УДК 519.8 © Е.А. ПЕГАЧКОВА, 2010

МЕТОДИКА ПРИБЛИЖЕННОГО СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЛОГИКО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ПЕГАЧКОВА Елена Александровна, аспирант Московского авиационного института (государственного технического университета).
E-mail: pegachkova@mail.ru

PEGACHKOVA Elena A., Moscow Aviation Institute (State Technical University), A post-graduate student.
E-mail: pegachkova@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления логико-динамическими системами, динамическая часть которых описывается линейными дифференциальными уравнениями, а логическая часть — линейными разностными уравнениями, моделирующими работу автомата с памятью. Качество управления оценивается квадратичным функционалом. Поставленная задача аналогична классической проблеме Летова аналитического конструирования оптимальных регуляторов. Выведены уравнения для нахождения функции Беллмана и оптимального управления с обратной связью. Разработана методика и составлена программа численного решения этой задачи, решен тестовый пример.

We consider the problem of active stabilization of a satellite with a minimal fuel consumption. The solution in the classical frames provides a minimizing sequence with infinitely many switches in the engine during infinitely short time intervals. However, this infinite impulse strategy is practically non — realizable. Hence we suggest to take into account the number of switches, solving the problem within logic-dynamical systems (LDS). We get an approximate solution basing on the necessary optimality conditions for LDS. We compare these necessary conditions with Pontriagin maximum principle, discuss the results of some calculations and their practical utility.

Ключевые слова: логико-динамическая система, линейная система, оптимальное управление, функция Беллмана.

Key words: logic-dynamical system, linear system, optimal control, Bellman’s functions.

Условные обозначения и сокращения

ЛДС — логико-динамическая система;

АКОР — аналитическое конструирование оптимальных регуляторов;

КА — космический аппарат.

Введение

Рассматриваются детерминированные логико-динамические системы (ЛДС), динамическая часть которых описывается линейными дифференциальными уравнениями, а логическая часть — линейными разностными уравнениями, моделирующими работу автомата с памятью [1—3]. Качество управления оценивается квадратичным функционалом. Поставленная задача аналогична классической проблеме Летова [3, 4] аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), но в классе ЛДС. По сравнению с классической проблемой рассматриваемая задача отличается дополнительными рекуррентными уравнениями, описывающими логическую часть ЛДС, а также наличием в критерии качества штрафных слагаемых за переключения логической (автоматной) части ЛДС.

Исследуемая модель относится к гибридным системам и применяется для описания процессов управления ориентацией космических аппаратов (КА) с использованием реактивных двигателей малой тяги [5]. Динамическая часть ЛДС описывает движение КА вокруг центра масс, а логическая часть моделирует работу бортового управляющего комплекса.

На основе достаточных условий оптимальности выведены уравнения для нахождения функции Беллмана и оптимального управления с обратной связью. Оптимальное управление динамической частью системы реализуется линейным регулятором (как и в классической задаче АКОР), а оптимальное управление логической частью определяется рекуррентным уравнением. Разработана методика и составлена программа численного решения задачи.

1. Постановка задачи

Пусть поведение детерминированной линейной ЛДС описывается соотношениями:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)y(t)+C(t)u(t),$$
$$x(t_0)=x_0,\ t_0\le t\le t_1; \tag{1}$$

$$y(\tau)=A_\#(\tau)x(\tau)+B_\#(\tau)y(\tau-0)+C_\#(\tau)v(\tau),$$
$$y(t_0-0)=y_0,\ t_0\le\tau\le t_1, \tag{2}$$

где *x, y*— векторы состояния динамической и логической частей ЛДС соответственно, $x\in X=R^n$, $y\in Y=R^m$; *u, v* — векторы управления динамической и логической частями ЛДС соответственно, $u\in U=R^p$, $v\in V=R^q$; матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ имеют размеры $(n\times n)$, $(n\times m)$, $(n\times p)$ соответственно и непрерывны на $T=[t_0,\ t_1]$; матрицы $A_\#(\tau)$, $B_\#(\tau)$, $C_\#(\tau)$ имеют размеры $(m\times n)$, $(m\times m)$, $(m\times q)$ соответственно.

