УДК 532.507

Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Пуазейля

Хатунцева О.Н.

Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва, ул. Ленина, 4А, Королев, Московская область, 141070, Россия

e-mail: Olga.Khatuntseva@rsce.ru

Статья поступила 17.05.2019

Аннотация

В работе теоретически найдены два решения плоской задачи Пуазейля. Одно из них соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному. Первое решение реализуется при любых значениях числа Рейнольдса и характеризуется параболическим профилем скорости во всей области течения жидкости, второе – реализуется только при достаточно больших значениях числа Рейнольдса и в центре плоского канала характеризуется логарифмическим профилем скорости. Множитель, стоящий перед функцией логарифма, является постоянной Кармана. Приведено сравнение результатов с имеющимися экспериментальными данными. Аналитические решения плоской задачи Пуазейля удалось определить из уравнений Навье-Стокса благодаря учету в них производства энтропии, обусловленного возбуждением стохастических пульсаций в потоке жидкости.

Ключевые слова: турбулентность, плоское течение Пуазейля, ламинарно-турбулентный переход, критическое число Рейнольдса.

1. Введение

Данная работа продолжает цикл публикаций [1-4], посвященных решению гидродинамических задач, допускающих аналитический подход к их рассмотрению. К сожалению, в силу своей сложности уравнения Навье-Стокса (УНС) имеют такие решения в ограниченном круге задач - для очень простых геометрий. Самыми известными из них являются [5]:

- задача Хагена-Пуазейля, описывающая течение несжимаемой нетеплопроводной жидкости в трубе кругового сечения;

- плоская задача Куэтта, описывающая течение несжимаемой нетеплопроводной жидкости, расположенной между двумя бесконечными параллельными плоскими пластинами, движущимися с постоянными скоростями в противоположных относительно друг друга направлениях в собственных плоскостях (течение происходит под действием сил вязкого трения, действующих на жидкость, и сдвигового напряжения параллельного стенкам);

- плоская задача Пуазейля, описывающая течение несжимаемой нетеплопроводной жидкости, также расположенной между двумя бесконечными параллельными плоскими пластинами, но в отличие от плоского течения Куэтта, течение происходит под действием перепада давления.

Во всех этих задачах [5-6] при интегрировании УНС в отсутствии учета производства энтропии, возникающего в результате возбуждения стохастических пульсаций скорости, существует единственное аналитическое решение, описывающее стационарный профиль скорости при любых значениях числа Рейнольдса. В задаче Хагена-Пуазейля и в плоской задаче Пуазейля – это параболический профиль скорости, в плоской задаче Куэтта – линейный. Во всех случаях этот профиль соответствует ламинарному режиму течения.

Причем, решения задач Хагена-Пуазейля и Куэтта, помимо всего прочего являются устойчивыми в линейном приближении (для бесконечно малых возмущений) [6]. Данный вывод плохо соотносится с огромным количеством экспериментов, в которых при достаточно больших значениях числа Рейнольдса практически невозможно “удержать” жидкость в ламинарном состоянии - происходит потеря устойчивости и переход к турбулентному режиму течения.

Для плоской задаче Пуазейля условие линейной устойчивости не выполняется, однако, найденное минимальное – критическое число Рейнольдса, при котором может осуществляться переход от ламинарного к турбулентному режиму течения составляет, примерно, 5770 (по данным расчетов S.A. Orszag [5]), что намного превосходит экспериментально определяемые значения, величина которых равна, примерно, 1000.

В качестве попыток разрешения возникающих противоречий в вопросах устойчивости обычно выдвигаются предположения о неустойчивости течений к конечным возмущениям. Однако в такой постановке не вполне понятным остается отсутствие других (помимо ламинарных) квазистационарных аналитических решений УНС, к переходу к которым и должны стремиться режимы течения при потере устойчивости.

В работах [1-4], [7] был подробно рассмотрен вопрос о возможности описания турбулентного режима течения жидкости с помощью УНС в расширенном фазовом пространстве и необходимости учета производства энтропии в таком процессе. С помощью предложенного в работе [1] подхода аналитически была решена задача течения жидкости в трубе кругового сечения (задача Хагена-Пуазейля), в работе [4] аналитически решена задача течения жидкости между двумя движущимися плоскими стенками (плоская задача Куэтта). В каждой из этих задач найдены два решения, одно из которых отвечает ламинарному, а второе - турбулентному режиму течения. В задаче Хагена-Пуазейля показано, что турбулентному течению соответствует логарифмический профиль скорости в центре трубы, аналитически определено значение постоянной Кармана. В плоской задаче Куэтта турбулентному течению соответствует профиль скорости, характеризующийся функцией гиперболического синуса, с параметром, зависящим от значения числа Рейнольдса.

В работах [2], [4] на основе метода «разрывных функций» предложен подход, позволяющий определить критическое значение числа Рейнольдса, при котором становится возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. В задаче Хагена-Пуазейля расчетное значение составило, примерно, 1970, в плоской задаче Куэтта, примерно, 305.

Воспользовавшись подходом, предложенным в [1-4], в данной работе попытаемся найти аналитические решения для двух режимов течения (ламинарного и турбулентного) в плоской задаче Пуазейля.

Однако здесь следует подчеркнуть, что поиск аналитических решений в достаточно простых «модельных» задачах не является самоцелью. Основной мотивацией работы является разработка подхода, позволяющего учитывать в УНС особенности ламинарного и турбулентного режимов течения, для дальнейшего корректного интегрирования УНС, как аналитическими, так и численными методами.

