получим $F_2 = 0.01, x_1 = 0.49$ и $x_2 = 0.51$, что соответствует заданным параметрам для данного стержня.

Также стоит проверить устойчивость решения обратной геометрической задачи. Для этого к вектору перемещений добавим вектор случайных величин порядка $\varepsilon = 0.01$. Получим устойчивое решение задачи обратной задачи (Таблица 2):

Номер дефекта	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	$p(\tau)$
1	0.0909	0.1999	0.07	0.06009	0.07	$0.1\tau^2$
2	0.4899	0.5099	0.07	0.01001	0.07	$10e^{-\tau}\tau^2$
3	0.6998	0.8998	0.07	0.10001	0.07	$0.5\sin(5\tau)\tau^2$

Таблица 2

Как видно из приведённых результатов расчёта, нестационарная обратная задача по идентификации дефекта в упругом стержне решается корректно без использования методов регуляризации. Это связано с тем, что разрешающие уравнения обратной задачи непосредственно следуют из решения прямой задачи, которое явным образом содержит искомые величины в качестве параметров. Нестационарный характер задачи позволил зафиксировать три момента времени и составить систему нелинейных уравнений относительно искомым параметров дефекта. Исследовано решение обратной задачи при наличии зашумленности измерений. Оно показывает незначительное влияние зашумлённости измерений на решение обратной задачи, что говорит об устойчивости предложенного метода.

Обратная задача по идентификации сосредоточенной силы для упругого стержня и балки Тимошенко

При описании методов решения обратных ретроспективных задач для стержней примем следующую терминологию. В случае решения обратной ретроспективной задачи для упругого стержня будем обозначать: u – перемещения для упругого стержня, G_U – функция влияния для упругого стержня. При решении обратной ретроспективной задачи для балки Тимошенко вместо перемещений u , будем использовать w – прогиб для балки Тимошенко, а вместо G_U – функцию влияния для балки Тимошенко G_W . Поскольку методы решения задач для балок и стержней схожи, будем использовать для перемещений обозначение u , а для функции влияния – G , имея в виду, что в случае стержня $G = G_U$, а в случае балки – $G = G_W$, $u = w$.

Зная функцию влияния $G(x, \xi, \tau)$ и основываясь на принципе суперпозиции, из решения прямой задачи для упругого стержня или балки Тимошенко перемещения в точке $x = b$ установки датчика можно представить в виде

$$u(b, \tau) = \int_0^{\tau} G(b, x_1, \tau - t) p(t) dt, \quad (13)$$

где $u(b, \tau)$ – перемещения упругого стержня (или прогиб $u(b, \tau) = w(b, \tau)$ балки Тимошенко) в точке установки датчика, а x_1 – точка приложения сосредоточенной силы.

Уравнение (13) является интегральным уравнением Вольтерра I-го рода.

Для того, чтобы получить корректную задачу (13) перейдем от интегрального уравнения Вольтерра I-го рода, к интегральному уравнению Вольтерра II-го рода. Это необходимо для того, чтобы ослабить условия существования и единственности решения уравнения:

$$p(\tau) + \int_0^{\tau} K(\tau - t) p(t) dt = F(\tau), \quad K(\tau) = \frac{G''_{\tau}(\tau)}{G'_{\tau}(0)}, \quad F(\tau) = \frac{f''(\tau)}{G'_{\tau}(0)}. \quad (14)$$

Уравнение (14) удовлетворяет условиям теоремы 2, следовательно является корректным по Ж. Адамару, что позволяет получить корректное решение обратной задачи (13).

Для решения интегрального уравнения Вольтерра II-го рода (14) используется алгоритм метода последовательных приближений. Для того чтобы ускорить выполнение итерационного процесса в части вычислений интегралов свертки, используется быстрое преобразование Фурье.

Относительная погрешность вычислений на текущей итерации определяется по формуле:

$$\omega^{(m)} = \frac{\|\mathbf{p}^{(m)} - \mathbf{p}^{(m-1)}\|}{\|\mathbf{p}^{(m)}\|} < \eta \quad (15)$$

где η – заданная точность. Неравенство (15) определяет номер итерации на которой процесс останавливается.

Приведем примеры решения обратной ретроспективной задачи методом последовательных приближений совместно с быстрым преобразованием Фурье. Для решения обратной задачи будем использовать перемещения, полученные в ходе решения прямой задачи, а так же использованные при решении прямой задачи сосредоточенные силы. Заданная точность $\eta = 0.001$.

