

УДК: 629.782

**Оптимальное управление космическим аппаратом при формировании орбиты искусственного спутника Юпитера на участке предварительного аэродинамического торможения**

**Орлов Д.А.\*, Саитова А.Г.\*\***

*Российский университет дружбы народов,  
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия*

*\* e-mail: [hause\\_of\\_god@bk.ru](mailto:hause_of_god@bk.ru)*

*\*\* e-mail: [saitova\\_ag@rudn.university](mailto:saitova_ag@rudn.university)*

**Аннотация**

Исследуется задача оптимального управления движением космического аппарата (КА) при применении предварительного аэродинамического торможения КА в атмосфере и переводе КА на переходную орбиту после его вылета из атмосферы, подаче разгонного импульса характеристической скорости в апоцентре этой орбиты и перевода его на орбиту искусственного спутника Юпитера. В качестве основного критерия оптимальности используется минимизация суммарных потребных энергетических затрат на формирование орбиты.

Разработана методика оптимального управления КА при движении в атмосфере Юпитера, учитывающая специфические особенности динамики полета. При помощи принципа максимума Понтрягина определяются законы управления углом атаки и крена на атмосферном участке движения КА. Учитываются ограничения на максимальные максимально допустимые значения температуры и перегрузки, действующие на КА в процессе движения в атмосфере.

Проведена оценка возможностей и анализ энергетической эффективности применения данного способа выведения КА на орбиту искусственного спутника Юпитера в зависимости от высот условного перицентра. Показано, что для всего рассматриваемого диапазона исходных данных указанный комбинированный способ выведения приводит к энергетическому выигрышу. Энергетические затраты более чем в 2-5 раз меньше по сравнению с ракетодинамическим способом выведения на орбиты с высотами апоцентра меньше 60000 км для КА располагающих аэродинамическим качеством 0,6.

Полученные результаты имеют практическую значимость и могут быть использованы при исследовании планет и их спутников для дальнего космоса в баллистических центрах и научных центрах.

**Ключевые слова:** космический аппарат, искусственный спутник Юпитера, оптимальное управление, энергозатраты, формирование спутниковых орбит.

## **Введение**

Наряду с использованием спускаемых аппаратов, получающих информацию о характеристиках планет в процессе зондирования их атмосфер, важным направлением исследования пространства около планеты является применение КА, функционирующих на орбитах искусственного спутника изучаемых планет. С помощью таких аппаратов могут быть успешно решены задачи изучения динамики изменения параметров атмосферы, магнитосферы, гравитационного поля в

зависимости от времени и широтно-долготных областей поверхности планет. Учитывая длительное время функционирования таких КА на спутниковых орбитах, представляется возможным получение уникальных научных данных о характеристиках радиационных полей, о влиянии солнечного ветра на динамику полета КА и другой ценной информации. Следует особо отметить важность использования орбитальных КА для изучения планет юпитерианской группы, характеристики которых к настоящему времени изучены недостаточно полно.

Необходимость обеспечения высокого уровня надежности выведения КА на спутниковые орбиты на первый план выдвигает проблему создания высокоэффективных методов и алгоритмов управления. Принципиальное их отличие от аналогичных разработок при решении задач спуска КА в атмосфере заключается в необходимости учета специфики совместного управления КА аэродинамическим качеством и тягой двигательной установки. При этом технологии решения задач оптимального управления будут существенно зависеть от способов формирования спутниковых орбит.