Безусловно, численных решений задач гидродинамики на основе уравнения Навье-Стокса (УНС), как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течения жидкости, в настоящее время существует огромное количество (см., например, [8-21]). Несколько десятилетий исследователи активно разрабатывают новые методы, позволяющие совершенствовать технику численного интегрирования УНС (см. [22-31]). Практический интерес к такого рода задачам нельзя переоценить, поскольку они встречаются повсеместно, начиная от вопросов, связанных с расчетом ветровых нагрузок на здания и конструкции, и заканчивая аэро- и гидродинамическими задачами в авиации и ракетостроении. Несмотря на это, на математическом уровне строгости так и не удалось ответить на главный вопрос: описывают ли УНС оба этих режима.

Уравнения Навье-Стокса представляют собой второй закон Ньютона для выделенного достаточно малого, но конечного объема изотермической жидкости, и описывают ускорение этого объема под действием силы, обусловленной градиентом давления и внешних сил, с одной стороны, а также вязкой силы, действующей по поверхности этого объема, с другой стороны.

В случае детерминированного – ламинарного режима течения жидкости корректность использования УНС для описания такого процесса не вызывает сомнений. Однако при переходе к турбулентному режиму течения в жидкости возникает большое число дополнительных - стохастических степеней свободы. В связи с этим вопрос о возможности описания такой системы с помощью детерминированных уравнений Навье-Стокса остается открытым.

Используемые в настоящее время подходы к решению задач гидродинамики на основе УНС можно условно разделить на два класса: решения на основе приближенных «осредненных» методов и решения на основе прямого численного моделирования. Существуют также подходы на основе комбинаций этих методов (метод «крупных вихрей»).

В работах [1], [7] показано, что получение «турбулентных» решений при интегрировании УНС на основе прямого численного моделирования можно сравнить с моделированием стохастического процесса на основе аналоговых принципов. Приближенные численные методы (методы осреднения по Рейнольдсу, методы «крупных вихрей») изменяют УНС за счет введения дополнительных членов, описывающих корреляции пульсаций, и уравнений, моделирующих замыкание осредненных моментов пульсации. По сути, их решения уже нельзя рассматривать, как результат непосредственного интегрирования УНС. Поэтому вопрос о возможности или невозможности описания турбулентного режима течения на основе УНС и подходы к решению этих уравнений, необходимо исследовать, прежде всего, на примере тех задач гидродинамики, которые допускают аналитические решения, к числу которых, относится плоская задача Пуазейля.

2. Применение метода расширения фазового пространства с использованием стохастической переменной для описания турбулентности в плоской задаче Пуазейля.

Турбулентный режим, также как и другие стохастические процессы, обладает важным статистическим свойством – возбуждением большого количества независимых степеней свободы (пульсаций) на разных масштабах рассмотрения системы. При этом закон сохранения импульса для выделенного объема жидкости (в форме уравнений Навье-Стокса), записанный без учета такого процесса, нарушается, поскольку, не все суммарное воздействие, направленное на выделенный объем, идет на его ускорение: часть такого воздействия должно пойти на возбуждение дополнительных - внутренних - степеней свободы.

Параметром, характеризующим связь между микро- и макропроцессами, является энтропия [32] и, следовательно, в таком процессе необходимо учесть производство энтропии выделенного объема жидкости. Исходя из этого рассуждения, можно переписать уравнения Навье-Стокса, включив в их левую часть – полную производную по времени – дополнительный член, отвечающий за изменение скорости, при изменении энтропии S выделенного объема:

$$S(t,\vec{r}) = -\int \varphi[p(t,\vec{r})] \ln \varphi[p(t,\vec{r})] d[p(t,\vec{r})].$$

В выражении для энтропии функция $\varphi[p(t,\vec{r})]$ - это плотность вероятности реализации возмущения скорости величины $p(t,\vec{r})$ в заданный момент времени t в рассматриваемой точке пространства $\vec{r}$.

Дифференциальная энтропия для распределения с ограниченной дисперсией максимальна в случае гауссова распределения вероятностей, то есть когда события происходят независимо друг от друга (не коррелированы). Изменение энтропии в стохастической системе будет характеризовать возникновение коррелированных событий.

Расширяя фазовое пространство дополнительной переменной, характеризующей энтропию S: $(t,\vec{r}) \to (t,\vec{r};S)$, ускорение выделенного объема жидкости, на который действуют силы, стоящее в правой части УНС, можно записать в виде:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t, \vec{r}+\Delta\vec{r}, S+\Delta S) - \vec{V}(t,\vec{r},S)}{\Delta t}.$$

Добавляя и одновременно вычитая векторы в это выражение, его можно переписать в виде:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\vec{V}(t+\Delta t,\vec{r}+\Delta\vec{r},S+\Delta S) - \vec{V}(t,\vec{r}+\Delta\vec{r},S+\Delta S)}{\Delta t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\vec{V}(t,\vec{r}+\Delta\vec{r},S+\Delta S) - \vec{V}(t,\vec{r},S+\Delta S)}{\Delta t} + \frac{\vec{V}(t,\vec{r},S+\Delta S) - \vec{V}(t,\vec{r},S)}{\Delta t} \right].$$

В результате, можно заметить, что при выполнении условий: $\Delta\vec{r} \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0$, $\Delta S \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0$, в полученном выражение для ускорения выделенного объема жидкости первое слагаемое равно: $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$; второе слагаемое: $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{V}\nabla)\vec{V}$; третье слагаемое: $\frac{\partial \vec{V}}{\partial S} \cdot \frac{dS}{dt}$.