На рисунках 6 – 9 приведены график функции реальной сосредоточенной силы и восстановленной силы, полученной при решении обратной задачи. Рисункам 6 и 7 соответствует решение для упругого стержня внешняя осевая сила $p(\tau) = 0.5 \sin(5\tau)\tau^2$, для 8 и 9 – балке Тимошенко внешняя осевая сила – $p(\tau) = \frac{1}{1+\tau^3} + \sqrt{\tau}$. Здесь черная линия заданная нагрузка, серая – восстановленная, точка приложения сосредоточенной силы $\xi = 0.5$, точка установки датчика $b = 1$, $N = 20$. При изменении параметра сосредоточенной силы решение так же получается корректным. При любом способе установки датчика решение также будет корректно (результат восстановления нагрузки практически совпадает с реально действующей силой). Также стоит проверить

устойчивость решения обратной ретроспективной задачи. Для этого к вектору перемещений добавим вектор случайных величин порядка $\varepsilon = 0.01$, и проверим решение, показанное на рисунках 6 и 8 (рисунки 7 и 9). Как видно из рисунков 7 и 9 решение устойчиво.

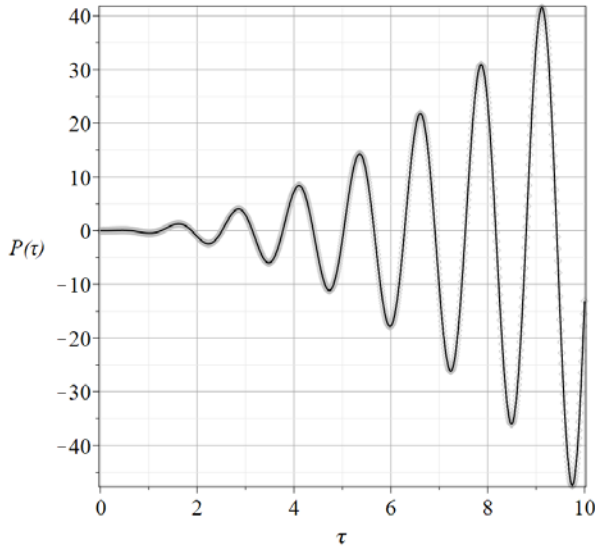


Рис. 6.

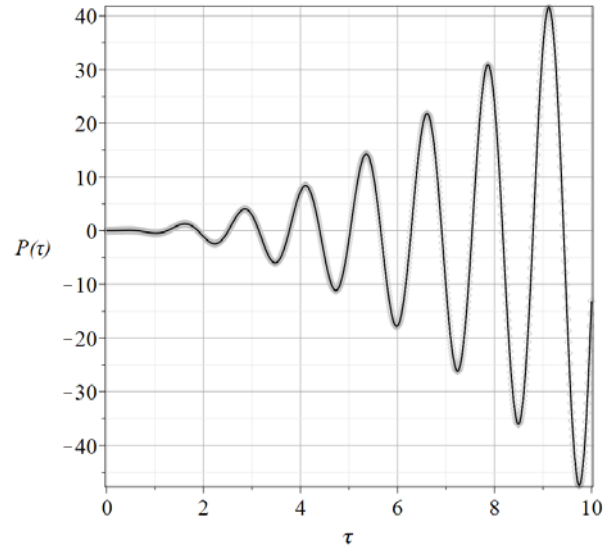


Рис.7.

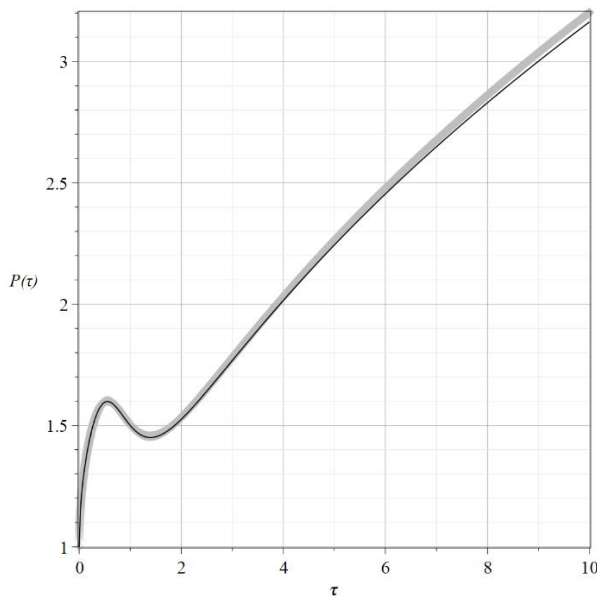


Рис. 8.

