

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Артемова Елизавета Марковна

**Исследование динамики точечных особенностей и их влияния
на движение твердого тела в идеальной жидкости**

Специальность 1.1.7. — Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Килин Александр Александрович

Оглавление

Введение	4
1 Движение твердого тела в присутствии неподвижной точечной особенности	13
1.1 Уравновешенное твердое тело без собственной циркуляции	13
1.1.1 Устойчивость кругового движения профиля	16
1.1.2 Стабилизация кругового движения профиля	20
1.2 Уравновешенное твердое тело с собственной циркуляцией	25
1.2.1 Движение профиля в поле неподвижного вихря	31
1.2.2 Движение профиля в поле неподвижного источника	41
1.2.3 Отличие вихря и источника при $\Gamma_0 \neq 0$	45
1.3 Неуравновешенное твердое тело без собственной циркуляции	48
1.3.1 Возможные движения неуравновешенного цилиндра	54
1.4 Заключение	59
2 Динамика квадратных вихревых решеток	61
2.1 Уравнения движения и первые интегралы	61
2.2 Динамика двух вихревых решеток	65
2.2.1 Редукция	65
2.2.2 Анализ редуцированной системы	66
2.2.3 Абсолютная динамика	70
2.3 Динамика трех вихревых решеток	71
2.3.1 Редукция	71
2.3.2 Численное исследование системы	72
2.4 Динамика четырех вихревых решеток	74
2.4.1 Инвариантное многообразие	74
2.4.2 Редукция	75
2.4.3 Численное исследование системы	76

2.5	Заключение	78
3	Динамика вихрей на конечном «плоском» цилиндре	80
3.1	Уравнения движения и первые интегралы	80
3.1.1	Редукция	84
3.2	Типы бифуркационных диаграмм	86
3.3	Бифуркационный анализ	90
3.3.1	I область	90
3.3.2	II область	94
3.3.3	III область	96
3.4	Устойчивость дорожек Кармана в полосе жидкости	96
3.5	Заключение	99
	Заключение по диссертации	100
	Литература	101

Введение

Модель точечного вихря берет свое начало с основополагающей работы Гельмгольца по динамике вихрей 1858 г. [27]. Позднее в своих лекциях Кирхгоф указал общие уравнения, описывающие движение N точечных вихрей на плоскости [35]. В связи с этим в современной литературе уравнения движения точечных вихрей в идеальной жидкости обычно называют уравнениями Кирхгофа. В дальнейшем модель точечных вихрей была обобщена на случай их движения в ограниченных областях [20, 40] и по криволинейным поверхностям [75, 64, 70, 71, 15]. Достаточно полный исторический обзор исследований в этой области приведен, например, в [73].

Несмотря на простоту, некоторые модели динамики точечных вихрей достаточно точно описывают реальные физические процессы. Например, некоторые вихревые процессы в атмосфере и океане описывают геострофической моделью вихрей Бесселя [45] или моделью точечных вихрей в двухслойной вращающейся жидкости [23]. Уравнения, подобные уравнениям движения точечных вихрей, возникают при описании движения особенностей в конденсате Бозе–Эйнштейна [61, 37, 51] и хетонов [55, 56] — океанических вихревых структур, существующих в стратифицированной жидкости. Динамика вихревых нитей в конденсате Бозе–Эйнштейна описывается конечномерной моделью [16, 43], которую можно рассматривать как промежуточную между классической моделью точечных вихрей на плоскости и моделью вихрей в круговой области. Отметим, что модель вихрей в конденсате Бозе–Эйнштейна появилась сравнительно недавно и достаточно много задач в рамках этой модели до сих пор не изучено. При описании движения кольцевых вихрей также возникают уравнения, схожие с уравнениями движения точечных вихрей [8, 9, 13, 14]. Также модель точечных особенностей используется при моделировании астрофизических и геофизических процессов [69, 79].

Одно из направлений исследований в динамике точечных вихрей связано с поиском инвариантных многообразий рассматриваемой системы и изу-

чением динамики на них. Как известно, уравнения движения точечных вихрей сохраняют (при некоторых ограничениях на интенсивности) некоторую дискретную симметрию, которой обладает система вихрей в начальный момент. Каждой такой симметрии соответствует инвариантное многообразие в фазовом пространстве, а исследование динамики на этом инвариантном многообразии эквивалентно изучению соответствующих симметричных решений. Исследование зеркально-симметричных конфигураций восходит к работам [21, 20], а центрально-симметричных — к [74]. Подробное исследование центрально-симметричных решений для четырех вихрей на плоскости и сфере приведено в [73, с. 90]. Исследование конфигураций на сфере симметричных относительно инверсии и смены знака интенсивности привело к возникновению новой модели антиподальных вихрей на сфере [72]. Центрально-симметричные конфигурации вихрей на цилиндре рассматривались в работе [59].

Динамика вихрей на криволинейных поверхностях отличных от сферы изучена достаточно слабо. Так, в работе [26] рассмотрена устойчивость вихревых цепочек на поверхности вращения. Динамика точечных вихрей на поверхности Лобачевского изучалась в работе [34]. Динамика двух вихрей и некоторые частные решения задачи о точечных вихрях на тороидальной поверхности рассмотрены в работе [52]. Случаи более сложных поверхностей (непостоянной кривизны, многосвязных) практически не изучены. Укажем лишь несколько работ, посвященных обобщению известных результатов по динамике вихрей на случай произвольных поверхностей. В работе [10] обобщаются уравнения движения точечных вихрей на случай произвольной поверхности, а также доказывается гипотеза Кимуры о движении вихревого диполя по геодезической. В недавней работе [22] приводится попытка построения модели точечных вихрей, взаимодействующих с гармоническим потоком на произвольной компактной поверхности.

Отдельно отметим класс задач о движении точечных вихрей на так называемых «плоских» цилиндре и торе. Данные задачи возникают при описании динамики периодических вихревых структур на плоскости после редукции по соответствующей дискретной группе симметрий. При этом бесконечная последовательность вихрей заменяется на один вихрь и добавляются периодические граничные условия. Исследования в данном направлении восходят к работе Кармана [30], посвященной анализу устойчивости вихревой дорожки, возника-

ющей за телом, движущимся в жидкости. Позднее динамика вихрей на «плоском» цилиндре исследовалась, например, в работах [1, 5, 44, 24]. В частности, в работе [1] было проведено полное исследование движения трех вихрей на цилиндре с суммарной нулевой интенсивностью. А в работах [5, 44] изучалось движение особых (зеркально-симметричных) конфигураций четырех вихрей.

Модель точечного вихря применяется также для построения конечномерных уравнений совместного движения вихревых структур и твердого тела. Впервые уравнения движения уравновешенного кругового профиля в присутствии точечных вихрей были получены в работах [48, 49, 53]. Движение неуравновешенного кругового профиля в присутствии точечных вихрей рассматривалось в недавней работе [41]. Отметим, что смещение центра масс кругового профиля приводит к потере дополнительной симметрии и создает препятствия к интегрируемости. В частности, задача о движении уравновешенного кругового профиля и точечного вихря интегрируема, а в случае кругового профиля со смещенным центром масс система становится неинтегрируемой и может демонстрировать хаотическое поведение.

Наряду с точечными вихрями рассматривается (достаточно редко) движение других точечных особенности в жидкости, таких как источники, вихреисточники, диполи [82, 54, 6, 7]. Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию движения кругового профиля (уравновешенного и неуравновешенного) в поле точечной особенности и движения периодических вихревых структур в идеальной несжимаемой жидкости. Диссертация состоит из трех глав: глава 1: «Движение твердого тела в присутствии неподвижной точечной особенности»; глава 2: «Движение квадратных вихревых решеток»; глава 3: «Движение вихрей на конечном «плоском» цилиндре».

В первой главе рассмотрено движение уравновешенного кругового профиля, обладающего собственной циркуляцией, а также без нее, в поле неподвижной точечной особенности. Построена конечномерная математическая модель, описывающая движение профиля в поле неподвижной особенности. Показано, что в отсутствие собственной циркуляции движение профиля в поле неподвижного вихря и неподвижного источника описывается одинаковыми уравнениями и какие-либо качественные различия в динамике отсутствуют. Однако при добавлении собственной циркуляции в поведении профиля возникают существенные отличия при движении в поле неподвижного вихря и неподвижного источ-

ника. Обсуждаются причины указанных различий.

Также рассматривается движение неуравновешенного кругового профиля без собственной циркуляции в поле точечной особенности. Построены уравнения движения неуравновешенного кругового профиля в поле источника, интенсивность которого зависит от времени. Показано, что в случае постоянной интенсивности уравнения движения кругового профиля являются гамильтоновыми. Построен и проанализирован эффективный потенциал, описывающий динамику системы.

Во второй главе проводится полный качественный анализ задачи о движении двух точечных вихрей на «плоском» торе, которая эквивалентна задаче взаимодействия двух вихревых решеток. Интересным отличием данной задачи от случая движения вихрей на плоскости и сфере является изменение расстояния между вихрями во время движения. Исследуется вопрос о возможных траекториях движения вихрей в абсолютном пространстве. Также в данной работе рассматриваются задачи о движении трех и четырех вихрей на торе. Для рассматриваемых задач приводится процедура редукции. С помощью построения отображения Пуанкаре численно доказываемость неинтегрируемость данных задач. Показано, что сечение изоэнергетической поверхности, на которой строится отображение, может представлять собой достаточно сложную поверхность, например сферу с пятью ручками.

Третья глава посвящена исследованию динамики двух вихрей на «плоском» цилиндре конечной длины. Эта задача эквивалентна задаче о движении двух вихревых цепочек в полосе жидкости. Предложена модель, описывающая взаимодействие точечных вихрей на «плоском» конечном цилиндре. Данная модель используется для проведения полного бифуркационного анализа задачи двух вихрей произвольной интенсивности. Приводятся уравнения движения и выполняется их редукция на уровень первого интеграла. Выполнен параметрический анализ задачи и указаны области в пространстве параметров, которым соответствуют разные типы бифуркационных диаграмм. Также приводятся все возможные типы бифуркационных диаграмм и фазовых портретов приведенной системы. Указана интерпретация полученных результатов с точки зрения устойчивости вихревых дорожек при различных параметрах и начальных условиях.

Целью данной работы является исследование движения кругового профиля

(уравновешенного и неуравновешенного) в поле точечной особенности и движения периодических вихревых структур в идеальной несжимаемой жидкости на основе общих подходов, применяемых для анализа конечномерных математических моделей теоретической механики и гидродинамики.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**.

1. Исследовать движение уравновешенного кругового профиля без собственной циркуляции в поле неподвижной точечной особенности.
2. Исследовать управляемое движение уравновешенного кругового профиля без собственной циркуляции за счет изменения интенсивности неподвижного точечного источника.
3. Исследовать влияние собственной циркуляции кругового профиля на его движение в поле неподвижной точечной особенности.
4. Исследовать движение неуравновешенного кругового профиля в поле неподвижной точечной особенности.
5. Исследовать движение двух и трех вихрей на «плоском» торе в зависимости от их интенсивности.
6. Исследовать движение четырех вихрей на центрально-симметричном инвариантном многообразии на «плоском» торе.
7. Исследовать движение двух вихрей на «плоском» цилиндре конечной длины в зависимости от начальных условий и параметров системы (длины образующей цилиндра и интенсивности вихрей).

Научная новизна.

1. Построена двумерная математическая модель, описывающая движение кругового профиля (в общем случае со смещенным центром масс и собственной циркуляцией) в присутствии неподвижной точечной особенности.
2. Доказано, что при отсутствии у кругового профиля собственной циркуляции тип неподвижной точечной особенности качественно не влияет на динамику системы, а также что такая система является интегрируемой.

3. Впервые показано, что с помощью изменения интенсивности точечного источника можно стабилизировать периодическое движение уравновешенного кругового профиля (без собственной циркуляции) вокруг точечной особенности.
4. Доказано, что задача о движении уравновешенного кругового профиля с собственной циркуляцией в поле неподвижного точечного вихря является интегрируемой. Для задачи о движении профиля в поле неподвижного точечного источника указаны возможные типы движений.
5. Доказано, что система двух вихрей на торе является интегрируемой, а вид фазового портрета не зависит от интенсивности вихрей (за исключением случая вихревой пары). В случае суммарной ненулевой интенсивности задача о движении трех вихрей на торе, в отличие от движения вихрей на плоскости, неинтегрируема.
6. Впервые показано, что система четырех вихрей на торе допускает центрально-симметричное инвариантное многообразие. Доказано, что задача о движении вихрей на этом инвариантном многообразии является неинтегрируемой, в отличие от аналогичной задачи для вихрей на плоскости.
7. Построена модель, описывающая движение вихрей на «плоском» цилиндре конечной длины. Показано, что эта задача соответствует задаче о движении вихрей на торе на инвариантном многообразии. Для случая двух вихрей на конечном «плоском» цилиндре проведен полный бифуркационный анализ.

Научная и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут быть использованы в теоретической механике и математической физике, а также в теоретической гидродинамике. Результаты диссертации, описанные в главе 1, могут быть использованы для разработки методов управления движением твердых частиц в жидкости. Результаты диссертации, полученные в главах 2 и 3, могут быть использованы для дальнейшего изучения динамики и устойчивости периодических структур в жидкости.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе применяются классические для конечномерных динамических систем и теоретиче-

ской механики методы, такие как поиск неподвижных точек и анализ их устойчивости, нахождение эффективного потенциала, построение бифуркационных диаграмм и фазовых портретов. Также использовались методы численного анализа динамических систем: отображение Пуанкаре, построение карт зависимости типа траекторий от начальных условий или параметров системы. Помимо этого, применялся математический аппарат работы с бесконечными рядами.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Исследована динамика уравновешенного профиля без собственной циркуляции в присутствии неподвижной точечной особенности. Показано, что данная задача является интегрируемой. Указаны неподвижные точки, проведен бифуркационный анализ и построены фазовые портреты.
2. Построено управление за счет изменения интенсивности источника с помощью обратной связи, которое позволяет стабилизировать периодическое движение уравновешенного кругового профиля (без собственной циркуляции) вокруг особенности.
3. Исследовано влияние собственной циркуляции кругового профиля на его движение в поле неподвижной точечной особенности. Указано, что задача о движении кругового профиля в присутствии неподвижного точечного вихря интегрируема. Выполнен бифуркационный анализ, приведены фазовые портреты. Для движения профиля в присутствии неподвижного точечного источника указаны возможные типы движения профиля.
4. Исследована задача о движении неуравновешенного кругового профиля в поле неподвижной точечной особенности. Указаны возможные типы движения профиля, построен и проанализирован эффективный потенциал.
5. Показано, что задача о движении двух вихрей произвольных интенсивностей на «плоском» торе является интегрируемой, а вид фазового портрета не зависит от интенсивности рассматриваемых вихрей (за исключением случая вихревой пары). Показано, что задача о движении трех вихрей на «плоском» торе при суммарной ненулевой интенсивности является неинтегрируемой.

6. Построены уравнения движения четырех вихрей на центрально-симметричном инвариантном многообразии на «плоском» торе. Численно показана неинтегрируемость такой задачи.
7. Построены уравнения движения точечных вихрей на ограниченном «плоском» цилиндре. Указан первый интеграл, предложена процедура редукции. Для случая двух вихрей проведен полный бифуркационный анализ.

Достоверность полученных результатов обеспечивается: 1) использованием математического аппарата теоретической механики и теории динамических систем; 2) применением классических аналитических и численных методов исследования; 3) использованием верифицированных символьных и численных методов, реализованных в Maple, MatLAB, Mathematica.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и научных семинарах: 1) семинаре Уральского математического центра (Ижевск, УдГУ, 2023, 2024); 2) семинаре «Динамические системы и механика» (Москва, МАИ, 2024); 3) Международной конференции «Регулярная и хаотическая динамика» (Сочи, Сириус, 2023); 4) Международной конференции «Динамические системы. Теория и приложения» (Нижний Новгород, 2022); 5) Международной конференции «Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics» (Чебоксары, 2019); 6) VII Международной конференции «Geometry, Dynamics, Integrable Systems - GDIS 2018» (Москва, Долгопрудный, 2018); 7) XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Нанoeлектроника, нанoфотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2018 г.).

Личный вклад. В совместных работах [3, 4, 32, 33, 67] постановка задач, обсуждение и интерпретация результатов проводились совместно с научным руководителем и соавторами работ. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в диссертационной работе. Также автором реализованы вычислительные и аналитические программы в системах компьютерной алгебры и численного анализа Maple, MatLAB, Mathematica.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 печатных работах, 6 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК и

индексируемых в WoS и Scopus [3, 4, 32, 33, 67, 68], 6 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 109 страниц, включая 38 рисунков. Список литературы содержит 83 наименование.

Глава 1. Движение твердого тела в присутствии неподвижной точечной особенности

1.1 Уравновешенное твердое тело без собственной циркуляции

Рассмотрим плоскопараллельное движение уравновешенного кругового профиля радиусом R в идеальной несжимаемой жидкости в присутствии источника интенсивности q . Относительно рассматриваемой системы примем следующие допущения:

- 1°) движение жидкости вне цилиндра и особенности является безвихревым;
- 2°) циркуляция по любому замкнутому контуру, охватывающему профиль, равна нулю;
- 3°) жидкость покоится на бесконечности.

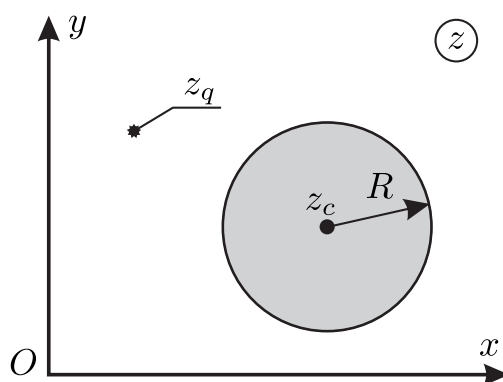


Рисунок 1.1 – Круговой профиль и источник в жидкости

Для описания движения системы введем неподвижную (инерциальную) систему координат Oxy , в которой жидкость покоится на бесконечности (см. рис. 1.1). Координатам (x, y) поставим в соответствие комплексную переменную

$z = x + iy$. Положение центра масс профиля будем задавать как $z_c = x_c + iy_c$, а положение источника — как $z_q = x_q + iy_q$.

В силу допущения 1° движение жидкости может быть полностью определено комплексным потенциалом

$$W = -\frac{vR^2}{z - z_c} + \frac{q}{2\pi} \ln(z - z_q) + \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{R^2}{z - z_c} - \overline{z_q - z_c}\right). \quad (1.1)$$

Здесь $z = x + iy$ — комплексная переменная, $v = \dot{z}_c = v_x + iv_y$ — скорость центра масс профиля.

Отметим, что первое и второе слагаемые в (1.1) — это классические комплексные потенциалы кругового цилиндра, движущегося со скоростью v , и источника интенсивности q соответственно [31]. Третье слагаемое обусловлено теоремой Милна–Томсона [78] и обеспечивает выполнение условия непротекания на границе профиля.

Сила, действующая на профиль. Для построения уравнений движения кругового профиля необходимо определить силу, действующую на него со стороны жидкости. Для рассматриваемой системы эта сила может быть вычислена с помощью метода, предложенного Седовым в [80]:

$$F_x + iF_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \overline{\left(\frac{dW}{dz}\right)^2} dz + \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{dS z_c}{dt} + i\rho \int_C z \frac{dW}{dt} dz \right), \quad (1.2)$$

где ρ — плотность жидкости, $S = \pi R^2$ — площадь профиля, F_x, F_y — проекции силы на оси Ox, Oy соответственно. В силу допущения 2° в выражении (1.2) не учитываются слагаемые, связанные с циркуляцией.

В общем случае при вычислении силы, действующей на профиль, будем считать, что положения источника z_q и геометрического центра профиля z_c зависят от времени t , а интенсивность q — от времени t , координат z_q, z_c и скоростей \dot{z}_q, \dot{z}_c . Тогда проекции F_x, F_y силы на оси неподвижной системы координат Oxy примут вид

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\rho R^2}{2\pi\sigma^2|z_s|^4} \left(2\pi q\sigma^2 \operatorname{Re} [\dot{\bar{z}}_q z_s^2] - 2\sigma^2|z_s|^2 \dot{q}\pi x_s - q^2|z_s|^2 x_s \right) - \rho R^2 \pi \dot{v}_x, \\ F_y &= \frac{\rho R^2}{2\pi\sigma^2|z_s|^4} \left(2\pi q\sigma^2 \operatorname{Im} [\dot{\bar{z}}_q z_s^2] - 2\sigma^2|z_s|^2 \dot{q}\pi y_s - q^2|z_s|^2 y_s \right) - \rho R^2 \pi \dot{v}_y, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $z_s = z_q - z_c = x_s + iy_s$, $\sigma^2 = R^2 - |z_s|^2$, а точка обозначает полную производную по времени. Последние слагаемые в выражениях (1.3) обусловлены эффектом присоединенных масс.

В общем случае, когда интенсивность q зависит от координат z_q , z_c и скоростей \dot{z}_q , \dot{z}_c , сила, действующая на профиль, не является потенциальной. При этом в системе могут возникать притягивающие режимы.

Замечание 1.1.1. Действующий на профиль момент сил, вычисленный относительно его геометрического центра, равен нулю. Это обусловлено тем, что в каждой точке контура профиля нормаль направлена к центру профиля.

Замечание 1.1.2. В случае неподвижного профиля ($\dot{z}_c = 0$) и неподвижного источника постоянной интенсивности ($\dot{z}_q = 0$, $\dot{q} = 0$) сила, действующая на профиль, всегда направлена к источнику и не зависит от знака q . Данный парадокс модели идеальной жидкости был обнаружен еще в классической работе [78].

Уравнения движения. В случае когда интенсивность q является заданной функцией времени, сила, действующая на профиль, будет потенциальной. При этом уравнения движения центра масс профиля можно представить в канонической гамильтоновой форме:

$$\dot{x}_c = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{y}_c = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad (1.4)$$

с гамильтонианом явно зависящим от времени:

$$H = \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2\mu} - \frac{\rho R^2 q}{|z_s|^2} (x_s \dot{x}_q + y_s \dot{y}_q) - \rho R^2 \dot{q} \ln |z_s| + \frac{\rho q^2}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{R^2}{|z_s|^2} \right). \quad (1.5)$$

Здесь m — масса единицы длины цилиндра, $\mu = m + \rho\pi R^2$ — сумма инерционной и присоединенной масс профиля, $p_x = \mu v_x$, $p_y = \mu v_y$ — проекции импульса системы «профиль + жидкость» на оси Ox , Oy соответственно. Уравнения движения (1.4) в явном виде запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c = \mu^{-1} p_x, \quad \dot{p}_x &= \frac{\rho R^2}{2\pi\sigma^2 |z_s|^4} \left(2\pi q \sigma^2 \operatorname{Re} [\dot{z}_q z_s^2] - 2\sigma^2 |z_s|^2 \dot{q} \pi x_s - q^2 |z_s|^2 x_s \right), \\ \dot{y}_c = \mu^{-1} p_y, \quad \dot{p}_y &= \frac{\rho R^2}{2\pi\sigma^2 |z_s|^4} \left(2\pi q \sigma^2 \operatorname{Im} [\dot{z}_q z_s^2] - 2\sigma^2 |z_s|^2 \dot{q} \pi y_s - q^2 |z_s|^2 y_s \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Далее рассмотрим движение профиля в поле неподвижного источника постоянной и переменной интенсивности.

1.1.1 Устойчивость кругового движения профиля

Рассмотрим движение цилиндра в поле неподвижного источника постоянной интенсивности ($\dot{z}_q = 0$, $\dot{q} = 0$). В силу произвольности выбора начала системы координат Oxy можно считать, что источник расположен в точке $z_q = 0$. В этом случае положение профиля относительно источника удобнее описывать полярными координатами

$$r = |z_c| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}, \quad \varphi = \arg z_c, \quad r \in (R, +\infty), \quad \varphi \in [-\pi, \pi). \quad (1.7)$$

При этом соответствующие координатам r , φ обобщенные импульсы определим как

$$p_r = \mu \dot{r}, \quad p_\varphi = \mu r^2 \dot{\varphi}. \quad (1.8)$$

Скобка Пуассона новых переменных (1.7), (1.8) остается канонической, а гамильтониан (1.5) принимает вид

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + \frac{\rho q^2}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right). \quad (1.9)$$

Поскольку гамильтониан (1.9) не зависит от переменной φ , то согласно теореме Нетер [46, 65] обобщенный импульс p_φ сохраняется вдоль траекторий системы. Таким образом, рассматриваемая система допускает интеграл момента

$$K = p_\varphi. \quad (1.10)$$

На фиксированном уровне $K = k$ интеграла (1.10) уравнения движения редуцируются к системе с одной степенью свободы:

$$\dot{r} = \left. \frac{\partial H}{\partial p_r} \right|_{p_\varphi=k} = \frac{p_r}{\mu}, \quad \dot{p}_r = - \left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{p_\varphi=k} = \frac{k^2}{\mu r^3} - \frac{\rho R^2 q^2}{2\pi r(r^2 - R^2)}, \quad (1.11)$$

где H — ограничение гамильтониана (1.9) на фиксированный уровень $K = k$

интеграла. Гамильтониан может быть представлен в виде

$$H = \frac{1}{2\mu} p_r^2 + U(r), \quad (1.12)$$

$$U(r) = \frac{1}{2\mu} \frac{k^2}{r^2} + \frac{\rho q^2}{4\pi} \ln\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \quad (1.13)$$

Заметим, что для реконструкции движения профиля на плоскости (x, y) уравнения (1.11) следует дополнить квадратурой

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{k}{\mu} \int_0^t \frac{d\tau}{r^2(\tau)}.$$

Замечание 1.1.3. Движения редуцированной системы (1.11) при $K = k \geq 0$ и $K = -k$ совпадают. Следовательно, достаточно выполнить анализ динамики при $k \geq 0$.

Уравнения (1.11) представляют собой гамильтонову систему с одной степенью свободы. В ее исследовании будем опираться на классический подход теоретической механики, основанный на изучении линий уровня гамильтониана (фазового портрета) системы и бифуркаций, возникающих при изменении значений параметров [11, 65].

В первую очередь отметим, что гамильтониан (1.12) определен при $r > R$ и независимо от значений параметров обладает следующим свойством:

$$\lim_{r \rightarrow R+0} H(r, p_r) = -\infty. \quad (1.14)$$

Также гамильтониан (1.12) является четной функцией p_r , то есть $H(r, -p_r) = H(r, p_r)$, и, следовательно, фазовый портрет системы будет симметричным относительно линии $p_r = 0$. Из уравнений (1.11) видно, что неподвижные точки системы могут располагаться только на линии $p_r = 0$ и соответствуют критическим точкам потенциала (1.13).

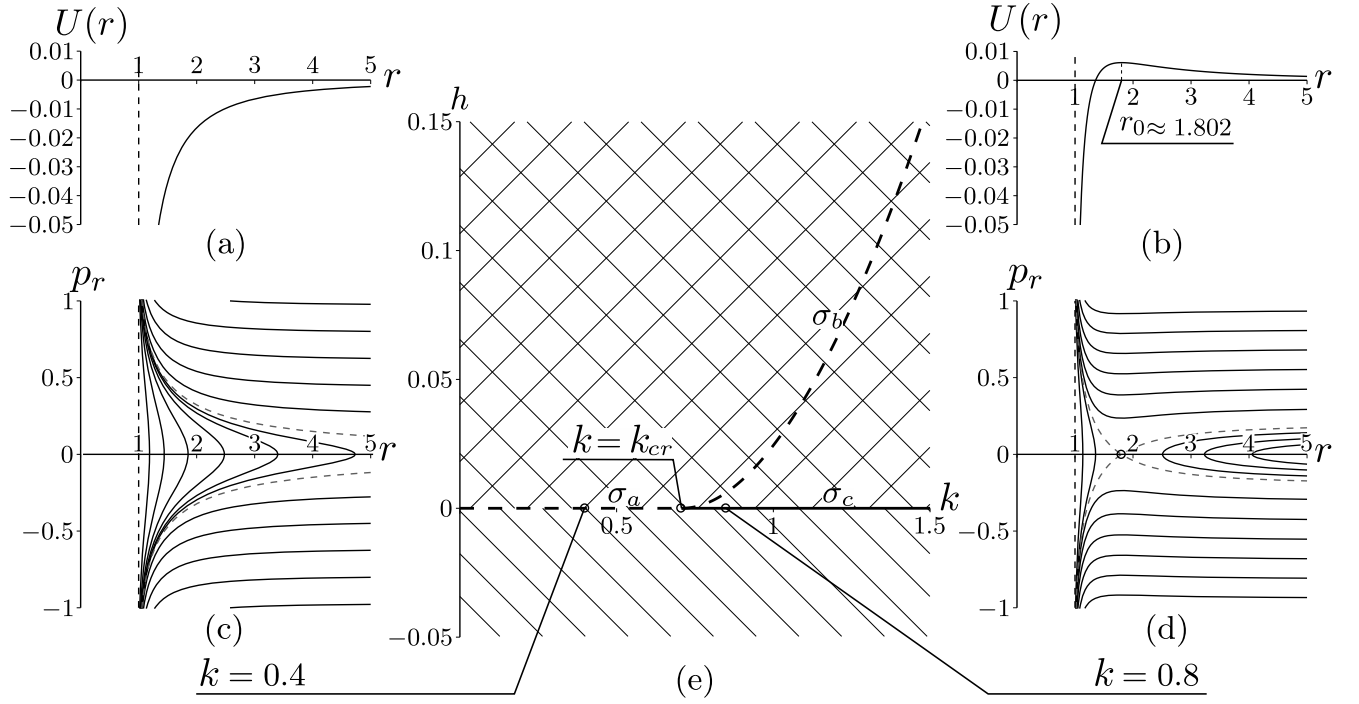


Рисунок 1.2 – Характерный вид (а) потенциала (1.13) при $k < k_{cr}$, (б) потенциала (1.13) при $k > k_{cr}$, (с) фазового портрета системы при $k < k_{cr}$, (д) фазового портрета системы при $k > k_{cr}$, (е) бифуркационная диаграмма. Значения параметров: $m = 1$, $R = 1$, $q = 1$, $\rho = 1$.

Выделяются два качественно различных случая:

А. Потенциал $U(r)$ (см. рис. 1.2b) имеет максимум в точке

$$r_0 = R|k| \sqrt{\frac{2\pi}{2\pi k^2 - \rho\mu q^2 R^2}} \quad (1.15)$$

при $k > k_{cr}$, где

$$k_{cr} = |q|R \sqrt{\frac{\rho\mu}{2\pi}}.$$

Точка максимума (1.15) соответствует седловой неподвижной точке системы (1.11):

$$r = r_0, \quad p_r = 0. \quad (1.16)$$

Характерный вид фазового портрета системы при $k > k_{cr}$ показан на рис. 1.2d. На рис. 1.2d пунктирными линиями отмечены устойчивые и неустойчивые многообразия седловой точки (1.16). Пунктирная линия $r = R$ соответствует особенности (1.14).

Траектория геометрического центра профиля на плоскости (x, y) , соответствующая неподвижной точке (1.16), представляет собой окружность

$$x(t) = x_q + r_0 \cos \left(\varphi(0) + \frac{k}{\mu r_0^2} t \right), \quad y(t) = y_q + r_0 \sin \left(\varphi(0) + \frac{k}{\mu r_0^2} t \right). \quad (1.17)$$

Будем называть данное движение *круговым*.

В. При $k < k_{cr}$ потенциал $U(r)$ является монотонно возрастающей функцией на промежутке $r \in (R, +\infty)$ (см. рис. 1.2а), следовательно, система не имеет неподвижных точек. Характерный вид фазового портрета системы при $k < k_{cr}$ показан на рис. 1.2с. На рис. 1.2с пунктирными линиями отмечены критические траектории, разделяющие различные типы движения. Пунктирная линия $r = R$ соответствует особенности (1.14).

Из фазовых портретов (см. рис. 1.2с и 1.2d) видно, что все траектории системы (1.11) либо «убегают» на бесконечность, либо «притягиваются» к источнику, за исключением одной траектории, соответствующей неподвижной точке при $k > k_{cr}$.

Бифуркационная диаграмма системы на плоскости первых интегралов (k, h) , где h — уровень интеграла (1.12), приведена на рис. 1.2е. В силу замечания 1.1.3 мы привели только часть бифуркационной диаграммы, соответствующую значениям $k > 0$.

