УДК 629.7.01 + 515.12

Л.И. Малинин, Н.Л. Малинина

Топологические свойства процесса проектирования

Исследованы математические свойства процесса проектирования. Вопросы, затронутые в статье, имеют интерес при разработке моделей в целях автоматизации процесса проектирования (или конструирования). Доказывается, что процесс проектирования представляет собой замкнутое, ограниченное и связное метрическое пространство. Доказывается, что процесс проектирования как математический объект представляет собой ориентированный прогрессивно-ограниченный граф. Доказывается, что для обеспечения связности, граф может быть дополнен некоторыми элементами процесса проектирования, и определяется, какими элементами он должен быть дополнен. Доказывается, что отношения порядка на множествах дуг и вершин графа не могут быть независимыми. Определяются топологические инварианты процесса проектирования.

В статью включены вопросы исследования топологических свойств сложного процесса на примере процесса проектирования [1] , [2]. Процесс проектирования рассматривается как множество взаимосвязанных между собой элементов. Поэтому процесс проектирования можно назвать пространством. Далее предполагается показать, что это пространство является метрическим, следовательно, оно является топологическим пространством.

Исследование топологических свойств процесса проектирования имеет своей целью выявление его топологических инвариантов, которые смогут служить критериями подобия процесса проектирования и его модели.

Моделирование имеет место только тогда, когда имеет место подобие. Однако, к сожалению, установление подобия при исследовании таких сложных процессов как проектирование чаще всего ограничивается лишь рассмотрением только критериев физического подобия, поскольку моделирование проводится в основном только для изучения отдельных участков проектирования, не имеющих сложной логической структуры.

С течением времени становится все яснее, что при исследовании сложных процессов не следует ограничивать себя использованием только теорий механического и физического подобия. Необходимо применение математических теорий инвариантов, которые позволяют составлять подобные математические выражения. В свою очередь, это приведет к поиску инвариантов топологических.

Модель проектирования должна формироваться как некоторая математическая структура, которая превращается в модель тогда, когда элементам проектирования придается физическая интерпретация. В этом случае вопрос о подобии сложного процесса и его модели в значительной степени является вопросом подобия их структур или вопросом их топологического подобия.

Итак, исследование сложного процесса в целом или его наиболее ответственных участков, имеющих сложную логическую и пространственно-временную структуру, требует рассмотрения не только физического подобия элементов процесса и элементов модели, но в первую очередь структурного подобия процесса и модели.

Проектирование, как дискретно-непрерывный процесс, можно рассматривать в виде системы $H_0 = Q_0 \oplus V_0$.

Здесь:

$\oplus$ - знак дизъюнктивной суммы, которая включает:

$Q_0 = \{q_{0i}\}$ - множество элементов процесса проектирования,

$V_0 = \{v_{0h}\}$ - множество моментов окончания одних элементов процесса проектирования и начала других (моментов перехода от одних элементов процесса проектирования к другим).

Особенностью проектирования по сравнению с некоторыми другими сложными процессами является разработка и создание новых, ранее не существовавших объектов, процессов или систем [3]. В проектировании творчество человека тесно переплетается с инженерным синтезом, который в настоящее время осуществляется только человеком. Определение процесса проектирования как сложного дискретно-непрерывного процесса ни в коей мере не противоречит творческим аспектам проектирования. Как кусочно-непрерывная функция меняет знак производной в точках излома, так и процесс проектирования имеет разрывы в моменты принятия решений и возникновения новых творческих идей. Человека невозможно заменить в его творчестве вычислительной техникой, как нельзя доверить ей принятие решений, однако можно и необходимо помочь проектировщику при проведении увязки всего многообразия особенностей создаваемого объекта, то есть в синтезе.

π_0 - объект проектирования, если говорить о создании программного продукта. В рассматриваемой системе H_0 он представляет собой средство реализации элементов q_{0i}, но не самостоятельный объект исследования. Можно считать, что $\pi_{0i} = q_{0i}$ и поэтому систему H_0 следует рассматривать именно как $H_0 = Q_0 \oplus V_0$. Это означает, что изучение объекта проектирования может быть заменено изучением элементов проектирования, но не наоборот. В каждый момент проектирования объект проекта включается лишь отдельными своими свойствами, связанными именно с выполнением этого элемента проектирования.

Модель процесса проектирования представим в виде системы:

$H = Q \oplus V$

где:

$Q = \{q_{0i}\}$ - множество элементов модели

$V = \{v_{0i}\}$ - множество моментов начала и окончания реализации элементов модели (моментов перехода от одних элементов модели к другим).

Система H также естественно представляется в виде $H = Q \oplus V$. Более подробно проблема изоморфизма между системами H и H_0 рассмотрена в работе [2]. Там же рассмотрены и вопросы физического подобия.

Перейдем к рассмотрению топологических инвариантов процесса проектирования как сложного дискретно-непрерывного процесса.