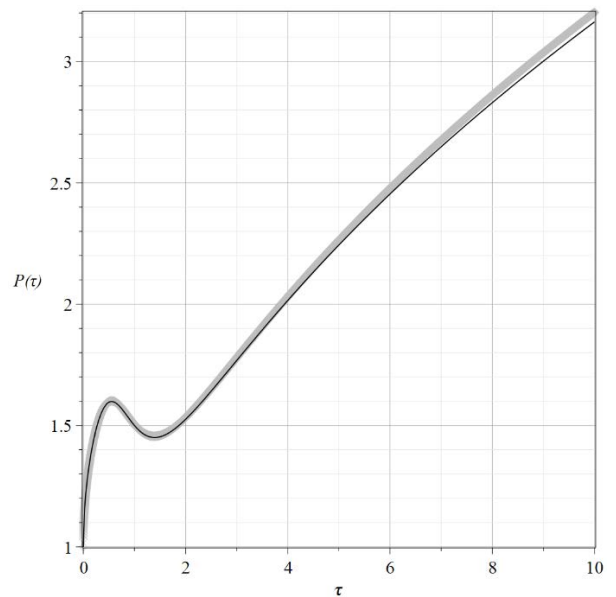


Рис. 9.

Обратная задача по идентификации распределенной силы для упругого стержня и балки Тимошенко

В этом случае обратная задача сводится к решению системы операторных уравнений:

$$\ddot{u}(b_k, \tau) \approx \sum_{n=1}^N I_n(\tau) \sin \lambda_n b_k, k = \overline{1, N}, \quad (16)$$

где $p_n(\tau)$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье искомой нагрузки, $I_n(\tau)$ – интегральные операторы вида $I_n(\tau) = -\lambda_n \int_0^\tau g_n(\tau-t) p_n(t) dt + p_n(\tau)$. Вид функции $g_n(\tau)$ конкретизируется в зависимости от задачи (для стержня или балки).

Обратная задача состоит в определении коэффициентов $p_n(\tau)$. Допустим, на некотором отрезке стержня установлено N датчиков, которые измеряют значения ускорений стержня $\ddot{U}_1(\tau) = \ddot{u}(b_1, \tau), \ddot{U}_2(\tau) = \ddot{u}(b_2, \tau), \dots, \ddot{U}_N(\tau) = \ddot{u}(b_N, \tau)$ в зависимости от времени τ , где $b_k = \frac{b_1 + b_N}{2} + \frac{b_1 - b_N}{N} \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)$, b_1 – координата первого датчика на стержне, b_N – координата последнего датчика.

Ограничиваясь первыми N членами, получаем N интегральных представлений (16), которые составляют систему алгебраических уравнений относительно интегральных операторов Вольтерра $I_n(\tau)$, $n = \overline{1, N}$. Решая эту систему получаем N несвязанных интегральных уравнений Вольтерра II рода, для решения которых применяем те же методы, которые использованы в решениях обратных задач о восстановлении сосредоточенных нагрузок.

На рисунках 10 – 13 приведены графики функции реальной распределенной нагрузки и восстановленной нагрузки, полученной при решении обратной задачи. Рисункам 10 и 11 соответствует решение для упругого стержня внешняя распределенная нагрузка $p(x, \tau) = e^{-\tau} \sin 5\pi x \left[H\left(x - \frac{1}{5}\right) - H\left(x - \frac{2}{5}\right) \right]$, для 12 и 13 – балке Тимошенко внешняя распределенная нагрузка – $p(x, \tau) = e^{-\tau} (x^5 - 0.5x^4 - 0.4x^3 + 0.9x^2 - x)$. Здесь черная линия заданная нагрузка, серая – восстановленная, начальная точка установки датчика $b = 0.5$, конечная

точка установки датчика $b_N = 1$, $N = 5$. При любом способе установки датчика решение будет корректно (результат восстановления нагрузки практически совпадает с реально действующей силой). Также стоит проверить устойчивость решения. Для этого к вектору ускорений добавим вектор случайных величин порядка $\varepsilon = 0.01$, и проверим решение, показанное на рисунках 10 и 12 (рисунки 11 и 13). Как видно из рисунков 11 и 13 решение устойчиво.