Таким образом, учет влияния производства энтропии в выделенном объеме жидкости на его ускорение, приведет к изменению левых частей уравнений Навье-Стокса, характеризующих ускорение выделенного объема жидкости и представляющих собой полные производные по времени. В расширенном фазовом пространстве их можно записать, включив дополнительный член, отвечающий за изменение скорости, при производстве энтропии S в выделенном объеме:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial S}\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\vec{V} + \vec{f} \; .$$

Отсчет энтропии можно начинать с любого уровня и, поэтому, возникает неопределенность при постановке начальных и граничных условий в расширенном пространстве переменных к полученному уравнению. Чтобы этого избежать, представим модифицированное уравнение Навье-Стокса через переменную, характеризующую плотность вероятности реализации возмущения скорости:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \varphi}\frac{1}{\delta S/\delta\varphi}\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\vec{V} + \vec{f} \; . \qquad (1)$$

Производная $\delta S/\delta\varphi$, входящая в уравнение (1), может быть определена как функциональная производная. Найдем ее значение:

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta\varphi}, h\right\rangle = -\frac{d}{d\,э}\int \left(\varphi(p) + э\, h(p)\right)\ln\left(\varphi(p) + э\, h(p)\right)dp\bigg|_{э=0} =$$

$$= -\int \left(\ln\varphi(p) + 1\right)h(p)dp = \left\langle -\left(\ln\varphi(p) + 1\right), h\right\rangle .$$

Откуда следует, что $\delta S/\delta\varphi = -\ln\varphi(p) - 1$. Поскольку, $-(\ln\varphi + 1)\delta\varphi = \delta(-\varphi\ln\varphi)$, то, обозначив, $\tilde{s}(p) = -\varphi(p)\ln\varphi(p)$, перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial\tilde{s}}\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\vec{V} + \vec{f} .$$

Производство энтропии: dS/dt, можно охарактеризовать временным масштабом τ, на котором происходит изменение энтропии стохастической системы на единицу. В результате, полученное уравнение можно представить в виде:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tilde{s}} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\vec{V} + \vec{f} . \qquad (2)$$

Решением уравнения (2) (с граничными и начальными условиями, соответствующими конкретной задаче) будет являться значение скорости $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{r}, \tilde{s}; \tau) = \vec{V}(t, \vec{r}, \tilde{s}(\varphi); \tau)$, реализующейся с вероятностью φ, в системе, в которой производство энтропии характеризуется временным интервалом τ, в момент времени t, в точке $\vec{r}(x, y, z)$.

Для того чтобы корректно в общем случае описывать дополнительное слагаемое в левой части модифицированного уравнения Навье–Стокса, необходимо построить замыкающую модель стохастических процессов и метод их описания [3], [33-34]. Однако в тех случаях, когда дополнительный член уравнения существенно влияет на вид решения но, при этом, само решение практически не зависит от дополнительной переменной (в данном случае $\tilde{s}$), можно обойтись без построения такой модели. Исследование показало, что описание плоского течения Пуазейля относится именно к такому классу задач.

Для этой задачи достаточно рассмотреть систему уравнений, состоящую из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости и модифицированных УНС:

$$\begin{cases} \nabla\left(\rho\vec{V}\right)=0 \\ \dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}+\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial\tilde{s}}=-\dfrac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{V} \end{cases}. \qquad (3)$$

Задачу будем решать в классической постановке [5], а именно, в предположении, что скоростями в поперечных направлениях y и z можно пренебречь по сравнению с продольной скоростью V . Из чего следует постоянство давления в поперечных направлениях. Кроме того, в этом случае из уравнения неразрывности сразу вытекает, что продольная составляющая скорости V не зависит от значения продольной координаты x . Тогда систему уравнений (3) для описания стохастических пульсаций скорости при квазистационарном (когда $\partial V/\partial t=0$) течении вязкой несжимаемой жидкости, можно переписать в виде соотношения:

$$\frac{1}{\tau}\frac{\partial V}{\partial \tilde{s}} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \nu\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Предполагая постоянство градиента скорости в продольном направлении, полученное уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{b^2}{\tau\nu}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2} + 2, \tag{4}$$

где $\tilde{y} = y/b$, b - полуширина канала, $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = V/U$ - безразмерная квазистационарная компонента скорости в продольном направлении в расширенном стохастическом пространстве с дополнительной переменной $\tilde{s}$, $U = -\frac{b^2}{2\rho\nu}\frac{dP}{dx}$ - скорость жидкости в центре канала при ламинарном режиме течения [1], ν - вязкость жидкости, ρ - плотность жидкости.

Необходимо подчеркнуть, что в случае турбулентного режима, течение будет, безусловно, иметь пространственный - трехмерный характер. Однако нерассмотренные в уравнениях компоненты скорости будут иметь стохастический характер пульсаций. Они учитываются в уравнении (4) при введении переменной $\tilde{s}$, отвечающей за общее производство энтропии в турбулентном режиме.

Уравнение (4) будем решать, используя граничные условия – «прилипание» жидкости на стенках в отсутствии пульсаций: $\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s})\big|_{\substack{\tilde{y}=\pm 1\\ \tilde{s}=0}} = 0$, и условие симметрии на оси канала: $\partial\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s})/\partial\tilde{y}\big|_{\substack{\tilde{y}=0\\ \tilde{s}=0}} = 0$.

Уравнение (4) можно упростить, введя вместо временного масштаба τ безразмерный коэффициент γ ($0<\gamma\le 1$) - параметр, характеризующий пространственный масштаб, и воспользовавшись соотношением: $\tau=\frac{\gamma b}{U}=\frac{\gamma b^2}{\nu\,\mathrm{Re}}$, где $\mathrm{Re}=Ub/\nu$ - число Рейнольдса при ламинарном режиме течения жидкости, рассчитанное по характерному размеру полуширины канала.