Таким образом, процесс проектирования можно рассматривать как множество взаимосвязанных между собой элементов и поэтому его можно считать пространством F [3]. В современной математике пространство определяют как множество каких-либо объектов, которые называются его точками. Рассматривая множество этих точек как пространство, отвлекаются от всяких их свойств и учитывают только те свойства их совокупности, которые определяются принятыми во внимание или введенными по определению соотношениями. Короче говоря, под пространством понимают множество с некоторой дополнительной структурой [4].

Исследование топологических свойств процесса проектирования имеет своей целью выявление его топологических инвариантов, которые могут служить критериями подобия процесса проектирования и его модели.

Топологическим инвариантом называется свойство, принадлежащее каждому топологическому пространству, гомеоморфному данному. Топологическим инвариантом может являться только то свойство, которое определяется в терминах элементов пространства и его топологии.

Функция (или отображение) f состоит из трех объектов:

Множество X - область определения функции,

Множество Y - область значения функции,

f - правило, ставящее каждому $x \in X$ в соответствие $y \in Y$. Обозначение $f: X \to Y$ читается так: «f есть функция, отображающая X в Y». Если y есть в точности множество всех значений f_x для $x \in X$, то будем говорить, что f есть функция, отображающая X на Y [6].

Окрестность. Пусть $X = R^n$, $x \in X$ и r - некоторое положительное число. Тогда окрестностью радиуса r точки x в множестве X называется множество всех точек X, расстояние которых от x меньше r. Такая окрестность обозначается символом $N(x, r, X)$ или, если неизвестно о каком множестве идет речь, короче - $N(x, r)$ [6].

Непрерывность функции. Пусть $f : X \to Y$, где $X = R^m$, $Y = R^n$ и пусть $x \in X$. Мы будем говорить, что f непрерывна в точке x, если для каждой окрестности точки f_x в Y существует такая окрестность точки x в X, образ которой при f содержится в рассматриваемой окрестности точки f_x.

Кусочная функция (кусочное задание функции) [5]. Пусть заданы некоторые функции $f_i : X \to Y$, $i = 1, 2, ... s+1$, и заданы подмножества $P_i \in X$, причем $\bigcap_j P_j = \varnothing$, а $X - \bigcup_j P_j \neq \varnothing$. Допустим далее, что ни для какого значения j не могут быть истинными f_i при двух любых значениях i.

Функция, заданная схемой:

$$f_i = \left\{ \begin{array}{l} f_1 \; \text{истинно} \quad \text{при} \quad P_1 \neq \varnothing \\ f_2 \; \text{истинно} \quad \text{при} \quad P_2 \neq \varnothing \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{s+1} \; \text{истинно} \quad \text{при} \quad X - \bigcup_j P_j \neq \varnothing \end{array} \right\}$$

называется функцией, заданной кусочной схемой или кусочной функцией.

Кусочно-непрерывная функция. Будем называть функцию кусочно-непрерывной, если она задана кусочной схемой и одновременно удовлетворяет условию непрерывности при всех $x \in X$. Можно определить это еще и как равномерную непрерывность, то есть свойство функции быть одинаково непрерывной во всех точках области определения.

Поскольку сложный процесс проектирования рассматривается как состоящий из такой равномерно непрерывной последовательности (или нескольких равномерно непрерывных последовательностей, связанных между собой) взаимно-непересекающихся элементарных процессов q_{0i}, то, очевидно, что сложному дискретно-непрерывному процессу может быть поставлена в соответствие некоторая кусочно-непрерывная функция [5]. Под сложным дискретно-непрерывным процессом можно также понимать реализацию (в натуре или при моделировании) некоторого множества функций $f_i\left(x_1, x_2, x_3, ..., t, \Delta t_j\right)$, заданных кусочной схемой и удовлетворяющих условию непрерывности для всех точек области определения, включая граничные.

Здесь:

$x_1, x_2, ...$ - независимые параметры процесса

Δt_j - интервалы по t реализации функций f_i.

Поэтому можно рассматривать элементы сложного дискретно-непрерывного процесса как элементарные процессы реализации в натуре или при моделировании функций f_i.

Условимся называть $v_{0h} \in V_0$ моментами начала или окончания элементов сложного процесса, если $v_{0h} \in V_0$ определяют время начала или окончания $q_{0i} \in Q_0$, либо моментами перехода от q_{0x} к q_{0y}, если окончание q_{0x} в точности совпадает с началом q_{0y}, и существует отношение $q_{0x} < q_{0y}$. Если момент v_{0h} определяет начало реализации элемента q_{0i}, то будем обозначать его как $v_h^{(+)}(q_{0i})$, если же он соответствует окончанию реализации элемента q_{0i}, то будем обозначать его $v_h^{(-)}(q_{0i})$.