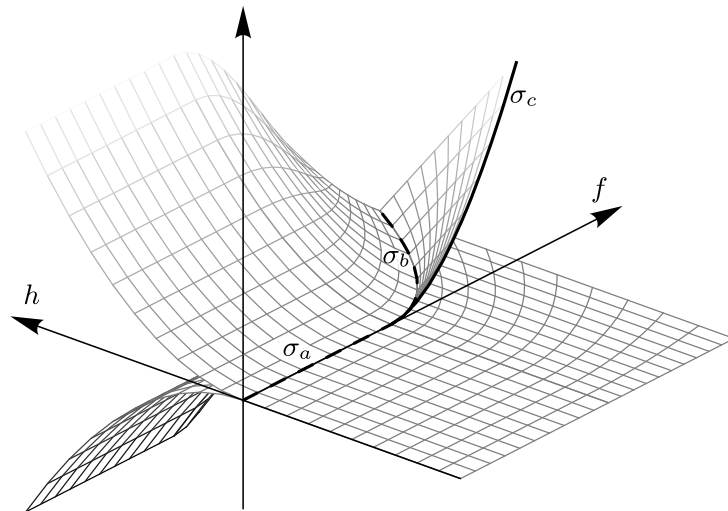


Рисунок 1.3 – Бифуркационный комплекс

При фиксированном k каждому значению $h > 0$ (двойная штриховка на

рис. 1.2e) соответствует по две фазовые траектории, значению $h < 0$ (одинарная штриховка на рис. 1.2e) — одна фазовая траектория. Бифуркационной диаграмме 1.2e соответствует бифуркационный комплекс, показанный на рис. 1.3.

Линия σ_a соответствует критическим траекториям системы, возникающим в системе при $k < k_{cr}$. Линия σ_b соответствует неподвижной точке (1.16) и ее устойчивым и неустойчивым многообразиям. Линия σ_c соответствует границе листа.

Далее рассмотрим задачу стабилизации неподвижной точки (1.16) за счет изменения интенсивности источника с помощью обратной связи.

1.1.2 Стабилизация кругового движения профиля

Рассмотрим неподвижный источник переменной интенсивности. Оказывается, что описанное выше неустойчивое круговое движение может быть стабилизировано с помощью управления интенсивностью источника через обратную связь.

Как и в предыдущем случае. положение профиля относительно источника будем задавать полярными координатами (1.7), которым соответствуют импульсы (1.8). При этом гамильтониан (1.5) примет вид

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + \frac{\rho q^2}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \rho R^2 \dot{q} \ln r.$$

Нетрудно видеть, что при $\dot{q} \neq 0$ рассматриваемая система также допускает интеграл момента (1.10). Уравнения движения на фиксированном уровне $K = k$ интеграла (1.10) примут вид

$$\dot{r} = \frac{p_r}{\mu}, \quad \dot{p}_r = \frac{k^2}{\mu r^3} - \frac{\rho R^2 q^2}{2\pi r(r^2 - R^2)} + \frac{\rho R^2 \dot{q}}{r}. \quad (1.18)$$

В качестве управления удобно выбрать производную \dot{q} , так как данная величина входит в уравнения (1.18) линейно. Для доказательства управляемости и синтеза обратной связи оказывается удобным выполнить следующую замену переменных:

$$r = r, \quad p_r = \frac{\mathcal{P}}{r}. \quad (1.19)$$

С учетом замены (1.19) уравнения (1.18) примут вид

$$\dot{r} = \frac{\mathcal{P}}{\mu r}, \quad \dot{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}^2 + k^2}{\mu r^2} - \frac{\rho R^2 q^2}{2\pi(r^2 - R^2)} + \rho R^2 u, \quad \dot{q} = u, \quad (1.20)$$

где u — управляющее воздействие. Фазовое пространство управляемой системы (1.20) трехмерно, обозначим его как $\mathcal{Q} = \{(r, \mathcal{P}, q) \mid r > R\}$.

В отсутствие управления ($u = 0$) система (1.20) допускает однопараметрическое семейство неподвижных точек

$$r = r_0 = R|k| \sqrt{\frac{2\pi}{2\pi f^2 - \rho\mu q_0^2 R^2}}, \quad \mathcal{P} = 0, \quad q = q_0, \quad (1.21)$$

где q_0 — параметр, удовлетворяющий следующему неравенству:

$$0 < |q_0| < \frac{|k|}{R} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho\mu}}.$$

Анализ управляемости и синтез обратной связи выполним по аналогии с работой [77]. Для этого зафиксируем величину q_0 и линеаризуем уравнения (1.20) в окрестности соответствующей неподвижной точки семейства (1.21):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{J}\mathbf{w} + \mathbf{b}u, & (1.22) \\ \mathbf{w} &= \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \mathcal{P} \\ \delta q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho R^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \alpha &= \frac{1}{\mu r_0}, \quad \beta = -\frac{2k^2}{\mu r_0^3} + \frac{\rho R^2 r_0 q_0^2}{\pi(r_0^2 - R^2)^2}, \quad \gamma = -\frac{\rho R^2 q_0}{\pi(r_0^2 - R^2)}. \end{aligned}$$

Здесь вектор \mathbf{w} задает отклонение от неподвижной точки $(r_0, 0, q_0)$.

Якобиан \mathbf{J} обладает следующим набором собственных чисел и правых собственных векторов:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{\alpha\beta}, \quad \lambda_3 = -\sqrt{\alpha\beta}, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \sqrt{\alpha\beta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\sqrt{\alpha\beta} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Отметим, что собственные числа λ_2, λ_3 являются действительными, а нулевое собственное число λ_1 соответствует сдвигу по параметру q_0 семейства неподвижных точек (1.21).

Поскольку система (1.22) является линейной системой с постоянными коэффициентами, ее управляемость может быть исследована на основе критерия Калмана [29]. Согласно данному критерию система (1.22) будет вполне управляемой, если выполнено следующее условие:

$$\det \|\mathbf{b}, \mathbf{J}\mathbf{b}, \mathbf{J}^2\mathbf{b}\| = -\frac{2\rho^2 q_0^2 k^2 R^8 (2mk^2 + \rho^2 \mu R^2 q_0^2)}{\mu^3 r_0^5 (r_0^2 - R^2)^2 (2\pi k^2 - \rho \mu R^2 q_0^2)^2} \neq 0. \quad (1.25)$$

Из выражения (1.25) видно, что линеаризованная система является вполне управляемой. Таким образом, оказывается возможным построить управление, приводящее систему (1.22) к нулевому решению.

Будем строить управление через обратную связь в виде линейной комбинации отклонений $\delta r, \delta \mathcal{P}, \delta q$:

$$u = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{w}, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T = \text{const}. \quad (1.26)$$

Подставим выражение (1.26) в уравнения (1.22), получим

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{J}_f \mathbf{w}, \quad \mathbf{J}_f = \mathbf{J} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}^T. \quad (1.27)$$

Из уравнений (1.27) видно, что для стабилизации нулевого решения необходимо выбрать коэффициенты f_i ($i = 1, 2, 3$) таким образом, чтобы все собственные числа матрицы \mathbf{J}_f имели отрицательную действительную часть. В этом случае нулевое решение системы (1.22) становится асимптотически устойчивым, а решение (1.17) исходной системы (1.6) становится предельным циклом.

В общем случае собственные числа матрицы \mathbf{J}_f задаются громоздкими выражениями. Тем не менее их анализ может быть выполнен в некоторых частных случаях. Для этого оказывается удобным перейти в базис собственных векторов матрицы \mathbf{J} с помощью следующей замены переменных:

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{w},$$

где \mathbf{K} — матрица, столбцами которой являются собственный векторы (1.24).

Тогда уравнения (1.27) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{\Omega}\mathbf{y}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Lambda} + \tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{g}^T, \\ \mathbf{\Lambda} &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{f}^T = \mathbf{g}^T\mathbf{K}^{-1}.\end{aligned}$$

Замечание 1.1.4. Нетрудно показать, что для компонент вектора $\tilde{\mathbf{b}}$ справедливы следующие неравенства

$$\tilde{b}_1 > 0, \quad \tilde{b}_2(-q_0) = -\tilde{b}_3(q_0), \quad \tilde{b}_2(q_0)q_0 < 0, \quad \tilde{b}_3(q_0)q_0 < 0, \quad \tilde{b}_2 > \tilde{b}_3. \quad (1.28)$$

Рассмотрим частные случаи, когда один из коэффициентов g_i ($i = 1, 2, 3$) равен нулю.

1. При $g_1 = 0$ матрица \mathbf{J}_f обладает следующим набором собственных чисел:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0, \\ \mu_{2,3} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{b}_2 g_2 + \tilde{b}_3 g_3 \pm \sqrt{(\tilde{b}_2 g_2 + \tilde{b}_3 g_3)^2 + 4\lambda_2(\tilde{b}_2 g_2 - \tilde{b}_3 g_3 + \lambda_2)} \right).\end{aligned}$$

Таким образом, при $g_1 = 0$ одно из собственных чисел матрицы \mathbf{J}_f является нулевым, то есть обратная связь не обеспечивает асимптотическую стабилизацию нулевого решения уравнений (1.27).

2. При $g_2 = 0$ матрица \mathbf{J}_f обладает следующим набором собственных чисел:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \lambda_2, \\ \mu_{2,3} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{b}_1 g_1 + \tilde{b}_3 g_3 - \lambda_2 \pm \sqrt{(\tilde{b}_1 g_1 + \tilde{b}_3 g_3)^2 + \lambda_2(2\tilde{b}_1 g_1 - 2\tilde{b}_3 g_3 + \lambda_2)} \right).\end{aligned}$$

Очевидно, что при $g_2 = 0$ одно из собственных чисел матрицы \mathbf{J}_f является положительным. Таким образом обратная связь, также не обеспечивает асимптотическую стабилизацию нулевого решения уравнений (1.27).

3. При $g_3 = 0$ матрица \mathbf{J}_f обладает следующим набором собственных чисел:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \lambda_3, \\ \mu_{2,3} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{b}_1 g_1 + \tilde{b}_2 g_2 + \lambda_2 \pm \sqrt{(\tilde{b}_1 g_1 + \tilde{b}_2 g_2 + \lambda_2)^2 - 4\tilde{b}_1 g_1 \lambda_2} \right).\end{aligned} \quad (1.29)$$

Из (1.29) следует что собственное число μ_1 всегда является отрицательным. Согласно выражениям для $\mu_{2,3}$ и неравенствам (1.28) действительная часть собственных чисел $\mu_{2,3}$ будет отрицательной, если коэффициенты g_1, g_2 удовлетворяют следующему неравенству:

$$\tilde{b}_1 g_1 + \tilde{b}_2 g_2 + \lambda_2 < 0.$$

Возвращаясь в исходный базис и к исходным переменным, получим следующую обратную связь:

$$u = \frac{g_2}{2\alpha}(r - r_0) + \frac{g_2}{2\sqrt{\alpha\beta}} r p_r + \left(\frac{g_1}{\beta} + \frac{g_2 \gamma}{2\alpha\beta} \right) (q - q_0). \quad (1.30)$$

Управление (1.30) было построено на основе линеаризованных уравнений и при заданном q_0 гарантирует стабилизацию неподвижной точки (1.16) лишь при малых отклонениях от нее. Тем не менее численные эксперименты показывают, что обратная связь (1.30) позволяет стабилизировать круговое движение профиля и при существенных отклонениях.

Исследуем численно поведение системы с обратной связью (1.30) в зависимости от начальных условий при следующих значениях параметров:

$$m = 1, \quad R = 1, \quad \rho = 1, \quad q_0 = 1, \quad k = 1, \quad g_1 = 0.8, \quad g_2 = 3. \quad (1.31)$$

На рис. 1.4 для различных начальных значений интенсивности источника $q(0)$ на плоскости начальных условий $(r(0), p_r(0))$ показаны области притяжения к неподвижной точке (белый цвет), области притяжения к источнику (серый цвет), области реализации некомпактных траекторий (черный цвет).

При значениях параметров (1.31) матрица \mathbf{J}_f имеет следующие собственные числа:

$$\mu_1 \approx -0.0837, \quad \mu_{2,3} \approx -0.5708 \pm 1.0108i.$$

Поскольку два собственных числа имеют ненулевую мнимую часть, процесс стабилизации может сопровождаться осцилляциями значений фазовых переменных (см. рис. 1.5).

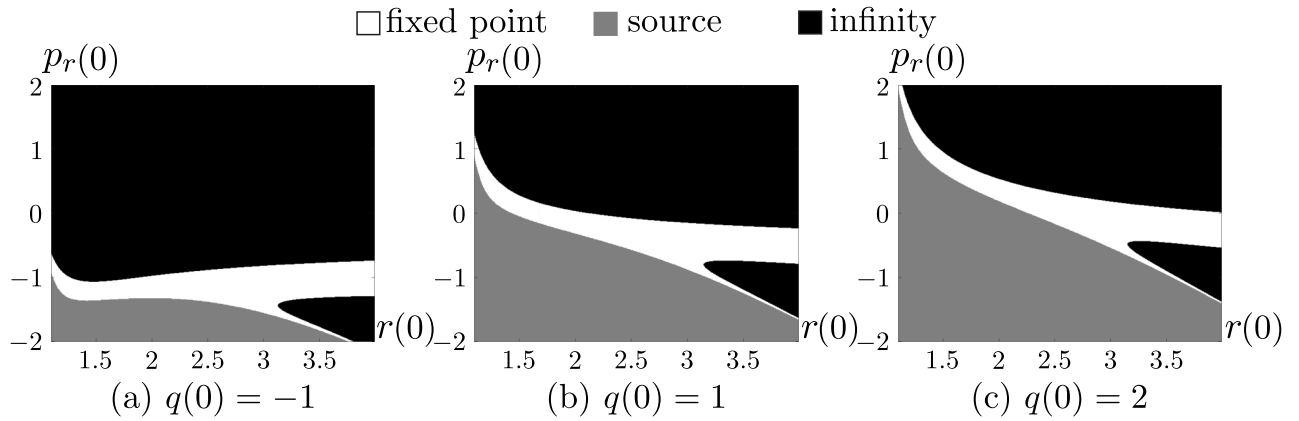


Рисунок 1.4 – Сечения области притяжения при различных значениях q_0 и значениях параметров (1.31)

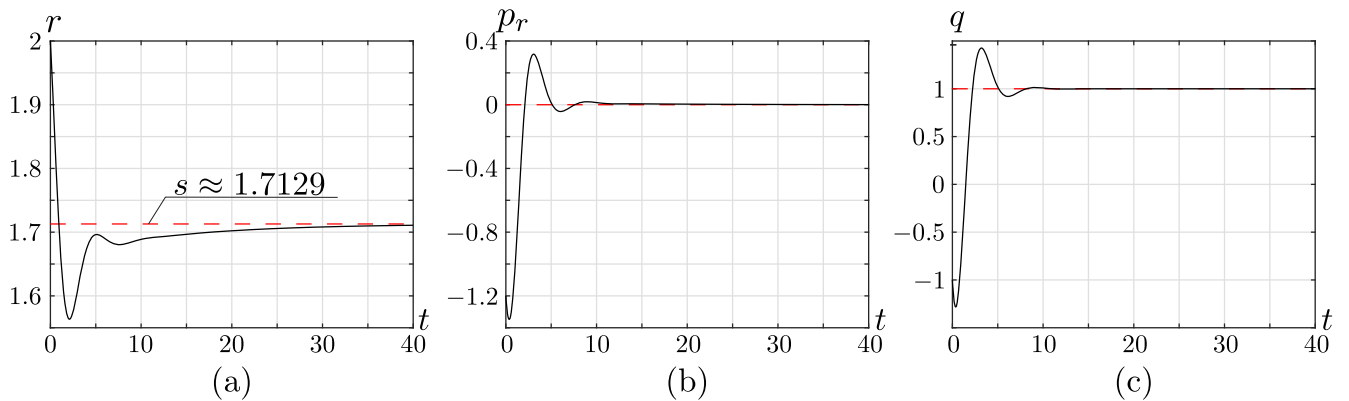


Рисунок 1.5 – Изменение фазовых переменных r , p_r , q при значениях параметров (1.31) и начальных условиях $r(0) = 2$, $p_r(0) = -1.2$, $q(0) = -1$

1.2 Уравновешенное твердое тело с собственной циркуляцией

Рассмотрим плоскопараллельное движение уравновешенного кругового цилиндра радиусом R в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Поскольку движение плоскопараллельное, то далее мы будем говорить о движении кругового профиля в плоскости, заполненной жидкостью (см. рис. 1.6).

Относительно рассматриваемой системы примем следующие допущения, а именно, что жидкость, окружающая профиль, характеризуется следующими свойствами:

- движение жидкости является безвихревым всюду вне цилиндра, кроме одной особой точки, занятой вихреисточником с интенсивностью массопритока q и циркуляцией $\Gamma = \text{const}$;

- циркуляция скорости жидкости по контуру профиля постоянна и равна Γ_0 ;
- жидкость покоится на бесконечности.

Для описания движения рассматриваемой системы введем неподвижную (инерциальную) систему координат Oxy (см. рис. 1.6). Положение геометрического центра цилиндра (точка C) будем описывать с помощью радиус-вектора $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c)$, а положение вихреисточника — радиус-вектором $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q)$.

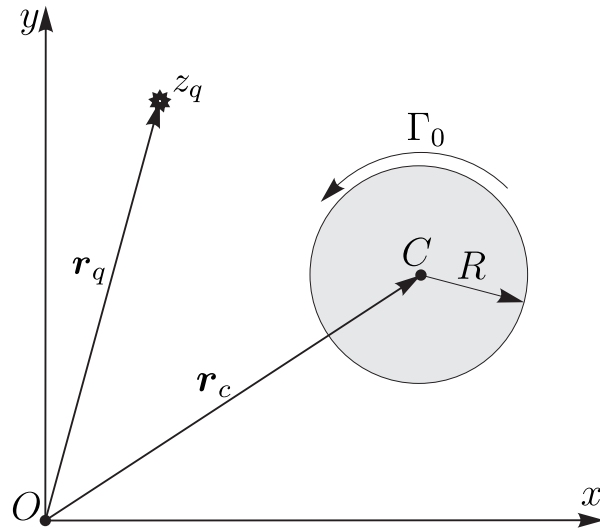


Рисунок 1.6 – Схематическое изображение цилиндра и вихреисточника

В силу принятых допущений движение жидкости может быть описано комплексным потенциалом $W(z)$. Каждой точке плоскости Oxy поставим в соответствие комплексное число $z = x + iy$, тогда комплексный потенциал может быть записан в следующей форме:

$$W = -\frac{\dot{z}_c R^2}{z - z_c} + \frac{q - i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_q) + \frac{q + i\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{R^2}{z - z_c} - \overline{z_q - z_c}\right) + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z - z_c),$$

где $z_c = x_c + iy_c$ — комплексная координата центра масс цилиндра, $z_q = x_q + iy_q$ — комплексная координата вихреисточника.

Для построения уравнений движения цилиндра необходимо вычислить силу F , действующую на него со стороны жидкости. Для вычислений воспользуемся формулой, предложенной Седовым [80]. Комплексное представление силы

F имеет вид

$$F = F_x + iF_y = -\rho\pi R^2 \ddot{z}_c + i\rho\Gamma_0 \dot{z}_c + \frac{\rho(q^2 + \Gamma^2)R^2}{2\pi} \frac{z_q - z_c}{|z_q - z_c|^2 (|z_q - z_c|^2 - R^2)} + \rho(q + i\Gamma)R^2 \frac{(z_q - z_c)^2}{|z_q - z_c|^4} \dot{z}_q - \rho\dot{q}R^2 \frac{z_q - z_c}{|z_q - z_c|^2} - \frac{\rho\Gamma_0(\Gamma - iq)}{2\pi} \frac{z_q - z_c}{|z_q - z_c|^2}. \quad (1.32)$$

Замечание 1.2.1. В случае неподвижного вихреисточника ($\dot{z}_q = 0$) и отсутствия собственной циркуляции ($\Gamma_0 = 0$) с точностью до замены $q^2 + \Gamma^2 \rightarrow q^2$ получим ранее изученную задачу о движении уравновешенного профиля в поле неподвижного источника. При отсутствии собственной циркуляции неподвижный источник, вихрь и вихреисточник действуют на профиль одинаковым образом.

Движение профиля описывается классическими уравнениями Ньютона с компонентами силы (1.32) в правой части:

$$m\ddot{x}_c = F_x, \quad m\ddot{y}_c = F_y, \quad (1.33)$$

где m — масса цилиндра, отнесенная к единице длины.

Замечание 1.2.2. В гидродинамике хорошо известны модели переноса завихренности, например, для точечных вихрей [73] и для вихревых пятен с равномерным распределением завихренности [63]. Данные модели имеют известную физическую интерпретацию, а результаты расчетов на их основе согласуются с экспериментальными наблюдениями.

С другой стороны, не очевидно, каким образом в эксперименте можно наблюдать источник — некоторую частицу жидкости, обеспечивающую массоприток и свободно переносимую потоком. Тем не менее источник/сток легко представить как некоторое движущееся или неподвижное техническое отверстие, через которое жидкость поступает/вытекает.

Вопросы построения уравнений переноса потоком источников и точечных особенностей более высокого порядка обсуждались в работе [54]. В частности, для вихреисточника такое уравнение можно построить по аналогии с

уравнениями движения точечных вихрей [82]:

$$\dot{z}_q = \left. \frac{d\widetilde{W}}{dz} \right|_{z=z_q}, \quad \widetilde{W} = W - \frac{q - i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_q).$$

Лагранжева форма уравнения движения. Будем считать, что вихреисточник стационарен, то есть неподвижен и обладает постоянной интенсивностью массопитока ($\dot{z}_q = 0$, $\dot{q} = 0$). Представим уравнения движения (1.33) в лагранжевой форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} - \frac{\partial L}{\partial x_c} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} - \frac{\partial L}{\partial y_c} = 0. \quad (1.34)$$

Для этого подберем лагранжиан L таким образом, чтобы уравнения (1.34) после подстановки в них лагранжиана совпадали с исходными уравнениями (1.33):

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}\mu (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}\rho\Gamma_0 (\dot{x}_c(y_c - y_q) - \dot{y}_c(x_c - x_q)) - \\ & - \frac{\rho(q^2 + \Gamma^2)}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{R^2}{(x_c - x_q)^2 + (y_c - y_q)^2} \right) + \\ & + \frac{\rho\Gamma\Gamma_0}{4\pi} \ln \frac{(x_c - x_q)^2 + (y_c - y_q)^2}{R^2} - \frac{\rho q\Gamma_0}{2\pi} \arctan \frac{y_c - y_q}{x_c - x_q}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где $\mu = m + \rho\pi R^2$ — эффективная масса. Отметим, что для рассматриваемой задачи лагранжиан, помимо кинетической и потенциальной энергии, включает так называемый векторный потенциал.

Лагранжиан (1.35) зависит от разности координат вихреисточника и геометрического центра профиля, поэтому для анализа системы оказывается удобно ввести полярную систему координат:

$$x_c = x_q + r \cos \varphi, \quad y_c = y_q + r \sin \varphi.$$

Тогда уравнения движения (1.34) и лагранжиан (1.35) примут более простой

ВИД:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} \rho \Gamma_0 r^2 \dot{\varphi} - \frac{\rho(q^2 + \Gamma^2)}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\rho \Gamma \Gamma_0}{2\pi} \ln \frac{r}{R} - \frac{\rho q \Gamma_0}{2\pi} \varphi.$$

Замечание 1.2.3. В силу произвольности выбора системы координат Ox можно считать, что вихресточник расположен в начале координат, то есть $x_q = y_q = 0$.

Гамильтонова форма уравнений движения. Введем стандартным образом обобщенные импульсы

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} - \frac{1}{2} \rho \Gamma_0 r^2$$

и выполним преобразование Лежандра [73]:

$$H = (p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - L) \Big|_{\dot{r}, \dot{\varphi} \rightarrow p_r, p_\varphi} = H_0 + \frac{\rho q \Gamma_0}{2\pi} \varphi, \quad (1.36)$$

$$H_0 = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\varphi + \frac{1}{2} \rho \Gamma_0 r^2 \right)^2 \right) + \frac{\rho(q^2 + \Gamma^2)}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\rho \Gamma \Gamma_0}{2\pi} \ln \frac{r}{R}.$$

Здесь функция H_0 является однозначной функцией позиционной переменной r . Угловая координата φ входит в гамильтониан (1.36) линейно, следовательно, «гамильтониан» H является неоднозначной функцией угла φ . В работах [38, 76] такие системы называются квазиконсервативными. Отметим, что неоднозначные гамильтонианы могут возникать при гамильтонизации неголономных систем [12] и при описании переноса потоком вихресточников [6].

«Гамильтонова»¹ форма уравнений движения для рассматриваемой задачи

¹Здесь слово гамильтонова заключено в кавычки по аналогии с работой [38], чтобы подчеркнуть, что рассматриваемая система не является в точности гамильтоновой из-за неоднозначности функции H .

принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \mu^{-1} p_r, & \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \mu^{-1} \left(\frac{p_\varphi}{r^2} + \frac{1}{2} \rho \Gamma_0 \right), \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \mu^{-1} \left(\frac{p_\varphi^2}{r^3} - \frac{\rho^2 \Gamma_0^2}{4} r \right) - \frac{\rho(q^2 + \Gamma^2) R^2}{2\pi} \frac{1}{r(r^2 - R^2)} + \frac{\rho \Gamma \Gamma_0}{2\pi r}, \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\rho q \Gamma_0}{2\pi}.\end{aligned}\quad (1.37)$$

Несмотря на многозначность гамильтониана (1.36), векторное поле, задаваемое уравнениями (1.37), является однозначным.

Из системы (1.37) видно, что уравнение для p_φ может быть явно проинтегрировано:

$$K = p_\varphi + \frac{\rho q \Gamma_0}{2\pi} t = \text{const}. \quad (1.38)$$

Кроме того, в отсутствие собственной циркуляции ($\Gamma_0 = 0$) или массопритока ($q = 0$) импульс p_φ становится сохраняющейся величиной. Также однозначным становится гамильтониан (1.36).

Замечание 1.2.4. Традиционное определение первого интеграла предполагает, что некоторая функция, зависящая лишь от фазовых переменных, сохраняется вдоль траекторий системы. Выражение (1.38) содержит явно время t и формально не может называться первым интегралом. Тем не менее в некоторых работах такие выражения называют неавтономными первыми интегралами [19, 50].

Существование (неавтономного) первого интеграла (1.38) позволяет выполнить редукцию на его фиксированный уровень $K = k = \text{const}$. Тогда система (1.37) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu^{-1} p_r, \\ \dot{p}_r &= \mu^{-1} \left(\frac{1}{r^3} \left(k - \frac{\rho q \Gamma_0}{2\pi} t \right)^2 - \frac{\rho^2 \Gamma_0^2}{4} r \right) - \frac{\rho(q^2 + \Gamma^2) R^2}{2\pi} \frac{1}{r(r^2 - R^2)} + \frac{\rho \Gamma \Gamma_0}{2\pi r}, \\ \dot{\varphi} &= \mu^{-1} \left(\frac{1}{r^2} \left(k - \frac{\rho q \Gamma_0}{2\pi} t \right) + \frac{1}{2} \rho \Gamma_0 \right).\end{aligned}\quad (1.39)$$

Таким образом, анализ редуцированной системы можно свести к следующим случаям.

1. При $q = \Gamma = 0$ исследуемая задача сводится к известной задаче Чаплыгина о плоскопараллельном движении гладкого твердого тела в идеальной жидкости при наличии собственной циркуляции [83].
2. При $q = 0$, $\Gamma \neq 0$ редуцированная система становится автономной и обладает одной степенью свободы. Ее исследование может быть выполнено с помощью методов классической механики (см. подпараграф 1.2.1).
3. В общем случае при $q \neq 0$ и любом значении Γ (нулевом или отличном от нуля) редуцированная система является неавтономной и обладает $\frac{3}{2}$ степенями свободы (см. подпараграф 1.2.2).

1.2.1 Движение профиля в поле неподвижного вихря

Рассмотрим движение профиля в поле неподвижного вихря ($q = 0$, $\Gamma \neq 0$) при ненулевой собственной циркуляции ($\Gamma_0 \neq 0$). В этом случае уравнения движения (1.39) и гамильтониан (1.36) могут быть представлены в следующей форме:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \mu^{-1} p_r, \quad (1.40)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{k^2}{\mu} \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{\rho \Gamma^2 R^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{r(r^2 - R^2)} + \frac{\rho \Gamma \Gamma_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\rho^2 \Gamma_0^2}{4\mu} \cdot r,$$

$$H = \frac{1}{2\mu} p_r^2 + U(r), \quad U(r) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{k}{r} + \frac{1}{2} \rho \Gamma_0 r \right)^2 + \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\rho \Gamma \Gamma_0}{2\pi} \ln \frac{r}{R}, \quad (1.41)$$

где U — эффективный потенциал системы.

Из выражений (1.40), (1.41) мы видим, что в рассматриваемом случае движение профиля описывается гамильтоновой системой с одной степенью свободы, и оказывается справедливым следующее предложение.

Предложение 1.2.1. Уравнения (1.40) допускают не более двух неподвижных

точек вида

$$r(t) \equiv r^* = \text{const}, \quad p_r(t) \equiv 0. \quad (1.42)$$

Доказательство. Из первого уравнения (1.40) видно, что его правая часть обращается в ноль при $p_r = 0$. Следовательно, мы установили, что неподвижные точки системы (1.40) имеют вид (1.42).

Далее покажем, что количество неподвижных точек не превосходит двух. Координата r^* неподвижной точки должна удовлетворять уравнению $\dot{p}_r(r) = 0$, которое после замены $r^2 = R^2(s + 1)$ и несложных преобразований приводится к кубическому уравнению вида

$$As^3 + (2A - B)s^2 + (A - B - C + 1)s + 1 = 0, \quad (1.43)$$

$$A = \frac{\rho\pi R^2 \Gamma_0^2}{2\mu\Gamma^2}, \quad B = \frac{\Gamma_0}{\Gamma}, \quad C = \frac{2\pi k^2}{\mu\rho R^2 \Gamma^2}.$$

Здесь A, B, C являются безразмерными, причем $A > 0$ и $C \geq 0$. Отметим, что физический смысл имеют только решения $s > 0$, соответствующие $r > R$.

Если s_1, s_2, s_3 — корни уравнения (1.43), то согласно теореме Виета справедливо соотношение

$$s_1 s_2 s_3 = -\frac{1}{A} < 0.$$

Таким образом, уравнение (1.43) всегда имеет отрицательный действительный корень (для определенности s_3), и возможны три случая:

- I. $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^+, s_3 \in \mathbb{R}^-$;
- II. $s_1, s_2 \in \mathbb{C}, s_3 \in \mathbb{R}^-$;
- III. $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}^-$.

Из проведенного анализа мы видим, что система (1.40) не имеет неподвижных точек в случаях II, III и имеет две неподвижные точки в случае I. \square

Неподвижные точки системы (1.40) возникают в результате касательной бифуркации при переходе от случая II к случаю I. Поскольку система (1.40) является гамильтоновой, мы можем утверждать, что возникает пара «седло —

центр». Кроме того, в момент бифуркации уравнение (1.43) имеет кратный действительный корень, которому соответствует вырожденная неподвижная точка.

В дополнение к **предложению 1.2.1** покажем реализуемость описанных в доказательстве ситуаций. Для этого введем обозначения $a = \frac{\rho\pi R^2}{2\mu}$, $\varepsilon = \frac{\Gamma_0}{\Gamma}$, тогда уравнение (1.43) примет вид

$$a\varepsilon^2 s^3 + (2a\varepsilon^2 - \varepsilon)s^2 + (a\varepsilon^2 - \varepsilon - C + 1)s + 1 = 0. \quad (1.44)$$

Будем считать, что $|\varepsilon| \ll 1$, тогда один из корней уравнения (1.44) может быть выражен приближенно в виде разложения по малому параметру ε :

$$s^* \approx \sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2, \quad (1.45)$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{C-1}, \quad \sigma_1 = -\frac{\sigma_0(1+\sigma_0)}{C-1}, \quad \sigma_2 = \frac{a\sigma_0(1+\sigma_0)^2 - \sigma_1(1+2\sigma_0)}{C-1}.$$

Из (1.45) видно, что при $C \gg 1$ (или $k \gg 1$) и $|\varepsilon| \ll 1$ уравнение (1.44) имеет заведомо положительный корень $s_1 = s^*$. Согласно **предложению 1** уравнение (1.43) будет иметь дополнительно положительный и отрицательный корни, то есть *реализуется случай I*.