Подставляя зависимость $\tau(\gamma)$ в уравнение, приходим к соотношению:

$$\frac{\mathrm{Re}}{\gamma}\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\tilde{s}}=\frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial\tilde{y}^2}+2.$$

Сделав в нем замену:

$$\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s})=\tilde{u}(\tilde{y},\tilde{s})-\tilde{y}^2, \tag{5}$$

получим

$$\frac{\mathrm{Re}}{\gamma}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{s}}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2}. \tag{6}$$

Решая уравнение (6) методом разделения переменных:

$$\tilde{u}(\tilde{y},\tilde{s})=N(\tilde{s})F(\tilde{y}), \tag{7}$$

получим два уравнения:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{d\tilde{s}}=\frac{a\gamma}{\mathrm{Re}} \quad \text{и} \quad \frac{d^2F}{d\tilde{y}^2}=aF, \tag{8}$$

где $a=a(\gamma,\mathrm{Re})$ - произвольная константа при любых фиксированных значениях параметров γ и Re. Нетрудно заметить, что нулевое значение константы a с учетом соотношения (5) и граничных условий к уравнению (4) соответствует решению уравнений Навье-Стокса для ламинарного течения несжимаемой жидкости в плоском канале. Это решение будет также являться первым решением задачи течения жидкости в плоском канале с учетом стохастических возмущений скорости для любых значений числа Рейнольдса.

В случае $a \neq 0$, решением первого уравнения (8) являются функции

$$N(\tilde{s}) \sim e^{\frac{a\gamma}{\mathrm{Re}}\tilde{s}}. \tag{9}$$

Гладкие решения второго уравнения (8) можно записать в виде:

$$F = \frac{ch\left(\sqrt{a}\,\tilde{y}\right)}{ch\sqrt{a}},\ \text{где}\ a > 0; \qquad F = \frac{\cos\left(\sqrt{|a|}\,\tilde{y}\right)}{\cos\sqrt{|a|}},\ \text{где}\ a < 0.$$

Соответствующие им выражения для скорости имеют вид:

$$\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s}) = \frac{ch\left(\sqrt{a}\,\tilde{y}\right)}{ch\sqrt{a}} e^{\frac{a}{\mathrm{Re}}\gamma\tilde{s}} - \tilde{y}^2, \quad a > 0, \tag{10}$$

$$\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s}) = \frac{\cos\left(\sqrt{|a|}\,\tilde{y}\right)}{\cos\sqrt{|a|}} e^{-\frac{|a|}{\mathrm{Re}}\gamma\tilde{s}} - \tilde{y}^2, \quad a < 0. \tag{11}$$

Рассмотрим поведение течения жидкости вблизи стенок канала. Для этого введем переменную $\xi = b - y$ или переменную $\tilde{\xi} = 1 - \tilde{y}$ (здесь $\tilde{\xi} = \xi/b$, $\tilde{y} = y/b$), значение которой будем отсчитывать от стенки. Выражения (10)-(11) перепишем в виде зависимостей безразмерных скоростей от безразмерных расстояний относительно динамических значений скорости V_* и длины y_*, соответственно (при этом, $y_* V_*/\nu \sim 1$):

$$\frac{V(\xi,\tilde{s})}{V_*}\tilde{V}_* = \frac{ch\left(\sqrt{a}\left(1-\frac{\xi V_*}{\nu}\tilde{y}_*\right)\right)}{ch\sqrt{a}}e^{\frac{a}{\mathrm{Re}}\gamma\tilde{s}} - \left(1-\frac{\xi V_*}{\nu}\tilde{y}_*\right)^2, \quad a>0.$$

$$\frac{V(\xi,\tilde{s})}{V_*}\tilde{V}_* = \frac{\cos\left(\sqrt{|a|}\left(1-\frac{\xi V_*}{\nu}\tilde{y}_*\right)\right)}{\cos\sqrt{|a|}}e^{-\frac{|a|}{\mathrm{Re}}\gamma\tilde{s}} - \left(1-\frac{\xi V_*}{\nu}\tilde{y}_*\right)^2, \quad a<0.$$

Поскольку динамические характеристики течения непосредственно у стенок канала в ламинарном и турбулентном потоках должны сохраняться, то безразмерные значения динамических скорости и длины: $\tilde{V}_* = V_*/U$ и $\tilde{y}_* = y_*/b$, входящие в эти выражения, можно определить, используя соотношение для скорости ламинарного течения $\tilde{V} = 1-\tilde{y}^2$:

$$\tilde{V}_* = \frac{1}{U}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{1}{U}\sqrt{\nu\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{\substack{\tilde{y}=1\\ \tilde{s}=0}}} = \sqrt{\frac{\nu}{Ub}\left|\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}}\right|_{\substack{\tilde{y}=1\\ \tilde{s}=0}}} = \frac{2}{\sqrt{2\mathrm{Re}}}, \tag{12}$$

$$\tilde{y}_* = \frac{y_*}{b} = \frac{y_* V_*}{\nu}\frac{\nu}{Ub}\frac{U}{V_*} \sim \frac{1}{\mathrm{Re}\tilde{V}_*} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{Re}}}, \qquad (y_* V_*/\nu \sim 1). \tag{13}$$

здесь σ - отнесенная к единице площади сила трения.

Используя соотношения (12), (13) перепишем выражения для скорости в виде:

$$\frac{V(\xi,\tilde{s})}{V_*} = \frac{\sqrt{2\mathrm{Re}}}{2}\left(\frac{ch\left(\sqrt{a}\left(1-\frac{\xi V_*}{\nu}\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{Re}}}\right)\right)}{ch\sqrt{a}}e^{\frac{a}{\mathrm{Re}}\gamma\tilde{s}} - \left(1-\frac{\xi V_*}{\nu}\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{Re}}}\right)^2\right), \ a>0.$$

$$\frac{V(\xi,\tilde{s})}{V_*}=\frac{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{2}\left(\frac{\cos\left(\sqrt{|a|}\left(1-\frac{\xi V_*}{\nu}\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right)\right)}{\cos\sqrt{|a|}}e^{-\frac{|a|}{\mathrm{Re}}\gamma\tilde{s}}-\left(1-\frac{\xi V_*}{\nu}\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right)^2\right),\quad a<0.$$