Определения:

Открытый элемент проектирования. Если моменты $v_{0h} \in V_0$ для заданного $q_{0i} \in Q_0$ не определены, то будем называть q_{0i} открытым в Q_0 элементом процесса.

Замкнутый элемент проектирования. Если моменты $v_{0h} \in V_0$ для заданного $q_{0i} \in Q_0$ определены, то будем называть q_{0i} замкнутым в Q_0 элементом процесса.

Всюду плотные и нигде не плотные элементы проектирования. В соответствии с определениями элементов процесса и моментов их начала и окончания интервал (v_{0x}, v_{0y}) между любыми двумя v_{0x} и v_{0y} такими, что $v_{0x} < v_{0y}$, может быть определен как элемент проектирования. Если пара (v_{0x}, v_{0y}) равна какой-нибудь паре $v_h^{(+)}(q_{0i})$; $v_h^{(-)}(q_{0i})$ так, что $v_{0x} = v_h^{(+)}(q_{0i})$ и $v_{0y} = v_h^{(-)}(q_{0i})$, то интервал (v_{0x}, v_{0y}) является всюду плотным элементом процесса, если же пара (v_{0x}, v_{0y}) не равна ни одной паре $v_h^{(+)}(q_{0i})$; $v_h^{(-)}(q_{0i})$, то интервал (v_{0x}, v_{0y}) является нигде не плотным элементом процесса.

Замечание. Определение, принятое для всюду плотных элементов процесса, не исключает того факта, что любой элемент процесса, определенный как всюду не плотный, имеет, тем не менее, определенное внутреннее содержание, возможно даже протекающее в интервале времени (v_{0x}, v_{0y}). Он представляет собой, не рассматриваемый в настоящий момент, возможно еще не известный, элемент процесса проектирования. Принятое определение всюду не плотных элементов процесса является лишь допущением, избавляющим нас от проведения полного анализа процесса, когда в этом нет необходимости или это не представляется возможным.

В предлагаемой статье достаточно рассматривать лишь Q_0 - исходное множество элементов проектирования.

Свойства множеств Q_0, V_0 и $H_0 = Q_0 \oplus V_0$

Теорема 1. Множество $Q_0 = \{q_{0i}\}$ конечно

Доказательство. Поскольку каждый элемент $q_{0i} \in Q_0$ имеет конечное время реализации $(0 < \Delta t_i \le \infty)$, число одновременно выполняемых элементов процесса не превышает конечного числа возможных исполнителей (в процессе проектирования программного продукта это могут быть системы, программы, агрегаты, люди), то общее время протекания всего процесса в целом также конечно. Теорема доказана.

Мощность множества $Q_0 = \{q_{0i}\}$ равна числу n_{0Q} элементов q_{0i}.

Теорема 2. Множество $V_0 = \{v_{0h}\}$ - конечно

Доказательство. Поскольку множество $Q_0 = \{q_{0i}\}$ - конечно, а каждому элементу $q_{0i} \in Q_0$ могут быть поставлены в соответствие в точности два элемента $v_{0h} \in V_0$. Обозначим эти элементы соответственно $v_h^{(+)}(q_{0i})$ и $v_h^{(-)}(q_{0i})$. Имеем $V_0 = \{v_h^{(+)}(q_{0i})\} \bigcup \{v_h^{(-)}(q_{0i})\}$. Очевидно, что $\overline{\{v_h^{(+)}(q_{0i})\} \bigcup \{v_h^{(-)}(q_{0i})\}} = \varnothing$ и, следовательно, V_0 - конечно. Теорема доказана.

Мощность множества V_0 равна числу n_{0V} элементов v_{0h}.

Из доказанных теорем следует, что множество $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ - конечно.

Теорема 3. Множество $V_0 = \{v_{0h}\}$ является метрическим пространством

Доказательство. Так как $v_{0h} \in V_0$ - суть точки на оси времени (числовой оси), то каждой паре (v_{0x}, v_{0y}) можно поставить в соответствие число $\rho(v_{0x}, v_{0y}) > 0$, называемое интервалом (расстоянием) и удовлетворяющее аксиомам метрики:

1. $\rho(v_{0x}, v_{0y}) \ge 0$
2. $\rho(v_{0x}, v_{0x}) = 0$
3. $\rho(v_{0x}, v_{0y}) = 0 \Leftrightarrow x = y$
4. $\left|\rho(v_{0x}, v_{0y})\right| = \left|\rho(v_{0y}, v_{0x})\right|$ (симметрия)
5. $\left|\rho(v_{0x}, v_{0z})\right| \le \left|\rho(v_{0x}, v_{0y})\right| + \left|\rho(v_{0y}, v_{0z})\right|$ (правило треугольника)

Теорема доказана.

Следствие 1. Метрика на множестве Q_0 является следствием метрики на множестве V_0

Следствие 2. Множества $V_0 = \{v_{0h}\}$, $Q_0 = \{q_{0i}\}$ и $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ являются топологическими пространствами [4], [5].