Допустимыми процессами считаются четверки $(x(\cdot),\,y(\cdot),\,u(\cdot),\,v(\cdot))$, где $y(\cdot)$, $v(\cdot)$ — непрерывные справа кусочно-постоянные функции $y:T\to Y$, $v:T\to V$; $x(\cdot)$ — абсолютно непрерывная функция $x:T\to X$; $u(\cdot)$ — измеримая функция $u:T\to U$, причем функции $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $v(t)$ удовлетворяют начальным условиям $x(t_0)=x_0$; $y(t_0-0)=y_0$, почти всюду на T — дифференциальному уравнению (1) и в каждой точке разрыва $\tau\in T$ функции $y(\cdot)$ — рекуррентному уравнению (2). Функции $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ определяют траектории движения динамической и логической частей ЛДС соответственно, а функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — управления. Множество допустимых процессов обозначим через $\mathcal{D}(t_0,x_0,y_0)$.

Качество управления оценивается квадратичным функционалом

$$I=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\frac{1}{2}x^T(t)D(t)x(t)+x^T(t)G(t)y(t)+$$
$$+\frac{1}{2}u^T(t)Q(t)u(t)\Big]dt+\sum_\tau\Big\{\lambda(\tau)+\frac{1}{2}x^T(\tau)D_\#(\tau)x(\tau)+$$
$$+x^T(\tau)G_\#(\tau)y(\tau-0)+\frac{1}{2}y^T(\tau)F_\#(\tau)y(\tau)+$$
$$+\frac{1}{2}v^T(\tau)Q_\#(\tau)v(\tau)\Big\}+\frac{1}{2}x^T(t_1)D_1x(t_1)+$$
$$+x^T(t_1)G_1y(t_1)+\frac{1}{2}y^T(t_1)F_1y(t_1), \tag{3}$$

где матрицы $D(t)$, $G(t)$, $Q(t)$ имеют размеры $n\times n$, $n\times m$, $p\times p$ соответственно и непрерывны на $T=[t_0,\ t_1]$; матрицы $D_\#(\tau)$, $G_\#(\tau)$, $F_\#(\tau)$, $Q_\#(\tau)$, D_1, G_1, F_1 имеют размеры $n\times n$, $n\times m$, $m\times m$, $q\times q$, $n\times n$, $n\times m$, $m\times m$ соответственно; матрицы $D(t)$, $D_\#(\tau)$, $F_\#(\tau)$, D_1, F_1 — симметрические неотрицательно определенные; матрицы $Q(t)$, $Q_\#(\tau)$ — симметрические положительно определенные; $\lambda(\tau)$ — неотрицательная функция. Суммирование в (3) ведется по всем точкам разрыва кусочно-постоянной непрерывной справа функции $y(\cdot)$.

Требуется найти оптимальные управления $\mathbf{u}(t,x,y)$ и $\mathbf{v}(t,x,y)$ с полной обратной связью динамической и логической частями ЛДС, которые для каждого начального состояния (x_0,y_0) порождали бы оптимальный допустимый процесс $(x^*(\cdot),y^*(\cdot),u^*(\cdot),v^*(\cdot))$: $u^*(t)=\mathbf{u}(t,x^*(t),y^*(t))$, $v^*(t)=\mathbf{v}(t,x^*(t),y^*(t))$ $\forall\ t\in T$ — минимизирующий функционал (3).

В постановке задачи не исключается случай многократного переключения автоматной части (т.е. многократного изменения состояния логической части ЛДС) в фиксированный момент времени.

2. Условия оптимальности

Применяя достаточные условия оптимальности [3] для задачи (1)—(3), получаем следующее утверждение.

Теорема (о решении проблемы АКОР в классе ЛДС). Функция Беллмана для задачи оптимального управления (1)—(3) имеет вид

$$\varphi(t-0,x,y)=\min_{k=0,\,1,\,2,\,\dots}\varphi^{(k)}(t,x,y), \tag{4}$$

где

$$\varphi^{(k)}(t,x,y)=\frac{1}{2}x^T\Phi_k(t)x+x^T\Psi_k(t)y+$$
$$+\frac{1}{2}y^T\Gamma_k(t)y+\gamma_k(t),\ \ k=0,1,2,\dots;$$

причем функции $\Phi_k(t), \Psi_k(t), \Gamma_k(t), \gamma_k(t)$ удовлетворяют системе рекуррентных уравнений:

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \Psi_k A_\# + A_\#^T \Psi_k^T + A_\#^T (\Gamma_k + F_\#) A_\# + \\ + D_\# - L_k^T C_\# K_k C_\#^T L_k;$$

$$\Psi_{k+1} = L_k^T (B_\# - C_\# K_k C_\#^T M_k) + G_\#; \quad (5)$$

$$\Gamma_{k+1} = B_\#^T (\Gamma_k + F_\#) B_\# - M_k^T C_\# K_k C_\#^T M_k;$$

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k + \lambda(\tau),$$

где

$$K_k = \left[Q_\# + C_\#^T (\Gamma_k + F_\#) C_\# \right]^{-1};$$

$$L_k = \Psi_k^T + (\Gamma_k + F_\#) A_\#; \; M_k = (\Gamma_k + F_\#) B_\#,$$

с начальными условиями:

$$\Phi_0(\tau) = \Phi(\tau), \; \Psi_0(\tau) = \Psi(\tau), \\ \Gamma_0(\tau) = \Gamma(\tau), \; \gamma_0(\tau) = \gamma(\tau), \quad (6)$$

а функции $\Phi_0(t), \Psi_0(t), \Gamma_0(t), \gamma_0(t)$ — системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\Phi}_0 + \Phi_0 A + A^T \Phi_0 + D - \Phi_0 C Q^{-1} C^T \Phi_0 = 0; \\ \dot{\Psi}_0 + \Phi_0 B + A^T \Psi_0 + G - \Phi_0 C Q^{-1} C^T \Psi_0 = 0; \\ \dot{\Gamma}_0 + \Psi_0^T B + B^T \Psi_0 - \Psi_0^T C Q^{-1} C^T \Psi_0 = 0; \\ \dot{\gamma}_0 = 0 \quad (7)$$

с терминальными условиями:

$$\Phi_0(t_1) = D_1; \; \Psi_0(t_1) = G_1; \; \Gamma_0(t_1) = F_1; \; \gamma_0(t_1) = 0. \quad (8)$$

Оптимальные позиционные управления динамической и логической частями ЛДС имеют вид:

$$\mathbf{u}(t,x,y) = -Q^{-1}(t) C^T(t) \left[\Phi_0(t) x + \Psi_0(t) y \right]; \quad (9)$$

$$\mathbf{v}^{(k+1)}(t,x,y) = -K_k(t) C_\#^T(t) \left[L_k(t) x + M_k(t) y \right], \\ k = 0,1,2, \; \ldots, k^* - 1. \quad (10)$$

Оптимальное количество k^* переключений логической части:

$$k^*(t,x,y) = \arg \min_{k=0,\,1,\,2,\ldots} \varphi^{(k)}(t,x,y), \quad (11)$$

а минимальное значение функционала (3)

$$\min_{d \in \mathcal{D}(t_0,x_0,y_0)} I(d) = \varphi(t_0 - 0, x_0, y_0).$$

3. Методика синтеза оптимального управления

Для нахождения оптимальных позиционных управлений ЛДС нужно выполнить следующие действия:

1. Решить систему дифференциальных уравнений (7) с начальными условиями (8).
2. Найти оптимальное позиционное управление динамической частью ЛДС (9).
3. Решить систему рекуррентных уравнений (5) с начальными условиями (6).
4. Найти конечные разности

$$\Delta^{(k+1)}\varphi(t,x,y) = \varphi^{(k+1)}(t,x,y) - \varphi^{(k)}(t,x,y),$$

где

$$\varphi^{(k)}(t,x,y) = \frac{1}{2} x^T \Phi_k(t) x + x^T \Psi_k(t) y + \\ + \frac{1}{2} y^T \Gamma_k(t) y + \gamma_k(t), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

5. По знакам конечных разностей определить оптимальное количество $k^* = k^*(t,x,y)$ переключений логической части системы:

$$k^*(t,x,y) = 0 \text{ (нет переключений)},$$

если $\Delta^{(1)}\varphi(t,x,y) \geq 0$;

$$k^*(t,x,y) = 1,$$

если $\Delta^{(1)}\varphi(t,x,y) < 0$ и $\Delta^{(2)}\varphi(t,x,y) \geq 0$;

$$k^*(t,x,y) = 2,$$

если $\Delta^{(2)}\varphi(t,x,y) < 0$ и $\Delta^{(3)}\varphi(t,x,y) \geq 0$ и т.д.