При нулевом значении стохастического возмущения ($\tilde{s}=0$) в точке $\xi=y_*$ (и $y_* V_*/\nu \sim 1$), значение скорости должно быть равно значению динамической скорости: $V=V_*$. Поэтому от полученных выражений можно перейти к уравнениям:

$$\frac{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{2}\left(ch\left(\sqrt{\frac{a}{2\,\mathrm{Re}}}\right)-sh\left(\sqrt{\frac{a}{2\,\mathrm{Re}}}\right)th\sqrt{a}\right)-\frac{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}=0,\quad a>0.$$

$$\frac{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{2}\left(\cos\left(\sqrt{\frac{|a|}{2\,\mathrm{Re}}}\right)+\sin\left(\sqrt{\frac{|a|}{2\,\mathrm{Re}}}\right)tg\sqrt{|a|}\right)-\frac{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}=0,\quad a<0.$$

Предполагая, что $|a/(2\,\mathrm{Re})|<1$, и разлагая гиперболические и тригонометрические функции, содержащие числа Рейнольдса, в ряд Тейлора, запишем полученные уравнения с точностью до $O(1/(2\,\mathrm{Re}))$:

$$\frac{a-2}{2\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}-\sqrt{a}\cdot th\sqrt{a}\approx 0,\quad a>0, \tag{14}$$

$$\frac{|a|+2}{2\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}-\sqrt{|a|}\cdot tg\sqrt{|a|}\approx 0,\quad a<0. \tag{15}$$

При больших значениях параметра a (по абсолютной величине сравнимых со значением корня из числа Рейнольдса или превосходящим его), спектр решений, определяемых системой уравнений (14), (10) и (15), (11), будет практически сплошным, за счет быстроменяющихся тригонометрических функций. Эти решения будут являться источником «белого» шума. Их вклад в создание квазистационарного профиля скорости в данной работе рассматриваться не будет.

Для значений параметра a по абсолютной величине значительно меньших числа Рейнольдса (или, наоборот, при фиксированных значениях $|a|$ и достаточно больших значениях числа Рейнольдса), уравнения (14)-(15) сводятся к виду:

$$\sqrt{a}\cdot th\sqrt{a}\approx 0,\quad a>0, \tag{16}$$

$$\sqrt{|a|}\cdot tg\sqrt{|a|}\approx 0,\quad a<0. \tag{17}$$

Действительным решением уравнения (16) является значение $\sqrt{a}\approx 0$. Решения уравнения (17): $\sqrt{|a_n|}\approx \pi n$, где n - целые числа и $\pi^2 n^2 << \sqrt{2\,\mathrm{Re}}$.

Решение уравнения (16) со значением $\sqrt{a}\approx 0$ соответствует ламинарному решению и в дальнейшем, при определении профиля турбулентного течения, нас интересовать не будет.

Частными решениями задачи для турбулентного течения вблизи стенок канала с точностью до $O(1/\mathrm{Re})$ являются выражения для скорости, со значениями параметров $\sqrt{|a_n|}\approx \pi n$, $a_n\approx -\pi^2 n^2$:

$$V_n^+\left(\xi^+\right)=\xi^+ - \frac{\pi^2 n^2+2}{4\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\xi^{+^2}+O\left(\frac{1}{2\,\mathrm{Re}}\right). \tag{18}$$

Здесь приняты стандартные обозначения: $V^+ = V(\xi,\tilde{s})/V_*$, $\xi^+=\xi V_*/\nu$.

В линейном приближении в областях, где $\xi^+<1$, выражение (18) сводится к зависимости:

$$V^{+}\left(\xi^{+}\right)\approx\xi^{+}. \tag{19}$$

Выражение (19) хорошо соотносится с экспериментальными данными для пристеночных областей канала.

Во всей области канала частными решениями задачи для турбулентного течения являются выражения, заданные соотношением (11) со значениями параметров $\sqrt{|a_n|}\approx\pi n$:

$$\tilde{V}_n(\tilde{y},\tilde{s})=\frac{\cos(\pi n\tilde{y})}{\cos(\pi n)}e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}}\gamma\tilde{s}}-\tilde{y}^2.$$

Скорости, определяемые этим уравнением, будут характеризовать выделенные частоты в спектре решений. Общее решение можно представить в виде ряда:

$$\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s})=\sum_n c_n\frac{\cos(\pi n\tilde{y})}{\cos(\pi n)}e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}}\gamma\tilde{s}}-\sum_n c_n\tilde{y}^2.$$

Или учитывая, что $c_n/\cos(\pi n)=(-1)^n c_n$, можно записать

$$\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s})=\sum_n(-1)^n c_n\cos(\pi n\tilde{y})e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}}\gamma\tilde{s}}-\sum_n c_n\tilde{y}^2. \tag{20}$$

Поскольку $\pi^2 n^2<\sqrt{2\mathrm{Re}}$, то из уравнения (20) видно, что с увеличением числа Рейнольдса модуль показателя экспоненты будет уменьшаться. И, следовательно, при достаточно больших значениях числа Рейнольдса при описании течения в центральной части канала изменением стохастической переменной можно пренебречь. Поэтому, выбор записи уравнения Навье-Стокса в расширенном фазовом пространстве в виде уравнения типа (2) без учета уравнений, описывающих эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве, является оправданным при достаточно больших числах Рейнольдса.

Для того чтобы определить значения коэффициентов разложения, можно рассмотреть течение вблизи стенки канала. Для этого перепишем выражение (19) для переменных $\tilde{V}$ и $\tilde{y}$: $\tilde{V}(\tilde{y})\big|_{\tilde{y}\to 1} \approx 2(1-\tilde{y})$.