Введение топологии на множестве $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ позволяет рассматривать вопрос о топологических инвариантах системы H_0. Одним из основных топологических свойств пространства является свойство компактности.

Теорема 4. Если $Q_0 = \{q_{0i}\}$ - множество элементов процесса, а $V_0 = \{v_{0h}\}$ - множество моментов их начала и окончания, то множество $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ - компактно

Для доказательства теоремы 4 покажем вначале, что компактны множества Q_0 и V_0. В качестве первой части доказательства используем достижения теоремы 6.1 Н. Стинрода и У. Чинна [7] и введем лемму.

Лемма 4. 1. Любой замкнутый элемент $\Delta v_{0h} \in V_0$ (- компактен

Доказательство леммы приведено в работе [7]. Результат доказательства: элемент Δv_{0k} - компактен.

Для дальнейших рассуждений воспользуемся теоремой 6.4 Стинрода и У. Чинна [7] и снова введем лемму.

Лемма 4.2. Пусть X - компактное пространство, и пусть функция $f : X \to Y$ - непрерывна, тогда образ f_x - компактен [7]

Доказательство леммы приведено в работе [7].

Из леммы 4.1 и леммы 4.2 с очевидностью вытекает, что любой замкнутый элемент сложного процесса $q_{0i} \in Q_0$ - компактен. Следовательно, множество $Q_0 = \{q_{0i}\}$ - компактно.

Перейдем к доказательству второй части теоремы, что множество $V_0 = \{v_{0h}\}$ - компактно.

Составим множество $V_0^* = \left\{v_{q_{0i}}^{(+)}; v_{q_{0i}}^{(-)}\right\}$. Очевидно, что V_0^* - конечно и вполне покрывает множество, то есть V_0^* - конечное покрытие V_0. Следовательно V_0 - компактно.

Так как Q_0 - компактно и V_0 - компактно, то вполне очевидно, что $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ - компактно. Теорема доказана.

Так как топологическое пространство $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ является метрическим и компактным, то оно компактно в себе. В применении к процессу проектирования (а также к любому сложному процессу, протекающему во времени) это означает, что предельные точки процесса принадлежат самому процессу. Свойство компактности эквивалентно свойствам множества быть замкнутым и ограниченным.

Определение: Множество $X \subset R^m$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором, достаточно большом шаре, то есть, если существуют такие точки x_0 и число $r > 0$, что: $X \subset N(x_0, r)$ [7].

Определение: Пусть X - множество в R^m. Подмножество $A \subset X$ называется замкнутым в X, если его дополнение в X является открытым множеством в X. Короче, A замкнуто в X, если $X - A$ открыто в X [7].

Теорема 5. Компактное множество $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ ограничено и замкнуто

В качестве леммы 4.1 была использована первая часть теоремы 6.1 из работы [7]. Полностью теорема гласит: «Каждое компактное подмножество R^m ограничено и замкнуто в R^m. Из этой теоремы следует справедливость теоремы 5. Таким образом, $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ - замкнутое и ограниченное множество. Теорема доказана.

В применении к рассматриваемому сложному процессу свойство ограниченности означает, что никакая последовательность элементов процесса не может устремиться в бесконечность. Замкнутость, в свою очередь, означает, что сложный процесс как множество включает и все свои граничные точки (замыкание множества).

Ограниченность и замкнутость множества $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ являются топологическими инвариантами сложного процесса и позволяют установить некоторые свойства ориентированного графа, с помощью которого может быть представлена модель такого сложного процесса, как процесс проектирования.

Покажем далее, что множество $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ как математический объект представляет собой граф.

Определение. Граф есть пара, состоящая из множества X и отображения $\Gamma : X \to X$, или, что то же самое, пара $G(X, \Gamma)$ - суть граф, в котором X - множество вершин, а $\Gamma : X \to X$ - множество ребер.

Теорема 6. Если множество $Q_0 = \{q_{0i}\}$ - множество элементов сложного процесса, а $V_0 = \{v_{0h}\}$ - множество моментов их начала и окончания, то пара $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ - суть граф

Доказательство. Очевидно, что каждому $q_{0i} \in Q_0$ соответствует пара $(v_{q_{0i}}^{(+)}; v_{q_{0i}}^{(-)})$ и, если $V_0^* = \left\{ v_{q_{0i}}^{(+)}; v_{q_{0i}}^{(-)} \right\}$ - множество всех таких пар, то $\overline{V}_0^* = \overline{\left\{ v_{q_{0i}}^{(+)}; v_{q_{0i}}^{(-)} \right\}} = \varnothing$. Отсюда следует, что $V_0^* \equiv f(Q_0)$ и что существует однозначное отображение $\Gamma_V : V_0 \to V_0$, такое, что все $q_{0i} \in \Gamma_V(v_{0h})$, и существует f - однозначное отображение множества Q_0 на множество V_0 такое, что все $f_{q_{0i}} \in V_0$.