При $C = 0$ (или $k = 0$) уравнение (1.44) имеет отрицательный действительный корень $s_3 = -1$ и может быть представлено в виде

$$(s+1)(a\varepsilon^2 s^2 + (a\varepsilon^2 - \varepsilon)s + 1) = 0.$$

Оставшиеся два корня вычисляются следующим образом:

$$s_{1,2} = \frac{-(a\varepsilon^2 - \varepsilon) \pm \sqrt{(a\varepsilon^2 - \varepsilon)^2 - 4a\varepsilon^2}}{2a\varepsilon^2} \in \begin{cases} \mathbb{C} & \text{при } \varepsilon \in \left(\frac{1-2\sqrt{a}}{a}, \frac{1+2\sqrt{a}}{a}\right), \\ \mathbb{R} & \text{при } \varepsilon \notin \left(\frac{1-2\sqrt{a}}{a}, \frac{1+2\sqrt{a}}{a}\right). \end{cases}$$

Мы видим, что *случаи II и III предложения 1.2.1 могут быть реализованы при $C = 0$ при соответствующем выборе величины ε .*

Таким образом, для рассматриваемой системы могут быть реализованы все три случая, указанные в **предложении 1.2.1**.

При произвольных значениях параметров системы (1.40) реализуемость того или иного случая может быть исследована численно. Для примера зафиксируем

значения следующих параметров:

$$\rho = 1, \quad R = 1, \quad \Gamma = 1, \quad \mu = 5;$$

для каждой пары значений (k, Γ_0) найдем корни уравнения (1.43). Анализируя значения корней, будем отмечать соответствующую точку плоскости (k, Γ_0) цветом (белым, светло-серым или темно-серым), в результате чего получим диаграмму, показанную на рис. 1.7.

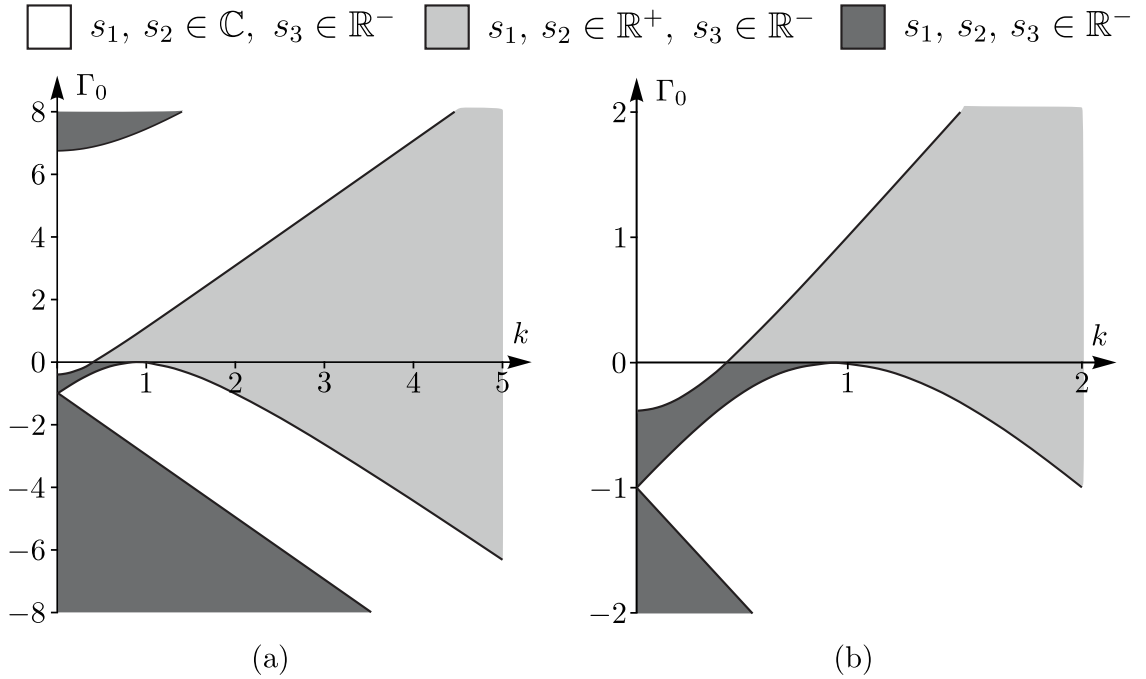


Рисунок 1.7 – Области реализации случаев (I) $s_1, s_2 \in \mathbb{C}, s_3 \in \mathbb{R}^-$, (II) $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^+, s_3 \in \mathbb{R}^-$, (III) $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}^-$. (a) Полная картина, (b) увеличенный фрагмент

Отметим, что неявное уравнение границы белой области (рис. 1.7) может быть найдено с помощью формул Кардано:

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0,$$

$$p = \frac{A - B - C + 1}{A} - \frac{(2A - B)^2}{3A^2},$$

$$q = \frac{2(2A - B)^3}{27A^3} - \frac{(2A - B)(A - B - C + 1)}{2A^2} + \frac{1}{A}.$$

На данной линии уравнение (1.43) имеет двукратный корень (положительный или отрицательный). При этом в случае положительного корня система (1.40) имеет одну вырожденную неподвижную точку.

Относительно поведения фазовой переменной r справедливо следующее предложение.

Предложение 1.2.2. *Расстояние между вихрем и геометрическим центром профиля r ограничено во все время движения.*

Доказательство. Из выражения для эффективного потенциала (1.41) следует, что

$$U(r) = \frac{\rho\Gamma_0}{8\mu}r^2 + o(r^2) \text{ при } r \rightarrow +\infty,$$

то есть на любых уровнях энергии системы существует потенциальный барьер, запрещающий неограниченный рост фазовой переменной r . \square

Согласно **предложениям 1.2.1** и **1.2.2** в рассматриваемой системе возможны три характерные зависимости эффективного потенциала $U(r)$ (см. рис. 1.8) и, соответственно, три различных фазовых портрета (см. рис. 1.9). На рис. 1.8 и 1.9 в качестве бифуркационного параметра используется уровень k первого интеграла (1.38). Величина k^* обозначает критическое значение k , при котором происходит качественная перестройка фазового портрета.

1. При $k < k^*$ функция U монотонно возрастает и, соответственно, не имеет критических точек (см. рис. 1.8a). В этом случае система (1.40) не имеет неподвижных точек, ее фазовый портрет приведен на рис. 1.9a. Все фазовые траектории притягиваются к линии $r = R$, то есть профиль падает на особую точку потока.
2. При $k = k^*$ у функции U возникает точка перегиба $r^{(i)}$ (см. рис. 1.8b). В этом случае система (1.40) имеет вырожденную неподвижную точку, ее фазовый портрет приведен на рис. 1.9b. Существует одна фазовая траектория, приводящая к неустойчивой неподвижной точке $(r^{(i)}, 0)$. Данная неподвижная точка соответствует движению профиля по круговой траектории вокруг вихря. Остальные фазовые траектории редуцированной системы притягиваются к линии $r = R$, то есть профиль падает на особую точку потока.
3. При $k > k^*$ функция U имеет две критические точки: максимум $r^{(s)}$ и минимум $r^{(c)}$ (см. рис. 1.8c), соответствующие неустойчивой и устойчивой

точкам системы (1.40) (см. рис. 1.9с). В этом случае существуют фазовые траектории следующих типов:

- притягивающиеся к линии $r = R$;
- замкнутые, соответствующие квазипериодическим движениям профиля;
- сепаратрисные, разделяющие области, в которых реализуются первые два типа фазовых траекторий.

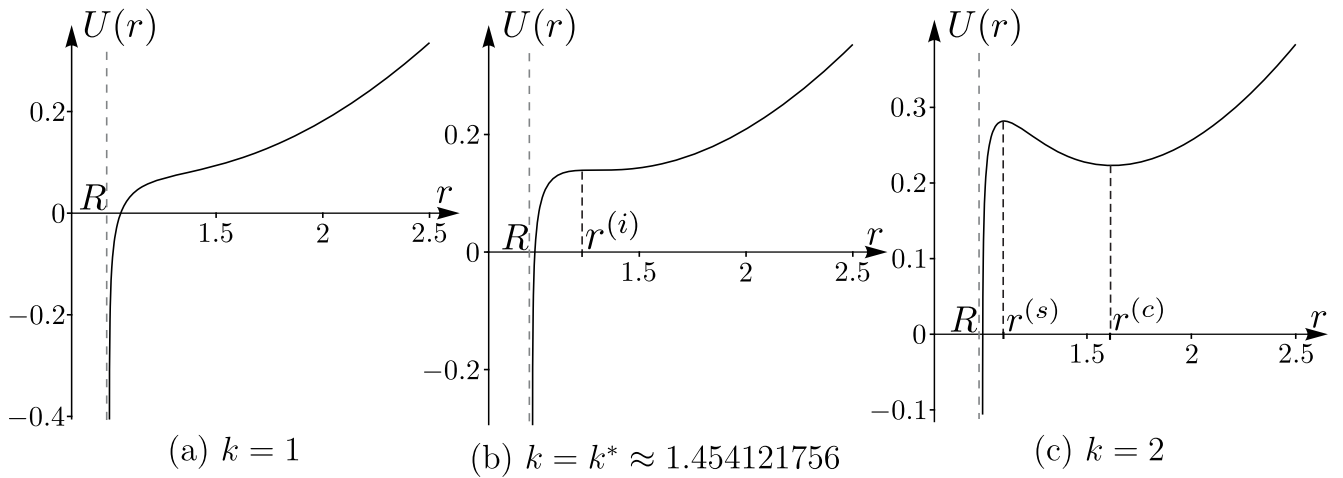


Рисунок 1.8 – Примеры зависимостей $U(r)$ при $\rho = 1$, $R = 1$, $\Gamma_0 = 2$, $\Gamma = 0$, $\mu = 5$ и различных значениях k

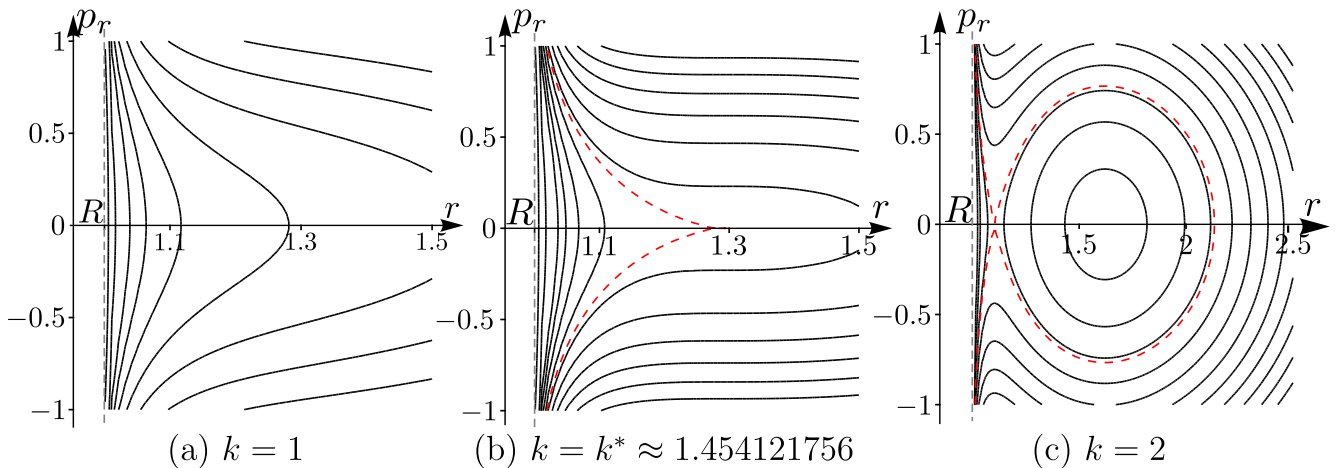


Рисунок 1.9 – Примеры фазовых портретов при $\rho = 1$, $R = 1$, $\Gamma_0 = 2$, $\Gamma = 0$, $\mu = 5$ и различных значениях k

Построим бифуркационную диаграмму для рассматриваемой системы. Для этого подставим в гамильтониан (1.41) координаты неподвижных точек. В ре-

зультате получим две бифуркационные кривые:

$$H(r = r^{(c)}, p_r = 0) = h, \quad H(r = r^{(s)}, p_r = 0) = h,$$

зависящие от параметров системы и уровней первых интегралов k и h . Бифуркационная диаграмма на плоскости (h, k) при параметрах $\rho = 1$, $R = 1$, $\Gamma = 1$, $\Gamma_0 = 2$, $\mu = 5$ представлена на рис. 1.10, где введены следующие обозначения:

- 1) черная непрерывная линия соответствует устойчивой неподвижной точке $(r^{(c)}, 0)$;
- 2) черная пунктирная линия соответствует неустойчивой неподвижной точке $(r^{(s)}, 0)$.

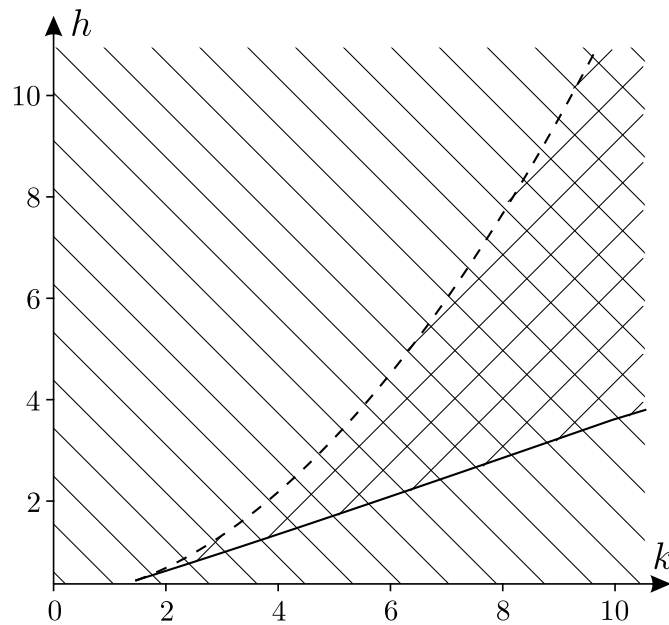


Рисунок 1.10 – Бифуркационная диаграмма

Также на бифуркационной диаграмме левой штриховкой обозначена область, значениям h и k внутри которой соответствует только одна фазовая траектория. Перекрестной штриховкой обозначена область, в которой заданным h и k соответствуют две фазовые траектории.

Напомним, что при $\Gamma_0 = 0$ рассматриваемая система, эквивалентна системе, описывающей движение уравновешенного профиля в поле неподвижного источника (см. **замечание 1.2.1**). В этом случае может существовать лишь одна неустойчивая неподвижная точка. Добавление в систему собственной циркуляции профиля позволяет стабилизировать его движение в поле неподвижного вихря.

На фазовых портретах (рис. 1.9) показаны траектории, асимптотически приближающиеся к линии $r = R$. Оказывается справедливым следующее предложение.

Предложение 1.2.3. *Падение профиля на источник ($r \rightarrow R$) происходит за конечное время, при этом $p_r \rightarrow -\infty$.*

Доказательство. Уравнения (1.40) имеют особенность при $r = R$, поэтому для доказательства выполним регуляризацию с помощью замены времени:

$$dt = (r^2 - R^2)d\tau.$$

Регуляризованные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} t' &= r^2 - R^2, & r' &= \mu^{-1}(r^2 - R^2)p_r, \\ p_r' &= \frac{k^2}{\mu} \cdot \frac{r^2 - R^2}{r^3} - \frac{\rho\Gamma^2 R^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\rho\Gamma\Gamma_0}{2\pi} \cdot \frac{r^2 - R^2}{r} - \frac{\rho^2\Gamma_0^2}{4\mu} \cdot r(r^2 - R^2), \end{aligned} \quad (1.46)$$

где $(\cdot)'$ обозначает дифференцирование по переменной τ .

Для оценки времени падения проинтегрируем уравнения (1.46) со следующими начальными условиями:

$$t(0) = T, \quad r(0) = R + \varepsilon, \quad p_r(0) = p_0 < 0. \quad (1.47)$$

Физический смысл начальных условий (1.47) заключается в том, что в некоторый момент времени T профиль находится на достаточно малом расстоянии ε от вихря и приближается к нему.

Для приближенного интегрирования уравнений (1.46) воспользуемся методом Пуанкаре [39] разложения по малому параметру ε :

$$t(\tau) = t_0(\tau) + \varepsilon t_1(\tau), \quad r(\tau) = r_0(\tau) + \varepsilon r_1(\tau), \quad p_r(\tau) = p_{r0}(\tau) + \varepsilon p_{r1}(\tau), \quad (1.48)$$

$$t_0(0) = T, \quad r_0(0) = R, \quad p_{r0}(0) = p_0, \quad (1.49)$$

$$t_1(0) = 0, \quad r_1(0) = 1, \quad p_{r1}(0) = 0. \quad (1.50)$$

Порождающая система уравнений имеет вид

$$t'_0 = r_0^2 - R^2, \quad r'_0 = \frac{p_{r0}(r_0^2 - R^2)}{\mu},$$

$$p'_{r0} = -\frac{\rho^2 \Gamma_0^2}{4\mu} r_0 (r_0^2 - R^2) - \frac{\rho \Gamma^2 R^2}{2\pi r_0} + \frac{k^2 (r_0^2 - R^2)}{\mu r_0^3} + \frac{\rho \Gamma \Gamma_0 (r_0^2 - R^2)}{2\pi r_0},$$

а ее решение (порождающее решение), удовлетворяющее начальным условиям (1.49),

$$t_0(\tau) = T, \quad r_0(\tau) = R, \quad p_{r0} = p_0 - \frac{\rho \Gamma^2 R}{2\pi} \tau, \quad (1.51)$$

задает инвариантное подмногообразие системы (1.46). Из (1.46) мы видим, что $p_r \rightarrow -\infty$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Используя порождающее решение (1.51), составим систему уравнений для первых поправок:

$$t'_1 = 2Rr_1, \quad r'_1 = \frac{2R}{\mu} \left(p_0 - \frac{\rho \Gamma^2 R}{2\pi} \tau \right) r_1,$$

$$p'_{r1} = \left(-\frac{\rho^2 \Gamma_0^2 R^2}{2\mu} + \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi} + \frac{2k^2}{\mu R^2} + \frac{\rho \Gamma \Gamma_0}{\pi} \right) r_1.$$

Решение уравнения для r_1 имеет вид

$$r_1(\tau) = \exp \left(-\frac{2\pi}{\rho \Gamma^2 \mu} \left(\left(p_0 - \frac{\rho \Gamma^2 R}{2\pi} \tau \right)^2 - p_0^2 \right) \right)$$

и носит затухающий характер. Таким образом,

$$r(\tau) = r_0(\tau) + \varepsilon r_1(\tau) \rightarrow R \text{ при } \tau \rightarrow +\infty.$$

Решение уравнения для t_1 выражается через функцию ошибок:

$$t_1(\tau) = \pi \sqrt{\frac{2\mu}{\rho \Gamma^2}} \left(\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\rho \Gamma^2 \mu}} \left(\frac{\rho \Gamma^2 R}{2\pi} \tau - p_0 \right) \right) + \operatorname{erf} \left(p_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\rho \Gamma^2 \mu}} \right) \right).$$

Вычисляя предел

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} t(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} t_0(\tau) + \varepsilon t_1(\tau),$$

получим, что

$$t \rightarrow T + \varepsilon \pi \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\Gamma^2}} \exp\left(\frac{2\pi p_0^2}{\rho\Gamma^2\mu}\right) \left(1 + \operatorname{erf}\left(p_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\rho\Gamma^2\mu}}\right)\right) < +\infty \text{ при } \tau \rightarrow +\infty.$$

□

Замечание 1.2.5. Решение для $p_{r1}(\tau)$, как и $t_1(\tau)$, выражается через функцию ошибок.

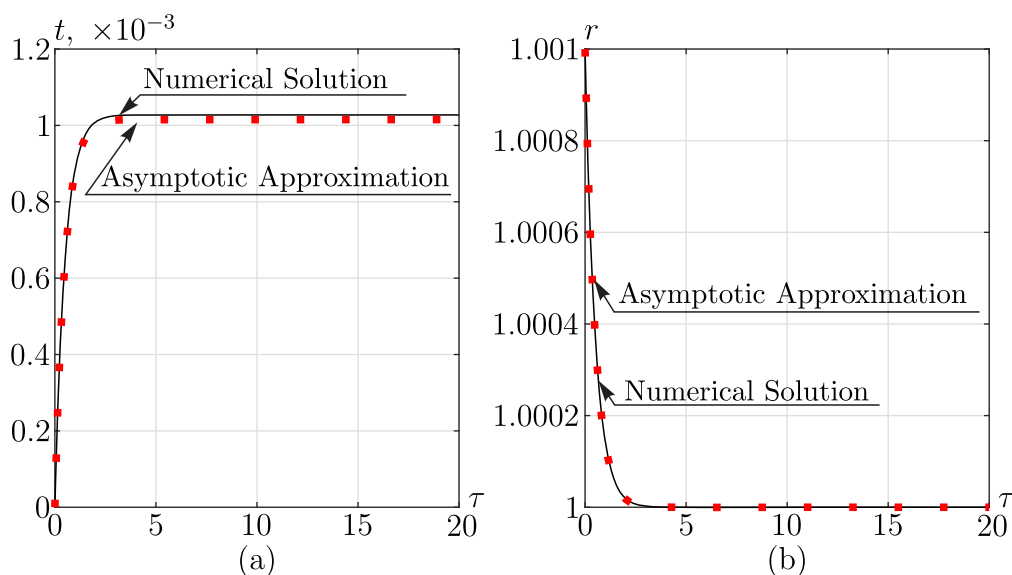


Рисунок 1.11 – (а) Зависимость $t(\tau)$, (б) зависимость $r(\tau)$. Черная кривая — численное решение уравнений (1.46), красные маркеры — приближенное решение методом Пуанкаре

Для иллюстрации представленного доказательства проинтегрируем уравнения (1.46) с начальными условиями

$$t(0) = 0, \quad r(0) = R + 10^{-3}, \quad p_r(0) = -4$$

и при следующих значениях параметров:

$$m = 1, \quad R = 1, \quad \rho = 1, \quad \Gamma = -1, \quad \Gamma_0 = -2, \quad k = 20.$$

На рис. 1.11 показаны зависимости $t(\tau)$ и $r(\tau)$, полученные с помощью численного решения уравнений (1.46) и по методу Пуанкаре. Из рис. 1.11 видно, что решение, полученное методом малого параметра, корректно описывает решение исходной системы.

Далее рассмотрим движение профиля с собственной циркуляцией в поле неподвижного источника.

1.2.2 Движение профиля в поле неподвижного источника

Рассмотрим движение профиля в поле неподвижного источника ($q \neq 0$, $\Gamma = 0$) при ненулевой собственной циркуляции ($\Gamma_0 \neq 0$). В этом случае динамика профиля описывается следующей неавтономной гамильтоновой системой:

$$\dot{r} = \mu^{-1} p_r, \quad \dot{p}_r = \left(k - \frac{\rho q \Gamma_0 t}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\mu r^3} - \frac{\rho q^2 R^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{r(r^2 - R^2)} - \frac{\rho^2 \Gamma_0^2}{4\mu} \cdot r, \quad (1.52)$$

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(k - \frac{\rho q \Gamma_0 t}{2\pi} + \frac{1}{2} \rho \Gamma_0 r^2 \right)^2 \right) + \frac{\rho q^2}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right). \quad (1.53)$$

Рассмотрим во втором уравнении (1.52) слагаемое, соответствующее центростремительной силе:

$$\left(k - \frac{\rho q \Gamma_0 t}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\mu r^3}.$$

В данном выражении присутствует множитель, возрастающий квадратично по времени. Таким образом, можно ожидать, что будет возрастать величина центростремительной силы, а профиль будет удаляться от источника. При этом, по крайней мере при малых q , оказывается справедливым следующее предложение.

Предложение 1.2.4. *Для любого малого $q = \varepsilon \ll 1$ при выполнении условий*

1) *начальные условия удовлетворяют уравнению*

$$\frac{\mu}{\rho |\Gamma_0|} \left(\frac{1}{2\mu} p_r^2(0) + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{|k|}{r(0)} - \frac{1}{2} \rho |\Gamma_0| r(0) \right)^2 \right) = i_0 \sim c_1 \varepsilon, \quad c_1 = \text{const} \sim 1;$$

2) *выполняется неравенство $k - \frac{\rho q \Gamma_0}{2\pi} t > 0$*

на временах порядка ε^{-1} для переменной $r(t)$ верна следующая оценка:

$$\left| r - \sqrt{\frac{2}{\rho|\Gamma_0|} \left(k - \frac{\rho q \Gamma_0 t}{2\pi} \right)} \right| < \sqrt{\frac{2(c_1 + c_2)}{\rho|\Gamma_0|}} \sqrt{\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon}), \quad c_2 = \text{const} \sim 1. \quad (1.54)$$

Доказательство. Пусть q малая величина, то есть $q = \varepsilon \ll 1$, тогда считая, что на временах порядка ε^{-1} функция $r(t)$ много больше R , пренебрежем последним слагаемым в (1.53) и перейдем к рассмотрению гамильтониана:

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \left(\frac{K(t)}{r} + \frac{1}{2} \rho \Gamma_0 r \right)^2 \right), \quad K(t) = k - \frac{\rho q \Gamma_0 t}{2\pi}.$$

Построим для рассматриваемой системы интеграл действия (адиабатический инвариант), для этого положим $q = 0$ тогда система (1.52) становится автономной, а ее гамильтониан принимает вид

$$H = \frac{1}{2\mu} p_r^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{k}{r} + \frac{1}{2} \rho \Gamma_0 r \right)^2. \quad (1.55)$$

На фиксированном уровне h гамильтониана (1.55), явное решение невозмущенной системы может быть записано в следующей форме:

$$r = \sqrt{\alpha \sin(\omega t + C) + \beta}, \quad p_r = \frac{\mu \alpha \omega \cos(\omega t + C)}{2\sqrt{\alpha \sin(\omega t + C) + \beta}}, \quad (1.56)$$

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 - \frac{4k^2}{\rho^2 \Gamma_0^2}}, \quad \beta = \frac{4\mu h}{\rho^2 \Gamma_0^2} - \frac{2k}{\rho \Gamma_0}, \quad \omega = \frac{\rho |\Gamma_0|}{\mu}, \quad C = \arcsin \frac{r^2(0) - \beta}{\alpha}.$$

Вычислим интеграл действия (адиабатический инвариант) для возмущенной системы вдоль невозмущенного решения (1.56):

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{\mu}{\rho |\Gamma_0|} \left(h - \frac{\rho \Gamma_0 K(t)}{2\mu} - \frac{\rho |\Gamma_0 K(t)|}{2\mu} \right) =$$

$$\frac{\mu}{\rho |\Gamma_0|} \left(\frac{1}{2\mu} p_r^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{|K(t)|}{r} - \frac{1}{2} \rho |\Gamma_0| r \right)^2 \right). \quad (1.57)$$

Согласно теореме [66, стр. 214] на временах $t < \varepsilon^{-1}$ для адиабатического инва-

рианта выполняется следующее неравенство:

$$|I(r(t), p_r(t), \varepsilon t) - I(r(0), p_r(0), 0)| < c_2 \varepsilon, \quad c_2 = \text{const} > 0.$$

Обозначим $I(r(0), p_r(0), 0) = i_0 > 0$. Тогда

$$-c_2 \varepsilon < \frac{\mu}{\rho|\Gamma_0|} \left(\frac{1}{2\mu} p_r^2 + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{|K(t)|}{r} - \frac{1}{2} \rho |\Gamma_0| r \right)^2 \right) - i_0 < c_2 \varepsilon. \quad (1.58)$$

Далее ограничимся рассмотрением правого неравенства и преобразуем его к виду:

$$\left(\frac{|K(t)|}{r} - \frac{1}{2} \rho |\Gamma_0| r \right)^2 < 2\rho |\Gamma_0| (c_2 \varepsilon + i_0).$$

Решение этого неравенства (при условии $K(t) > 0$ на временах $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$) с учетом $r > R$ представим в виде:

$$\left| r - \frac{\sqrt{2\rho|\Gamma_0|(c_2\varepsilon + i_0)} + 2\rho|\Gamma_0|K(t)}{\rho|\Gamma_0|} \right| < \frac{\sqrt{2\rho|\Gamma_0|(c_2\varepsilon + i_0)}}{\rho|\Gamma_0|}. \quad (1.59)$$

На временах $t \sim \varepsilon^{-1}$ верно, что $K(t) \gg \varepsilon$. Тогда учитывая условие 1 ($i_0 \sim c_1 \varepsilon$) в предложении, разложим правую часть неравенства (1.59) по малости ε :

$$\begin{aligned} \left| r - \sqrt{\frac{2K(t)}{\rho|\Gamma_0|}} - \frac{\varepsilon(c_1 + c_2)}{\sqrt{2\rho|\Gamma_0|K(t)}} \right| &< \sqrt{\frac{2\varepsilon(c_1 + c_2)}{\rho|\Gamma_0|}}, \\ \left| r - \sqrt{\frac{2}{\rho|\Gamma_0|}} \left(k - \frac{\rho q \Gamma_0}{2\pi} t \right) \right| &< \sqrt{\frac{2(c_1 + c_2)}{\rho|\Gamma_0|}} \sqrt{\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned}$$

□

Несмотря на то что **предложение 1.2.4** доказано для времени порядка ε^{-1} , численный эксперимент показывает, что построенная оценка работает и на больших временах. Для иллюстрации доказательства приведем численный пример. Зафиксируем значения параметров

$$m = 1, \quad R = 1, \quad \rho = 1, \quad q = -0.1, \quad \Gamma_0 = 1, \quad k = 1 \quad (1.60)$$

и начальные условия

$$r(0) = 1.4, \quad p_r(0) = 0.$$

На рис. 1.12 показаны зависимость $r(t)$, полученная с помощью численного решения уравнений движения, и оценка роста $r(t)$, полученная в доказательстве предложения 1.2.4.

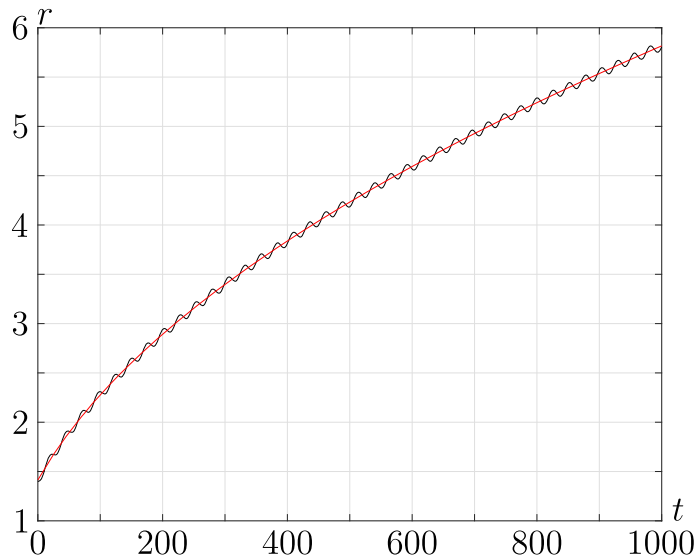


Рисунок 1.12 – Зависимость $r(t)$. Черная кривая — численное решение уравнений, красная кривая — оценка из доказательства

Наряду с убегаящими траекториями в численных экспериментах наблюдаются траектории, падающие на особенность. Оказывается справедливым следующее предложение.

Предложение 1.2.5. *Падение профиля на источник происходит за конечное время.*

Доказательство **предложения 1.2.5** аналогично доказательству **предложения 1.2.3**. Приведем лишь конечную формулу для оценки времени падения:

$$t \rightarrow T + \varepsilon \pi \sqrt{\frac{2\mu}{\rho q^2}} \exp\left(\frac{2\pi p_0^2}{\rho q^2 \mu}\right) \left(1 + \operatorname{erf}\left(p_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\rho q^2 \mu}}\right)\right) < +\infty \text{ при } \tau \rightarrow +\infty. \quad (1.61)$$

Формула (1.61) справедлива при условии, что в некоторый момент времени $t = T$ профиль находится на расстоянии ε от источника и приближается к нему, то есть обладает отрицательным импульсом p_0 .

Численные эксперименты показывают, что не существует траекторий, отличных от убегающих на бесконечность и падающих на источник. На плоскости начальных условий могут быть выделены области, соответствующие каждому из типов траекторий. Пример такой диаграммы, построенной при значениях параметров (1.60), показан на рис. 1.13.

