

## ОТЗЫВ

официального оппонента  
о диссертации Авдюшкина Андрея Николаевича  
**«Нелинейный анализ устойчивости коллинеарной точки либрации  
в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел»**,  
представленной на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 1.1.7. – «Теоретическая механика, динамика машин»

В диссертационной работе Авдюшкина Андрея Николаевича рассматривается ограниченная фотогравитационная задача трех тел. Данная задача является одним из возможных обобщений классической задачи трех тел, в рамках которой рассматривается движение тела малой массы в гравитационном поле двух массивных тел, движущихся по известным кеплеровским орбитам. В фотогравитационной задаче предполагается, что наряду с силами гравитационного притяжения на тело малой массы со стороны массивных тел действуют также и репульсивные силы светового давления. Исследование данной задачи имеет не только теоретическое значение для развития методов небесной и классической механики, но также представляет интерес с точки зрения приложения результатов исследования в прикладных задачах проектирования космических аппаратов, использующих для корректировки параметров орбиты солнечный парус.

Диссертационное исследование направлено на решение сложной задачи об устойчивости одного замечательного частного случая движения, при котором тело малой массы расположено на отрезке между массивными притягивающими и излучающими телами. Такое положение тела малой массы называется коллинеарной точкой либрации  $L_1$ . После перехода в систему координат, вращающуюся вместе с притягивающими телами и введения безразмерных переменных Нехвила задача об устойчивости коллинеарной точки либрации  $L_1$  сводится к задаче об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы. Это позволило применить для решения поставленной в диссертации задачи современные методы гамильтоновой механики: метод нормальных форм и теорию КАМ.

Коротко остановимся на содержании диссертационной работы, состоящей из введения, четырех глав, составляющих основу диссертации, и заключения. Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, приводится обстоятельный обзор литературы по исследуемой тематике и формулируется цель исследования.

В первой главе получены уравнения движения тела малой массы в форме уравнений Гамильтона и проведено исследование их стационарных решений, описывающих коллинеарные точки либрации. Было дано подробное описание явления бифуркации коллинеарных точек. В частности, указано, что трехмерное пространство параметров задачи разбивается на семь областей с различным числом и (или) расположением коллинеарных точек либрации.

Вторая глава диссертационной работы посвящена решению вопроса об устойчивости по Ляпунову коллинеарной точки либрации  $L_1$  в плоской ограниченной круговой фотогравитационной задаче трех тел. Для строгого решения задачи здесь применялся хорошо развитый к настоящему времени математический аппарат гамильтоновой механики. Была выполнена нормализация функции Гамильтона уравнений возмущенного движения, т.е. была построена каноническая замена переменных, приводящая гамильтониан к наиболее удобной для исследования устойчивости, так называемой нормальной форме. Здесь следует отметить, что нормализация была выполнена аналитически, а коэффициенты нормальной формы удалось получить в явном виде. Используя этот результат, а также, удачно подобрав параметры задачи, диссертант получил строгое и полное решение задачи как в нерезо-



нансном случае, так и при всех резонансах до четвертого порядка включительно. Строгие выводы об устойчивости, полученные в работе, представлены в изящной аналитической форме, а также проиллюстрированы на диаграммах устойчивости.

В третьей главе диссертации исследована устойчивость коллинеарной точки либрации в плоской эллиптической ограниченной фотогравитационной задаче трех тел. В линейном приближении, полагая эксцентриситет орбит притягивающих и излучающих тел малой величиной, на основании метода малого параметра в аналитической форме были получены уравнения границ областей параметрического резонанса. В частом случае равных масс и интенсивностей излучения притягивающих тел был проведен нелинейный анализ, на основании которого в нерезонансном случае была доказана формальная устойчивость  $L_1$ , а в случае резонанса четвертого порядка была доказана устойчивость в укороченной системе, когда в гамильтониане учитываются члены только до четвертой степени включительно.