Тогда по определению $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ - суть граф, в котором V_0 - множество вершин, а Q_0 - суть множество ребер. Теорема доказана.

Свойства графа $H_0(V_0, Q_0)$ определяются в частности тем, что множество $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ замкнуто и ограничено.

Определение: Граф называется прогрессивно-ограниченным в вершине v_{0h}, если существует такое целое число m, что длина каждого пути, начинающегося в вершине v_{0h}, не превосходит m; граф прогрессивно-ограниченный в каждой своей точке, прогрессивно ограничен [9].

Это позволяет сказать, что, кроме того, что граф $H_0(V_0, Q_0)$ **-** прогрессивно-ограниченный**,** он является еще и прогрессивно-конечным, хотя обратное утверждение неверно [9]. Все элементы процесса проектирования имеют вполне определенную ориентацию во времени и в пространстве. Отсюда следует, что $H_0(V_0, Q_0)$ - ориентированный граф. Ребра ориентированного графа называются дугами.

Перейдем к рассмотрению вопроса о связности графа.

Определение. Топологическое пространство (X, Y) называется связным тогда и только тогда, когда множество нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств [10].

Реальный процесс проектирования отличается от произвольного набора его элементов, прежде всего, взаимной зависимостью между собой его отдельных элементов и участков. Процесс проектирования невозможно представить себе в виде совершенно независимых участков, несмотря на то, что при изучении процесса проектирования и формировании его модели, никогда нельзя утверждать, что нам известны все связи его элементов между собой. Процесс проектирования всегда состоит из одной и только одной компоненты связности, а это, в свою очередь, означает, что граф $H_0(V_0, Q_0)$ должен быть всегда связным.

Определение. Граф $H_0(V_0, Q_0)$ называется полным, если $(v_{oy}; v_{0x}) \notin Q_0 \Rightarrow (v_{0x}; v_{0y}) \in Q_0$, то есть, если любые две вершины соединены хотя бы в одном направлении [9].

Определение. Граф $H_0(V_0, Q_0)$ называется сильно связным, когда для любых двух вершин v_{ox} и v_{oy} ($v_{ox} \neq v_{oy}$) существует путь, идущий из v_{ox} в v_{oy} (или обратно) [9].

Теорема 7. Граф $H_0^{'}(V_0, Q_0^{'})$, в котором $V_0 = \{v_{0h}\}$ - множество моментов начала и окончания элементов процесса проектирования, а $Q_0^{'}$ - множество всех пар $(v_{0x}; v_{0y})$ таких, что $v_{0x} < v_{0y}$ (в том числе и по транзитивности) – сильно связан

Доказательство. По определению.

Однако процесс проектирования, точнее, его модель, может включать в качестве элементов не все пары $(v_{0x};v_{0y})$ такие, что $v_{0x}<v_{0y}$, а только необходимую их часть, которая обеспечивает связность графа H_0.

Определение. Частичным графом графа $H_0^{'}(V_0,Q_0^{'})=H_0^{'}(V_0,\Gamma)$ называется граф $H_0(V_0,Q_0)=H_0(V_0,\Delta)$**,** где $v_{0h}=\Gamma v_{0h}$ при всех $v_{0h}\in V_0$ [6].

Из теоремы 7 и приведенного выше определения следует, что граф $H_0(V_0,Q_0)$ является частичным графом графа $H_0^{'}(V_0,Q_0^{'})$.

Очевидно, что в рассматриваемом частичном графе $H_0(V_0,Q_0)$ не обязательно все $(v_{0h};v_{0g})\in Q_0$, то есть, вообще говоря, если граф $H_0^{'}(V_0,Q_0^{'})$ - связен, то из этого еще не следует, что связен граф $H_0(V_0,Q_0)$. Однако, имея в виду определение, принятое для всюду плотных и всюду не плотных элементов процесса проектирования, мы можем дополнить множество Q_0 таким числом всюду не плотных элементов $(v_{0x};v_{0y})\in Q_0$, чтобы граф $H_0(V_0,Q_0)$ был всегда связен.

Рассмотрим условия, необходимые для обеспечения связности графа $H_0(V_0,Q_0)$**.**

Максимально возможное число дуг в связном графе без петель определяется теоремой 2.2.4. Оре [12]:

$$N_Q(n_v,1)=\frac{1}{2}(n_v-1)*n$$

где: n_v - число вершин в графе.

Из теоремы 2.2.5 [12] следует, что если в графе с n_v вершинами дуг больше, чем

$N_Q(n_v,2)=\dfrac{1}{2}(n_v-1)*(n_v-2)$, то граф связен.