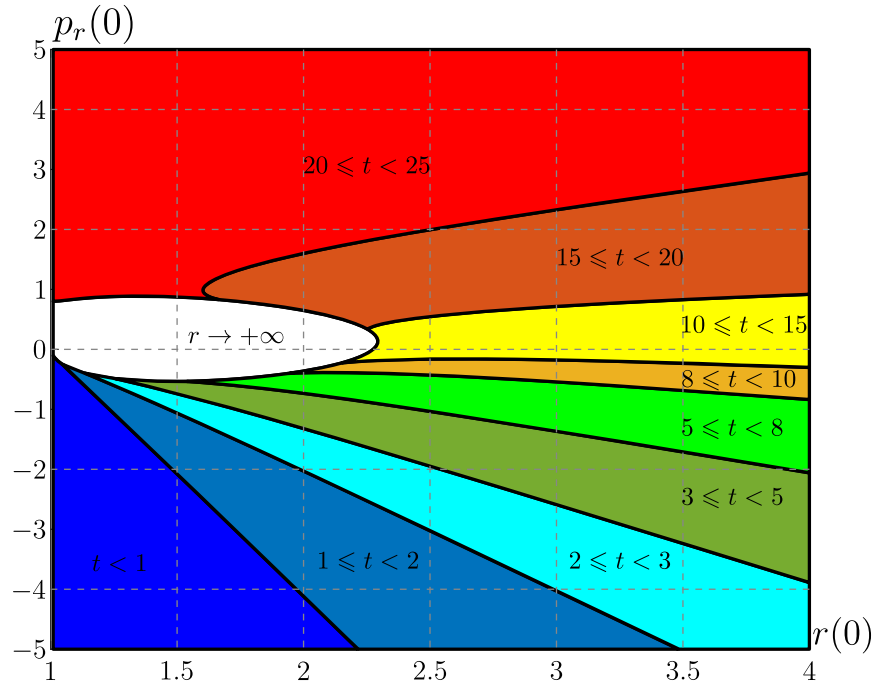


Рисунок 1.13 – Диаграмма времени падения на источник в зависимости от начальных условий при значениях параметров (1.60)

1.2.3 Отличие вихря и источника при $\Gamma_0 \neq 0$

В данной работе мы рассмотрели движение кругового профиля в поле неподвижных вихря и источника при наличии у профиля собственной циркуляции.

В частности, было показано, что в обоих случаях могут возникать траектории, падающие на особенность, причем асимптотика падения не зависит от типа особенности (**предложения 1.2.3** и **1.2.5**).

С другой стороны, в случае неподвижного вихря все траектории движения профиля являются ограниченными (**предложение 1.2.2**), причем некоторые из них оказываются периодическими или квазипериодическими (**предложение 1.2.1**). В случае неподвижного источника могут возникать траектории, убегающие на бесконечность (**предложение 1.2.4**).

Существование квазипериодических траекторий для неподвижного вихря и

неограниченных для неподвижного источника можно объяснить с физической точки зрения, изучив распределение давления по границе профиля.

Зафиксируем профиль в начале координат, а особенность (вихрь или источник) — в точке $z_q = -a$, $a > R$. Найдем распределение давления по контуру профиля, используя интеграл Бернулли:

$$p(\theta) = p_0 - \frac{\rho}{2}|V|^2, \quad \bar{V} = \left. \frac{dW}{dz} \right|_{z=R \exp(i\theta)}.$$

Для **неподвижных профиля и вихря** запишем комплексный потенциал течения:

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + a) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln\left(z + \frac{R^2}{a}\right) + \frac{\Gamma + \Gamma_0}{2\pi i} \ln z$$

и соответствующее ему распределение давления по границе профиля:

$$p = \underbrace{-\frac{\rho\Gamma^2(R + a \cos \theta)^2}{2\pi^2(R^2 + 2aR \cos \theta + a^2)^2}}_{p_1} - \underbrace{\frac{\rho\Gamma\Gamma_0(R + a \cos \theta)}{2\pi^2R(R^2 + 2aR \cos \theta + a^2)}}_{p_2} + \left(p_0 - \frac{\rho\Gamma_0^2}{8\pi^2R^2}\right). \quad (1.62)$$

Выражение (1.62) является четной функцией угла θ , то есть распределение давления симметрично относительно оси абсцисс. Следовательно, результирующая сил давления направлена по линии «вихрь – центр профиля»:

$$F = F_x = + \left| \begin{array}{l} -R \int_0^{2\pi} p_1 e^{i\theta} d\theta = -\frac{\rho\Gamma^2 R^2}{2\pi} \frac{1}{a(a^2 - R^2)} \\ -R \int_0^{2\pi} p_2 e^{i\theta} d\theta = \frac{\rho\Gamma_0\Gamma}{2\pi a} \end{array} \right| = -\frac{\rho\Gamma^2 R^2}{2\pi} \frac{1}{a(a^2 - R^2)} + \frac{\rho\Gamma_0\Gamma}{2\pi a}. \quad (1.63)$$

Из выражения (1.63) мы видим, что интегрирование составляющей давления p_1 приводит к возникновению силы, направленной к вихрю. Ранее было показано, что данная сила может быть уравновешена центробежной силой, но такое равновесие будет неустойчивым.

Интегрирование составляющей давления p_2 дает дополнительную силу, на-

правление которой зависит от знака Γ_0 . Данная дополнительная сила в совокупности с центробежной силой может уравновесить притяжение вихря. Как было показано в **предложении 1.2.1**, это приводит к возникновению двух положений равновесия в редуцированной системе, одно из которых является устойчивым и соответствует периодическому движению профиля. В окрестности этого периодического движения существуют квазипериодические движения.

Аналогично для **неподвижных профиля и источника** запишем комплексный потенциал течения:

$$W = \frac{q}{2\pi} \ln(z + a) + \frac{q}{2\pi} \ln\left(z + \frac{R^2}{a}\right) - \frac{q}{2\pi} \ln z + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln z,$$

и соответствующее ему распределение давления по границе профиля:

$$p = \underbrace{-\frac{\rho q^2 a^2 \sin^2 \theta}{2\pi^2 (R^2 + 2aR \cos \theta + a^2)^2}}_{p_1} + \underbrace{\frac{\rho q \Gamma_0 a \sin \theta}{2\pi^2 R (R^2 + aR \cos \theta + a^2)}}_{p_2} + \left(p_0 - \frac{\rho \Gamma_0^2}{8\pi^2 R^2} \right).$$

Составляющая p_1 является четной функцией угла θ , а составляющая p_2 уже не является четной функцией угла θ . Таким образом, результирующая сил давления будет иметь составляющую, направленную по линии «вихрь – центр профиля», и составляющую, перпендикулярную к указанной линии:

$$\begin{aligned} F = F_x + iF_y &= + \left| \begin{array}{l} -R \int_0^{2\pi} p_1 e^{i\theta} d\theta = -\frac{\rho q^2 R^2}{2\pi} \frac{1}{a(a^2 - R^2)} \\ -R \int_0^{2\pi} p_2 e^{i\theta} d\theta = -i \frac{\rho \Gamma_0 q}{2\pi a} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{\rho q^2 R^2}{2\pi} \frac{1}{a(a^2 - R^2)} - i \frac{\rho \Gamma_0 q}{2\pi a}. \quad (1.64) \end{aligned}$$

Из выражения (1.64) мы видим, что интегрирование составляющей давления p_1 приводит к возникновению силы, которая притягивает профиль к источнику. Интегрирование составляющей p_2 приводит к возникновению силы, направленной перпендикулярно к линии «источник – центр профиля».

Момент дополнительной силы относительно источника является постоянным, что приводит к линейному росту абсолютной величины кинетического

момента профиля (1.38) и, соответственно, к росту центробежной силы, действующей на профиль. В случае когда центробежная сила превосходит силу притяжения источника, будут реализовываться траектории, убегающие на бесконечность (предложение 1.2.4).

1.3 Неуравновешенное твердое тело без собственной циркуляции

Рассмотрим плоскопараллельное движение неуравновешенного кругового профиля в присутствии точечного источника в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Будем считать, что жидкость совершает безвихревое безциркуляционное движение и покоится на бесконечности.

Для построения математической модели введем обозначения для параметров системы (частично продублируем ранее введенные обозначения):

- m — масса профиля,
- I_c — центральный момент инерции профиля,
- R — радиус профиля,
- d — расстояние между геометрическим центром профиля и центром масс,
- q — интенсивность источника, в общем случае являющаяся заданной функцией времени.

Поскольку мы рассматриваем плоскопараллельное движение, то величины m , I_c , q будем считать отнесенными к единице длины профиля.

Для описания движения рассматриваемой системы введем три системы координат: неподвижную (инерциальную) OXY , подвижную $Cx'y'$, жестко связанную с профилем и Oxy , вращающуюся синхронно с профилем (см. рис. 1.14). Будем считать, что начало подвижной системы координат C совпадает с геометрическим центром профиля, а центр масс профиля лежит на положительной части оси Cx' .

Положение профиля относительно неподвижной системы координат будем задавать радиус-вектором его геометрического центра $\mathbf{R}_c = (X_c, Y_c)$, а ориентацию профиля — углом ϑ между положительными направлениями осей OX и Cx' . Положение источника относительно неподвижной системы координат

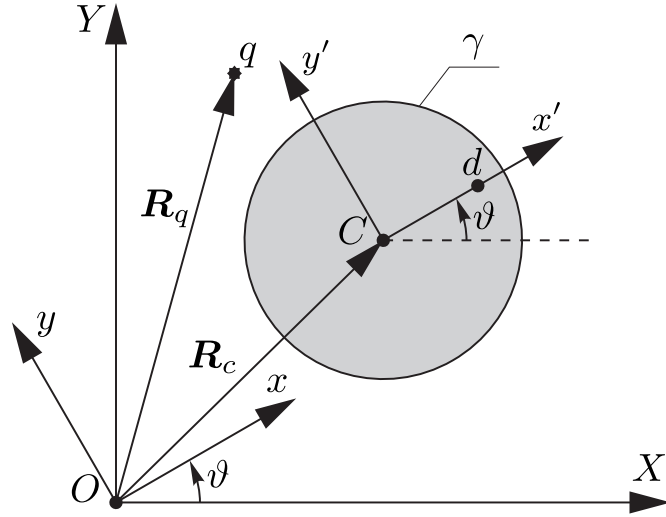


Рисунок 1.14 – Схематическое изображение неуравновешенного кругового профиля и точечного источника

будем задавать радиус-вектором $\mathbf{R}_q = (X_q, Y_q)$. Таким образом, конфигурационное пространство системы пятимерно и представляет собой

$$\mathcal{Q} = \{(X_q, Y_q, X_c, Y_c, \vartheta) \mid (X_q - X_c)^2 + (Y_q - Y_c)^2 > R^2\} \approx \mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^2.$$

Величины, задающие конфигурацию системы, показаны на рис. 1.14.

Движение рассматриваемой системы определяется взаимодействием профиля и источника с окружающей жидкостью. Поскольку движение жидкости считается безвихревым, оно может быть полностью описано комплексным потенциалом. Для построения комплексного потенциала каждой точке плоскости OXY поставим в соответствие комплексное число $Z = X + iY$, тогда комплексный потенциал может быть записан в виде (данный потенциал был введен ранее, здесь мы приведем его снова с учетом переобозначений)

$$W = -\frac{R^2 \dot{Z}_c}{Z - Z_c} + \frac{q}{2\pi} \ln(Z - Z_q) + \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{R^2}{Z - Z_c} - \overline{Z_q - Z_c}\right), \quad (1.65)$$

где $Z_c = X_c + iY_c$, $Z_q = X_q + iY_q$ — комплекснозначные функции времени, задающие положение центра профиля и источника соответственно.

Для построения уравнений движения введем следующие величины:

$$\begin{aligned} P_x &= m\dot{X}_c - md\dot{\vartheta} \sin \vartheta, & P_y &= m\dot{Y}_c + md\dot{\vartheta} \cos \vartheta, \\ P_\vartheta &= md(-\dot{X}_c \sin \vartheta + \dot{Y}_c \cos \vartheta) + (I_c + md^2)\dot{\vartheta}, \end{aligned}$$

где P_x, P_y — проекции импульса профиля на оси неподвижной системы координат, P_ϑ — момент импульса профиля относительно его геометрического центра.

Изменение импульса профиля определяется главным вектором сил давления $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$, действующих на него со стороны жидкости. Компоненты вектора \mathbf{F} могут быть вычислены по формуле Седова и имеют следующий вид:

$$F_x + iF_y = \rho q R^2 \frac{(Z_q - Z_c)^2}{|Z_q - Z_c|^4} \dot{Z}_q - \rho \dot{q} R^2 \frac{Z_q - Z_c}{|Z_q - Z_c|^2} + \frac{\rho q^2 R^2}{2\pi} \frac{(Z_q - Z_c)}{(|Z_q - Z_c|^2 - R^2)|Z_q - Z_c|^2} - \rho \pi R^2 \ddot{Z}_c. \quad (1.66)$$

Вычисленные таким образом компоненты F_x и F_y отнесены к единице длины цилиндра. Последнее слагаемое в выражении (1.66) совпадает с классическим выражением для силы, обусловленной эффектом присоединенных масс [36] и действующей на круговой профиль при его ускоренном движении.

Замечание 1.3.1. *Отметим, что вычисление сил (1.66) может быть выполнено также в вещественной форме:*

$$F_x = - \oint_{\gamma} p dy, \quad F_y = \oint_{\gamma} p dx,$$

где давление p однозначно вычисляется с помощью интеграла Коши – Лагранжа [31]. Однако вычисления в комплексной форме с использованием формулы Седова на практике оказываются проще.

Поскольку профиль является круговым, то момент сил давления, вычисленный относительно геометрического центра профиля, равен нулю. При этом момент импульса P_ϑ может изменяться только вследствие вращения профиля. Таким образом, уравнения движения профиля примут вид

$$\dot{P}_x = F_x, \quad \dot{P}_y = F_y, \quad \dot{P}_\vartheta + d(P_x \cos \vartheta + P_y \sin \vartheta) \dot{\vartheta} = 0. \quad (1.67)$$

Случай неподвижного источника постоянной интенсивности. В случае источника постоянной интенсивности ($\dot{q} = 0$) уравнения движения профи-

ля (1.67) могут быть представлены в лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_c} - \frac{\partial L}{\partial X_c} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_c} - \frac{\partial L}{\partial Y_c} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \quad (1.68)$$

с лагранжианом

$$L = T - U - (\mathbf{A}, \dot{\mathbf{R}}_c),$$

где введены следующие обозначения.

1. T — кинетическая энергия профиля и жидкости:

$$T = \frac{1}{2} (m_c + \rho\pi R^2) (\dot{X}_c^2 + \dot{Y}_c^2) + m_c d (-\sin \vartheta \dot{X}_c + \cos \vartheta \dot{Y}_c) \dot{\vartheta} + \frac{1}{2} (I_c + m_c d^2) \dot{\vartheta}^2.$$

2. U — скалярный потенциал:

$$U = -\frac{\rho q^2}{4\pi} \left(\ln((X_c - X_q)^2 + (Y_c - Y_q)^2) - \ln((X_c - X_q)^2 + (Y_c - Y_q)^2 - R^2) \right).$$

3. \mathbf{A} — векторный потенциал:

$$\mathbf{A} = -\frac{\rho q R^2}{(X_q - X_c)^2 + (Y_q - Y_c)^2} (\mathbf{R}_q - \mathbf{R}_c).$$

В случае неподвижного источника постоянной интенсивности ($\dot{X}_q = 0$, $\dot{Y}_q = 0$, $\dot{q} = 0$) уравнения движения профиля (1.68) могут быть представлены в гамильтоновой форме. При этом без потери общности будем считать, что источник расположен в начале неподвижной системы координат ($X_q = Y_q = 0$). Выполнения данных условий всегда можно добиться с помощью замены переменных:

$$X_c \rightarrow X_c - X_q, \quad Y_c \rightarrow Y_c - Y_q.$$

Для приведения уравнений (1.68) к гамильтоновой форме введем новые

обобщенные импульсы Π_x , Π_y , Π_ϑ следующим образом:

$$\begin{aligned}\Pi_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_c} = P_x + \rho\pi R^2 \dot{X}_c - A_x, & \Pi_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_c} = P_y + \rho\pi R^2 \dot{Y}_c - A_y, \\ \Pi_\vartheta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = P_\vartheta, & A_x &= \frac{\rho q R^2 X_c}{X_c^2 + Y_c^2}, & A_y &= \frac{\rho q R^2 Y_c}{X_c^2 + Y_c^2}.\end{aligned}$$

и выполним преобразование Лежандра:

$$H = \Pi_x \dot{X}_c + \Pi_y \dot{Y}_c + \Pi_\vartheta \dot{\vartheta} - L \Big|_{\dot{X}_c, \dot{Y}_c, \dot{\vartheta} \rightarrow \Pi_x, \Pi_y, \Pi_\vartheta}.$$

Тогда уравнения движения кругового профиля (1.68) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{X}_c &= \frac{\partial H}{\partial \Pi_x}, & \dot{Y}_c &= \frac{\partial H}{\partial \Pi_y}, & \dot{\vartheta} &= \frac{\partial H}{\partial \Pi_\vartheta}, \\ \dot{\Pi}_x &= -\frac{\partial H}{\partial X_c}, & \dot{\Pi}_y &= -\frac{\partial H}{\partial Y_c}, & \dot{\Pi}_\vartheta &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta},\end{aligned}\tag{1.69}$$

где гамильтониан H задается следующим выражением:

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}(\mathcal{P}, \mathbf{Q}^{-1}\mathcal{P}) - \frac{\rho q^2}{4\pi} \left(\ln(X_c^2 + Y_c^2) - \ln(X_c^2 + Y_c^2 - R^2) \right), \\ \mathcal{P} &= \begin{pmatrix} \Pi_x + A_x \\ \Pi_y + A_y \\ \Pi_\vartheta \end{pmatrix}, & \mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} m + \rho\pi R^2 & 0 & -md \sin \vartheta \\ 0 & m + \rho\pi R^2 & md \cos \vartheta \\ -md \sin \vartheta & md \cos \vartheta & I_c + md^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.70}$$

Уравнения (1.69) допускают два первых интеграла: интеграл энергии, совпадающий с гамильтонианом (1.70), и интеграл кинетического момента

$$K = \Pi_\vartheta + \Pi_y X_c - \Pi_x Y_c = \text{const},\tag{1.71}$$

который является следствием существования поля симметрии

$$\mathbf{u} = -Y_c \frac{\partial}{\partial X_c} + X_c \frac{\partial}{\partial Y_c} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \Pi_y \frac{\partial}{\partial \Pi_x} + \Pi_x \frac{\partial}{\partial \Pi_y}.$$

Редукция. Сначала запишем уравнения движения (1.69) в импульсах относительно вращающейся системы координат Oxy . Для этого воспользуемся

следующей заменой переменных:

$$x = X_c \cos \vartheta + Y_c \sin \vartheta, \quad y = -X_c \sin \vartheta + Y_c \cos \vartheta;$$

обозначим новые импульсы:

$$\begin{aligned} p_x &= (\Pi_x + A_x) \cos \vartheta + (\Pi_y + A_y) \sin \vartheta, \\ p_y &= -(\Pi_x + A_x) \sin \vartheta + (\Pi_y + A_y) \cos \vartheta, \\ p_\vartheta &= \Pi_\vartheta. \end{aligned} \quad (1.72)$$

После такой замены переменная ϑ становится циклической, а уравнения для x , y , p_x , p_y , p_ϑ отделяются от полной системы уравнений. При этом переменная ϑ необходима только для реконструкции движения в полном фазовом пространстве и может в дальнейшем анализе не рассматриваться.

В новых переменных гамильтониан (1.70) примет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{p} \right) - \frac{\rho q^2}{4\pi} \left(\ln(x^2 + y^2) - \ln(x^2 + y^2 - R^2) \right), \\ \mathbf{p} &= \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_\vartheta \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & md \\ 0 & md & I_c + md^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Ненулевые скобки Пуассона в новых переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \{p_x, p_\vartheta\} &= -p_y, & \{p_y, p_\vartheta\} &= p_x, & \{x, p_x\} &= \{y, p_y\} = \{\vartheta, p_\vartheta\} = 1, \\ \{x, p_\vartheta\} &= y, & \{y, p_\vartheta\} &= -x. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Интеграл (1.71) в новых переменных сохраняет свою форму:

$$K = p_\vartheta + p_y x - p_x y = \text{const}. \quad (1.75)$$

На фиксированном уровне $K = k$ первого интеграла (1.75) переменная p_ϑ может быть исключена из уравнений движения. Кроме того, для анализа динамики удобнее выполнить еще одну замену переменных:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad p_x = p \cos \alpha, \quad p_y = p \sin \alpha. \quad (1.76)$$

Редуцированная система уравнений движения может быть представлена в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu^{-1}p \cos(\alpha - \varphi) - \mu^{-1}md \sin \varphi \Omega, & \dot{\varphi} &= \frac{p \sin(\alpha - \varphi)}{\mu r} - \frac{md \cos \varphi}{\mu r} \Omega - \Omega, \\ \dot{p} &= -\frac{\rho q^2 R^2 \cos(\alpha - \varphi)}{2\pi r(r^2 - R^2)}, & \dot{\alpha} &= \frac{\rho q^2 R^2 \sin(\alpha - \varphi)}{2\pi r(r^2 - R^2)p} - \Omega, \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$\Omega = \frac{k - rp \sin(\alpha - \varphi) - \mu^{-1}mdp \sin \alpha}{I_c + md^2(1 - \mu^{-1}m)}, \quad (1.78)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (\mu^{-1}p^2 + (I_c - \mu^{-1}m^2d^2)\Omega^2) + \frac{\rho q^2}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (1.79)$$

и скобкой Пуассона

$$\begin{aligned} \{r, p\} &= \cos(\varphi - \alpha), & \{r, \alpha\} &= \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{p}, & \{\varphi, p\} &= -\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{r}, \\ \{\varphi, \alpha\} &= \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{rp}, & \{\alpha, K\} &= 2. \end{aligned}$$

1.3.1 Возможные движения неуравновешенного цилиндра

Перейдем к анализу движения неуравновешенного ($d > 0$) кругового профиля в поле неподвижного источника постоянной интенсивности. Оказывается, что, как и в предыдущем случае ($d = 0$), при $d > 0$ в системе (1.69) удастся аналитически обнаружить лишь конечное число компактных траекторий. Численные эксперименты показывают, что остальные траектории системы некомпактны, то есть либо «убегают» на бесконечность, либо «падают» на источник.

Гипотеза о некомпактности фазовых траекторий. Для того чтобы показать некомпактность фазовых траекторий рассматриваемой системы, выделим из гамильтониана (1.70) эффективный потенциал. Для этого выполним замену переменных

$$x = X_c \cos \vartheta + Y_c \sin \vartheta, \quad y = -X_c \sin \vartheta + Y_c \cos \vartheta. \quad (1.80)$$

И выразим гамильтониан (1.70) через производные от координат x , y и угла ϑ :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{v}) + \frac{\rho q^2}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right), \quad (1.81)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & md \\ 0 & md & I_c + md^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} - y\dot{\vartheta} \\ \dot{y} + x\dot{\vartheta} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix},$$

где $\mu = m + \rho\pi R^2$. Замена переменных (1.80) осуществляет переход к системе координат Oxy , вращающейся синхронно с профилем, и позволяет исключить из гамильтониана угловую переменную ϑ .

Зафиксируем уровень $K = k$ первого интеграла (1.71) и выразим из него производную $\dot{\vartheta}$:

$$\dot{\vartheta} = \frac{k + \mu y \dot{x} - (\mu x + md) \dot{y}}{\mu(x^2 + y^2) + 2mdx + I_c + md^2}. \quad (1.82)$$

Подставляя выражение (1.82) в полную энергию (1.81), можно записать следующее ее представление:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{w}, \mathbf{R}(x, y)\mathbf{w}) + U(x, y), \quad (1.83)$$

$$U(x, y) = \frac{k^2}{2(\mu(x^2 + y^2) + 2mdx + I_c + md^2)} + \frac{\rho q^2}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right), \quad (1.84)$$

где $\mathbf{w} = (\dot{x}, \dot{y})^T$, $\mathbf{R}(x, y)$ — симметричная положительно определенная матрица достаточно сложного вида, $U(x, y)$ — эффективный потенциал.

Анализ выражения (1.84) показывает, что критические точки эффективного потенциала могут располагаться только в плоскости $y = 0$. Таким образом, для нахождения их координат достаточно решить уравнение

$$\left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right|_{y=0} = 0,$$

которое сводится к уравнению четвертой степени:

$$\begin{aligned}
 a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 &= 0, & (1.85) \\
 a_4 = \frac{\rho q^2 R^2 \mu^2}{2\pi} - \mu k^2, \quad a_3 = \frac{2\rho q^2 R^2 \mu m d}{\pi} - m d k^2, \\
 a_2 = \frac{\rho q^2 R^2}{2\pi} (2\mu(I_c + m d^2) + 4m^2 d^2) + \mu R^2 k^2, \\
 a_1 = \frac{2\rho q^2 R^2 m d (I_c + m d^2)}{\pi} + m d R^2 k^2, \\
 a_0 = \frac{\rho q^2 R^2 (I_c + m d^2)^2}{2\pi}.
 \end{aligned}$$

Замечание 1.3.2. Чтобы показать, что критические точки потенциала (1.84) могут располагаться только в плоскости $y = 0$, достаточно выполнить замену переменных

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

и найти частную производную по переменной φ .

Аналитическое вычисление корней уравнения (1.85) приводит к громоздким выражениям, анализ которых оказывается затруднительным. Тем не менее численно-аналитическое исследование функции (1.84) и коэффициентов уравнения (1.85) позволяет выделить два уровня интеграла (1.71), при прохождении которых поверхность потенциала (1.84) качественно изменяется.

1. Значение k_{inf} соответствует возникновению точки перегиба на кривой $U(x, 0)$. Координаты данной точки и значение k_{inf} удовлетворяют системе уравнений

$$\left. \frac{\partial U(x, y, k)}{\partial x} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 U(x, y, k)}{\partial x^2} \right|_{y=0} = 0,$$

которая может быть решена по крайней мере численно.

2. Значение $k_{cr} = |q|R\sqrt{\frac{\rho\mu}{2\pi}}$ соответствует условию $a_4 = 0$. При этом уравнение (1.85) становится кубическим и имеет заведомо один действительный корень.

Таким образом, удается выделить пять качественно различных ситуаций:

1. При $0 \leq |k| < k_{inf}$ потенциал (1.84) не имеет критических точек. Форма его поверхности и ее профиль в плоскости $y = 0$ показаны на рис. 1.15.

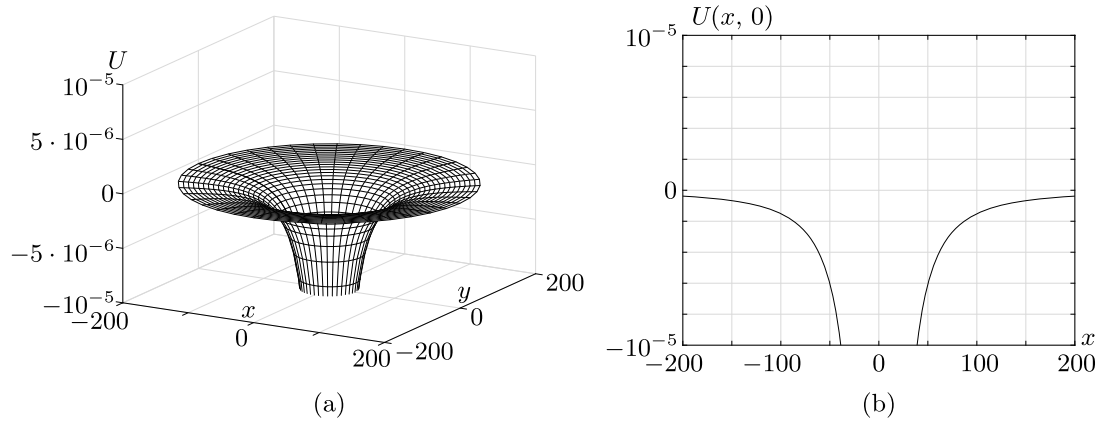


Рисунок 1.15 – Характерная форма (a) поверхности потенциала и (b) профиля функции $U(x, 0)$ при $0 \leq |k| < k_{inf} \approx 0.81153$. Значения параметров: $m = 1$, $d = 0.1$, $R = 1$, $\rho = 1$, $q = 1$, $k \approx 0.73070$

2. При $|k| = k_{inf}$ на кривой $U(x, 0)$ возникает точка перегиба. Форма поверхности потенциала и ее профиль в плоскости $y = 0$ имеют вид, показанный на рис. 1.16.

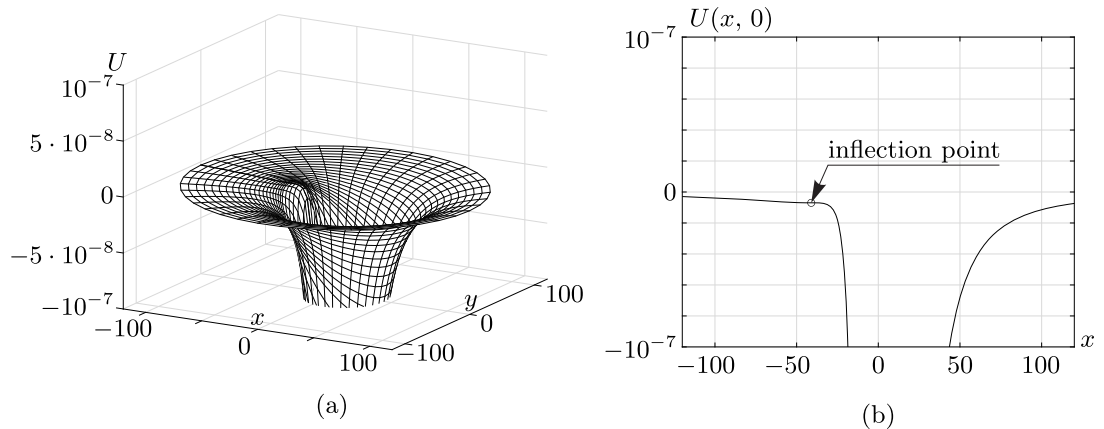


Рисунок 1.16 – Характерная форма (a) поверхности потенциала и (b) профиля функции $U(x, 0)$ при $|k| = k_{inf} \approx 0.81153$. Значения параметров: $m = 1$, $d = 0.1$, $R = 1$, $\rho = 1$, $q = 1$. Координата точки перегиба $x_{inf} \approx -41.0591$

3. При $k_{inf} < |k| < k_{cr}$ потенциал (1.84) имеет точку максимума и седловую точку на отрицательной части оси Ox (см. рис. 1.17). Численный анализ показывает, что седловая точка уходит на минус бесконечность при $|k| \rightarrow k_{cr} - 0$.

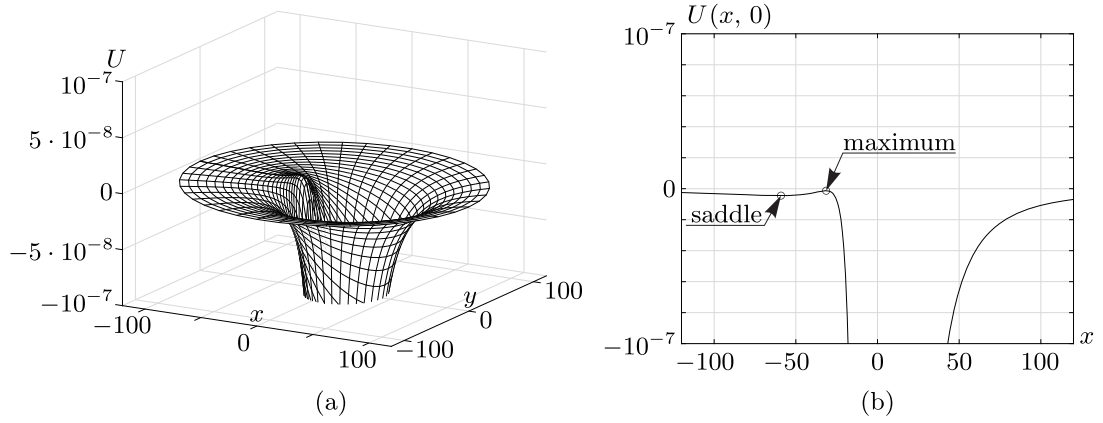


Рисунок 1.17 – Характерная форма (а) поверхности потенциала и (б) профиля функции $U(x, 0)$ при $k_{inf} < |k| < k_{cr}$. Значения параметров: $m = 1$, $d = 0.1$, $R = 1$, $\rho = 1$, $q = 1$, $k \approx 0.81156$, $k_{inf} \approx 0.81153$, $k_{cr} \approx 0.81188$. Координаты седла $x_s \approx -59.09713$ и точки максимума $x_{max} \approx -31.45989$

4. При $|k| = k_{cr}$ потенциал (1.84) обладает только точкой максимума, а седловая точка пропадает. Форма поверхности потенциала и его профиль в плоскости $y = 0$ показаны на рис. 1.18.