Из этого выражения, а также выражения (20): $\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s})\big|_{\substack{\tilde{s}=0\\ \tilde{y}\to 1}} = 2(1-\tilde{y})\sum_n c_n$,

следует соотношение: $\sum_n c_n = 1$. Подставляя его в выражение (20), получим

$$\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s}) = \sum_n (-1)^n c_n \cos(\pi n\tilde{y}) e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}}\gamma\tilde{s}} - \tilde{y}^2 . \qquad (21)$$

Причем, $\sum_n (-1)^n c_n = \tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s})\big|_{\substack{\tilde{s}=0\\ \tilde{y}=0}} = \tilde{V}_0$ - скорость в центре канала при турбулентном режиме течения.

При заданном условии $\pi^2 n^2 << \sqrt{2\,\mathrm{Re}}$ экспоненту в выражении (21) можно разложить в ряд Тейлора и записать это выражение в виде:

$$\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s}) \approx \sum_n (-1)^n c_n \cos(\pi n\tilde{y}) - \tilde{y}^2 - \sum_n (-1)^n c_n \cos(\pi n\tilde{y}) \frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}} \gamma\tilde{s} .$$

В точке $\tilde{y} = 1$, учитывая, что $\sum_n c_n = 1$, можно записать:

$$\tilde{V}(\tilde{y},\tilde{s})\big|_{\tilde{y}=1} \approx -\gamma\tilde{s} \sum_n c_n \frac{\pi^2 n^2}{\mathrm{Re}} .$$

Это выражение характеризует возмущение безразмерной скорости вблизи стенки, реализующейся с вероятностью, описываемой стохастической переменной $\tilde{s}$. Для того, чтобы стохастическое возмущение скорости, с одной стороны, «диссипировало» на длине вязкого масштаба, а, с другой стороны, не исчезло полностью, «амплитуда» ее изменения на масштабе $\gamma = 1$ должна быть порядка безразмерной динамической скорости. Вблизи стенки канала общее решение для скорости должно определяться суммой частных решений, умноженных на те же коэффициенты c_n, что и в соотношении (20). Представляя динамическую скорость в виде разложения в ряд с коэффициентами c_n: $\tilde{V}_* = \sum_n c_n \tilde{V}_{*n} = 2\big/\sqrt{2\,\mathrm{Re}}$, можно записать

$$\pi^2 n^2 \big/ \mathrm{Re} \sim \tilde{V}_{*n}\,.$$

И, следовательно,

$$\tilde{V}_* = \frac{\pi^2}{\mathrm{Re}} \sum_n c_n n^2 = \frac{2}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\,.$$

Откуда немедленно следует соотношение:

$$\sum_n c_n n^2 = \frac{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{\pi^2}\,. \tag{22}$$

Принимая во внимание соотношение (18), запишем

$$V^+\left(\xi^+\right) = \sum_n c_n V_n^+\left(\xi^+\right) = \left(\xi^+ - \frac{\xi^{+^2}}{2\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right)\sum_n c_n - \frac{\pi^2 \xi^{+^2}}{4\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\sum_n c_n n^2 + O\left(\frac{1}{2\,\mathrm{Re}}\right)$$

А учитывая выражение (22) и соотношение: $\sum_n c_n = 1$, его можно переписать в виде:

$$V^+\left(\xi^+\right) = \xi^+ - \frac{1}{4}\xi^{+2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right). \tag{23}$$

Недалеко от точки $\xi^+ \sim 1$ (по направлению к центру канала) можно выбрать точку ξ_0^+ и в ее окрестности рассмотреть разложение скорости. В области $\xi^+ > 1$ скорость может зависеть от отношений $\left(\xi^+/\xi_0^+\right)^m$, в которых степень m больше или равна трем, при этом члены, содержащие выражения $\left(\xi^+/\xi_0^+\right)^n$, где n - меньше или равны двум, должны остаться прежними. Поэтому выражение (23) можно представить в виде:

$$V^+\left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+}\right) = \xi_0^+\left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+} - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+}\right)^2\right) + \frac{\xi_0^+}{2}\left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+}\right)^2\left(1 - \frac{\xi_0^+}{2}\right) + O\left(\left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+}\right)^m, \frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right),$$

где $m \geq 3$.

Выражение, стоящее в скобках первого слагаемого в правой части последнего соотношения, является разложением функции логарифма: $\ln\left(1+\xi^+/\xi_0^+\right)$, в окрестности точки $\xi^+ = \xi_0^+$ до квадратичного члена включительно. Поэтому в области $\xi^+ > 1$, в окрестности точки ξ_0^+, последнее выражение можно переписать в виде:

$$V^+\left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+}\right) \approx \xi_0^+ \ln\left(1 + \frac{\xi^+}{\xi_0^+}\right) + \frac{\xi_0^+}{2}\left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+}\right)^2\left(1 - \frac{\xi_0^+}{2}\right) + O\left(\left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+}\right)^m\right), \quad m \geq 3. \quad (24)$$

Если приближаться к точке $\xi^+ = 1$ (границе вязкого подслоя) со стороны центральной части канала (от точки ξ_0^+), то скорость V^+ должна стремиться к значению единица, поэтому из выражения (24) следует соотношение:

$$\xi_0^+ \ln\left(1+\frac{1}{\xi_0^+}\right)+\frac{1}{2\xi_0^+}-\frac{1}{4}+O\left(\left(\frac{1}{\xi_0^+}\right)^m\right)\sim 1, \quad m\geq 3.$$

Нетрудно видеть, что этой зависимости удовлетворяет значение $\xi_0^+ \sim 2$. При таком значении ξ_0^+, множитель, при квадратичном по ξ^+ слагаемом, входящем в уравнение (24), принимает значение, близкое к нулю. Это слагаемое в точности может быть не равно нулю, главное, чтобы оно по абсолютной величине было не больше кубического члена разложения логарифма, умноженного на ξ_0^+. То есть должно выполняться условие: $1/\left(3\xi_0^{+2}\right)\geq\left|1/\left(2\xi_0^+\right)-1/4\right|$. В этом случае, в области $\xi^+>1$, члены разложения логарифма больше квадратичного, умноженные на ξ_0^+, будут превосходить значение квадратичного слагаемого в выражении (24). Такому условию удовлетворяют значения: $2\leq\xi_0^+\leq 1+\sqrt{7/3}\approx 2.53$.