Таким образом, имеет место:

Теорема 8. Для того чтобы граф $H_0(V_0,Q_0)$, в котором $Q_0=\{q_{0i}\}$ - множество всюду плотных элементов процесса проектирования, а $V_0=\{v_{0h}\}$ - множество моментов их начала и окончания, был связен, достаточно дополнить множество Q_0 - всюду не плотными элементами процесса проектирования так, чтобы соблюдалось условие:

$$N_q(n_v,1)\geq n_{0Q}+\Delta N_Q(v_{0x},v_{0y})\geq N_Q(n_v,2)$$

где:

n_{0Q} - число элементов процесса проектирования (всюду плотных) или мощность множества Q_0;

$\Delta N_Q(v_{0x}, v_{0y})$ - дополнительное число всюду не плотных элементов процесса проектирования;

n_v - число моментов начала и окончания элементов процесса проектирования;

Следствие 8.1. Минимально-необходимое число дополнительных всюду не плотных элементов процесса проектирования, обеспечивающих связность графа $H_0(V_0, Q_0)$ не превышает:

$$N_{Q\min}(v_{0x}; v_{0y}) = \frac{1}{2}(n_v - 1) * (n_v - 2) - n_{0Q}$$

Следствие 8.2. Максимально-возможное дополнение графа $H_0(V_0, Q_0)$ всюду не плотными элементами процесса проектирования определится формулой:

$$N_{Q\max}(v_{0x}; v_{0y}) = \frac{1}{2}(n_v - 1) * n_v - n_{0Q}$$

Следствие 8.3. Условие связности графа $H_0(V_0, Q_0)$**,** определенное теоремой 10, всегда может быть выполнено.

Действительно, $N_{Q\max}(v_{0x}; v_{0y}) - N_{Q\min}(v_{0x}; v_{0y}) = n_v - 1 > 0$

Это позволяет сформулировать следующую теорему:

Теорема 9. Процесс проектирования, как дискретно-непрерывный процесс, рассматриваемый в виде системы $H_0 = Q_0 \oplus V_0$, всегда может быть представлен связным графом $H_0(V_0, Q_0)$

Итак, если процесс проектирования как дискретно-непрерывный процесс, рассматривается в виде множества $H_0 = Q_0 \oplus V_0$, где $Q_0 = \{q_{0i}\}$ - множество элементов процесса проектирования, а $V_0 = \{v_{0h}\}$ **-** множество моментов их начала и окончания, то множество H_0 - конечно, ограничено и замкнуто, и всегда может быть представлено в виде связного прогрессивно-ограниченного, ориентированного графа.

Свойства системы отношений, определенных на множествах Q_0, V_0 и $H_0 = Q_0 \oplus V_0$

На множествах Q_0, V_0 и $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ определены бинарные отношения вида: $z_x \le z_y$. Рассмотрим свойства этих отношений (отношений порядка).

Определение. Отношение типа $a_x \le a_y$ называется частичным упорядочением или отношением включения, если оно обладает следующими свойствами:

1. $a_x \le a_y$ - рефлексивность
2. Если $a_x \le a_y$ и $a_y \le a_y$, то $a_x = a_y$ - антисимметричность
3. Если $a_x \le a_y$ и $a_y \le a_z$, то $a_x \le a_z$ - транзитивность

Определение. Отношение $a_x \le a_y$ называется отношением строго упорядочения или строго включения, если оно удовлетворяет двум условиям:

1. $a_x < a_y$ и $a_y < a_x$ одновременно не имеют место.
2. Транзитивность

Отношение строго упорядочения называют также линейным упорядочением. Линейно упорядоченное множество называется вполне упорядоченным, если любое непустое подмножество в X имеет первый элемент.

Далее будет доказан ряд теорем, которые позволят, с учетом того обстоятельства, что процесс проектирования может быть представлен ориентированным графом $H_0(V_0, Q_0)$, установить следующие свойства множеств Q_0 и V_0 системы $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ и их порядка.

1. Множество V_0 может быть определено в том и только в том случае, если задано множество Q_0 и отношение порядка на множестве Q_0.
2. Способ упорядочения (нумерации элементов) множества V_0 вполне определяется способом упорядочения (нумерации элементов) множества Q_0.
3. Для того чтобы множество V_0 было линейно упорядочено, необходимо и достаточно, чтобы было линейно упорядоченным множество Q_0. Отсюда следует, что, если множество V_0 линейно упорядочено, то и множество Q_0 линейно упорядочено.

Реальный процесс проектирования в действительности всегда, так или иначе, организован, то есть упорядочен. Из этого следует:

Теорема 10. Множество V_0 - линейно упорядочено

Доказательство. Так как все $v_{0h} \in V_0$ для реального дискретно-непрерывного процесса суть точки на оси времени или $V_0 \subset R^1$, то для любой пары определено отношение: $v_{ox} \le v_{oy}$ либо $v_{oy} \le v_{ox}$. Если $v_{ox} \le v_{oy}$ и $v_{oy} \le v_{ox}$, это с очевидностью доказывает, что $v_{ox} = v_{oy}$. Таким образом, для всех $v_{0h} \in V_0$ соблюдаются условия линейного упорядочения. Итак, V_0 - линейно упорядочено. Теорема доказана.