Известны различные способы выведения КА на орбиты искусственного спутника исследуемых планет. Наиболее простым в реализации и неоднократно апробированным на практике является способ, предусматривающий перевод космического аппарата с гиперболической подлетной траектории к планете на ее спутниковую орбиту за счет гашения кинетической энергии КА путем проведения ракетодинамических маневров [1,2]. Основным недостатком такого способа является чрезмерно большое потребление топлива, что приводит к нерациональному

массово-габаритному балансу проектируемых КА и к существенным ограничениям возможностей использования на борту орбитального аппарата целевой аппаратуры. Существенный энергетический выигрыш может быть получен при использовании комбинированных способов формирования спутниковых орбит, предусматривающих проведение ракетодинамических маневров в сочетании с аэродинамическим торможением КА в атмосфере [3,4]. В настоящей статье рассматривается способ выведения КА на орбиту искусственного спутника Юпитера (ИСЮ), заключающийся в предварительном аэродинамическом торможении аппарата в плотных слоях атмосферы, переводе КА на переходную орбиту после его вылета из атмосферы, подаче разгонного импульса характеристической скорости в апоцентре этой орбиты  $\Delta V_\alpha$ . Такой способ, как показано ниже, позволяет получить дополнительный существенный выигрыш в энергозатратах.

Для оценки потребных энергетических затрат при реализации данного способа выведения, а также для нахождения областей рационального применения этого способа, исследуется задача оптимального управления КА. Результаты решения этой задачи могут быть положены в основу проектирования рациональных баллистических схем и алгоритмов управления КА.

Следует отметить принципиальное отличие постановок вариационных задач выведения КА на спутниковые орбиты от задач спуска аппаратов в атмосферах планет. Оно заключается в наличии двух ярко выраженных участков формирования орбит – атмосферном, где осуществляется управление эффективным аэродинамическим качеством, и внеатмосферном, где проводятся коррекции

движения КА вектором тяги двигательной установки. При этом процесс управления аэродинамическим качеством завершается задолго до конца выведения аппарата на заданную орбиту. Это не позволяет решать вариационные задачи такого класса с использованием формализма классических методов оптимизации и требует поиска путей преобразования исходных математических моделей. В работе предлагается подход, основанный на условном выделении двух характерных участков полета, составлении соотношений связи между характерными параметрами этих участков.

В рассмотренном способе управления, состоящем в предварительном аэродинамическом торможении КА в атмосфере и его разгоне в апоцентре переходной орбиты, учитываются дополнительные соотношения, связывающие значения скорости полета аппарата  $V$  и угла наклона вектора скорости к местному горизонту  $\theta$  в конце атмосферного участка, при которых обеспечивается достижение требуемой высоты апоцентра переходной орбиты. Это позволяет в качестве критерия оптимальности использовать максимум скорости вылета из атмосферы с учетом выполнения отмеченного условия связи.

### **Постановка задачи**

Движение КА на участке аэродинамического торможения обычно описывается системой дифференциальных уравнений в скоростной системе координат с учетом влияния гравитационных, аэродинамических, центробежных и кориолисовых сил в предположении центральности поля тяготения [5, 8, 9, 20]:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\rho V^2 C_x(\alpha) S}{2m} - g \sin \theta - \omega^2 r \cos \varphi (\sin \varphi \sin \varepsilon \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta),$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\rho V C_y(\alpha) S}{2m} \cos \gamma - \frac{g}{V} \cos \theta + \frac{V}{r} \cos \theta + 2\omega \cos \varphi \cos \varepsilon + \\
&\quad + \frac{\omega^2 r}{V} \cos \varphi (\sin \varphi \sin \varepsilon \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta), \\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\rho V C_y(\alpha) S}{2m} \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} - \frac{V}{r} \cos \theta \cos \varepsilon \operatorname{tg} \varphi - \frac{2\omega}{\cos \theta} (\cos \theta \sin \varphi - \\
&\quad - \sin \varepsilon \sin \theta \cos \varphi) - \frac{\omega^2 r}{V} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\cos \varepsilon}{\cos \theta}, \\
\frac{dh}{dt} &= V \sin \theta, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{V \cos \theta \cos \varepsilon}{r \cos \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V}{r} \cos \theta \sin \varepsilon, \\
r &= R + h, \quad g = \frac{\mu}{r^2}, \quad K_6 = \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}, \quad P_x = \frac{m}{C_x(\alpha) S}.
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $V$  – скорость КА,  $\theta$  – угол наклона вектора скорости к местному горизонту,  $\varepsilon$  – угол между проекцией вектора скорости на местный горизонт и местной параллелью,  $h$  – высота полета КА над поверхностью планеты,  $\lambda$  и  $\varphi$  – планетоцентрические долгота и широта,  $t$  – время полета,  $m$  – масса КА,  $r$  – радиус-вектор, соединяющий центр притяжения планеты и центр масс КА,  $R$  – радиус планеты,  $\rho$  – плотность атмосферы,  $\mu$  – произведение постоянной притяжения на массу планеты,  $P_x$  – приведенная нагрузка на лобовую поверхность КА,  $K_6$  – аэродинамическое качество,  $C_x$  и  $C_y$  – аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы,  $\gamma$  – угол крена,  $\alpha$  – угол атаки,  $\omega$  – угловая скорость вращения планеты,  $S$  – площадь миделева сечения.