При таких значениях ξ_0^+, выражение (24) можно переписать в виде:

$$V^+\approx\frac{1}{\kappa}\ln\left(1+\kappa\xi^+\right)+O\left(\left(\xi^+\right)^m\right), \quad m\geq 3, \quad 0.4\leq\kappa=1/\xi_0^+\leq 0.5.$$

При приближении к центру канала, при больших значениях переменной ξ^+: $\xi^+\to\sqrt{2\mathrm{Re}}$, единицей стоящей под знаком логарифма можно пренебречь. В этой области канала полученное выражение можно записать в виде:

$$\frac{V}{V_*}\approx\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{\xi V_*}{\nu}\right)+B, \quad \text{где} \quad B=\ln\kappa/\kappa+O\left(\left(\frac{\xi V_*}{\nu}\right)^m\right), \quad m\geq 3. \qquad (25)$$

Поскольку в центре канала производная скорости должна быть нулевой, то при больших значениях переменной ξ: $\xi V_* / \nu \to \sqrt{2\,\mathrm{Re}}$, значение B в выражении (25) должно стремиться к константе: $B = \ln\kappa/\kappa + O\left(\left(\dfrac{\xi V_*}{2\nu}\right)^m\right) \underset{\xi V_*/\nu >> 1}{\to} const$.

Для того чтобы понять, где находятся границы области течения, скорость которого описывается выражением (25), в предположении, что $B \approx const$, вновь перейдем к переменной $\tilde{y} = 1 - \tilde{\xi} = 1 - \xi/b$, и представим функцию F в виде соотношения:

$$F(\tilde{y}) \underset{\mathrm{Re}>>1}{\approx} \tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s})\Big|_{\tilde{s}=0} + \tilde{y}^2 = \frac{2}{\kappa\sqrt{2\,\mathrm{Re}}} \ln(1 - \tilde{y}) + \tilde{y}^2 + \frac{2\ln\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{\kappa\sqrt{2\,\mathrm{Re}}} + \frac{2}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}} B . \qquad (26)$$

Произведем разложение: $F = \sum_n c_n F_n$. Из соотношения (8) при значении константы $a = -\pi^2 n^2$, можно получить уравнение для n-ых компонент функции F:

$$d^2 F_n \big/ d\tilde{y}^2 = -\pi^2 n^2 F_n .$$

Домножая левую и правую части уравнения на коэффициенты c_n, суммируя полученные выражения, запишем

$$\sum_n c_n \frac{d^2 F_n}{d\tilde{y}^2} = -\pi^2 \sum_n c_n n^2 F_n . \qquad (27)$$

Учитывая, свойство линейности, а также соотношение: $\sum_n c_n F_n = F$, левую часть уравнения (27) перепишем в виде: $\sum_n c_n \dfrac{d^2 F_n}{d\tilde{y}^2} = \dfrac{d^2}{d\tilde{y}^2} \sum_n c_n F_n = \dfrac{d^2 F}{d\tilde{y}^2}$. А, учитывая выражение (22), правую часть уравнения (27), запишем в виде:

$-\pi^2\sum_n c_n n^2 F_n = -\pi^2 \sum_n c_n n^2 \dfrac{\sum_n c_n n^2 F_n}{\sum_n c_n n^2} = -\sqrt{2\,\mathrm{Re}}\langle F_n \rangle$. И, предполагая выполнение соотношения: $\langle F_n \rangle = \dfrac{\sum_n c_n n^2 F_n}{\sum_n c_n n^2} \approx F$ (где функция F определяется выражением (26)), перейдем к уравнению:

$$d^2F/d\tilde{y}^2 + \sqrt{2\,\mathrm{Re}}F \approx 0\,.$$

Подставляя в него выражение (26), получим соотношение:

$$-\frac{1}{\kappa\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\frac{1}{(1-\tilde{y})^2} + \frac{1}{\kappa}\ln\left(\sqrt{2\,\mathrm{Re}}(1-\tilde{y})\right) + \frac{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{2}\tilde{y}^2 + B + 1 \approx 0\,.$$

Из него следует, что если B - медленно меняющаяся логарифмическая функция, значение которой стремится к константе в центре канала: $B = -1 - \ln\left(\sqrt{2\,\mathrm{Re}}(1-\tilde{y})\right)/\kappa \underset{\tilde{y}\to 0}{\approx} -1 - \ln\sqrt{2\,\mathrm{Re}}/\kappa$, то в области: $0 \le \tilde{y} \le (2\,\mathrm{Re})^{-n}$, где $n > 1/4$, выражение (25) удовлетворяет уравнению (8) с точностью не хуже, чем

$$O\left((2\,\mathrm{Re})^{-k}\right), \quad \text{где} \quad k = 2n - 1/2 > 0\,. \tag{28}$$

При $\mathrm{Re} \sim 10^4$ и $n \to 1/4$, область течения, скорость которого описывается выражением (25) в пределах погрешности (28), составляет порядка десяти процентов от радиуса канала. Экспериментальное выражение для логарифмического профиля скорости в центральной области трубы кругового сечения имеет вид [5], [35]: $V(y)/V_*\big|_{\mathrm{Re}>>1} \approx 2.5 \cdot \ln(yV_*/\nu) + 5.5$ и составляет порядка пятнадцати процентов от радиуса трубы. Предполагается, что эта зависимость скорости турбулентного течения жидкости от расстояния до стенки является универсальной и должна описывать скорость турбулентного течения в центральной области плоского канала.