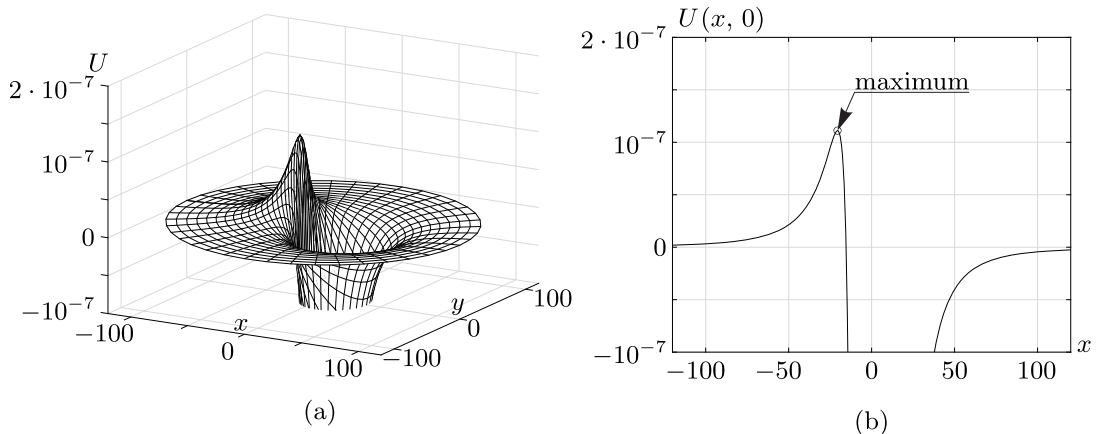


Рисунок 1.18 – Характерная форма (а) поверхности потенциала и (б) профиля функции $U(x, 0)$ при $|k| = k_{cr} \approx 0.81188$. Значения параметров: $m = 1$, $d = 0.1$, $R = 1$, $\rho = 1$, $q = 1$. Координата точки максимума $x_{max} \approx -20.54072$

5. При $k_{cr} < |k|$ потенциал (1.84) имеет точку максимума на отрицательной части оси Ox и седловую на положительной части оси (см. рис. 1.19). Численный анализ показывает, что седловая точка уходит на плюс бесконечность при $|k| \rightarrow k_{cr} + 0$.

Критические точки эффективного потенциала $(x^*, 0)$ соответствуют неподвижным точкам редуцированных уравнений движения: $x = x^*$, $y = 0$, $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Здесь под x^* подразумевается координата x любой из вышеуказанных

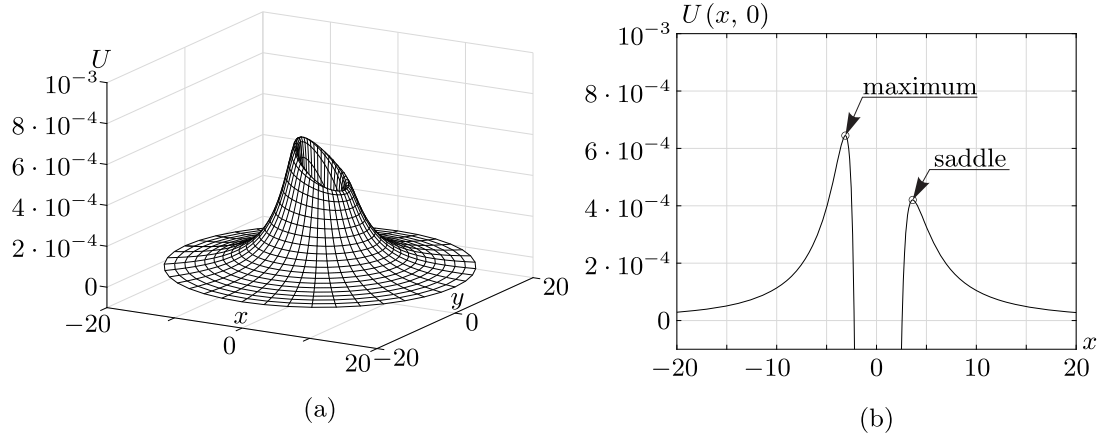


Рисунок 1.19 – Характерная форма (а) поверхности потенциала и (б) профиля функции $U(x, 0)$ при $|k| > k_{cr} \approx 0.81188$. Значения параметров: $m = 1$, $d = 0.1$, $R = 1$, $\rho = 1$, $q = 1$, $k \approx 0.86872$. Координаты седла $x_s \approx 3.62443$ и точки максимума $x_{max} \approx -3.11904$

критических точек. При этом траектория центра профиля представляет собой окружность

$$X_c(t) = x^* \cos \vartheta(t), \quad Y_c = x^* \sin \vartheta(t), \quad \vartheta(t) = \frac{kt}{\mu(x^*)^2 + 2mdx^* + I_c + md^2}. \quad (1.86)$$

Отметим, что поскольку критические точки потенциала являются либо точками максимума, либо седловыми точками, то движение по окружности (1.86) является неустойчивыми.

Мы видели, что эффективный потенциал не имеет точек минимума. Кроме того, численные эксперименты показывают, что фазовые траектории редуцированной системы либо «убегают» на бесконечность, либо «падают» на источник. Таким образом, мы можем сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 1.3.1. *В рассматриваемой системе не существует компактных траекторий, за исключением траекторий, соответствующих неподвижным точкам редуцированной системы.*

1.4 Заключение

В данной главе рассмотрены задачи о движении уравновешенного и неуравновешенного кругового профиля в поле точечной особенности. Показано, что в отсутствие у цилиндра собственной циркуляции вид точечной особенности

не влияет на движение цилиндра. Построены уравнения совместного движения источника и профиля. Показано, что в случае неподвижной особенности постоянной интенсивности уравнения движения профиля являются гамильтоновыми. Кроме того, в случае уравновешенного кругового профиля уравнения движения интегрируемы. В работе выполнен бифуркационный анализ интегрируемого случая. При наличии у цилиндра смещения центра масс для рассматриваемой системы построен эффективный потенциал, указаны возможные частные решения (неподвижные точки).

Для уравновешенного цилиндра с собственной циркуляцией показано, что в зависимости от вида точечной особенности происходит качественное изменение динамики системы. В случае неподвижного точечного вихря система интегрируема, указаны устойчивая и неустойчивая неподвижные точки, приведены бифуркационная диаграмма и фазовые портреты. В случае неподвижного источника показано, что все траектории цилиндра либо притягиваются к особенности, либо уходят на бесконечность.

Постановка задачи принадлежит Ветчанину Е. В., а также идеи доказательства предложений [3, 4, 67]. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в данной главе. Также автором выполнены все аналитические и численные расчеты с использованием упомянутых в главе методов [3, 4, 67].

Глава 2. Динамика квадратных вихревых решеток

2.1 Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим движения вихревых решеток в идеальной несжимаемой жидкости. Под вихревой решеткой будем понимать набор точечных вихрей одинаковых интенсивностей Γ . Координаты вихрей решетки на комплексной плоскости представим следующим образом

$$z_{ab} = z_{00} + al_1 + bl_2, \quad a, b \in \mathbb{Z},$$

где l_1, l_2 — комплексные образующие решетки, z_{00} задает на комплексной плоскости положение базового вихря, а индексы a и b нумеруют вихри внутри одной решетки.

Уравнения движения задаваемых таким образом вихрей можно представить в гамильтоновой форме $\dot{x}_{ab}^k = \{x_{ab}^k, H\}$, $\dot{y}_{ab}^n = \{y_{ab}^n, H\}$ со скобкой Пуассона

$$\{x_{ab}^k, y_{a'b'}^n\} = \frac{1}{\Gamma_k} \delta_{kn} \delta_{aa'} \delta_{bb'}.$$

При этом в выбранных обозначениях гамильтониан, описывающий N вихревых решеток с одинаковыми образующими, имеет вид

$$H = -\frac{1}{8\pi} \sum'_{\substack{a,b,k, \\ a',b',n}} \Gamma_k \Gamma_n \ln(|z_{ab}^k - z_{a'b'}^n|),$$

где штрих у знака суммы означает, что из суммы исключаются слагаемые, у которых одновременно выполняются равенства $a = a'$, $b = b'$, $k = n$. Индексы $k, n = 1, \dots, N$ нумеруют решетки, а индексы $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ нумеруют вихри в решетке.

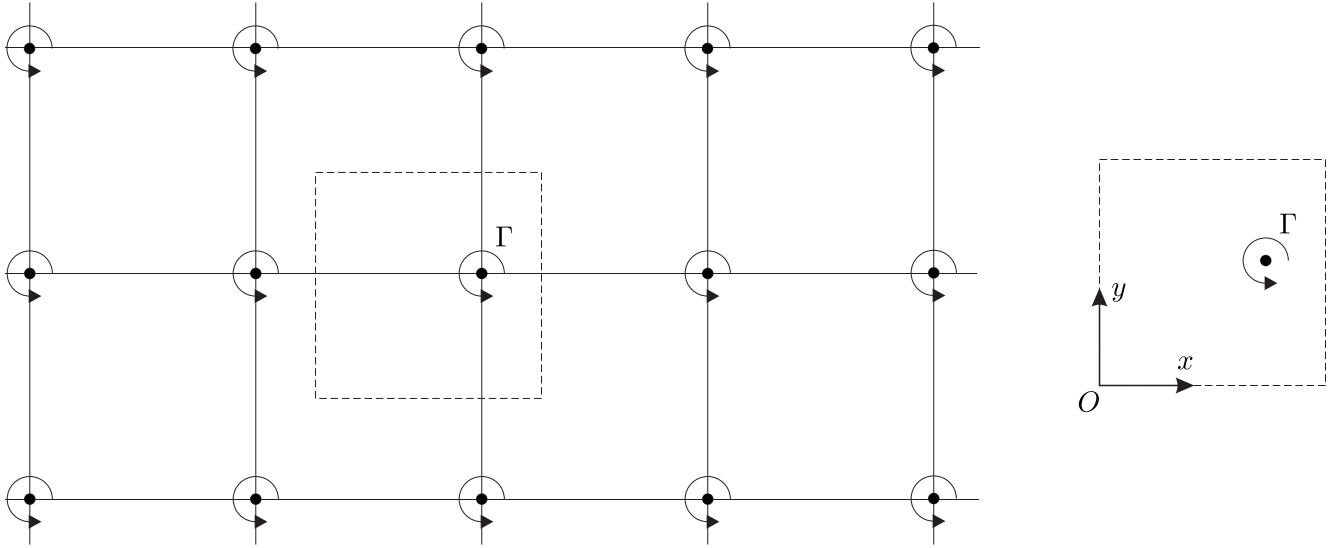


Рисунок 2.1 – Схематическое изображение квадратной вихревой решетки

Рассматриваемая система обладает дискретной симметрией, которая сохраняется все время движения. Поэтому просуммировав выражения в гамильтониане и уравнения движения по a , a' , b , b' , можем перейти к рассмотрению динамики движения N точечных вихрей в элементарной ячейке, которая представляет собой «плоский» тор.

Просуммировав вихри каждой решетки с учетом периодичности, О'Нейл в работе [47], исходя из рассуждений Ткаченко [81], получил явное выражение для гамильтониана с помощью эллиптических функций:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum'_{k,n=1}^N \Gamma_k \Gamma_n \left(\ln \left| \theta_1 \left(\frac{z_k - z_n}{l_1}, \tau \right) \right| - \pi \frac{[\text{Im}(z_k - z_n)]^2}{\Delta} \right), \quad (2.1)$$

где $\Delta = 4|l_1|^2 \text{Im} \tau$, $\tau = \frac{l_2}{l_1}$. Здесь $\theta_1(z, \tau)$ — тэта-функция Якоби, которая может быть записана в виде

$$\theta_1(v, \chi) = i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} e^{(2n-1)\pi v i}, \quad q = e^{-\pi \chi}.$$

В данной работе мы будем рассматривать движение ортогональных квадратных решеток (см. рис. 2.1). Не умаляя общности, будем считать, что образующие решеток равны $l_1 = 2\pi$, $l_2 = i2\pi$. Следуя работе [62], представим

гамильтониан (2.1) в вещественной форме, не переходя к тэта-функциям:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum'_{k,n=1}^N \Gamma_k \Gamma_n h(x_k - x_n, y_k - y_n), \quad (2.2)$$

где $h(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch}(x - 2\pi m) - \cos y}{\operatorname{ch}(2\pi m)} \right) - \frac{x^2}{2\pi}$.

Уравнения движения рассматриваемой системы N вихрей могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \frac{1}{\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial y_k} = -\frac{1}{2\Gamma_k \pi} \sum_{\substack{n=1, \\ n \neq k}}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_k \Gamma_n \sin(y_k - y_n)}{\operatorname{ch}(x_k - x_n - 2\pi m) - \cos(y_k - y_n)}, \\ \dot{y}_k &= -\frac{1}{\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial x_k} = \\ &= \frac{1}{2\Gamma_k \pi} \sum_{\substack{n=1, \\ n \neq k}}^N \Gamma_k \Gamma_n \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(x_k - x_n - 2\pi m)}{\operatorname{ch}(x_k - x_n - 2\pi m) - \cos(y_k - y_n)} - \frac{x_k - x_n}{\pi} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнения (2.3), помимо интеграла энергии (2.2), допускают еще два первых неоднозначных «интеграла»:

$$Q = \sum_k \Gamma_k x_k, \quad P = \sum_k \Gamma_k y_k. \quad (2.4)$$

Точность вычислений. Для дальнейших численных расчетов необходимо определить минимальное количество членов ряда в выражении для гамильтониана (2.2) и в уравнениях (2.3), которое будет обеспечивать необходимую точность вычисления. А также убедиться в сходимости ряда в (2.2). Представим ряд в выражении (2.2) для гамильтониана в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch}(\delta x_{kn} - 2\pi m) - \cos(\delta y_{kn})}{\operatorname{ch}(2\pi m)} \right) = \\ \sum_{m=1}^{\infty} U_m(\delta x_{kn}, \delta y_{kn}) + \ln(\operatorname{ch} \delta x_{kn} - \cos(\delta y_{kn})), \end{aligned}$$

$$U_m(\delta x_{kn}, \delta y_{kn}) = \ln \left(\frac{(\operatorname{ch}(\delta x_{kn} - 2\pi m) - \cos(\delta y_{kn}))(\operatorname{ch}(\delta x_{kn} + 2\pi m) - \cos(\delta y_{kn}))}{\operatorname{ch}^2(2\pi m)} \right),$$

через $(\delta x_{kn}, \delta y_{kn})$ здесь обозначены взаимные расстояния $(x_k - x_n, y_k - y_n)$ соответственно.

Нетрудно показать, что ряд $U_m(\delta x_{kn}, \delta y_{kn})$ сходится абсолютно:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{m+1}(\delta x_{kn}, \delta y_{kn})}{U_m(\delta x_{kn}, \delta y_{kn})} \right| = e^{-2\pi} \approx 0.001867 < 1.$$

Найдем, при каком количестве членов ряда p будет достигаться заданная точность его вычисления $\varepsilon = 10^{-14}$. Оценим остаток ряда:

$$\begin{aligned} \sum_{m=p}^{\infty} U_m(\delta x_{kn}, \delta y_{kn}) &\leq \sum_{m=p}^{\infty} \ln \left(\frac{(1 + e^{-\delta x_{kn} - 2\pi m})^2 (1 + e^{\delta x_{kn} - 2\pi m})^2}{(1 + e^{-4\pi m})} \right) \\ &\leq \sum_{m=p}^{\infty} 4 \operatorname{ch}(\delta x_{kn}) e^{-2\pi m} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Найдя сумму геометрической прогрессии (2.5), получим неравенство

$$\frac{4 \operatorname{ch}(\delta x_{kn}) e^{-2\pi p}}{1 - e^{-2\pi}} \leq \varepsilon.$$

Учитывая, что максимальное значение δx_{kn} равно 2π , получим

$$p \geq 7.$$

Аналогичным образом находятся значения p для рядов в выражении (2.3). В дальнейшем при численном интегрировании системы дифференциальных уравнений будем использовать метод Рунге–Кутты–Вернера 6–ого порядка точности [25].

2.2 Динамика двух вихревых решеток

2.2.1 Редукция

Рассмотрим динамику двух взаимодействующих вихревых решеток. Для построения фазовых портретов и исследования характера движения двух вихревых решеток проведем редукцию уравнений (2.3) по интегралам движения (2.4) в случае $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$. Для этого перейдем к новым переменным (P, Q, ξ, η) , связанным с исходными (x_1, y_1, x_2, y_2) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} Q &= \Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2, & P &= \Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2, & \xi &= x_1 - x_2, & \eta &= y_1 - y_2, \\ x_1 &= \frac{Q + \Gamma_2 \xi}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, & y_1 &= \frac{P + \Gamma_2 \eta}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, & x_2 &= \frac{Q - \Gamma_1 \xi}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, & y_2 &= \frac{P - \Gamma_1 \eta}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Более общие процедуры редукции для задачи N вихрей на плоскости и на сфере представлены в [73].

В новых переменных, на фиксированном уровне первых интегралов Q, P , уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{1}{2\pi}(\Gamma_2 + \Gamma_1) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) - \cos \eta}, \\ \dot{\eta} &= \frac{1}{2\pi}(\Gamma_2 + \Gamma_1) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\xi - 2m\pi)}{\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) - \cos \eta} - \frac{\xi}{\pi} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Гамильтониан (2.2) для после замены переменных примет вид

$$H = -\frac{1}{2\pi} \Gamma_1 \Gamma_2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch}(\xi - 2\pi m) - \cos \eta}{\operatorname{ch}(2\pi m)} \right) - \frac{\xi^2}{2\pi} \right). \quad (2.8)$$

Не умаляя общности, будем считать, что выполняется равенство $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 1$. Случай $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 1$ приводятся к случаю $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 1$ с помощью замены времени $\tau = (\Gamma_1 + \Gamma_2)t$. Таким образом, траектории приведенной системы (2.7) не зависят от интенсивностей вихрей, от них зависят только скорости движения по этим траекториям и траектории движения вихрей в абсолютном пространстве.

2.2.2 Анализ редуцированной системы

Для исследования редуцированной системы и классификации движений удобнее рассматривать уравнения редуцированной системы (2.7) как систему на торе $\xi \in [-\pi, \pi)$, $\eta \in [-\pi, \pi)$. В этом случае, при постоянных значениях Q , P , траектории в абсолютном пространстве становятся разрывными. При этом несвязным фрагментам траекторий вихрей соответствуют части траекторий разных вихрей одной и той же решетки.

Для восстановления абсолютного движения какого-то одного из вихрей вихревой решетки необходимо исключить правила сшивки для переменных ξ , η и рассматривать систему (2.7) как систему на плоскости. В этом случае траектории редуцированной системы будут непрерывными, однако могут выходить за пределы ячейки $\xi \in [-\pi, \pi)$, $\eta \in [-\pi, \pi)$. На рис. 2.2 изображены фазовые портреты с учетом сшивки и без нее.

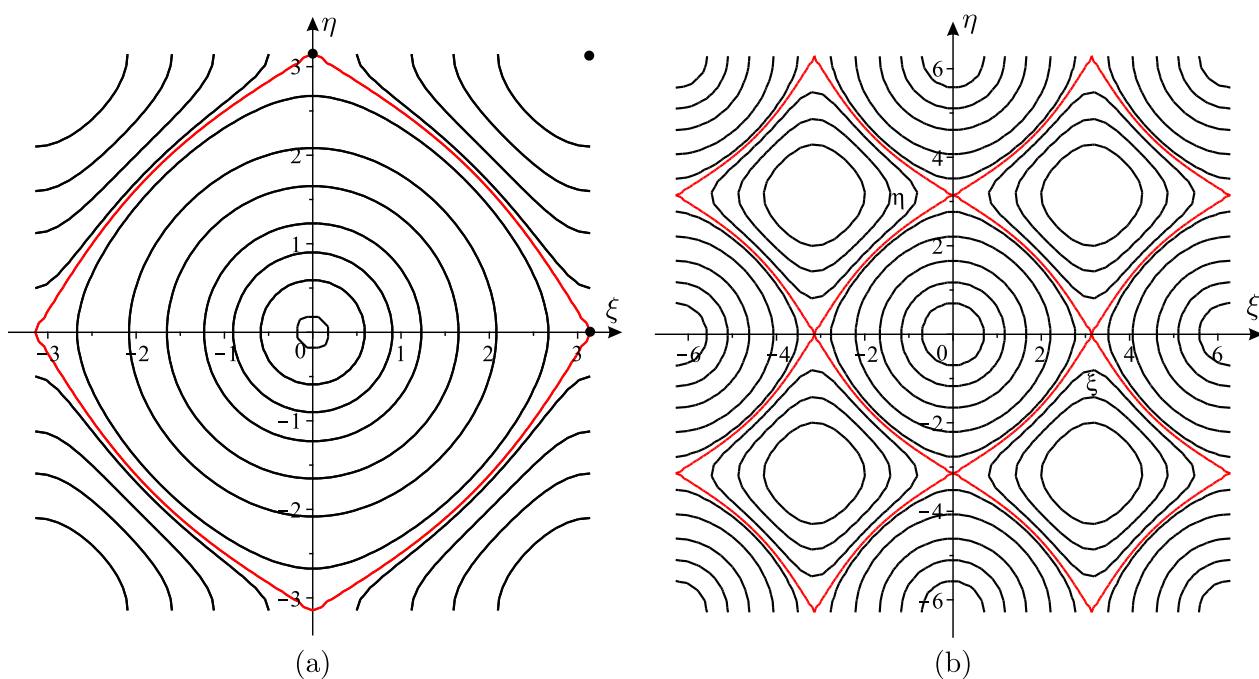


Рисунок 2.2 – Фазовый портрет (a) с учетом сшивки, (b) без сшивки

Как было сказано выше, будем считать что $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 1$. В этом случае система (2.7) не зависит от параметров. Таким образом, траектории редуцированной системы одинаковы при всех значениях параметров Γ_k и интегралов Q , P .

На плоскости (ξ, η) в начале координат находится особенность, соответствующая совпадению вихрей (см. рис. 2.2). Кроме того, на фазовом портрете видны три неподвижные точки.

Предложение 2.2.1. Система (2.7) обладает тремя неподвижными точками: две неустойчивые с координатами $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$, одна устойчивая с координатами (π, π) .

Доказательство. Неподвижные точки фазового портрета являются критическими точками гамильтониана (2.8). Уравнения для нахождения неподвижных точек запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2\pi}\Gamma_1\Gamma_2\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(\xi - 2m\pi)}{\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) - \cos(\eta)} - \frac{\xi}{\pi}\right) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \eta} &= -\frac{1}{2\pi}\Gamma_1\Gamma_2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\eta)}{\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) - \cos(\eta)} = 0.\end{aligned}$$

Из (2.8) следует, что гамильтониан допускает следующие симметрии:

$$H(\xi, -\eta) = H(\xi, \eta), \quad H(\xi, \pi - \eta) = H(\xi, \pi + \eta). \quad (2.9)$$

Следовательно, решения системы (2.2.2) лежат на прямых $\eta = 0$, $\eta = \pi$. Подставив в первое уравнение системы (2.2.2) $\eta = 0$, получаем

$$-\frac{1}{2\pi}\Gamma_1\Gamma_2\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(\xi - 2m\pi)}{\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) - 1} - \frac{\xi}{\pi}\right) = 0. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) имеет особенность в точке $\xi = 0$. Из нечетности левой части уравнения (2.10) и ее 2π -периодичности следует, что уравнение (2.10) имеет решение $\xi = \pi$. Аналогично для решений, лежащих на прямой $\eta = \pi$, получим уравнение

$$-\frac{1}{2\pi}\Gamma_1\Gamma_2\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(\xi - 2m\pi)}{\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) + 1} - \frac{\xi}{\pi}\right) = 0. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) не содержит особенностей, и из тех же свойств симметрии следует, что оно имеет решения $\xi = 0$, $\xi = \pi$. Численный анализ уравнений (2.10) и (2.11) показывает, что найденные решения являются единственными.

Для определения устойчивости найденных неподвижных точек составим

матрицу вторых производных:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \eta \partial \xi} & \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Найдем угловые миноры этой матрицы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\frac{1}{2\pi} \Gamma_1 \Gamma_2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) \cos(\eta)}{(\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) - \cos(\eta))^2} + \frac{1 - \operatorname{ch}(\xi) \cos(\eta)}{(\operatorname{ch}(\xi) - \cos(\eta))^2} - \frac{1}{\pi} \right), \\ \Delta_2 &= \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{1}{4\pi^2} \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi)}{\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) - \cos(\eta)} - \frac{\operatorname{sh}^2(\xi - 2m\pi)}{(\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) - \cos(\eta))^2} \right) + \frac{1}{\pi} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos(\eta)}{\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) - \cos(\eta)} - \frac{\sin^2(\eta)}{(\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) - \cos(\eta))^2} \right) \right) - \frac{1}{4\pi^2} \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{-\operatorname{sh}(\xi - 2m\pi) \sin(\eta)}{(\operatorname{ch}(\xi - 2m\pi) - \cos(\eta))^2} \right)^2. \end{aligned}$$

С помощью непосредственных вычислений можно показать, что

$$\begin{aligned} \Delta_1(\xi = \pi, \eta = \pi) &> 0, & \Delta_2(\xi = \pi, \eta = \pi) &> 0, \\ \Delta_1(\xi = 0, \eta = \pi) &> 0, & \Delta_2(\xi = 0, \eta = \pi) &< 0, \\ \Delta_1(\xi = \pi, \eta = 0) &< 0, & \Delta_2(\xi = \pi, \eta = 0) &< 0. \end{aligned}$$

Следовательно, точка (π, π) — устойчивая неподвижная точка (локальный минимум при $\Gamma_1 \Gamma_2 > 0$ или локальный максимум при $\Gamma_1 \Gamma_2 < 0$ гамильтониана (2.8)), конфигурация вихревых решеток, соответствующая этой неподвижной точке, приведена на рис. 2.3. А точки $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$ — неустойчивые неподвижные точки (седловые точки гамильтониана (2.8)), соответствующие им конфигурации вихревых решеток приведены на рис. 2.4. \square

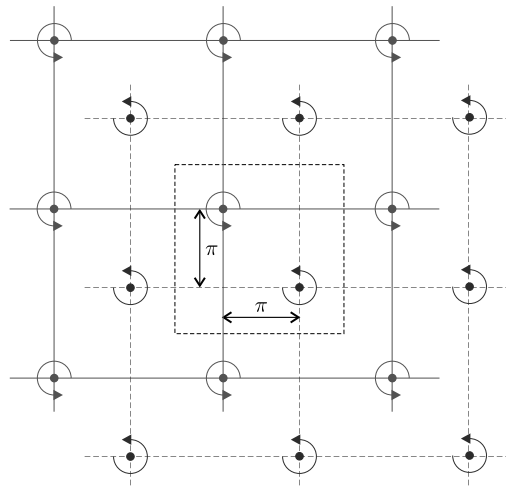


Рисунок 2.3 – Схематическое изображение устойчивой конфигурации

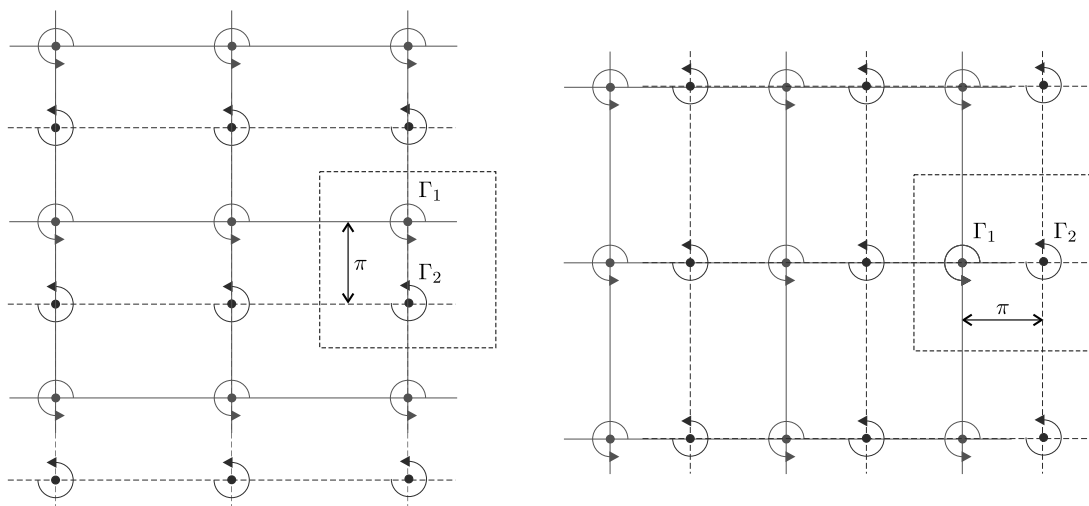


Рисунок 2.4 – Схематическое изображение неустойчивых конфигураций

2.2.3 Абсолютная динамика

Неподвижные точки редуцированной системы соответствуют стационарным конфигурациям вихрей. Устойчивой неподвижной точке соответствует конфигурация, когда вихри каждой из решеток лежат в центрах ячеек другой решетки. А двум неустойчивым соответствуют положения вихрей, при которых вихри одной из решеток лежат на ребрах другой. Все остальные решения системы (2.7) являются периодическими, за исключением сепаратрисных решений, которые реализуют переход из одной неустойчивой неподвижной точки в другую.

Следует отметить, что в силу линейности замены (2.6) траектории движения вихрей в абсолютном пространстве будут подобны фазовым траекториям редуцированной системы (2.7). Для восстановления абсолютного движения вихрей построим фазовый портрет редуцированной системы (2.7) без разрывов траектории (см. рис. 2.2b).

Из условия подобия траекторий в абсолютном пространстве, траекториям редуцированной системы, а также из ограниченности траекторий на фазовом портрете следует, что все траектории движения вихрей будут ограниченными. Исключение составляет случай вихревой пары $\Gamma_2 = -\Gamma_1$. В этом случае редукция (2.6) неприменима, а вихри движутся по прямой, как и в случае плоскости.

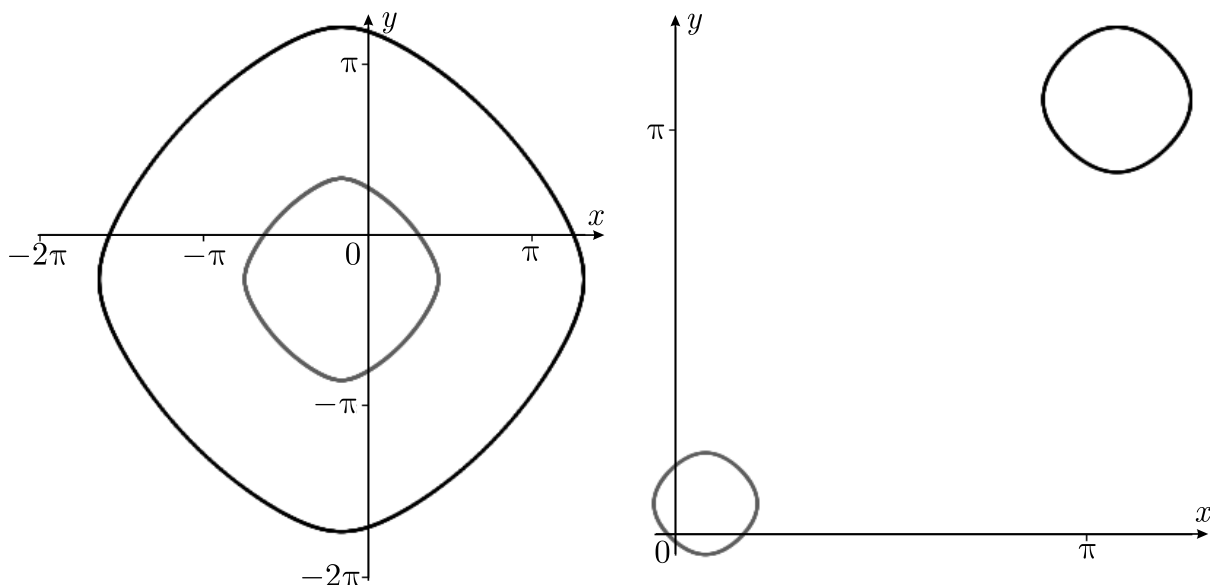


Рисунок 2.5 – Траектории вихрей в абсолютном пространстве: при $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -0.4$ и начальных условиях $(\xi, \eta) = (1.5, 2.0)$ (слева), при $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 0.7$ и начальных условиях $(\xi, \eta) = (2.5, 2.5)$ (справа)

Замечание 2.2.1. *Интересным отличием рассматриваемой задачи от случая*

плоскости и сферы является то, что взаимное расстояние между вихрями не сохраняется во время движения. Исключением является случай вихревой пары, когда взаимное расстояние остается постоянным.