Температура КА в критической точке рассчитывается по приближенной методике [8, 10, 11, 19]:

$$T = \sqrt[4]{\frac{q_{\text{конв}} + q_{\text{рад}}}{\sigma \varepsilon}}, \quad (2)$$

$$q_{\text{конв}} = \frac{A_{\text{к}}}{\sqrt{R_{\text{к}}}} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \left(\frac{V}{V_1}\right)^m, \quad q_{\text{рад}} = A_{\text{р}} \rho^{0,7} V^{3,28} R_{\text{к}},$$

где  $q_{\text{конв}}$  – конвективный тепловой поток,  $q_{\text{рад}}$  – радиационный тепловой поток,  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана ( $\sigma = 5.6696 \cdot 10^{-12} \text{Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{град}^{-4}$ ),  $\varepsilon$  – коэффициент, характеризующий излучательную способность материала теплозащитного покрытия (принимается равным 0.85),  $R_{\text{к}}$  – радиус кривизны поверхности КА в соответствующей критической точке,  $V_1$  – значение первой космической скорости на поверхности планеты,  $A_{\text{к}}$ ,  $A_{\text{р}}$ ,  $n$ ,  $m$  – постоянные, характеризующие тепловое воздействие в пограничном слое и кинетические свойства газа [8, 19]:  $A_{\text{к}} = (38 - 45) \times 10^{10} \text{Дж/м}^{\frac{3}{2}}\text{с}$ ,  $A_{\text{р}} = 7.5 \times 10^{11} \text{Вт/м}^2$ ,  $n = 0,5$ ,  $m = 3$ . Значения  $R_{\text{к}}$  зависят от конфигурации, геометрических характеристик и углов атаки  $\alpha$ . При расчетах для сегментно-конических форм КА номинальное значение  $R_{\text{к}}$  на углах атаки  $\alpha < 30^\circ$  принималось равным 4.3 м [8, 19].

Полученные результаты вычислений температуры следует рассматривать как начальное приближение, которое в дальнейшем целесообразно уточнять с использованием специальных вычислительных процедур, учитывающих полнообъемные термодинамические процессы.

Рассмотрим двухпараметрическое управление – управление углом атаки  $\alpha$  и углом крена  $\gamma$ . Значения управляющих параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  могут изменяться в пределах:

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}, \quad -\pi \leq \gamma \leq \pi. \quad (3)$$