Из сказанного выше и теоремы 10 следует, что множество Q_0 также линейно упорядочено.

Это, в частности, означает, что в ориентированном графе $H_0(V_0, Q_0)$ не должно быть (и не может быть) контуров. В реальном процессе проектирования возможное наличие контуров означает, что может иметь место последовательное выполнение одинаково обозначенных элементов, однако это не означает повторения одних и тех же элементов. Действительно, если во время проектирования некоторые элементы повторяются, то такое повторение, по сути, является выполнением нового элемента, так как при этом неминуемо меняется, по крайней мере, интервал времени реализации и область пространства, в которых производится «повторное» выполнение элемента. Подобное содержание имеют контуры в итерационных вычислительных процессах и в системах с обратной связью, реализующих дискретно-непрерывные процессы. Представление такого «повторения» в виде графа с контурами позволяет существенно сократить размерность графического или матричного представления графа.

Так как множества Q_0 и V_0 - линейно упорядочены, то каждое из них может иметь порядковые типы [13]. Порядковый тип множества Q_0 может быть определен как множество вариантов упорядочения на множестве Q_0 или множество вариантов процесса проектирования.

Введем обозначения:

R_0 - порядковый тип множества Q_0, F_0 - порядковый тип множества V_0.

Способ задания порядковых типов может быть различным. Удобно задавать порядковые типы в матричной форме с помощью матриц смежности или матриц отношения следования.

Рассмотрим вопросы вполне упорядочения множеств Q_0 и V_0.

На основании теоремы Цермело [12] справедливо следующее утверждение: множество $Q_0 = \{q_{0i}\}$ может быть вполне упорядочено. Следовательно, множество Q_0 имеет минимальный элемент, а любое подмножество X_0 множества Q_0 имеет первый элемент. Действительно, процесс проектирования в целом и любой его участок или этап имеют минимальный или первый элемент. Порядковый тип вполне упорядоченного множества называется порядковым числом [13].

Введем обозначение Ω_0 - порядковое число множества Q_0.

Наличие порядкового числа Ω_0 означает, что элементы $q_{0i} \in Q_0$ можно перенумеровать и притом несколькими способами. Действительно, все элементы любого конкретного процесса проектирования можно перенумеровать, притом в нескольких вариантах, в соответствии с реализацией конкретного процесса проектирования.

Теорема 11. Множество $Q_0 = \{q_{0i}\}$ - индуктивно

Доказательство. Действительно, в числе элементов процесса проектирования всегда можно указать два таких элемента q_{0x} и q_{0y}, и выбрать третий q_{0z} так, что будет иметь место условие:

$$q_{0x} \le q_{0z}$$
$$q_{0y} \le q_{0z}$$

Теорема доказана.

Тогда, на основании леммы Цорна [9], [13] или принципа максимальности Хаусдорфа-Куратовского [12], множество Q_0 имеет максимальный элемент, а на основании теоремы Цорна любое непустое подмножество множества Q_0 имеет, по крайней мере, один максимальный элемент. Действительно, для реального процесса проектирования всегда можно указать элемент, определяющий начало проектирования и элементы, определяющие начало и окончание любого участка процесса проектирования.

Так как множество V_0 - линейно упорядочено, то на множестве V_0 определены отношения антисимметрии и транзитивности. Так же, как множество Q_0, множество V_0 может быть вполне упорядочено и, следовательно, множество V_0 имеет минимальный элемент. Любое подмножество Y_0 множества V_0 имеет первый элемент. Множество V_0 имеет порядковое число. Элементы множества V_0 можно перенумеровать и притом несколькими способами, однако способ нумерации элементов множества V_0 определяется способом нумерации элементов множества Q_0.

Обозначим порядковое число множества V_0 через Λ_0.

Теорема 12. Множество $V_0 = \{v_{0h}\}$ - индуктивно

Справедливость теоремы следует из того, что $H_0(V_0, Q_0)$ - граф, а множество $Q_0 = \{q_{0i}\}$ - индуктивно. Так как множество $V_0 = \{v_{0h}\}$ - индуктивно, то оно имеет максимальный элемент, а любое непустое его подмножество имеет, по крайней мере, один минимальный и один максимальный элемент. Действительно, для реального процесса проектирования всегда можно указать момент его окончания, а для любого его участка – моменты начала и окончания этого участка.

Из указанных выше теорем следует, что отношения порядка на множествах Q_0 и V_0, определяемые порядковыми типами R_0 и F_0, не могут быть независимыми, то есть порядковый тип $F_0 \subset V_0 \times V_0$ не может быть задан независимо от множества Q_0 и его порядкового типа $R_0 \subset Q_0 \times Q_0$.