Построим траектории движения вихрей в абсолютном пространстве, соответствующие различным начальным условиям на фазовом портрете. На рис. 2.5 изображены траектории вихрей при различных значениях интенсивностей. На данных рисунках черной линией обозначены траектории вихрей с интенсивностью Γ_2 , серой — с интенсивностью Γ_1 .

2.3 Динамика трех вихревых решеток

Рассмотрим задачу о движении трех вихревых решеток. В случае нулевой суммарной интенсивности данная система является интегрируемой. Исследованию данного случая посвящена работа [57]. Рассмотрим далее задачу в предположении, что сумма интенсивностей не равна нулю.

2.3.1 Редукция

Проведем редукцию уравнений (2.3) для рассматриваемого случая на уровень первых интегралов Q , P . Для этого перейдем к следующим переменным:

$$\begin{aligned} Q &= \Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 + \Gamma_3 x_3, & \xi_1 &= x_1 - x_2, & \xi_2 &= x_2 - x_3, \\ P &= \Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2 + \Gamma_3 y_3, & \eta_1 &= y_1 - y_2, & \eta_2 &= y_2 - y_3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В новых переменных гамильтониан (2.2) запишется в виде

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2\pi} \left(\Gamma_1 \Gamma_2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch}(\xi_1 - 2\pi m) - \cos(\eta_1)}{\operatorname{ch}(2\pi m)} \right) - \frac{\xi_1^2}{2\pi} \right) + \right. \\ &\Gamma_1 \Gamma_3 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch}(\xi_1 + \xi_2 - 2\pi m) - \cos(\eta_1 + \eta_2)}{\operatorname{ch}(2\pi m)} \right) - \frac{(\xi_1 + \xi_2)^2}{2\pi} \right) + \\ &\left. \Gamma_2 \Gamma_3 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch}(\xi_2 - 2\pi m) - \cos(\eta_2)}{\operatorname{ch}(2\pi m)} \right) - \frac{\xi_2^2}{2\pi} \right) \right). \end{aligned}$$

При этом уравнения движения на фиксированном уровне первых интегралов

Q , P могут быть представлены в гамильтоновом виде:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \{\xi_1, H\}, & \dot{\xi}_2 &= \{\xi_2, H\}, \\ \dot{\eta}_1 &= \{\eta_1, H\}, & \dot{\eta}_2 &= \{\eta_2, H\}\end{aligned}\tag{2.14}$$

со скобками Пуассона, определяемыми соотношениями

$$\begin{aligned}\{\xi_i, \xi_j\} &= 0, & \{\eta_i, \eta_j\} &= 0, \\ \{\xi_1, \eta_2\} &= \{\xi_2, \eta_1\} = -\frac{1}{\Gamma_2}, & \{\xi_1, \eta_1\} &= \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}, & \{\xi_2, \eta_2\} &= \frac{1}{\Gamma_2} + \frac{1}{\Gamma_3}.\end{aligned}$$

Система (2.14) определена на четырехмерном торе $\mathbb{T}^4 = \{(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \mid \xi_1 \in [0, 2\pi), \xi_2 \in [-\pi, \pi), \eta_1 \in [-\pi, \pi), \eta_2 \in [-\pi, \pi)\}$.

Замечание 2.3.1. *Помимо замены (2.13), для редукции можно использовать и другие переменные. Например, аналоги переменных Якоби, используемые для редукции в задачах о движении вихрей на плоскости или сфере [73]. Однако переменные Якоби явно зависят от интенсивностей Γ_i и при несоизмеримых Γ_i не являются переменными на торе. То есть уравнения в таких переменных необходимо рассматривать как систему на плоскости. Действительно, если рассматривать переменные Якоби как переменные на торе, то, например, периодические решения исходных уравнений (2.3) будут соответствовать квазипериодическим траекториям редуцированной системы. Поэтому для редукции уравнений N вихревых решеток необходимо рассматривать замены переменных, не зависящие от Γ_i .*

Рассмотрим далее полученную систему с двумя степенями свободы более подробно.

2.3.2 Численное исследование системы

Для дальнейшего исследования построим отображение Пуанкаре при различных значениях энергии $E = H(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$. В качестве секущей выберем плоскость $\eta_1 = 0$. Пересечение данной плоскости с изоэнергетическим уровнем представляет собой достаточно сложную поверхность. Поэтому отображение Пуанкаре лучше рассмотреть непосредственно на данной поверхности $E = H(\xi_1, \xi_2, \eta_1 = 0, \eta_2)$, вложенной в трехмерное пространство (ξ_1, ξ_2, η_1) . На

рис. 2.6 изображены отображения Пуанкаре (сверху) и соответствующие поверхности сечений уровня энергии выбранной плоскостью (снизу).

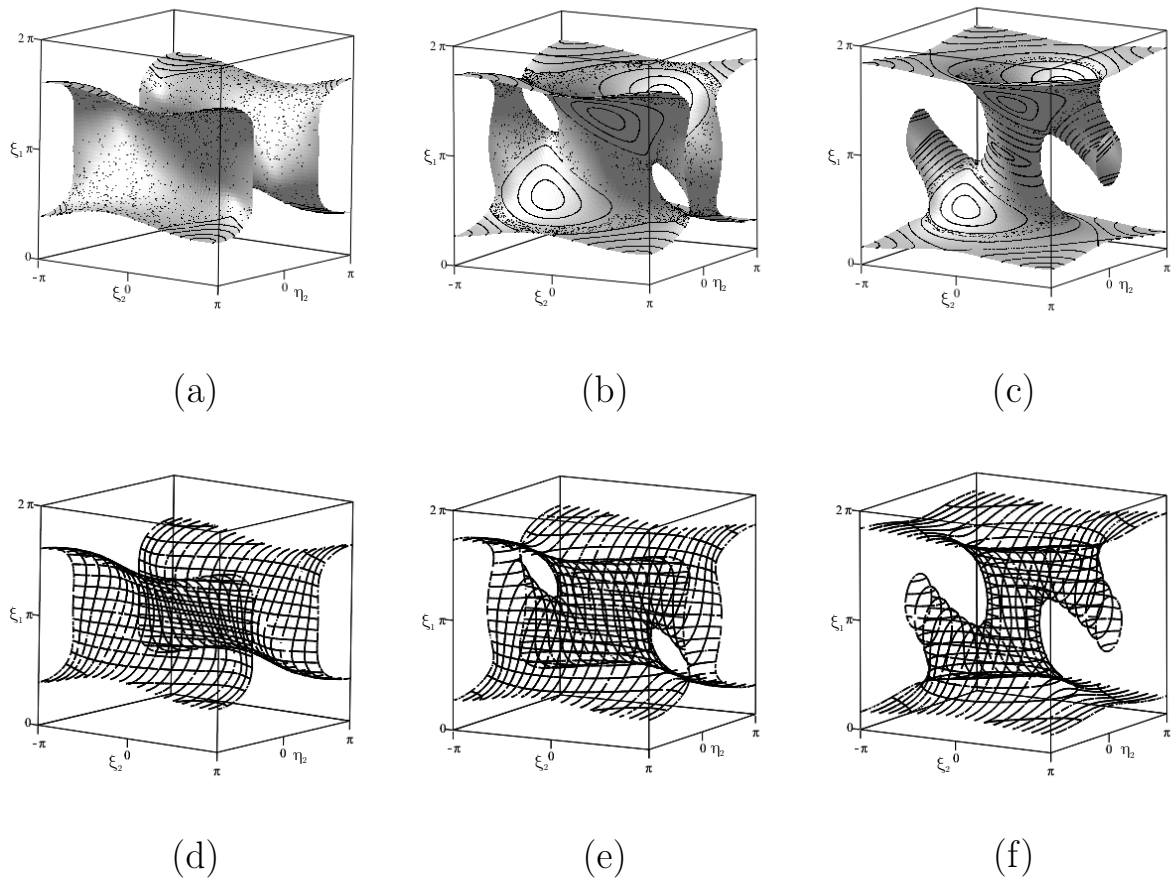


Рисунок 2.6 – Отображение (a–c) и поверхность равной энергии (d–f), при (a, d) $E = -0.25$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$; (b, e) $E = -0.15$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$; (c, f) $E = 0$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$

Из рисунка 2.6 видно, что при изменении уровня энергии может изменяться топологический тип сечений изоэнергетических поверхностей. Например, на рис. 2.6d, при значений параметра $E = -0.25$ сечение изоэнергетической поверхности представляет собой тор, а при $E = -0.15$, $E = 0$ – сферу с тремя ручками (рис. 2.6e,f). Исследование и классификация топологических типов изоэнергетических поверхностей в зависимости от уровня энергии и параметров системы является открытой проблемой.

На отображениях Пуанкаре (см. рис. 2.6a–c) хорошо видны хаотические слои, что подтверждает неинтегрируемость задачи о движении трех вихрей на торе в случае ненулевой суммарной интенсивности.

2.4 Динамика четырех вихревых решеток

Рассмотрим задачу о движении четырех вихревых решеток при ненулевой суммарной интенсивности. В общем случае данная задача сводится к системе с тремя степенями свободы и, так же как и задача о движении трех вихревых решеток, является неинтегрируемой. Рассмотрим вопрос о существовании в данной задаче инвариантных многообразий, аналогичных инвариантным многообразиям, указанным в работах [73].

2.4.1 Инвариантное многообразие

В работе [73] показано, что в случае попарно равных интенсивностей вихрей, уравнения движения четырех вихрей на плоскости и сфере обладают центрально-симметричным инвариантным многообразием. Покажем, что уравнения движения вихрей на торе допускают аналогичное инвариантное многообразие.

Предложение 2.4.1. Пусть интенсивности вихрей попарно равны, то есть $\Gamma_1 = \Gamma_3$ и $\Gamma_2 = \Gamma_4$. Тогда уравнения движения (2.3) допускают инвариантное многообразие, задаваемое соотношением

$$x_1 - x_4 = x_2 - x_3, \quad y_1 - y_4 = y_2 - y_3. \quad (2.15)$$

Доказательство. Данное предложение можно доказать непосредственным дифференцированием инвариантных соотношений (2.15) и подстановкой в них уравнений движения (2.3). \square

Геометрический смысл соотношений (2.15) заключается в том, что конфигурация вихрей обладает центральной симметрией, т. е. представляет собой параллелограмм в каждый момент времени (см. рис. 2.7).

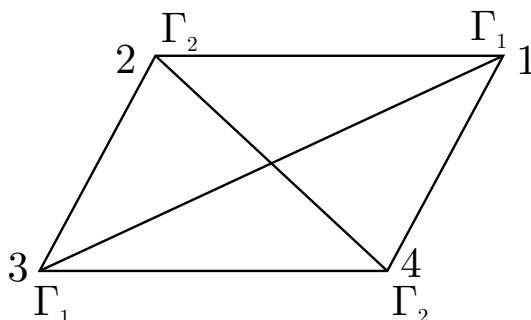


Рисунок 2.7 – Схематическое изображение начального положения вихрей

2.4.2 Редукция

Редукция на уровень первых интегралов

Выполним редукцию уравнений движения на уровень первых интегралов Q, P . Выберем редуцирующие переменные, удобные для описания движения на инвариантном многообразии (2.15):

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}((x_1 - x_3) - (x_2 - x_4)), & \xi_2 &= -\frac{1}{2}((x_1 - x_3) + (x_2 - x_4)), \\ \xi_3 &= \frac{1}{2}((x_1 + x_3) - (x_2 + x_4)), & \xi_4 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ \eta_1 &= \frac{1}{2}((y_1 - y_3) - (y_2 - y_4)), & \eta_2 &= -\frac{1}{2}((y_1 - y_3) + (y_2 - y_4)), \\ \eta_3 &= \frac{1}{2}((y_1 + y_3) - (y_2 + y_4)), & \eta_4 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Как и для задачи о движении трех вихревых решеток, переменные (2.16) явно не зависят от интенсивностей вихрей.

Новые переменные имеют следующий геометрический смысл: (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) — полуразность и полусумма диагоналей четырехугольника, образованного вихрями соответственно, (ξ_3, η_3) — вектор, соединяющий середины диагоналей, а (ξ_4, η_4) — геометрический центр четырехугольника (см. рис. 2.7).

Первые интегралы (2.4) в новых переменных примут вид

$$Q = (\Gamma_1 - \Gamma_2)\xi_3 + (\Gamma_1 + \Gamma_2)\xi_4, \quad P = (\Gamma_1 - \Gamma_2)\eta_3 + (\Gamma_1 + \Gamma_2)\eta_4.$$

Оказывается, уравнения для первых трех пар переменных (2.16) отделяются и образуют редуцированную систему уравнений

$$\dot{\xi}_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad \dot{\eta}_i = g_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad i = 1, 2, 3.\tag{2.17}$$

Здесь f_i, g_i — некоторые функции достаточно громоздкого вида.

При этом на заданном уровне интегралов Q, P зависимость оставшихся переменных ξ_4, η_4 от времени определяется алгебраическими уравнениями

$$\xi_4 = \frac{Q - (\Gamma_1 - \Gamma_2)\xi_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad \eta_4 = \frac{P - (\Gamma_1 - \Gamma_2)\eta_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2}.$$

Редукция на инвариантное многообразии

В новых переменных инвариантное многообразие (2.15) задается равенствами $\xi_3 = 0, \eta_3 = 0$. Подставив данные равенства в первые две пары уравнений (2.17), получим уравнения движения на инвариантном многообразии. Данные уравнения можно представить в гамильтоновой форме:

$$\dot{\xi}_i = \{\xi_i, H(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)\}, \quad \dot{\eta}_i = \{\eta_i, H(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)\}, \quad i = 1, 2, \quad (2.18)$$

где H — ограничение гамильтониана (2.2) на инвариантное многообразие (2.15), записанное в новых переменных, имеет вид

$$\begin{aligned} H = & -\frac{1}{2\pi} \left(2\Gamma_1\Gamma_2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\text{ch}(\xi_1 - 2\pi m) - \cos(\eta_1)}{\text{ch}(2\pi m)} \right) - \frac{\xi_1^2}{2\pi} \right) + \right. \\ & + \Gamma_1^2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\text{ch}(\xi_1 - \xi_2 - 2\pi m) - \cos(\eta_1 - \eta_2)}{\text{ch}(2\pi m)} \right) - \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{2\pi} \right) + \\ & + 2\Gamma_1\Gamma_2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\text{ch}(\xi_2 + 2\pi m) - \cos(\eta_2)}{\text{ch}(2\pi m)} \right) - \frac{\xi_2^2}{2\pi} \right) + \\ & \left. + \Gamma_2^2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\text{ch}(\xi_2 + \xi_1 + 2\pi m) - \cos(\eta_2 + \eta_1)}{\text{ch}(2\pi m)} \right) - \frac{(\xi_2 + \xi_1)^2}{2\pi} \right) \right), \end{aligned}$$

а скобка Пуассона определяется соотношениями

$$\{\xi_i, \xi_j\} = 0, \quad \{\eta_i, \eta_j\} = 0, \quad \{\xi_i, \eta_j\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Gamma_2} + \frac{2\delta_{ij} - 1}{\Gamma_1} \right).$$

Отметим, что полученная система зависит от двух параметров — Γ_1, Γ_2 . Однако не умаляя общности, можно считать, что $\Gamma_1 = 1$. Исследуем далее систему (2.18) численно.

2.4.3 Численное исследование системы

Для дальнейшего исследования системы также построим отображение Пуанкаре при различных значениях энергии $E = H(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ и различных значениях параметра Γ_2 . В качестве секущей выберем плоскость $\eta_1 = 0$. Пересечение данной плоскости с изоэнергетическим уровнем, аналогично задаче трех вихрей на торе, представляет собой достаточно сложную поверхность. По-

этому отображение Пуанкаре также удобнее рассмотреть непосредственно на данной поверхности $E = H(\xi_1, \xi_2, \eta_1 = 0, \eta_2)$, вложенной в трехмерное пространство (ξ_1, ξ_2, η_1) . На рис. 2.8, 2.9 изображены отображения Пуанкаре (сверху) и соответствующие поверхности сечений уровня энергии выбранной плоскостью (снизу).

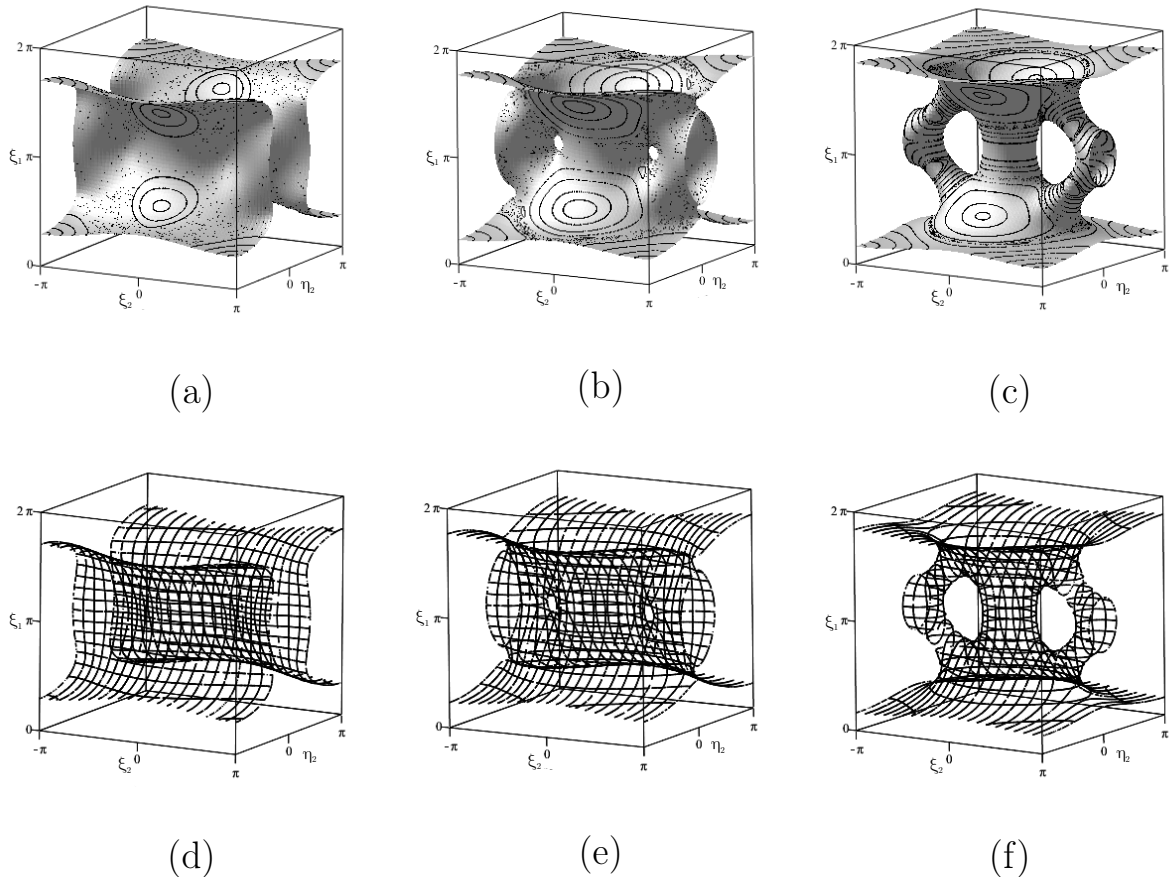


Рисунок 2.8 – Отображение (a–c) и поверхность равной энергии (d–f), при (a, d) $E = -0.35$, $\Gamma_2 = 1$; (b, e) $E = -0.21$, $\Gamma_2 = 1$; (c, f) $E = 0$, $\Gamma_2 = 1$

Из рисунков 2.8, 2.9 видно, что поверхности имеют сложную форму и их тип изменяется в зависимости от значений параметров E и Γ_2 . Например, поверхность, изображенная на рис.2.8b, является сферой с пятью ручками, а поверхность, изображенная на рис.2.9a, — сфера с двумя ручками. Вопрос о бифуркациях изоэнергетических поверхностей, в зависимости от значений первого интеграла и параметра системы Γ_2 , пока остается открытым.

На представленных отображениях Пуанкаре (рис. 2.8, 2.9) хорошо видны хаотические слои, что говорит о неинтегрируемости системы (2.18). Этим случай тора существенно отличается от случаев плоскости и сферы, для которых уравнения движения центрально-симметричных конфигураций являются инте-

грируемыми. Данное отличие связано с наличием еще одного дополнительного интеграла движения в случае плоскости и сферы.

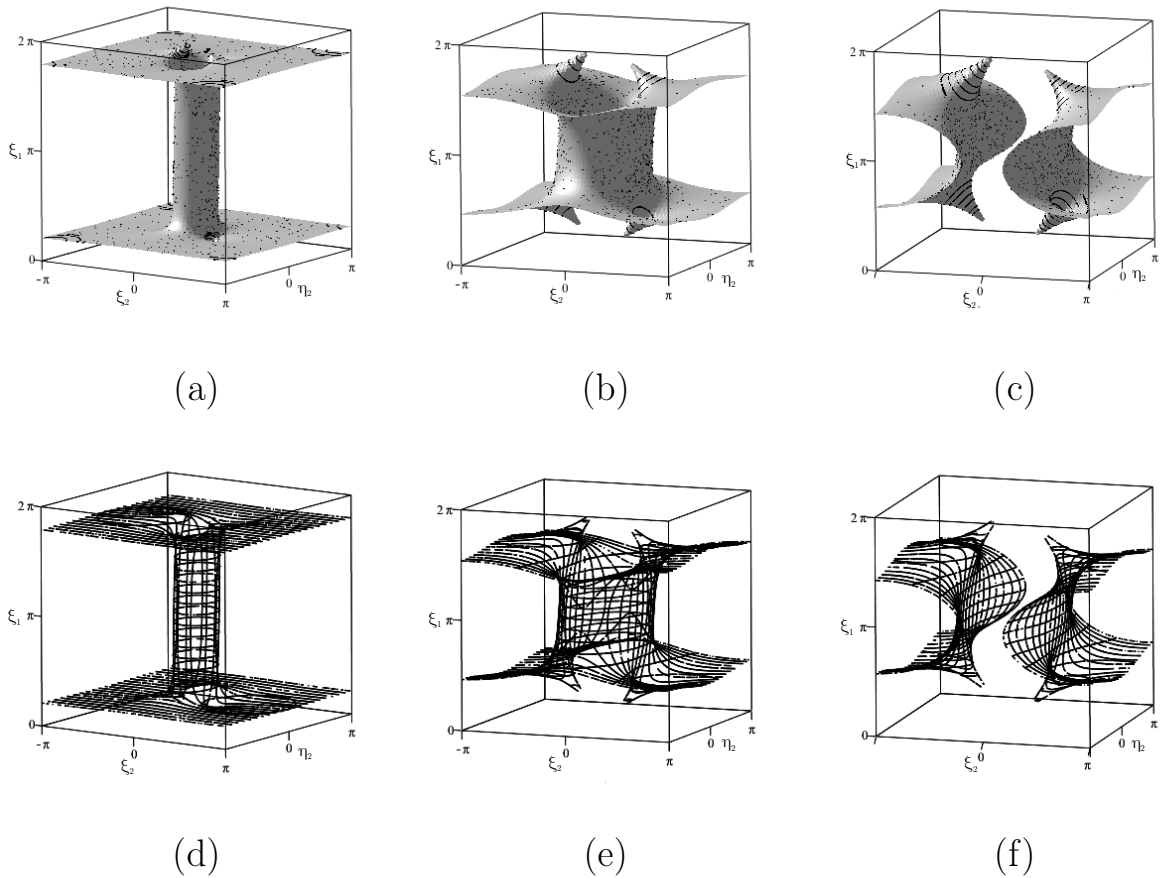


Рисунок 2.9 – Отображение (a–c) и поверхность равной энергии (d–f), при (a, d) $E = -0.4$, $\Gamma_2 = -0.8$; (b, e) $E = 0$, $\Gamma_2 = -0.8$; (c, f) $E = 0.1$, $\Gamma_2 = -0.8$

2.5 Заключение

В данной главе рассматривалась задача о взаимодействии вихревых решеток, эквивалентная задаче о движении точечных вихрей на «плоском» торе. Показано, что динамика системы двух вихрей качественно не зависит от их интенсивностей, указаны стационарные конфигурации и исследована их устойчивость. Также для двух вихревых решеток показано, что движение вихрей в абсолютном пространстве происходит по замкнутым траекториям, за исключением случая вихревой пары. Рассмотрены задачи о движении трех и четырех вихревых решеток при ненулевой суммарной интенсивности. Для трех вихрей проведена редукция на уровень первых интегралов. Численно показана неинтегрируемость данной задачи. Показано, что уравнения движения четырех вихрей

на торе допускают инвариантное многообразие, соответствующее центрально-симметричным конфигурациям вихрей. Получены уравнения движения четырех вихрей на данном инвариантном многообразии и фиксированном уровне первых интегралов, также численно показана их неинтегрируемость.

Открытой задачей остается исследование топологических типов и бифуркации изоэнергетических поверхностей (интегральных многообразий) в зависимости от уровня энергии и параметров для рассмотренных нами систем. Аналогичный вопрос интересно было бы исследовать и для задачи о движении трех вихревых решеток нулевой суммарной интенсивности. В этом случае благодаря интегрируемости системы топологический анализ интегральных многообразий может быть выполнен полностью. Еще одним открытым вопросом является исследование бифуркаций и возможных сценариев перехода к хаосу в динамике трех вихревых решеток.

Постановка задачи и выбор методов исследования принадлежат проф. Килину А. А. [32]. А также идея о наличии в системе центрально-симметричного инвариантного многообразия. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в данной главе. Также автором выполнены все аналитические и численные расчеты с использованием упомянутых в главе методов [32].

Глава 3. Динамика вихрей на конечном «плоском» цилиндре

3.1 Уравнения движения и первые интегралы

Общий случай. Рассмотрим движение N вихрей в идеальной несжимаемой жидкости на «плоском» цилиндре высотой $L = \pi$ и длиной R (см. рис. 3.1а). На рис. 3.1а непрерывной линией обозначены твердые стенки цилиндра, а пунктирной — границы, которые отождествляются (периодические границы).

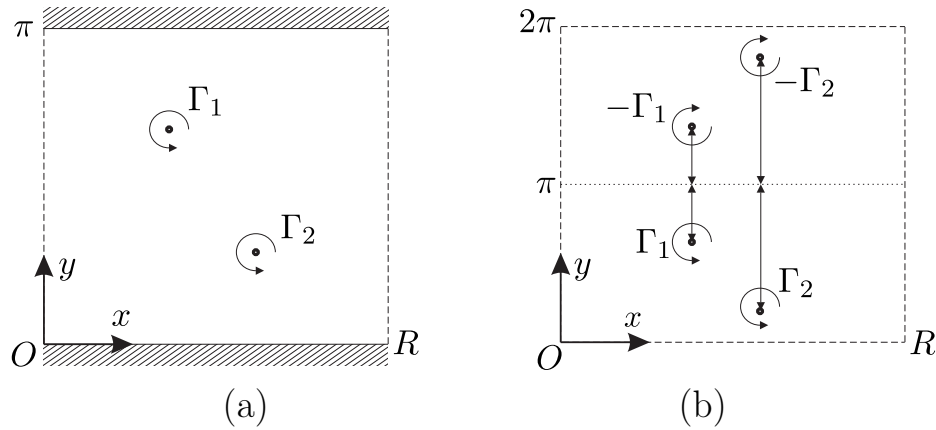


Рисунок 3.1 – Схематичное изображение вихрей (а) на цилиндре, (б) на торе

Оказывается, что движение N вихрей на цилиндре соответствует движению $2N$ вихрей на «плоском» торе на инвариантном многообразии для N пар вихрей (интенсивности вихрей в паре $\Gamma_{2k-1} = -\Gamma_{2k}$), которое задается соотношениями

$$z_{2k-1} = 2\pi i + \bar{z}_{2k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

где $z_k = x_k + iy_k$, ($x_k \in [0, R)$, $y_k \in [0, 2\pi)$). Конфигурация вихрей, соответствующая указанному инвариантному многообразию, приведена на рис. 3.1б. На рис. 3.1б показано, что вихри на торе разделены на «вихревые пары». При этом в каждой «паре» вихри имеют одинаковые по модулю, но противоположные

по знаку интенсивности. Их координаты связаны соотношениями $x_{2k} = x_{2k-1}$, $\pi - y_{2k-1} = y_{2k} - \pi$.

Уравнения движения вихрей на «плоском» торе приведены в [68]. Подставляя в эти уравнения параметры рассматриваемого тора (периоды 2π и R), запишем уравнения движения на инвариантном многообразии (3.1) в виде

$$\dot{\bar{z}}_k = -\frac{\Gamma_k}{2\pi i} \left[\zeta(z_k - \bar{z}_k) + \frac{1}{R} (1 - 2\zeta(R))(z_k - \bar{z}_k) \right] + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{n=1, \\ n \neq k}}^N \Gamma_n \left(\zeta(z_k - z_n) - \zeta(z_k - \bar{z}_n) - \frac{1}{R} (1 - 2\zeta(R))(z_n - \bar{z}_n) \right). \quad (3.2)$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k$ — комплексная координата k -го вихря, $\zeta(z)$ — ζ -функция Вейерштрасса с полупериодами $R/2$ и $i\pi$.

Уравнения движения (3.2) для численных расчетов удобнее представить в вещественной форме [32], не переходя к ζ -функциям. Тогда уравнения движения вихрей на «плоском» цилиндре (на инвариантном многообразии тора) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{\Gamma_i}{4\pi} X(x_k - x_i, y_k, y_i) + \frac{\Gamma_k}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2y_k)}{\operatorname{ch}(nR) - \cos(2y_k)}, \\ \dot{y}_k &= \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{\Gamma_i}{4\pi} Y(x_k - x_i, y_k, y_i), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где X, Y — функции, описывающие взаимодействие k -го вихря с остальными вихрями и имеющие вид

$$\begin{aligned} X(x, y_1, y_2) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin(y_1 + y_2) - \sin(y_1 - y_2)) \operatorname{ch}(x - nR) - \sin(2y_2)}{(\operatorname{ch}(x - nR) - \cos(y_1 - y_2)) (\operatorname{ch}(x - nR) - \cos(y_1 + y_2))}, \\ Y(x, y_1, y_2) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(x - nR) (\cos(y_1 - y_2) - \cos(y_1 + y_2))}{(\operatorname{ch}(x - nR) - \cos(y_1 - y_2)) (\operatorname{ch}(x - nR) - \cos(y_1 + y_2))}. \end{aligned}$$

Уравнения (3.3) могут быть представлены в гамильтоновой форме:

$$\dot{x}_k = \frac{1}{\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{1}{\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (3.4)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{8\pi} \sum'_{k,m=1}^N \Gamma_k \Gamma_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}(x_k - x_m - nR) - \cos(y_k + y_m)}{\operatorname{ch}(x_k - x_m - nR) - \cos(y_k - y_m)} + \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}(nR) - \cos(2y_k)}{\operatorname{ch}(nR)}, \quad (3.5)$$

где штрих у знака суммы означает исключение слагаемого при $k = m$. Помимо интеграла энергии, который совпадает с гамильтонианом, уравнения (3.4) допускают дополнительный первый интеграл

$$P = \sum_{k=1}^N \Gamma_k y_k. \quad (3.6)$$

Данный интеграл связан с инвариантностью уравнений (3.4) относительно параллельных переносов вдоль оси Ox . Заметим, что в силу ограниченности рассматриваемой области по оси Oy уравнения движения не инвариантны относительно параллельных сдвигов вдоль этой оси. Следовательно, отсутствует интеграл $Q = \sum_{k=1}^N \Gamma_k x_k$, возникающий при рассмотрении вихрей на плоскости или торе.