Будем полагать, что ограничения на максимально допустимые значения температуры  $T_{max}$  и перегрузки  $n_{max}$ , в процессе спуска ограничены соответствующими заданными величинами  $T_{доп}$  и  $n_{доп}$ :

$$T_{max} \leq T_{доп}, \quad n_{max} \leq n_{доп}. \quad (4)$$

При предварительном торможении в атмосфере основной критерий оптимальности определяется в момент завершения формирования орбиты (после подачи разгонного импульса характеристической скорости в апоцентре орбиты  $\Delta V_\alpha$  с заданным радиус-вектором  $r_\alpha$ ). Очевидно, что задача минимизации энергетических затрат  $\Delta V_\alpha$  эквивалентна задаче максимизации скорости КА в апоцентре переходной орбиты  $V_\alpha$ . При этом, скорость в переходной орбите определяется по формуле:

$$V_\alpha = \sqrt{V_{ки}^2 - \frac{2\mu(r_{\alphaзад} - r_k)}{r_{\alphaзад}r_k}}, \quad (5)$$

Условием достижения максимума  $V_\alpha$  будет являться обеспечение максимальной скорости КА при его вылете из атмосферы  $V_k = max$  в сочетании с возможностью выведения аппарата на переходную орбиту с заданным радиусом апоцентра  $r_{\alphaзад}$ .

Условием выведения КА на переходную орбиту с заданным радиусом апоцентра  $r_{\alphaзад}$  является выполнение соотношения, связывающего переменную  $r_{\alphaзад}$  со значениями скорости  $V_{ки}$ , траекторного угла  $\theta_{ки}$  и радиус-вектора  $r_k = r_{ки}$  в инерциальной системе координат в момент вылета аппарата из атмосферы:



$$V_{ки} = \sqrt{\frac{2\mu r_{\alphaзад}(r_{\alphaзад} - r_k)}{r_k(r_{\alphaзад}^2 - r_k^2 \cos^2 \theta_{ки})}} \quad (6)$$

Конечные значения  $V_{ки}$ ,  $\theta_{ки}$  и  $\varepsilon_{ки}$  определяются в зависимости от конечных величин скорости  $V_k$ , траекторного  $\theta_k$  и курсового  $\varepsilon_k$  углов в скоростной системе координат по известным формулам [5,6, 7, 12]:

$$V_{ки} = \sqrt{V_k^2 + V_{вр}^2 + 2V_k V_{вр} \cos \theta_k \cos \varepsilon_k}, \quad \theta_{ки} = \arcsin\left(\sin \theta_k \frac{V_k}{V_{ки}}\right), \quad (7)$$

$$\varepsilon_{ки} = \arcsin\left(\sin \varepsilon_k \frac{V_k \cos \theta_k}{V_{ки} \cos \theta_{ки}}\right), \quad V_{вр} = \omega r_k \cos \varphi_k,$$

где  $V_{вр}$  – скорость вращения планеты.

В качестве конечной точки оптимизируемой траектории будем рассматривать точку вылета КА из атмосферы с известным значением радиус-вектора КА.

$$r_k = R + h_{атм}, \quad (8)$$

где  $R$  – средний радиус планеты,  $h_{атм}$  – высота условной границы атмосферы.

Будем считать, что начальная точка траектории  $t = t_0$  соответствует моменту входа КА в атмосферу. При этом все значения начальных параметров КА известны:

$$V(t_0) = V_0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0, \quad h(t_0) = h_0, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad (8)$$

В качестве основного критерия оптимальности управления КА используется минимум суммарных потребных энергетических затрат на формирование орбит.

$$J = \Delta V \rightarrow \min \quad (10)$$

Сформулируем задачу оптимального управления в традиционном классическом виде для процессов, описываемых системой дифференциальных уравнений (1): требуется определить программу управления углами  $\alpha(t)$  и  $\gamma(t)$ ,

обеспечивающую экстремум функционала (10) при ограничениях (3),(4) и краевых условиях (6), (8), (9).

### Методический подход к оптимизации управления КА

Задача сводится к решению следующей двухточечной пятипараметрической краевой задачи: в начальной точке траектории неизвестными являются значения сопряженных переменных  $\Psi_{0i}$ , а в конечной точке – максимизируемая скорость вылета КА из атмосферы  $V_{kmax}$ , курсовой угол  $\varepsilon_k$ , долгота  $\lambda_k$ , широта  $\varphi_k$  и одна из сопряженных переменных  $\Psi_{2k}$  или  $\Psi_{4k}$ .