ВЫВОДЫ:

Таким образом, процесс проектирования, как сложный дискретно-непрерывный процесс, и его модель имеют следующие топологические свойства (инварианты):

1. Мощность множеств Q_0 и Q. Обозначим их соответственно n_{0Q} и n_Q.
2. Замкнутость множеств Q_0 и Q. Это свойство не имеет численной характеристики. Однако оно показывает, что все граничные точки принадлежат процессу проектирования. Каждой

граничной точке процесса проектирования взаимно-однозначно соответствует одна из граничных точек графа $H(V,Q)$, представляющего модель процесса проектирования.

3. Ограниченность множеств Q_0 и V_0 накладывает на граф $H(V,Q)$ требование отсутствие контуров.
4. Связность множества $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ требует, чтобы граф $H(V,Q)$ тоже был связным, то есть состоял из одной компоненты.
5. Временная программа процесса проектирования есть не что иное, как вариант порядкового типа F_0 множества V_0. Поскольку F_0 зависит от R_0, то невозможно формирование временной программы независимо от порядкового типа R_0. Таким образом, наличие логической структуры процесса проектирования, определяющей порядковый тип $R_0 \subset Q_0 \times Q_0$, является необходимым условием формирования временной программы процесса проектирования.
6. Так как порядковый тип F_0 вполне определяется порядковым типом R_0 при заданном Q_0, то должно существовать однозначное соответствие f, такое, что $f : R_0 \to F_0$. Следовательно, для формирования временной программы процесса проектирования при известных Q_0 и R_0 могут быть определены и заданы формализованные в полном виде правила (алгоритмы), допускающие автоматизированное применение.
7. Если порядковый тип R_0 не задан, то формирование временной программы процесса проектирования, то есть определение F_0 возможно только при одновременном определении R_0 и, следовательно, не может выполняться по правилам, формализованным в конечном виде, а потребует применения каких-либо итерационных методов.

$H_0 = Q_0 \oplus V_0$ - система процесса проектирования,

Q_0 - множество элементов процесса проектирования,
V_0 - множество моментов окончания одних элементов процесса проектирования и начала других (моментов перехода от одних элементов процесса проектирования к другим),
F - пространство,
q_{0i} - элементарный процесс,
$f_i\left(x_1, x_2, x_3, ..., t, \Delta t_j\right)$ - множество функций, заданных кусочной схемой,
$x_1, x_2, ...$ - независимые параметры процесса
Δt_j - интервалы по t реализации функций f_i
v_{0h} - моменты начала или окончания элементов сложного процесса либо моменты перехода от одних элементов к другим.

$v_h^{(+)}(q_{0i})$ - момент v_{0h} определяет начало реализации элемента q_{0i},

$v_h^{(-)}(q_{0i})$ - - момент v_{0h} соответствует окончанию реализации элемента q_{0i},

n_{0Q} - мощность множества Q_0

n_{0V} - мощность множества V_0

X - множество вершин

$G(X,\Gamma)$ - граф

$\Gamma : X \to X$ - множество ребер

n_v - число вершин в графе

Литература

1. Малинина Н.Л. Процесс проектирования как объект математического исследования, в сб. Анализ и выбор рациональных параметров самолетов, М. МАИ, 1981, с.27-32
2. Малинина Н.Л. Математические аспекты процесса проектирования, - В журнале GGD (Прикладная Geометрия, Инженерная Graфика, Компьютерный Dизайн), №3(5) 2006.
3. Хилл П. Наука и искусство проектирования. Методы проектирования, научное обоснование решений. – М.: Мир, 1973. 263с.
4. Математическая энциклопедия, - М.: Советская Энциклопедия, 1984.
5. http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D1%83%D0%B6%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D0%B0%D1%8F:Search?search=%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE&fulltext=%D0%9D%D0%B0%D0%B9%D1%82%D0%B8
6. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. - М.: Наука, 1965.-391с.
7. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. - М.: Мир, 1967.-223с.
8. http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BD%D0%B5%D0%BF%D1%80%D0%B5%D1%80%D1%8B%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C
9. Берж К. Теория графов и ее применения. - М.: Мир, 1962. -319с.
10. Келли Дж.Л. Общая топология. - М.: Наука, 1968., -383с.
11. Марков А.А. Теория алгоритмов. - М.: Труды математического института АН СССР им. В.А.Стеклова, т.42, 1954. -стр. 3-374.
12. Оре О. Теория графов. - М: Наука, 1968. -352с.
13. Куратовский К. Топология т. 1. - М.: Мир, 1966. -594с.

$\boxed{\text{Малинин Леонид Иванович}}$, 1921-1999гг., заслуженный деятель науки и техники, д.т.н., профессор.

Малинина Наталия Леонидовна – доцент кафедры вычислительной математики и программирования Московского авиационного института (государственного технического университета). К.ф.-м.н, доцент.