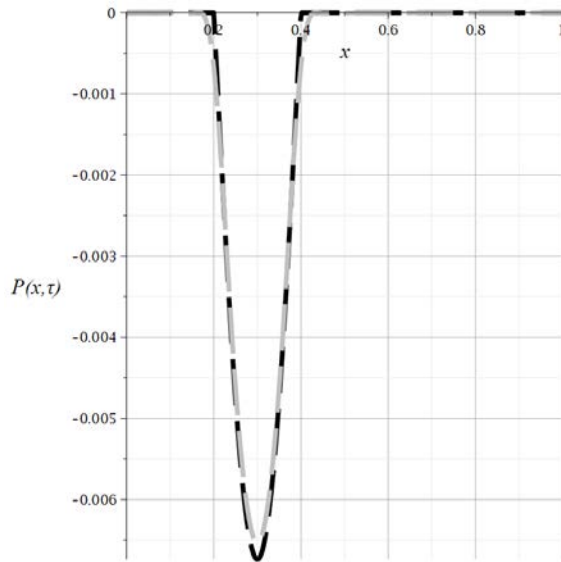


Рис. 10.

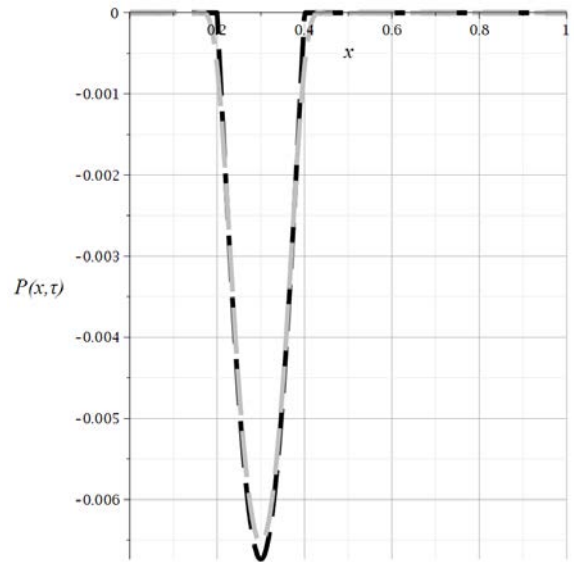


Рис.11.

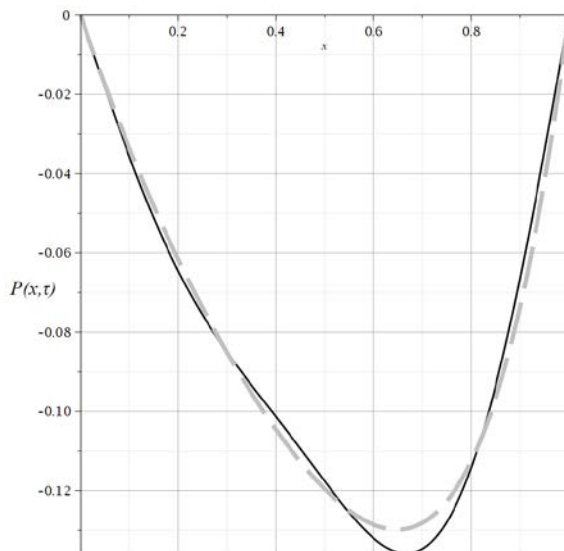


Рис. 12.

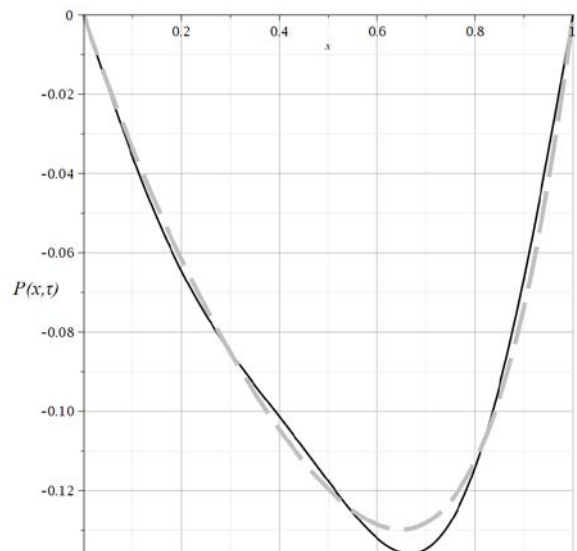


Рис. 13.

Заключение.

В рамках работы над диссертацией разработаны постановки, методы и подходы к решению новых, актуальных в прикладном и теоретическом отношении, нестационарных обратных задач для стержней.