Для исследования оптимального управления КА на участке аэродинамического торможения предлагается излагаемый уже методический подход на основе использованных традиционных допущений [8, 14, 15, 16, 17, 18]:

$$h \ll R, \quad \rho = \rho_0 \exp(-\beta h), \quad F_k + F_{\text{ц}} \ll F_{\text{гр}} \ll F_A, \quad (11)$$

где  $F_k, F_{\text{ц}}, F_{\text{гр}}, F_A$  - кориолисова, центробежная, гравитационная и аэродинамическая силы соответственно,  $\rho_0$  – плотность атмосферы на поверхности планеты,  $\beta$  – логарифмический коэффициент изменения плотности атмосферы от высоты.

С учетом этого система (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{\rho V^2 C_x S}{2m}, & \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\rho V C_y S}{2m} \cos \gamma - \rho V M_1, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\rho V C_y S \sin \gamma}{2m \cos \theta} - \rho V M_2, & \frac{dh}{dt} &= V \sin \theta, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{V \cos \theta \cos \varepsilon}{R \cos \varphi}, & \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{V}{R} \cos \theta \sin \varepsilon, \end{aligned} \quad (12)$$

$$M_1 = \left( \frac{gR}{V^2} - 1 \right) \frac{\cos \theta}{\rho R}, \quad M_2 = \frac{\cos \theta \cos \varepsilon \operatorname{tg} \varphi}{\rho R}.$$

Следуя [19], будем считать  $M_1$  и  $M_2$  кусочно-постоянными функциями.

Заменяем переменные:

$$dt = -dV \frac{2m}{\rho V^2 C_x S}, \quad z = -\ln \frac{V}{V_0}.$$

Это позволяет упростить анализ уравнений движения КА и сопряженных переменных и определить законы оптимального управления углами атаки и крена.

В результате получим систему, не содержащую в явном виде аргумент  $z$ :

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{C_y}{C_x} \cos \gamma - \frac{2mM_1}{C_x S}, \quad \frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{C_y \sin \gamma}{C_x \cos \theta} - \frac{2mM_2}{C_x S}, \quad (13)$$

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{2m\beta \sin \theta}{C_x S}, \quad \frac{d\lambda}{dz} = \frac{2m \cos \theta \cos \varepsilon}{\rho R C_x S \cos \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{2m \cos \theta \sin \varepsilon}{\rho R C_x S}.$$

Для определения оптимальных законов управления параметрами  $\alpha$  и  $\gamma$  также воспользуемся принципом максимума Понтрягина. При  $z_0 \geq z \geq z_k$  гамильтониан и система уравнений сопряженных переменных при движении КА внутри допустимой области фазовых координат запишутся следующим образом:

$$H = \Psi_0 + \frac{C_y}{C_x} \cos \gamma \Psi_1 - \frac{2mM_1}{C_x S} \Psi_1 + \frac{C_y \sin \gamma}{C_x \cos \theta} \Psi_2 - \frac{2mM_2}{C_x S} \Psi_2 - \quad (14)$$

$$- \frac{2m\beta \sin \theta}{C_x S} \Psi_3 + \frac{2m \cos \theta \cos \varepsilon}{\rho R C_x S \cos \varphi} \Psi_4 + \frac{2m \cos \theta \sin \varepsilon}{\rho R C_x S} \Psi_5.$$