Случай 2 вихрей. Рассмотрим движение двух вихрей интенсивностей Γ_1 , Γ_2 в идеальной несжимаемой жидкости на «плоском» цилиндре. Координаты первого и второго вихрей обозначим как (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Уравнения движения вихрей на «плоском» цилиндре для двух вихрей имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\Gamma_2}{4\pi} X(x_1 - x_2, y_1, y_2) + \frac{\Gamma_1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2y_1)}{\operatorname{ch}(nR) - \cos(2y_1)}, \\ \dot{y}_1 &= \frac{\Gamma_2}{4\pi} Y(x_1 - x_2, y_1, y_2), \\ \dot{x}_2 &= \frac{\Gamma_1}{4\pi} X(x_2 - x_1, y_2, y_1) + \frac{\Gamma_2}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2y_2)}{\operatorname{ch}(nR) - \cos(2y_2)}, \\ \dot{y}_2 &= \frac{\Gamma_1}{4\pi} Y(x_2 - x_1, y_2, y_1). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Замечание 3.1.1. Сходимость рядов $X(x, y_1, y_2)$ и $Y(x, y_1, y_2)$ была доказана

в главе 2. Аналогичным образом доказывается сходимость ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2y_i)}{\operatorname{ch}(nR) - \cos(2y_i)}, \quad i = 1, 2.$$

Ряды в уравнениях (3.7) суммировались до слагаемых порядка не менее чем $\varepsilon = 10^{-16}$.

Уравнения (3.7) также могут быть представлены в гамильтоновой форме:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad \dot{y}_1 = -\frac{1}{\Gamma_1} \frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{\Gamma_2} \frac{\partial H}{\partial y_2}, \quad \dot{y}_2 = -\frac{1}{\Gamma_2} \frac{\partial H}{\partial x_2}$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H = & \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}(x_1 - x_2 - nR) - \cos(y_1 + y_2)}{\operatorname{ch}(x_1 - x_2 - nR) - \cos(y_1 - y_2)} + \\ & \frac{\Gamma_1^2}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}(nR) - \cos(2y_1)}{\operatorname{ch}(nR)} + \frac{\Gamma_2^2}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}(nR) - \cos(2y_2)}{\operatorname{ch}(nR)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

и скобкой Пуассона

$$\{x_i, y_j\} = \frac{\delta_{ij}}{\Gamma_i},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Дополнительный первый интеграл P для системы двух вихрей запишем в виде

$$P = \frac{\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2}{2}. \quad (3.9)$$

Ввиду ограниченности координат y значения интеграла P определены в области $P \in \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - \frac{|\Gamma_1| + |\Gamma_2|}{2} \right), \frac{\pi}{2} \left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} + \frac{|\Gamma_1| + |\Gamma_2|}{2} \right) \right)$.

В системе уравнений (3.7) будем считать, что вихрь с большей по модулю интенсивностью обозначен индексом 1, а также будем полагать $\Gamma_1 = 1$. Этого всегда можно добиться с помощью перенумерации вихрей и замены времени $\tau = \Gamma_1 t$. В результате в рассматриваемой системе (3.7) и интегралах (3.8), (3.9) останется два параметра: длина цилиндра R и относительная интенсивность $\gamma = \Gamma_2 / \Gamma_1 \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.

3.1.1 Редукция

Проведем редукцию на фиксированный уровень интеграла P . Для этого перейдем от переменных (x_1, y_1, x_2, y_2) к переменным (ξ, η, ζ, P) следующим образом:

$$\xi = x_1 - x_2, \quad \eta = \frac{y_1 - \gamma y_2}{2}, \quad \zeta = x_1 + x_2, \quad P = \frac{y_1 + \gamma y_2}{2}. \quad (3.10)$$

Обратная замена переменных имеет вид

$$x_1 = \frac{\zeta + \xi}{2}, \quad y_1 = P + \eta, \quad x_2 = \frac{\zeta - \xi}{2}, \quad y_2 = \frac{P - \eta}{\gamma}.$$

Из выражений (3.10) видно, что данная замена обратима при всех значениях параметра γ . При этом новые переменные (ξ, η, ζ, P) выбраны так, чтобы их скобка Пуассона была канонической.

В новых переменных на фиксированном уровне интеграла $P = p$ уравнения движения для переменных ξ и η отделяются, образуют редуцированную систему и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin(2(p+\eta))}{\operatorname{ch}(nR) - \cos(2(p+\eta))} - \frac{\gamma \sin \frac{2(p-\eta)}{\gamma}}{\operatorname{ch}(nR) - \cos \frac{2(p-\eta)}{\gamma}} + \right. \\ &\quad \frac{((\gamma-1) \sin \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma} - (\gamma+1) \sin \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) \operatorname{ch}(\xi - nR)}{(\operatorname{ch}(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) (\operatorname{ch}(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma})} - \\ &\quad \left. \frac{\gamma \sin \frac{2(p-\eta)}{\gamma} - \sin(2(p+\eta))}{(\operatorname{ch}(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) (\operatorname{ch}(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma})} \right], \\ \dot{\eta} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = \\ &\quad \frac{\gamma}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(\xi - nR) (\cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma} - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma})}{(\operatorname{ch}(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) (\operatorname{ch}(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma})}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где \mathcal{H} — гамильтониан (3.8), записанный в новых переменных (3.10):

$$\mathcal{H} = \frac{\gamma}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma}}{\operatorname{ch}(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}} +$$

$$\frac{1}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}(nR) - \cos(2(p+\eta))}{\operatorname{ch}(nR)} + \frac{\gamma^2}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\operatorname{ch}(nR) - \cos \frac{2(p-\eta)}{\gamma}}{\operatorname{ch}(nR)}.$$

При этом эволюция переменной ζ определяется дополнительной квадратурой вида

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin(2(p+\eta))}{\operatorname{ch}(nR) - \cos(2(p+\eta))} + \frac{\gamma \sin \frac{2(p-\eta)}{\gamma}}{\operatorname{ch}(nR) - \cos \frac{2(p-\eta)}{\gamma}} + \right.$$

$$\frac{((\gamma+1) \sin \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma} - (\gamma-1) \sin \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) \operatorname{ch}(\xi - nR)}{(\operatorname{ch}(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) (\operatorname{ch}(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma})}$$

$$\left. \frac{\gamma \sin \frac{2(p-\eta)}{\gamma} + \sin(2(p+\eta))}{(\operatorname{ch}(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma-p+\eta}{\gamma}) (\operatorname{ch}(\xi - nR) - \cos \frac{(p+\eta)\gamma+p-\eta}{\gamma})} \right].$$

Данная квадратура позволяет восстановить траектории вихрей в абсолютном пространстве, используя решения системы уравнений (3.11).

На фиксированном уровне интеграла $p \in \left(\frac{\pi}{4}(\gamma - |\gamma|), \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}(\gamma - |\gamma|) \right)$ редуцированная система (3.11) определена на цилиндре

$$\mathcal{M}_p = \{(\xi, \eta) \mid \xi \bmod R, \eta \in (\eta_{min}, \eta_{max})\} \simeq \mathbb{C}^2,$$

где η_{min} и η_{max} зависят от значений первого интеграла p и параметров R и γ следующим образом:

1) при $\gamma > 0$

$$p \in \left(0, \frac{\pi}{2}(1 + \gamma) \right), \quad \eta_{min} = p - \min(2p, \gamma\pi), \quad \eta_{max} = -p + \min(2p, \pi);$$

2) при $\gamma < 0$

$$p \in \left(\frac{\gamma\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad \eta_{min} = |p|, \quad \eta_{max} = \frac{1}{2} \min(2p - \gamma\pi, \pi) - \frac{1}{2} \max(2p - \pi, \gamma\pi).$$

Из (3.10) следует, что границы цилиндра \mathcal{M}_p ($\eta = \eta_{min}$ и $\eta = \eta_{max}$) соответствуют приближению вихрей к границам $y_i = 0, \pi$. Таким образом, на границах цилиндра \mathcal{M}_p поток (3.11) не определен.

3.2 Типы бифуркационных диаграмм

Рассмотрим вопрос о классификации возможных типов движения в зависимости от параметров системы и значений первых интегралов. Характер движения в общем случае зависит от количества и типов неподвижных точек приведенной системы (3.11), а также ее особенностей.

Неподвижные точки системы (3.11) лежат на вертикальных прямых $\xi = 0$ и $\xi = R/2$. Это следует из нечетности функции гиперболического синуса sh в уравнении (3.11) для $\dot{\eta}$ и периодичности исследуемой системы по переменной ξ . Численные эксперименты показывают, что неподвижные точки при других значениях ξ в системе не возникают. Координаты η неподвижных точек на прямых $\xi = 0$ и $\xi = R/2$ определяются из решения уравнений

$$\dot{\xi}|_{\xi=0} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \eta} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\xi}|_{\xi=R/2} = \frac{\partial \mathcal{H}_{R/2}}{\partial \eta} = 0 \quad (3.12)$$

соответственно, где $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(\xi = 0)$, $\mathcal{H}_{R/2} = \mathcal{H}(\xi = R/2)$. Уравнения (3.12) представляются с помощью рядов. В общем случае построить их явное решение не удастся, поэтому далее уравнения (3.12) будем решать численно. В частном случае $\gamma = \pm 1$ явные выражения для η были получены и проанализированы в [68].

При фиксированном значении параметров γ, R система уравнений

$$\begin{cases} h = \mathcal{H}_0(p, \eta, R, \gamma), \\ \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

задает на плоскости первых интегралов (p, h) бифуркационные кривые, соответствующие неподвижным точкам приведенной системы, лежащим на прямой

$\xi = 0$. Аналогичная система

$$\begin{cases} h = \mathcal{H}_{R/2}(p, \eta, R, \gamma), \\ \frac{\partial \mathcal{H}_{R/2}}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

задает кривые, соответствующие неподвижным точкам, лежащим на прямой $\xi = R/2$.

Совокупность всех кривых (3.13), (3.14) на плоскости (p, h) представляет собой бифуркационную диаграмму.

Замечание 3.2.1. *Бифуркационную диаграмму также можно строить как образ критического множества интегрального отображения*

$$\Phi : \mathbf{z} = (\xi, \eta, \zeta, P) \mapsto \Phi(\mathbf{z}) = (P(\boldsymbol{\sigma}), \mathcal{H}(\mathbf{z}))$$

на плоскости первых интегралов. Однако в данном случае явная редукция на фиксированный уровень первых интегралов позволяет свести рассматриваемую задачу к исследованию функций \mathcal{H}_0 и $\mathcal{H}_{R/2}$.

Тип бифуркационной диаграммы зависит от асимптотик и особых точек бифуркационных кривых, в которых бифуркационные кривые касаются друг друга. Эти точки определены системами уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{0,R/2}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{0,R/2}}{\partial \eta^2} = 0. \quad (3.15)$$

Качественное изменение диаграммы может происходить по двум причинам:

- 1) Изменение асимптотик функций \mathcal{H}_0 и $\mathcal{H}_{R/2}$;
- 2) Рождение (исчезновение) особых точек на бифуркационных кривых.

Для анализа первой причины рассмотрим зависимость особенностей функции \mathcal{H} от значений параметров. Особенности гамильтониана соответствуют приближению одного или обоих вихрей к границам цилиндра, а также приближению вихрей друг к другу. Как показано в [68], асимптотики, соответствующие приближению вихрей к границе, не меняются при изменении параметров $\lim_{y_i \rightarrow 0, \pi} \mathcal{H} = -\infty$. А асимптотика, соответствующая приближению вихрей друг к

другу, зависит от знака γ , то есть $\lim_{y_1 \rightarrow y_2, x_1 \rightarrow x_2} \mathcal{H} = \text{sign}(\gamma) \infty$. Таким образом, на плоскости параметров (γ, R) прямая $\gamma = 0$ разделяет разные типы бифуркационных диаграмм.

Для определения параметров, при которых рождаются (исчезают) особые точки бифуркационных кривых, необходимо к уравнениям (3.15) добавить условия их вырождения:

$$\frac{\partial^3 \mathcal{H}_{0,R/2}}{\partial \eta^3} = 0.$$

Таким образом, необходимо решить две системы уравнений:

$$\sigma_0 : \quad \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \mathcal{H}_0}{\partial \eta^3} = 0; \quad (3.16)$$

$$\sigma_{R/2} : \quad \frac{\partial \mathcal{H}_{R/2}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{R/2}}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \mathcal{H}_{R/2}}{\partial \eta^3} = 0. \quad (3.17)$$

Уравнения (3.16), (3.17) задают на плоскости (γ, R) кривые σ_0 и $\sigma_{R/2}$, разделяющие разные типы бифуркационных диаграмм.

Численный анализ показывает, что система (3.16) для неподвижных точек, лежащих на прямой $\xi = 0$, не имеет решений. Таким образом, области на плоскости (p, h) , соответствующие разным типам бифуркационных диаграмм, разделяются только кривыми (3.17).

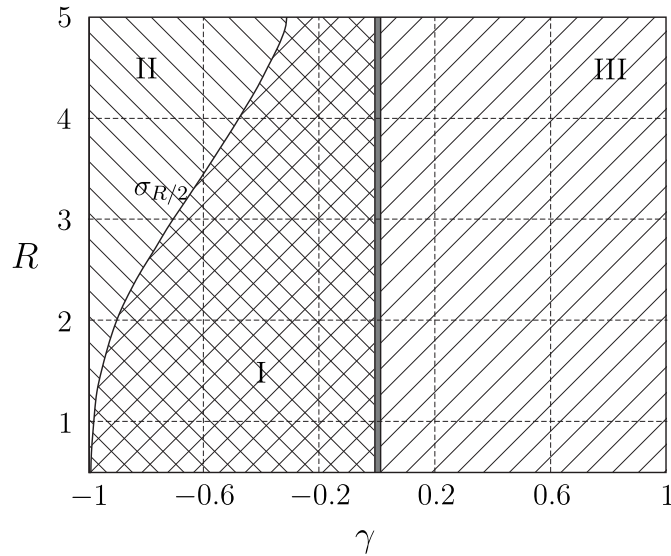


Рисунок 3.2 – Области, соответствующие разным количествам неподвижных точек приведенной системы, на плоскости параметров (γ, R)

Численное решение системы (3.17) приведено на рис. 3.2. На этом же рисунке

разной штриховкой обозначены области с различным числом особых точек либо различными асимптотиками.

1. Область с перекрестной штриховкой (обозначена цифрой I на рис. 3.2): на бифуркационных кривых существуют две особые точки (точки возврата) (то есть существуют от одной до трех неподвижных точек при $\xi = R/2$), а также существуют одна или две неподвижные точки при $\xi = 0$.
2. Область с левой штриховкой (обозначена цифрой II на рис. 3.2): особых точек нет, при этом в системе всегда существует одна неподвижная точка при $\xi = R/2$, а также существуют одна или две неподвижные точки при $\xi = 0$.
3. Область с правой штриховкой (обозначена цифрой III на рис. 3.2): особых точек нет, в системе всегда существует одна неподвижная точка при $\xi = R/2$, при этом неподвижных точек при $\xi = 0$ не существует. Также в III области происходит смена асимптотики гамильтониана (по сравнению с областями I и II).

При численном решении уравнений (3.17) кривая $\sigma_{R/2}$ определяется с некоторой точностью. Кроме того, вблизи прямой $\gamma = 0$ обнаруживается узкая область с другим типом бифуркационной диаграммы (обозначена серым на рис. 3.2). Однако последовательное увеличение точности решения уравнений показывает, что прямая $\gamma = 0$ действительно ограничивает область I, и вблизи нее не возникает никаких дополнительных областей с другими типами диаграмм. А возникновение узкой области обусловлено погрешностями вычислений. Иллюстрация такой численной сходимости границы $\gamma = 0$ приведена на рис. 3.3. На рис. 3.3 изображены области на плоскости (γ, p) с разным числом неподвижных точек редуцированной системы при $R = 1$. Из рисунка видно уменьшение области, обусловленной погрешностями, при увеличении точности нахождения координаты η неподвижных точек.

Далее проведем бифуркационный анализ системы для параметров (γ, R) , лежащих в каждой из трех областей на рис. 3.2.

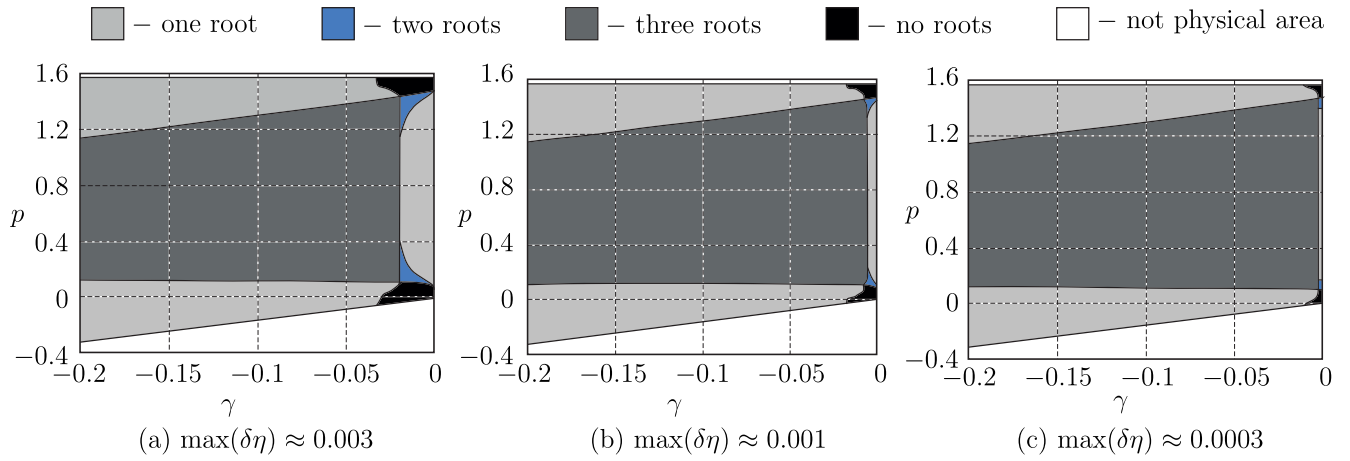


Рисунок 3.3 – Области с различным числом неподвижных точек приведенной системы с $\xi = R/2$ при разной точности $\delta\eta$ нахождения координаты неподвижной точки

3.3 Бифуркационный анализ

3.3.1 I область

Бифуркационные диаграммы при $R = 1$ и $\gamma = -0.5$ приведены на рис. 3.4. На рис. 3.4a приведены бифуркационные кривые s_1, s_2 , соответствующие неподвижным точкам при $\xi = 0$; на рис. 3.4b — бифуркационные кривые e_1, e_2, s_3 для неподвижных точек при $\xi = R/2$. При выбранных значениях параметров ветки s_1 и s_2 располагаются очень близко к веткам e_1, e_2 . Поэтому для удобства они изображены на разных рисунках. Общее схематическое изображение бифуркационной диаграммы без сохранения масштаба приведено на рис. 3.5.

На рис. 3.5 и 3.4 красными вертикальными прямыми обозначены критические значения p , при которых в системе возникает особенность, соответствующая совпадению вихрей. Непрерывные линии обозначают бифуркационные кривые, соответствующие устойчивым неподвижным точкам; пунктирные линии — неустойчивым. Серым цветом обозначена область невозможных движений.

Для классификации и анализа решений рассматриваемой системы и возможных типов движения вихрей на «плоском» цилиндре можно воспользоваться подходом, основанном на построении бифуркационного комплекса. Напомним, что в бифуркационном комплексе каждой области на бифуркационной диаграмме ставится в соответствие такое количество листов, какое число компонент связности имеет интегральное многообразие при значениях интегралов

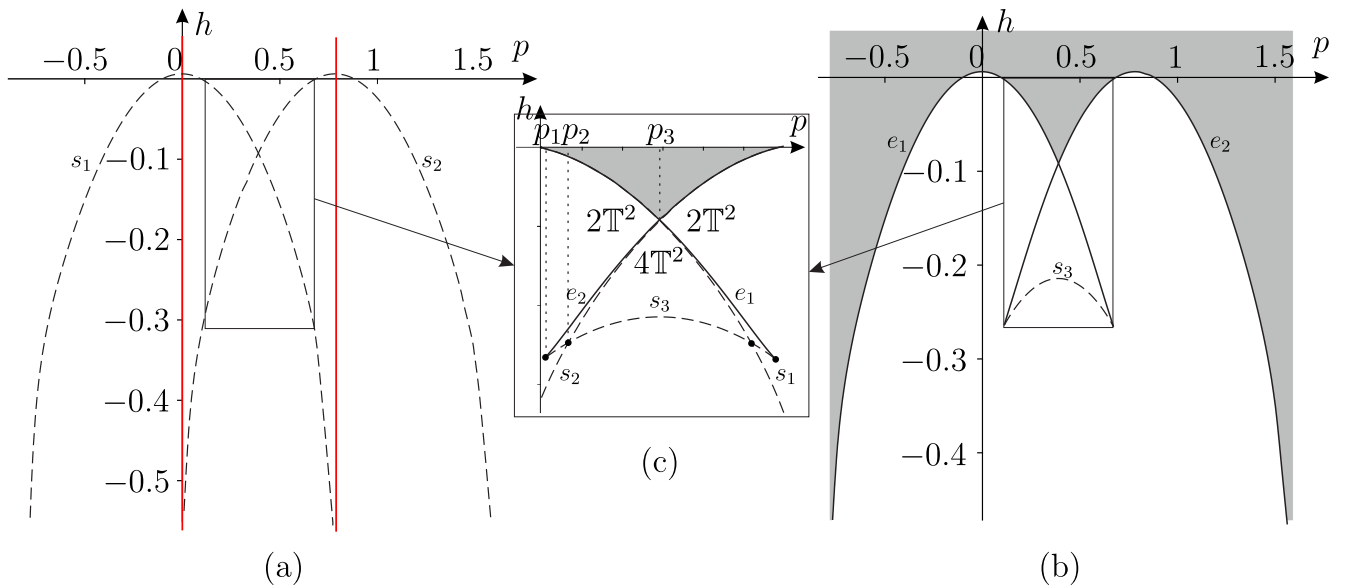


Рисунок 3.4 – Бифуркационные кривые при $R = 1$, $\gamma = -0.5$ для неподвижных точек (a) $\xi = 0$, (b) $\xi = R/2$, (c) увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы с точками возврата

из этой области. Эти листы склеиваются друг с другом по бифуркационным кривым, соответствующим неустойчивым неподвижным точкам приведенной системы. А бифуркационные кривые, соответствующие устойчивым неподвижным точкам, являются границами листов. В рассматриваемой задаче бифуркационный комплекс представляет собой достаточно сложную многолистную поверхность, поэтому мы здесь не приводим его явный вид. Мы ограничимся указанием количества компонент связности (торов \mathbb{T}^2) на бифуркационных диаграммах (см. рис. 3.4, 3.5, 3.7, 3.9). А также приведем схематические изображения сечений бифуркационного комплекса плоскостью $p = \text{const}$ рядом с фазовыми портретами.

На рис. 3.6 изображены возможные типы фазовых портретов при различных значениях интеграла p . Красными линиями на фазовых портретах изображены неустойчивые инвариантные многообразия (сепаратрисы) седловых неподвижных точек. Зеленными точками обозначены особенности, соответствующие совпадению вихрей. Напомним, что верхняя и нижняя границы фазового портрета также соответствуют особенностям, при которых один или оба вихря приближаются к стенкам цилиндра, а переменная ξ определена на промежутке $[0, R)$. Однако для удобства изображения критических точек, лежащих на границе $\xi = 0$, мы будем строить удвоенный фазовый портрет на промежутке $\xi \in [-R, R)$.

Рассмотрим далее эволюцию фазового портрета редуцированной системы

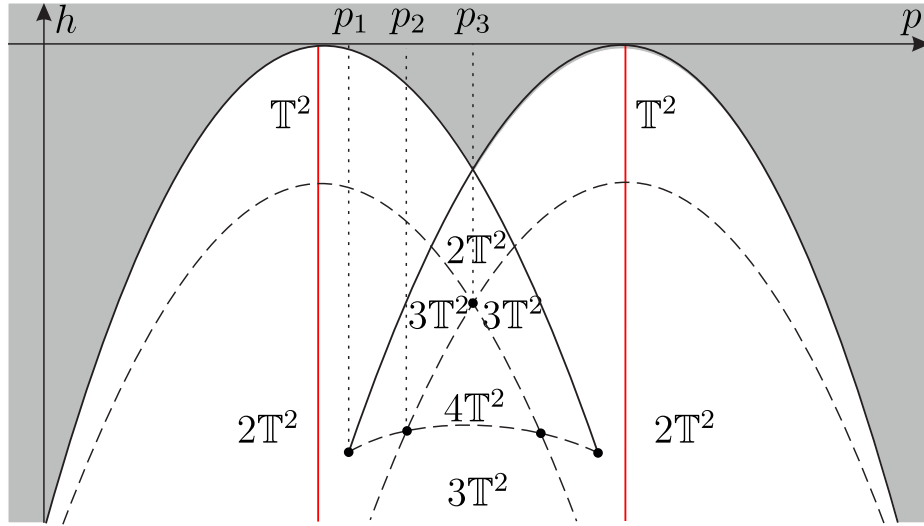


Рисунок 3.5 – Схематическое изображение бифуркационной диаграммы

(3.11) при изменении значения интеграла p .

1. При $p \leq 0$ в системе (3.11) существуют одна неустойчивая неподвижная точка s_1 при $\xi = 0$ и одна устойчивая e_1 — при $\xi = R/2$. Характерный вид фазового портрета приведен на рис. 3.6а. Из-за наличия мелких деталей на рис. 3.6 (а также на рис. 3.8) кроме самих фазовых портретов изображены их увеличенные фрагменты вблизи неподвижных точек.
2. При $0 < p < p_1$ появляются вторая неустойчивая неподвижная точка s_2 при $\xi = 0$ и особенность в точке $(0, p_{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}})$. Характерный вид фазового портрета приведен на рис. 3.6б.
3. При $p = p_1$, где p_1 определяется из уравнений (3.17), происходит касательная бифуркация, в результате которой появляются устойчивая e_2 и неустойчивая s_3 неподвижные точки при $\xi = R/2$.
4. При $p_1 < p < p_2$ в системе существуют три неподвижные точки (устойчивые $e_{1,2}$ и неустойчивая s_2) при $\xi = R/2$ и две неустойчивые $s_{1,2}$ при $\xi = 0$. Характерный вид фазового портрета приведен на рис. 3.6с.
5. При $p = p_2$, где p_2 определяется из уравнения

$$\mathcal{H}|_{(\xi,\eta)=s_2} = \mathcal{H}|_{(\xi,\eta)=s_3},$$

происходит нелокальная бифуркация, при которой сепаратрисы, соответствующие неподвижным точкам s_1, s_3 , сливаются. В результате происходит

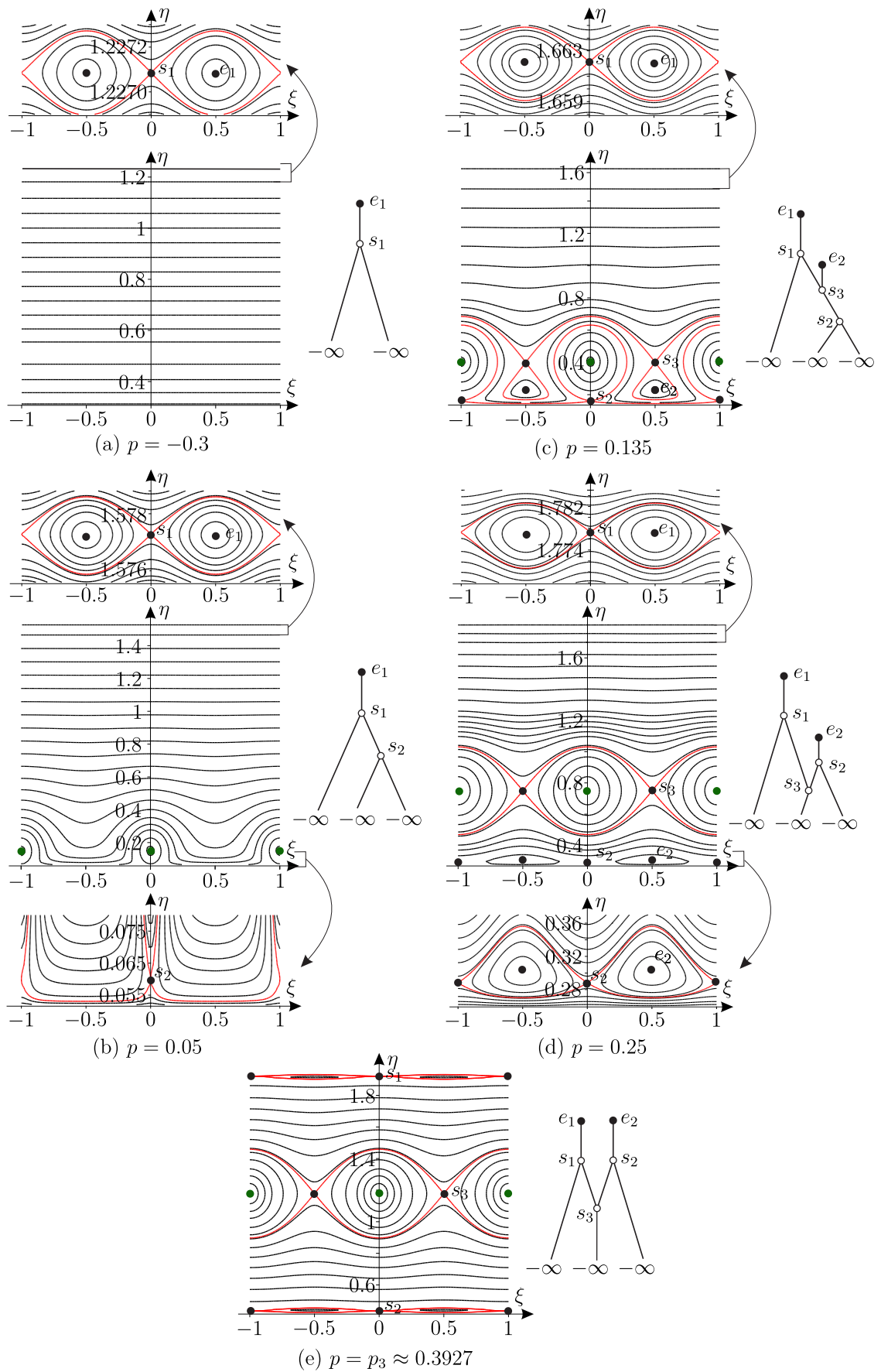


Рисунок 3.6 – Фазовые портреты системы при $R = 1$, $\gamma = -0.5$ (слева) и схематические изображения сечений бифуркационного комплекса (справа)

перестройка фазового портрета, но при этом количество и типы неподвижных точек в системе не меняются.

6. При $p_2 < p < p_3$ количество и тип неподвижных точек не изменяются по сравнению с промежутком $p \in (p_1, p_2)$. Характерный вид фазового портрета приведен на рис. 3.6d.
7. При $p = p_3$, где p_3 определяется из уравнения

$$\mathcal{H}|_{(\xi,\eta)=s_1} = \mathcal{H}|_{(\xi,\eta)=s_2},$$

неустойчивые неподвижные точки s_1 и s_2 располагаются на одном уровне энергии (хотя и на разных компонентах связности). Характерный вид фазового портрета приведен на рис. 3.6e.

8. При дальнейшем увеличении значения интеграла p происходят аналогичные бифуркации, но в обратном порядке.

3.3.2 II область

На рис. 3.7 приведена бифуркационная диаграмма на плоскости первых интегралов (p, h) при $R = 3$, $\gamma = -0.8$. Кривые, обозначенные как s_1 , s_2 , соответствуют неподвижным точкам при $\xi = 0$, кривая e — при $\xi = R/2$. На бифуркационной диаграмме и фазовых портретах используются ранее введенные обозначения.

Рассмотрим эволюцию фазовых портретов приведенной системы (3.11) при изменении значения интеграла p .

1. При $p \leq 0$ в системе (3.11) существует одна неустойчивая неподвижная точка s_1 при $\xi = 0$ и одна устойчивая e — при $\xi = R/2$. Характерный вид фазового портрета приведен на рис. 3.8a.
2. При $0 < p < p_1$ появляются вторая неустойчивая неподвижная точка s_2 при $\xi = 0$ и особенность $(0, p_{1+\gamma}^{1-\gamma})$. Характерный вид фазового портрета приведен на рис. 3.8b.