Основные результаты диссертационной работы.

1. Построены функции влияния и решены прямые нестационарные задачи для стержней и балок Тимошенко, в том числе для стержня ступенчатого поперечного сечения.

2. Получены решения нестационарных геометрических обратных задач для упругого стержня, в том числе задач по определению наличия и расположения дефектов, а также идентификации их типов, размеров и степени поврежденности.

3. Построены решения нестационарных ретроспективных обратных задач по восстановлению нагрузки, действующей на стержень. Для решения поставленных задач использован единый подход, основанный на методе функций Грина (функций влияния). При этом найдены аналитические выражения для необходимых функций влияния, построены разрешающие интегральные уравнения, реализованы численные методы их решения. По результатам диссертации опубликовано достаточное количество научных работ, отражающих основное содержание проведённых исследований.

Предлагаемые постановки и методы решений нестационарных обратных задач, описанных в диссертации могут послужить основой создания комплексов мониторинга конструкций реального времени. Они позволят непосредственно во время эксплуатации следить и вовремя предотвращать возникновение и развитие повреждений, отслеживать различные структурные превращения, восстанавливать пространственно-временные законы воздействующих на конструкцию внешних нагрузок.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРАЦИИ

Статьи в журналах из перечня ВАК:

1. Вахтерова Я. А., Серпичева Е. В., Федотенков Г. В. Обратная задача об идентификации нестационарной нагрузки для балки Тимошенко // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. — 2017. — № 4. — С. 82–92.

2. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 439-447. DOI:10.1134/S1995080219040061

Статьи в журналах, индексируемых Scopus:

3. Fedotenkov, G. V., Makarevskii, D. I., Vahterova, Y. A., & Thang, T. Q. (2021). The inverse non-stationary problem of identification of defects in an elastic rod. INCAS Bulletin, 13(Special Issue), 57-66. doi:10.13111/2066-8201.2021.13.S.6

4. Fedotenkov G., Starovoitov E., Vahterova Y. The inverse transient problem of identifying the law of change in the cross-sectional area of an elastic bar // In: 9th edition of the International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering (COUPLED PROBLEMS 2021). — 2021. DOI: 10.23967/coupled.2021.054

5. Fedotenkov G.V., Vahterova Y.A., Gritskov A.V., Levitskiy D.Y., Sun Y. Timoshenko beam and plate non-stationary vibrations // INCAS Bulletin. - 2021. - Vol. 13. - No Special Issue. - P. 41-56. - DOI 10.13111/2066-8201.2021.13.S.5

6. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length // Journal of Applied Engineering Science, 2020, vol. 18, no. 4, pp. 687-692. DOI:10.5937/jaes0-28073

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021662543 Российская Федерация. Программа для идентификации нагрузки по перемещению: № 2021661352: заявл. 16.07.2021: опубл. 30.07.2021 / А.В. Бабайцев, Г.В. Федотенков, Я.А. Вахтерова; заявитель Федеральное

государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт».

Прочие публикации по теме диссертации:

8. Вахтерова Я.А., Федотенков Г.В. Интегральные уравнения Вольтерра в обратных задачах механики стержней // Проблемы безопасности на транспорте: материалы XII научно-практической Международной конференции, посвященной 160-летию Белорусской железной дороги (Гомель, 24–25 ноября 2022 г.). — Т. 2. — Издательство Белорусского государственного университета транспорта Гомель, 2022. — С. 172–174.

9. Вахтерова Я.А., Федотенков Г.В. Нестационарная обратная ретроспективная задача для балки Бернулли – Эйлера // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Тезисы докладов. — Издательство Московского университета Москва, 2022. — С. 169–170.

10. Вахтерова Я.А., Федотенков Г.В. Нестационарные обратные задачи для балки Тимошенко и упругого стержня // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXVIII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Вятчи, 16–20 мая 2022 года. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью "ТРИП", 2022. – С. 26-27.

11. Вахтерова Я.А., Федотенков Г.В. Обратная нестационарная задача по идентификации дефекта в упругом стержне конечной длины // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.): в 2 т. Издательство Южного федерального университета Ростов-на-Дону – Таганрог. 2020. – Т. 2. – С. 35-35.

12. Вахтерова Я.А., Федотенков Г.В. Нестационарная обратная задача по идентификации дефектов в упругом стержне // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Механика деформируемого твердого тела. РИЦ БашГУ. Уфа. 2019. – Т. 3. – С. 878-880.