6. Найти оптимальное позиционное управление логической частью ЛДС

$$\mathbf{v}^{(k+1)}(t,x,y) = -K_k(t) C_\#^T(t) \left[L_k(t) x + M_k(t) y \right], \\ k = 0,1,2,\ldots,k^* - 1.$$

Для приближённого решения задачи была разработана программа, которая реализует предлагаемую методику и позволяет для любого начального состояния найти оптимальную траекторию. Работоспособность программы проверялась на задачах малой размерности.

4. Пример

Требуется найти оптимальное позиционное управление ЛДС:

$$\dot{x}(t) = y(t) + u(t),\ x(0) = 1,\ 0 \le t \le 1,$$

$$y(\tau) = y(\tau - 0) + v(\tau),\ y(-0) = 1,\ 0 \le \tau \le 1,$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2(t)\,dt +$$

$$+\sum_{\tau} \left(\lambda + \frac{1}{2} v^2(\tau)\right) + \frac{1}{2} x^2(1) + \frac{1}{2} y^2(1) \to \min,$$

если $\lambda = \frac{1}{8}$.

Приближенное решение задачи получено с помощью разработанной программы. На рис. 1 показаны области с одинаковым количеством переключений логической части, точкой указано начальное состояние.

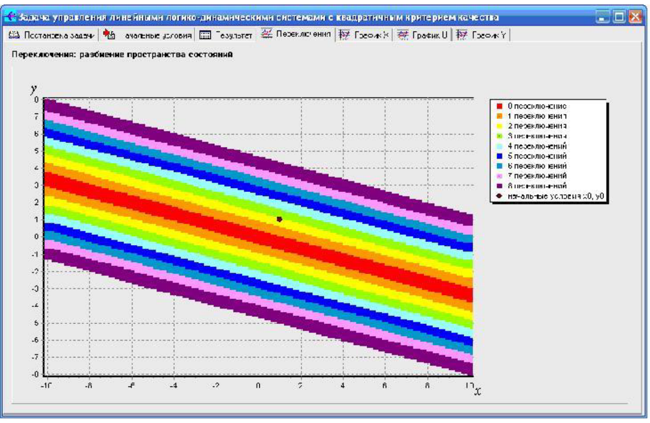

Рис. 1. Разбиение пространства начальных состояний

На рис. 2 стрелками обозначена оптимальная траектория: переключения автоматной части — двойными стрелками, изменение динамической части — полужирной, прямыми показано разбиение пространства состояний на области (полосы) с указанным оптимальным количеством переключений автоматной части.

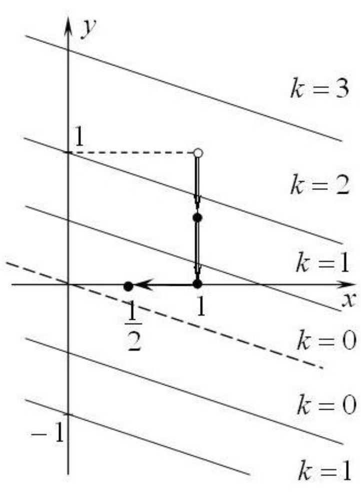

Рис. 2. Приближенное решение

Полученное приближенное решение с большой точностью совпадает с аналитическим решением [6].

Работа выполнена в Московском авиационном институте (государственном техническом университете) в научно-образовательном центре «Математические методы оптимизации и идентификации аэрокосмических систем и летательных аппаратов», как часть работ по Государственному контракту 02.740.11.0471 в рамках мероприятия 1.1 Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг.

Выводы

На основе достаточных условий оптимальности выведены уравнения для нахождения оптимального управления с обратной связью. Оптимальное управление динамической частью системы реализуется линейным регулятором (как и в классической задаче АКОР), а оптимальное управление логической частью определяется рекуррентным уравнением. Разработана методика, составлена программа численного решения задачи, решен тестовый пример.

Библиографический список

1. *Семенов В.В.* Динамическое программирование в синтезе логико-динамических систем // Приборостроение. 1984. №2. С.12-23.

2. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. №6. С. 77-92.

3. *Пантелеев А.В., Бортаковский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2003.

4. *Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.* Синтез управления активной стабилизацией спутника на основе необходимых условий оптимальности логико-динамических систем // Вестник Московского авиационного института. 2008. Т.15. №2. С.28-36.

5. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1973.

6. *Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.* Синтез оптимального управления линейными логико-динамическими системами// Электронный журнал «Труды МАИ». 2007. №27.