В четвертой главе рассмотрена фотогравитационная задача Ситникова, представляющая собой частный случай пространственной фотогравитационной задачи трех тел. В данной задаче предполагается, что массы и интенсивности излучения притягивающих тел равны. В этом случае возможно движение малой массы по прямой, проходящей через центр масс системы перпендикулярно плоскости движения массивных тел. В фотогравитационной задаче Ситникова коллинеарная точка

$L_1$  располагается в центре масс системы и является положением равновесия. В данной постановке уравнения возмущенного движения записываются в виде периодической гамильтоновой системы второго порядка. В диссертации численно были построены области линейной устойчивости точки  $L_1$ , а при малых значениях эксцентриситета границы этих областей были найдены в аналитическом виде. В областях устойчивости в линейном приближении был дополнительно проведен нелинейный анализ устойчивости и установлено, что в указанных областях имеет место также и устойчивость  $L_1$  по Ляпунову. Строгие выводы об устойчивости по Ляпунову в данной задаче были получены методом симплектических отображений. С этой целью диссертантом было построено симплектическое отображение, генерируемое фазовым потоком системы уравнений возмущенного движения. Коэффициенты данного отображения находились численно.

В заключении диссертации дается краткое изложение основных результатов выносимых на защиту.

В целом работа производит очень хорошее впечатление. В ней получен целый ряд новых и важных для развития небесной механики результатов. Особо стоит отметить тщательное и полное исследование всех резонансных случаев данной задачи. Новизной данного исследования является также и то, что в большинстве случаев выводы об устойчивости диссертантом получены в аналитическом виде.

Положительной стороной работы является еще и то, что во всех случаях исследование доведено до своего логического завершения. Так, например, во второй главе работы при рассмотрении плоской круговой ограниченной фотогравитационной задачи трех тел выводы, полученные диссертантом, полностью закрывают вопрос об устойчивости коллинеарной точки  $L_1$  по Ляпунову во всех случаях, когда эта задача решается на основании членов до четвертой степени включительно в разложении гамильтониана уравнений возмущенного движения. То же самое можно сказать и об исследовании устойчивости коллинеарной точки  $L_1$ , проведенном в четвертой главе работы в рамках фотогравитационной задачи Ситникова.

Хотелось бы также отметить, что наряду с применением строгих аналитических методов в работе проводится и численный анализ, результаты которого всегда сопоставляются и показывают хорошее согласование с результатами, полученными в аналитической форме. Последнее обстоятельство убедительно подтверждает достоверность проведенного исследования.



Существенных замечаний к работе нет. Вместе с тем, хотелось бы отметить следующее.

1. В третьей и четвертой главах работы рассматривается эллиптическая задача. При этом в третьей главе эта задача рассматривается для плоских возмущений, а в четвертой главе для пространственных возмущений, ортогональных плоскости орбит притягивающих и излучающих тел. Поэтому в частном случае равных масс и интенсивностей притягивающих тел, совмещая результаты глав 3 и 4 можно было бы получить выводы об устойчивости в линейном приближении для произвольных пространственных возмущений и несколько усилить полученный результат.

2. В первой главе диссертации дано описание областей существования коллинеарных точек либрации. На рисунке 1.8. приведено сечение этих областей при фиксированном соотношении масс притягивающих и излучающих тел. Следовало бы также провести анализ и сделать выводы о том, как деформируется это сечение при стремлении отношения масс к своим предельным значениям: нулю и единице. Такой анализ позволил бы получить более точное представление о форме и расположении указанных областей в трехмерном пространстве параметров задачи.

Данные замечания имеют, в большей степени, характер рекомендаций и никак не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы, которая посвящена актуальной задаче небесной механики, выполнена на высоком научном уровне и содержит значимые результаты.

Диссертация Авдюшкина А.Н. «Нелинейный анализ устойчивости коллинеарной точки либрации в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел» является законченным научным исследованием, имеющим теоретическую, практическую и методическую ценность. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Основные результаты диссертации прошли хорошую апробацию. Они докладывались на научных семинарах, российских и международных конференциях, а также были опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК и индексируемых в Scopus и Web of Science.

Диссертационная работа удовлетворяет требованиям положения ВАК о присуждении ученых степеней, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Авдюшкин Андрей Николаевич, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.7. – «Теоретическая механика, динамика машин».

Доцент кафедры ФН-3 «Теоретическая механика»

МГТУ им. Баумана, к.ф.-м.н.

09.06.23

*Баркин*  
БАРКИН

Баркин М.Ю.

Подпись Баркина Михаила Юрьевича удостоверяю.

Начальник Управления кадрового  
сопровождения и администрирования

\_\_\_\_\_  
(должность)

\_\_\_\_\_  
(подпись)

М.П.

\_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

Адрес: 105005, г. Москва,  
ул. 2-я Бауманская, д.5, к.1  
Тел.: +7 (985) 980-78-94  
E-mail: barkin@yandex.ru



*С отзывом ознакомлен 14.06.23*