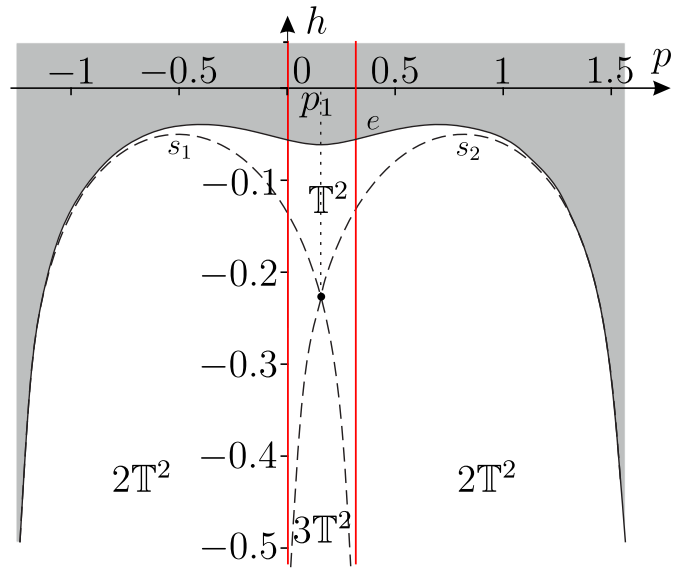


Рисунок 3.7 – Бифуркационная диаграмма при $R = 3$, $\gamma = -0.8$

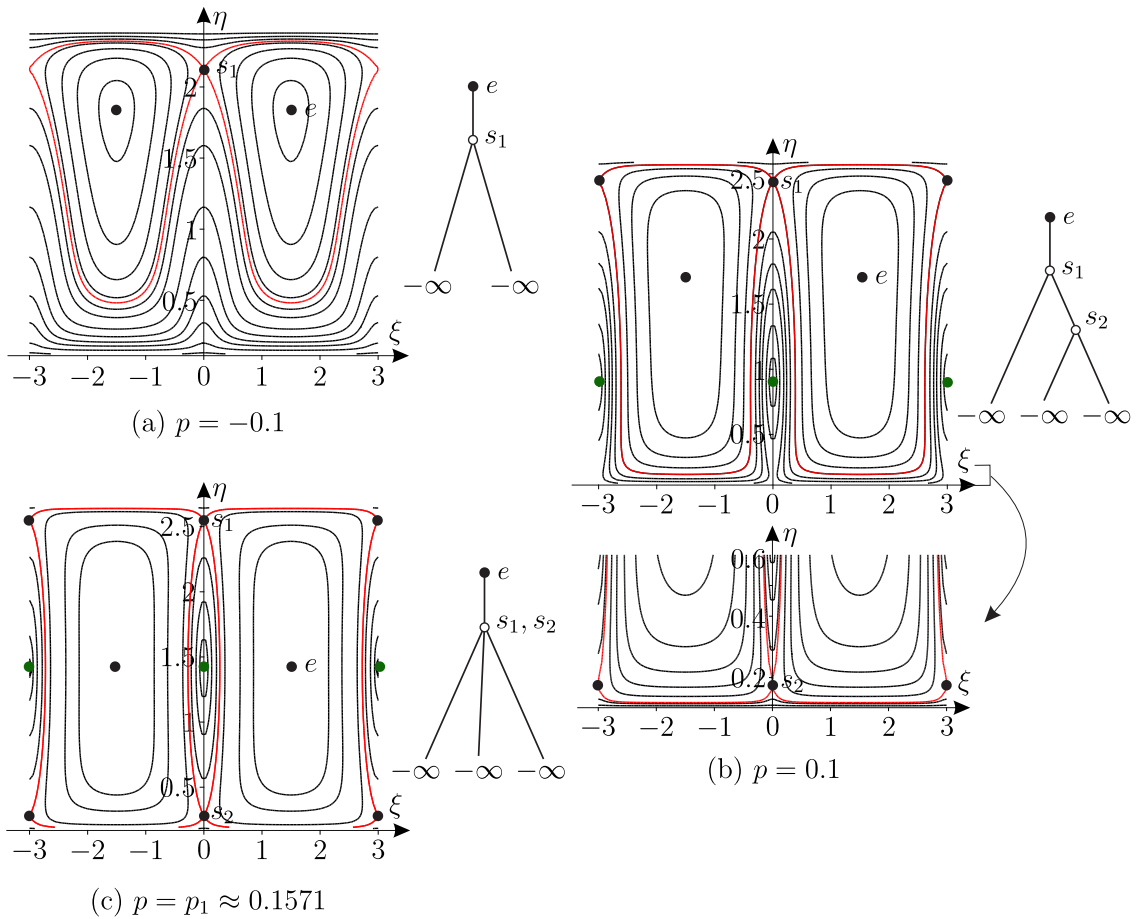


Рисунок 3.8 – Фазовые портреты системы при $R = 3$, $\gamma = -0.8$ (слева) и схематическое сечение бифуркационного комплекса (справа)

3. При $p = p_1$, где p_1 определяется из уравнения

$$\mathcal{H}|_{(\xi, \eta)=s_1} = \mathcal{H}|_{(\xi, \eta)=s_2},$$

происходит нелокальная бифуркация, при которой сепаратрисы неподвижных точек s_1 и s_2 сливаются. Соответствующий фазовый портрет приведен на рис. 3.8с.

4. При дальнейшем увеличении значения интеграла p происходят аналогичные бифуркации, но в обратном порядке.

3.3.3 III область

На рис. 3.9 приведены бифуркационная диаграмма системы и характерный вид фазового портрета при $R = 1$, $\gamma = 0.5$. На бифуркационной диаграмме и фазовом портрете используются ранее введенные обозначения. В этом случае фазовый портрет качественно не меняется при изменении значения интеграла p .

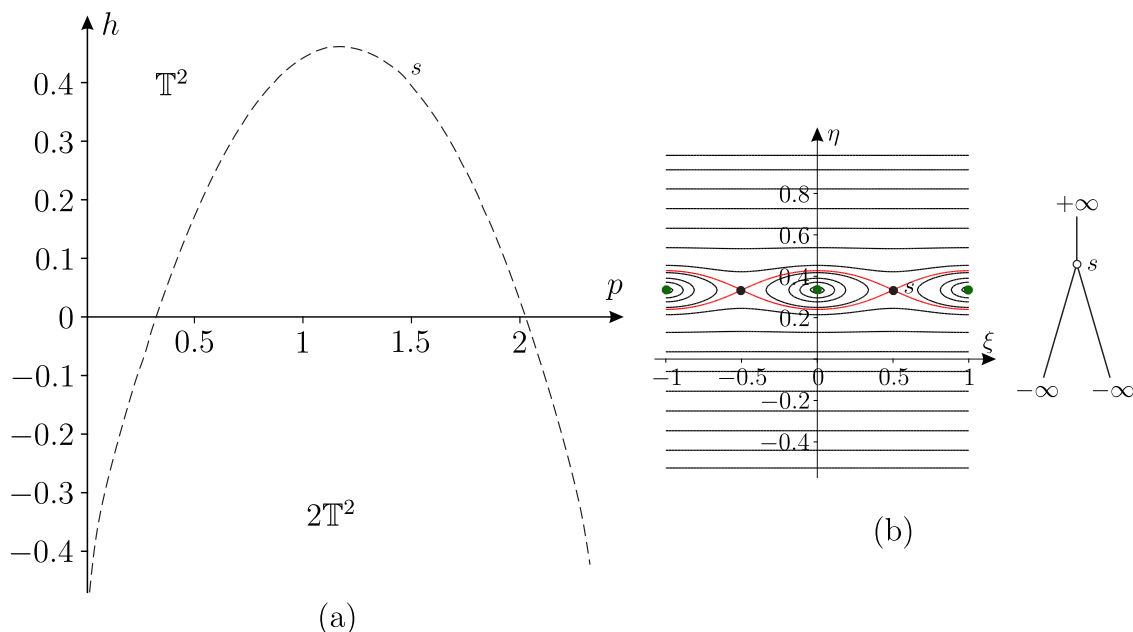


Рисунок 3.9 – Бифуркационная диаграмма (а) и типичный фазовый портрет со схематическим сечением бифуркационного комплекса (b) при $R = 1$, $\gamma = 0.5$

3.4 Устойчивость дорожек Кармана в полосе жидкости

Отметим, что неподвижным точкам приведенной системы соответствуют стационарные решения полной системы, при которых вихри образуют некоторую постоянную конфигурацию, равномерно вращающуюся с постоянной ско-

ростью вокруг оси цилиндра. При этом неподвижным точкам с $\xi = 0$ соответствуют конфигурации, когда вихри располагаются друг над другом. А неподвижным точкам с $\xi = R/2$ соответствует расположение вихрей с противоположных сторон цилиндра. В терминах вихревых цепочек эти конфигурации можно интерпретировать как симметричную (вихри разных дорожек располагаются строго друг над другом) и шахматную (вихри разных дорожек смещены друг относительно друга на половину расстояния между вихрями) вихревые дорожки. Последнюю конфигурацию в некоторых работах также называют кармановской.

Так же как и в случае бесконечного цилиндра (отсутствия стенок) [58], в рассматриваемой нами задаче и симметричные, и шахматные конфигурации существуют при любых значениях параметров задачи. А проведенный нами бифуркационный анализ системы позволяет сформулировать несколько утверждений об устойчивости указанных конфигураций. Точнее об их орбитальной устойчивости, следующей из устойчивости соответствующих неподвижных точек приведенной системы.

Предложение 3.4.1. *Шахматные стационарные конфигурации вихревых цепочек с произвольными интенсивностями разных знаков в полосе жидкости существуют при любом расстоянии между цепочками и орбитально устойчивы, если*

- a) параметры (γ, R) лежат в области I на рис. 3.2 и расстояние между цепочками больше некоторого критического:

$$|y_1 - y_2| > \Delta y^*(\gamma, R) = p_1 \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) + \eta_1 \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right),$$

где p_1 и η_1 — решения системы (3.15) для $\mathcal{H}_{R/2}$;

- b) параметры (γ, R) лежат в области II на рис. 3.2.

Примеры зависимости $\Delta y^*(\gamma)$ при $R = 1$ и $R = 3$ приведены на рис. 3.10.

Предложение 3.4.2. *Симметричные стационарные конфигурации вихревых цепочек с произвольными интенсивностями разных знаков в полосе жидкости существуют при любом расстоянии между цепочками и всегда неустойчивы.*

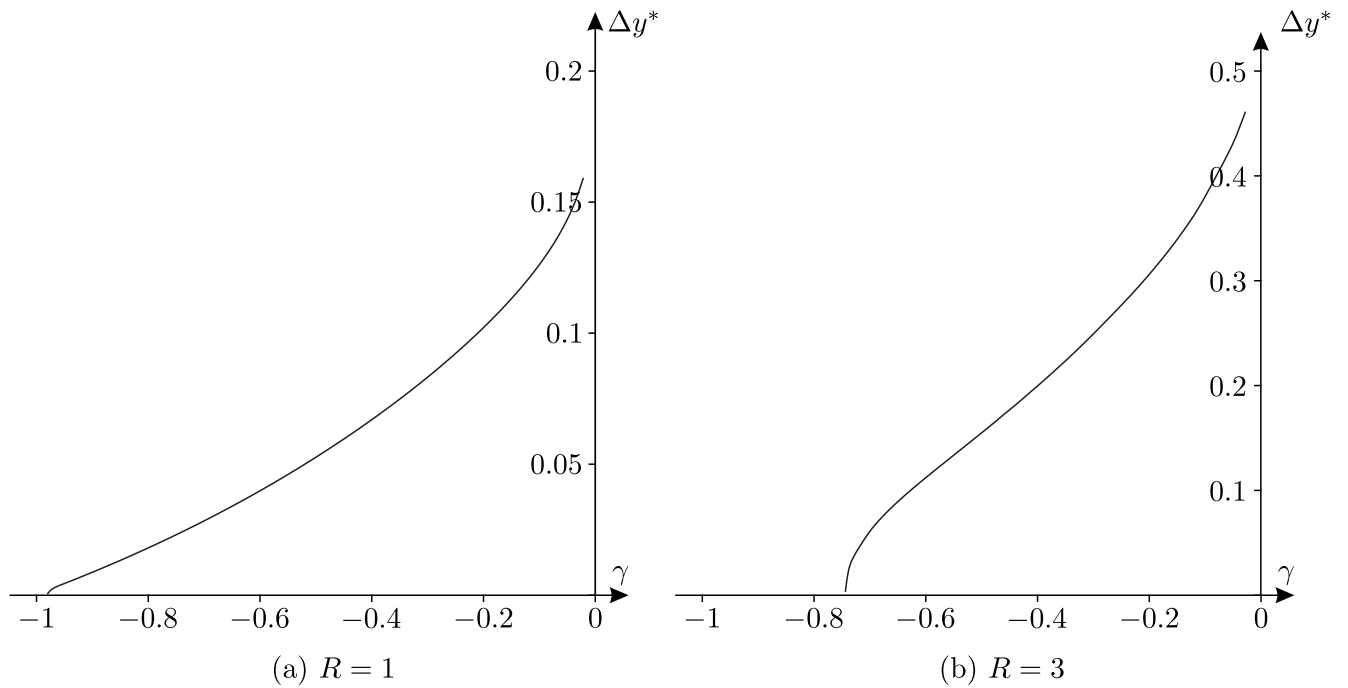


Рисунок 3.10 – Зависимость $\Delta y^*(\gamma)$ при (a) $R = 1$, (b) $R = 3$

Предложение 3.4.3. *Симметричные стационарные конфигурации вихревых цепочек с произвольными интенсивностями одного знака в полосе жидкости не существуют. А шахматные конфигурации существуют при любом расстоянии между цепочками и всегда неустойчивы.*

Фактически эти утверждения обобщают результаты об орбитальной устойчивости вихревых дорожек Кармана на случай произвольных интенсивностей вихрей и добавления границ рассматриваемого слоя жидкости.

Ознакомиться с основными результатами по исследованию устойчивости дорожек Кармана и аналогичных конфигураций можно в работах [30, 42, 2, 31]. Исследование полной (не только орбитальной) устойчивости дорожек Кармана в полосе жидкости в линейном приближении для случая равных по модулю, но противоположных по знаку интенсивностей выполнено в работе [60]. В этой работе показано, что существуют шахматные дорожки, которые в линейном приближении являются устойчивыми даже для полной системы. Неустойчивость шахматных дорожек в полосе жидкости для равных интенсивностей вихрей указана в [28].

Отметим также, что мы рассмотрели в этой работе только устойчивость дорожек относительно возмущений, сохраняющих цепочки. Для исследования устойчивости относительно более общих возмущений можно, следуя Карману, разбить каждую цепочку на две (или n) подцепочки (большого пери-

ода) и рассмотреть устойчивость стационарных решений для задачи четырех (или $2n$) вихрей на цилиндре. Похожий анализ для вихревых дорожек в полосе жидкости в случае равных по модулю, но противоположных по знаку интенсивностей вихрей выполнен в работе [18].

3.5 Заключение

В данной главе подробно рассмотрен интегрируемый случай двух вихрей на конечном «плоском» цилиндре. Приведен явный вид уравнений, предложена процедура редукции на уровень дополнительного первого интеграла. Проведен полный бифуркационный анализ системы, указано, что в зависимости от значений параметров возможны три типа бифуркационных диаграмм. Каждый тип диаграмм рассмотрен отдельно, построены возможные фазовые портреты. Также приводится обобщение результатов об устойчивости дорожек Кармана на случай движения вихревых дорожек произвольных интенсивностей в полосе жидкости.

Дальнейшее развитие результатов исследований может быть направлено на аналитическое доказательство некоторых результатов, полученных здесь численно. Также интересно было бы исследовать вопросы существования и устойчивости стационарных конфигураций большего числа вихрей на цилиндре. И, в частности, проанализировать устойчивость дорожки Кармана с вихрями разных интенсивностей в полосе жидкости относительно более общих возмущений.

Постановка задачи и выбор методов исследования принадлежат проф. Клину А. А. [33]. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в данной главе. Также автором выполнены все аналитические и численные расчеты с использованием упомянутых в главе методов [33, 68].

Заключение по диссертации

В данной работе исследовались задачи, связанные с изучением движения точечных особенностей в жидкости и их влияния на движение твердого тела в жидкости. Все указанные задачи описываются с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, то есть представляются в виде конечномерных динамических систем. Помимо близких постановок, рассматриваемые задачи объединены общими подходами и методами теоретической механики, используемыми для их изучения. Существенное внимание в работе уделяется качественному анализу рассматриваемых систем: поиску и исследованию неподвижных точек, бифуркационному анализу и др. Полученные результаты излагаются в трех главах:

1 глава: Рассмотрена задача о плоскопараллельном движении кругового цилиндра в идеальной несжимаемой жидкости в присутствии неподвижной точечной особенности (рассмотрены случаи вихря, источника и вихреисточника). Показано, что в отсутствие у цилиндра собственной циркуляции вид точечной особенности не влияет на движение цилиндра. В этом случае для уравновешенного цилиндра показано, что система интегрируема (указана неустойчивая неподвижная точка, проведен бифуркационный анализ, построены характерные фазовые портреты). При наличии у цилиндра смещения центра масс для рассматриваемой системы построен эффективный потенциал, указаны возможные частные решения (неподвижные точки).

Для уравновешенного цилиндра с собственной циркуляцией показано, что в зависимости от вида точечной особенности происходит качественное изменение динамики системы. В случае неподвижного точечного вихря система интегрируема, указаны устойчивая и неустойчивая неподвижные точки, приведены бифуркационная диаграмма и фазовые портреты. В случае неподвижного источника показано, что все траектории цилиндра либо притягиваются к особенности, либо уходят на бесконечность.

2 глава: Изучается задача о движении точечных вихрей на «плоском» то-

ре, которая эквивалентна задаче о движении вихревых решеток. Показано, что динамика системы двух вихрей качественно не зависит от их интенсивностей. Найдены стационарные конфигурации и исследована их устойчивость. Для трех вихрей с суммарной ненулевой интенсивностью приводится процедура редукции на уровне первых интегралов. Численно показана неинтегрируемость этой задачи. Показано, что уравнения движения четырех вихрей на торе допускают инвариантное многообразие, которое соответствует центрально-симметричным вихревым конфигурациям. Получены уравнения движения четырех вихрей на этом инвариантном многообразии и на фиксированном уровне первых интегралов, и численно доказана их неинтегрируемость.

3 глава: Рассматривается задача о движении двух точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости на конечном «плоском» цилиндре. Показано, что задача о движении вихрей на «плоском» цилиндре соответствует движению на некотором инвариантном многообразии на «плоском» торе. Представлена процедура редукции на фиксированный уровень первого интеграла. Показано, что в зависимости от значений параметров в системе возможны три типа бифуркационных диаграмм. Для каждого из них проводится полный бифуркационный анализ системы. Получены условия орбитальной устойчивости обобщений дорожек Кармана для исследуемой задачи.

Литература

- [1] *Aref H., Stremmer M. A.* On the motion of three point vortices in a periodic strip // *J. Fluid. Mech.* – 1996. – Vol. 314. – Pp. 1–25.
- [2] *Aref H., Stremmer M. A., Ponta F. L.* Exotic vortex wakes—point vortex solutions // *Journal of fluids and structures.* – 2006. – Vol. 22, no. 6-7. – Pp. 929-940.
- [3] *Artemova E. M., Vetchanin E. V.* The Motion of an Unbalanced Circular Disk in the Field of a Point Source // *Regular and Chaotic Dynamics.* – 2022. – Vol. 27, no. 1. – Pp. 24-42.
- [4] *Artemova E. M., Vetchanin E. V.* The motion of a circular foil in the field of a fixed point singularity: Integrability and asymptotic behavior // *Physics of Fluids.* – 2024. – Vol. 36, no. 027139. – Pp 13.
- [5] *Basu S., Stremmer M. A.* On the motion of two point vortex pairs with glide-reflective symmetry in a periodic strip // *Physics of Fluids.* – 2015. – Vol. 27, no. 10. – Pp. 103603.
- [6] *Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S.* The dynamics of three vortex sources // *Regular and Chaotic Dynamics.* – 2014. – Vol. 19. – Pp. 694-701.
- [7] *Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S.* The dynamics of vortex sources in a deformation flow // *Regular and chaotic dynamics.* – 2016. – Vol. 21. – Pp. 367-376.
- [8] *Blackmore D., Knio O.* Transition from quasiperiodicity to chaos for three coaxial vortex rings // *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* – 2000. – Vol. 80, no. S1. – Pp. 173-176.

- [9] *Blackmore D., Knio O.* KAM theory analysis of the dynamics of three coaxial vortex rings // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2000. – Vol. 140, no. 3-4. – Pp. 321-348.
- [10] *Boatto S., Koiller J.* Vortices on closed surfaces // *Geometry, mechanics, and dynamics: the legacy of Jerry Marsden*. – 2015. – Pp. 185-237.
- [11] *Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S.* Topology and stability of integrable systems // *Russian Mathematical Surveys*. – 2010. – Vol. 65, no. 2. – Pp. 259.
- [12] *Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S.* Hamiltonization of non-holonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // *Regular and Chaotic Dynamics*. – 2011. – Vol. 16. – Pp. 443–464.
- [13] *Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S.* The dynamics of vortex rings: Leapfrogging, choreographies and the stability problem // *Regular and Chaotic Dynamics*. – 2013. – Vol. 18. – Pp. 33-62.
- [14] *Borisov A. V. et al.* The dynamics of vortex rings: leapfrogging in an ideal and viscous fluid // *Fluid Dynamics Research*. – 2014. – Vol. 46, no. 3. – Pp. 031415.
- [15] *Dritschel D. G., Boatto S.* The motion of point vortices on closed surfaces // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 2015. – Vol. 471, no. 2176. – Pp. 20140890.
- [16] *Fetter A. L., Svidzinsky A. A.* Vortices in a trapped dilute Bose-Einstein condensate // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2001. – Vol. 13, no. 12. – Pp. R135.
- [17] *Glauert H.* The characteristics of a Kármán vortex street in a channel of finite breadth // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. – 1928. – Vol. 120, no. 784. – Pp. 34-46.
- [18] *Glauert H.* The characteristics of a Kármán vortex street in a channel of finite breadth // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. – 1928. – Vol. 120, no. 784. – Pp. 34-46.

- [19] *Gorbuzov V. N., Pranevich A. F.* First integrals of ordinary linear differential systems // *arXiv preprint arXiv:1201.4141*. – 2012.
- [20] *Greenhill A. G.* Plane vortex motion // *Quart. J. Pure Appl. Math.* – 1877/78. – Vol. 15, no. 58. – Pp. 10–27.
- [21] *Gröbli W.* Speziale Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden // *Vierteljahrsch. d. Naturforsch. Geselsch.* – 1877. – Vol. 22. – Pp. 37–81, 129–165.
- [22] *Grotta-Ragazzo C., Gustafsson B., Koiller J.* On the interplay between vortices and harmonic flows: Hodge decomposition of Euler’s equations in $2d$ // *arXiv preprint arXiv:2309.12582*. – 2023.
- [23] *Gryanik V. M., Tevs M. V.* Dynamics of singular geostrophical vortices in a N -level model of the atmosphere (ocean) // *Izvestiya atmospheric and oceanic physics*. – 1989. – Vol. 25. – Pp. 179-188.
- [24] *Guenther N. E., Massignan P., Fetter A. L.* Quantized superfluid vortex dynamics on cylindrical surfaces and planar annuli // *Physical Review A*. – 2017. – Vol. 96, no. 6. – Pp. 063608.
- [25] *Hairer E., Norsett S. P., Wanner, G.* Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems. – Springer, 1993.
- [26] *Hally D.* Stability of streets of vortices on surfaces of revolution with a reflection symmetry // *Journal of Mathematical Physics*. – 1980. – Vol. 21, no. 1. – Pp. 211-217.
- [27] *Helmholtz H.* Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. – 1858.
- [28] *Imai I.* On the stability of a double row of vortices with unequal strengths in a channel of finite breadth // *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*. – 1936. – Vol. 18. – Pp. 436-459.
- [29] *Kalman R. E., Falb P. L., Arbib M. A.* Topics in mathematical system theory. – New York : McGraw-Hill, 1969. – Vol. 1.

- [30] *Von Karman T.* Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt // *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse.* – 1911. – Vol. 1911. – Pp. 509-517.
- [31] *Kibel' I. A., Kochin N. E., Roze N. V.* Theoretical Hydromechanics. – Interscience Publishers, 1964.
- [32] *Kilin A. A., Artemova E. M.* Integrability and chaos in vortex lattice dynamics // *Regular and Chaotic Dynamics.* – 2019. – Vol. 24. – Pp. 101-113.
- [33] *Kilin A. A., Artemova E. M.* Bifurcation Analysis of the Problem of Two Vortices on a Finite Flat Cylinder // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* – 2024. – Vol. 20, no. 1. – Pp. 95-111.
- [34] *Kimura Y.* Vortex motion on surfaces with constant curvature // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* – 1999. – Vol. 455, no. 1981. – Pp. 245-259.
- [35] *Kirchhoff G.* Vorlesungen über mathematische Physik. – Teubner, 1891.
- [36] *Korotkin A. I.* Added masses of ship structures. – Springer Science & Business Media, 2008. – Vol. 88.
- [37] *Koukouloyannis V., Voyatzis G., Kevrekidis P. G.* Dynamics of three noncorotating vortices in Bose-Einstein condensates // *Physical Review E.* – 2014. – Vol. 89, no. 4. – Pp. 042905.
- [38] *Kozlov V. V.* On the integrability of circulatory systems // *Regular and Chaotic Dynamics.* – 2022. – Vol. 27, no. 1. – Pp. 11-17.
- [39] *Krylov N. M., Bogoliubov N. N.* Introduction to non-linear mechanics. – Princeton university press, 1950. – no. 11.
- [40] *Lewis T. C.* Some cases of vortex motion // *Messenger of Math.* – 1879. – Vol. 9. V Pp. 93–95.
- [41] *Mamaev I. S., Bizyaev I. A.* Dynamics of an unbalanced circular foil and point vortices in an ideal fluid // *Physics of Fluids.* – 2021. – Vol. 33, no. 8.

- [42] *Meleshko V. V., Aref H.* A bibliography of vortex dynamics 1858-1956 // *Advances in Applied Mechanics.* – 2007. – Vol. 41, no. 197. – Pp. 197-292.
- [43] *Middelkamp S. et al.* Bifurcations, stability, and dynamics of multiple matter-wave vortex states // *Physical Review A.* – 2010. – Vol. 82, no. 1. – Pp. 013646.
- [44] *Montaldi J., Souliere A., Tokieda T.* Vortex dynamics on a cylinder // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems.* – 2003. – Vol. 2, no. 3. – Pp. 417-430.
- [45] *Morikawa G. K., Swenson E. V.* Interacting motion of rectilinear geostrophic vortices // *The Physics of Fluids.* – 1971. – Vol. 14, no. 6. – Pp. 1058-1073.
- [46] *Olver P. J.* Applications of Lie groups to differential equations. – Springer Science & Business Media, 1993. – Vol. 107.
- [47] *O’Neil K. A.* On the Hamiltonian dynamics of vortex lattices // *Journal of mathematical physics.* – 1989. – Vol. 30, no. 6. – Pp. 1373-1379.
- [48] *Ramodanov S. M.* Motion of a circular cylinder and a vortex in an ideal fluid // *Regular and chaotic dynamics.* – 2001. – Vol. 6, no. 1. – Pp. 33-38.
- [49] *Ramodanov S. M.* Motion of a circular cylinder and N point vortices in a perfect fluid // *Regular and chaotic dynamics.* – 2002. – Vol. 7, no. 3. – Pp. 291-298.
- [50] *Rocha E. A. M., Torres D. F. M.* Quadratures of Pontryagin extremals for optimal control problems // *arXiv preprint math/0511355.* – 2005.
- [51] *Ryabov P. E., Sokolov S. V.* Phase topology of two vortices of the identical intensities in Bose-Einstein condensate // *arXiv preprint arXiv:1812.11749.* – 2018.
- [52] *Sakajo T., Shimizu Y.* Point vortex interactions on a toroidal surface // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* – 2016. – Vol. 472, no. 2191. – Pp. 20160271.
- [53] *Shashikanth B. N. et al.* The Hamiltonian structure of a two-dimensional rigid circular cylinder interacting dynamically with N point vortices // *Physics of Fluids.* – 2002. – Vol. 14, no. 3. – Pp. 1214-1227.

- [54] *Smith S. G. L.* How do singularities move in potential flow? // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2011. – Vol. 240, no. 20. – Pp. 1644-1651.
- [55] *Sokolovskiy M. A. et al.* N -symmetric interaction of N hetons. I. N -symmetric interaction of N hetons. I. Analysis of the case $N = 2$ // *Physics of Fluids*. – 2020. – Vol. 32, no. 9.
- [56] *Sokolovskiy M. A., Carton X. J., Filyushkin B. N.* Mathematical Modeling of Vortex Interaction Using a Three-Layer Quasigeostrophic Model. Part 2: Finite-Core-Vortex Approach and Oceanographic Application // *Mathematics*. – 2020. – Vol. 8, no. 8. – Pp. 1267.
- [57] *Stremler M. A., Aref H.* Motion of three point vortices in a periodic parallelogram // *J. Fluid Mech.* – 1999. – Vol. 392. – Pp. 101–128.
- [58] *Stremler M. A.* Relative equilibria of singly periodic point vortex arrays // *Physics of Fluids*. – 2003. – Vol. 15, no. 12. – Pp. 3767-3775.
- [59] *Stremler M. A. et al.* A mathematical model of $2P$ and $2C$ vortex wakes // *Journal of Fluids and Structures*. – 2011. – Vol. 27, no. 5-6, – Pp. 774-783.
- [60] *Tomotika S.* On the Stability of a Kármán Vortex Street in a Channel of Finite Breadth, I // *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*. – 1929. – Vol. 11, no. 5-6. – Pp. 53-68.
- [61] *Torres P. J. et al.* Dynamics of vortex dipoles in confined Bose–Einstein condensates // *Physics Letters A*. – 2011. – Vol. 375, no. 33. – Pp. 3044-3050.
- [62] *Weiss J. B., McWilliams J. C.* Nonergodicity of point vortices // *Phys. Fluids. A*. – 1991. – Vol. 3, no. 5. – P.835–844.
- [63] *Zabusky N. J., Hughes M. H., Roberts K. V.* Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions // *Journal of computational physics*. – 1979. – Vol. 30, no. 1. – Pp. 96–106.
- [64] *Zermelo E. F. F.* Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. – 2007. – Vol. 3, no. 1. – Pp. 81-109.

- [65] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Наука, 1975.
- [66] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»*. – 1985.
- [67] Артемова Е. М., Ветчинин Е. В. Управление движением кругового цилиндра в идеальной жидкости с помощью источника // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. – 2020. – Т. 30, №. 4. – С. 604-617.
- [68] Артемова Е. М. Динамика двух вихрей на конечном плоском цилиндре // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. – 2023. – Т. 33, №. 4. – С. 642-658.
- [69] Банникова Е. Ю., Конторович В. М., Резник Г. М. Динамика вихревой пары в радиальном потоке // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 2007. – Т. 132, №. 3. – С. 615-622.
- [70] Богомолов В. А. Динамика завихренности на сфере // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. – 1977. – Т. 17, №. 6. – С. 57-65.
- [71] Богомолов В. А. О двумерной гидродинамике на сфере // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. – 1979. – Т. 15, №. 1. – С. 29-35.
- [72] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Новая интегрируемая задача о движении точечных вихрей на сфере // *Нелинейная динамика*. – 2007. – Т. 3. – №. 2. – С. 211-223.
- [73] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. – 2005.
- [74] Горячев Д. Н. О некоторых случаях движения прямолинейных параллельных вихрей // *Москва, Унив. тип.* – 1898.
- [75] Громека И. С. О вихревых движениях жидкости на сфере // *Собр. протоколов заседания секции физ.-мат. общ-ва естествоиспытателей при Казанском ун-те*. – 1885.

- [76] Козлов В. В. Об интегрируемости уравнений динамики в непотенциальном силовом поле // *Успехи математических наук*. – 2022. – Vol. 77, no. 6 – Pp. 137-158.
- [77] Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. К теории управления моноциклом // *Прикладная математика и механика*. – 2005. – Vol. 69, no. 4. – Pp. 569-583.
- [78] Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. – 1960.
- [79] Рыжов Е. А. Интегрируемое и неинтегрируемое движение вихревой пары в несимметричном деформационном потоке // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. – 2011. – Т. 7, №. 2. – С. 283-293.
- [80] Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966.
- [81] Ткаченко В. К. Устойчивость вихревых решеток // *ЖЭТФ*. – 1966. – Т. 50, №. 6, – С. 1573–1585.
- [82] Фридман А. А., Полубаринова П. Я. О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости // *Геофизический сборник* – 1928. – Т. 5, №. 2. – С. 9-23.
- [83] Чаплыгин С. А. О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло // *Полн. собр. соч.* – 1926. – Т. 3. – С. 3-64.