Можно заметить хорошее совпадение полученных в данной работе результатов с экспериментальными данными. Линейный вид функции (19), характеризующий скорость турбулентного течения в пристеночной области, хорошо соотносится с экспериментальными данными. В центре плоского канала найдена логарифмическая зависимость скорости турбулентного течения от расстояния до стенки. Аналитически определенное значение постоянной Кармана, ограниченного диапазоном: $0.4 \le \kappa \le 0.5$, также можно считать хорошо совпадающим с экспериментальными данными.

Корректного сравнения значения параметра B, входящего в уравнение (25), полученного аналитически для плоского бесконечного канала и найденного экспериментально, провести довольно трудно, без учета дополнительного вклада решений уравнений (11), (15) и (10), (14) при абсолютных значениях параметра a, сравнимых со значением квадратного корня из числа Рейнольдса или превосходящих его. Эти решения являются источником шума, характеризуемого спектром, близким к сплошному. Механизм влияния этого шума на значение параметра B должен быть близок механизму влиянию на этот параметр шероховатостей на стенках. Учет особенностей этих решений планируется в будущих исследованиях.

Выводы

Разработан метод описания турбулентных стохастических режимов течения, с использованием модифицированных уравнений Навье-Стокса. В таком подходе уравнения Навье-Стокса записываются в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной, характеризующей производство энтропии при возбуждении стохастических возмущений.

Данный подход позволил найти два решения плоской задачи Пуазейля: одно из которых соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному.

Первое решение во всей области течения жидкости характеризуется параболическим профилем скорости; второе характеризуется линейным профилем скорости у стенок и логарифмическим – в центре канала.

Аналитически найдено значение постоянной Кармана.

Сравнение полученных в работе результатов с имеющимися экспериментальными данными показали хорошее соответствие.

Библиографический список

1. Хатунцева О.Н. Об учете влияния стохастических возмущений на решения уравнений Навье-Стокса в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=93311

2. Хатунцева О.Н. О нахождении критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=96567

3. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с «тяжелыми» степенными «хвостами» // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=98854

4. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=102091

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. Т. VI. - 731 с.

6. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. - М.: Физмалит, 2005. - 288 с.

7. Хатунцева О.Н. О природе детерминированного хаоса в математике // Естественные и технические науки. 2017. № 11. С. 255 - 257.

8. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=75565

9. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 70. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=44440

10. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58536

11. Ву М.Х., Попов С.А., Рыжов Ю.А. Проблемы моделирования течения в осевых вентиляторах аэродинамических труб // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29361

12. До С.З. Численное моделирование вихрей в течении Куэтта-Тейлора сжимаемого газа // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=49670

13. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Верификация численной модели взаимодействия прямоугольной пластины с поверхностью воды // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=49676

14.Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Численное моделирование поведения трехслойной прямоугольной пластины при вертикальном ударе о жидкость // Труды МАИ. 2013. № 69. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=43066

15. Махров В.П., Глущенко А.А., Юрьев А.И. Влияние гидродинамических особенностей на поведение свободной поверхности жидкости в высокоскоростном потоке // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=36423

16. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=34840

17. Варюхин А.Н., Овдиенко М.А. Верификация программного комплекса OpenFOAM на задачах моделирования глиссирования морских летательных аппаратов // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: http:// http://trudymai.ru/published.php?ID=102108

18. Маркина Н.Л. Алгоритмы численного решения уравнений Навье-Стокса при наличии кавитации // Труды МАИ. 2011. № 44. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=25052

19. Овдиенко М.А. Разработка расчетной модели глиссирования гидросамолета, оснащенного автоматически управляемыми интерцепторами // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=100571

20. Березко М.Э., Никитченко Ю.А., Тихоновец А.В. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=80922

21. Усачов А.Е., Мазо А.Б., Калинин Е.И., Исаев С.А., Баранов П.А., Семилет Н.А. Повышение эффективности численного моделирования турбулентных отрывных течений с помощью применения гибридных сеток со структурированными разномасштабными блоками и неструктурированными вставками // Труды МАИ. 2018. № 99. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=92088

22. Menter F.R. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows, AIAA Paper, 1993, N93-2906, pp. 21.

23. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-ε Eddy Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows // Computers and Fluids, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227 – 238.

24. Spalart P.R., Allmares S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, AIAA. Paper 92-0439 // 30 Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, 1992. DOI: 10.2514/6.1992-439.

25. Daly B.J., Harlow F.H. Transport Equations in Turbulence // Physics of Fluids, 1970, no. 13, pp. 2634 – 2649.

26. Menter F.R., Langtry R.B., Likki S.R., Suzen Y.B., Huang P.G., and Volker S. Correlation Based Transition Model Using Local Variables. Part 1. Model Formulation, ASME-GT2004-53452, 2004, pp. 413 – 422.

27. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure // Journal of Fluid Mechanics, April 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537 – 566.

28. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation // International Journal of Heat and Fluid Flow, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252 – 263.

29. Launder B.E., Spalding D.B. Lectures in Mathematical Models of Turbulence, London, Academic Press, 1972, 169 p.

30. Wilcox David C. Turbulence Modeling for CFD. Second edition, Anaheim: DCW Industries, 1998, 174 p.

31. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // Physics of Fluids, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 510 – 520.

32. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Физическая кинетика. - М.: Наука, 2002. - 536 с.

33. Хатунцева О.Н. О влиянии учета изменения плотности вероятности случайных величин на динамику стохастического процесса // Физико-химическая кинетика в

газовой динамике. 2012. Т. 13. № 3. URL: www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-11-20-010.pdf.

34. Хатунцева О.Н. Описание динамики марковских процессов в расширенном пространстве переменных // Ученые записки ЦАГИ. 2011. Т. XLII. № 1. С. 62 - 85.

35. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 712 с.