$$\frac{d\Psi_1}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{C_y \sin \gamma \sin \theta}{C_x \cos^2 \theta} \Psi_2 + \frac{2m\beta \cos \theta}{C_x S} \Psi_3 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2m \sin \theta \cos \varepsilon}{\rho R C_x S \cos \varphi} \Psi_4 + \frac{2m \sin \theta \sin \varepsilon}{\rho R C_x S} \Psi_5, \\
\frac{d\Psi_2}{dz} &= -\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = \frac{2m \cos \theta \sin \varepsilon}{\rho R C_x S \cos \varphi} \Psi_4 - \frac{2m \cos \theta \cos \varepsilon}{\rho R C_x S} \Psi_5, \\
\frac{d\Psi_3}{dz} &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{2m \cos \theta \cos \varepsilon}{\rho^2 R C_x S \cos \varphi} \Psi_4 + \frac{2m \cos \theta \sin \varepsilon}{\rho^2 R C_x S} \Psi_5, \\
\frac{d\Psi_4}{dz} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{d\Psi_5}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{2m \cos \theta \cos \varepsilon \sin \varphi}{\rho R C_x S \cos^2 \varphi} \Psi_4.
\end{aligned} \tag{15}$$

Сопряженные переменные при анализе оптимальных траекторий, проходящих по границам области фазовых координат  $\Psi_i^*(z)$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), а также законы управления при полете КА по изоучасткам определяются в зависимости от вида заданных ограничений и будут рассмотрены при исследовании конкретных вариационных задач.

При использовании в качестве аргумента параметра  $z$ , согласно [14], в систему (13) вводится дополнительное дифференциальное уравнение  $dz/dz = 1$ . В связи с тем, что правые части этой системы не содержат в явном виде аргумент  $z$ , соответствующее уравнение для сопряженной переменной  $\Psi_0$  определяется формулой  $d\Psi_0/dz = 0$ .

Законы изменения  $\alpha$  и  $\gamma$  при оптимальном управлении определяются в результате решения уравнений  $\partial H/\partial \alpha = 0$ ,  $\partial H/\partial \gamma = 0$  и их можно записать в виде

$$\frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \cos \gamma \Psi_1 + \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} \Psi_2 + \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Psi_0 = 0, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Psi_2}{\Psi_1 \cos \theta}, \tag{16}$$

Граничные условия для сопряженных переменных  $\Psi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 5$ ) при  $z = z_0$  и  $z = z_k$  получим из условия трансверсальности

$$I - H\delta z + \Psi_0\delta z + \Psi_1\delta\theta + \Psi_2\delta\varepsilon + \Psi_3\delta\rho + \Psi_4\delta\lambda + \Psi_5\delta\varphi = 0. \quad (17)$$

Таким образом, для определения оптимальных законов изменения управляющих параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  необходимо решить уравнения (16) с учетом дифференциальных связей (13)-(15) и краевых условий (17).

В рамках предложенного метода применительно к исследуемым задачам оптимального управления КА в атмосфере можно записать общие формулы для определения сопряженных переменных  $\Psi_0$  и  $\Psi_4$ :

$$\Psi_0 = a_0, \quad \Psi_4 = a_4. \quad (18)$$

Поскольку гамильтониан  $H$  в явном виде не зависит от аргумента  $z$ ,  $H = a$ , что позволяет записать дополнительное уравнение связи между неизвестными параметрами движения КА и сопряженными переменными:

$$\frac{d\theta}{dz}\Psi_1 + \frac{d\varepsilon}{dz}\Psi_2 + \frac{d\rho}{dz}\Psi_3 + \frac{d\varphi}{dz}\Psi_5 = a - a_0 - \frac{d\lambda}{dz}a_4. \quad (19)$$

Полученные соотношения (14), (16)-(19), характеризующие условия оптимальности для преобразованных систем дифференциальных уравнений (13), (15) позволяют определить неизвестные сопряженные переменные в конечной точке траектории.

Как видно из (6), обеспечение максимума скорости вылета КА из атмосферы ( $V_k \rightarrow \max$ ), равносильно минимизации переменной  $z_k \rightarrow \min$ . Из условия трансверсальности (17) для конечной точки траектории получим равенство:

$$\Psi_{0k} = -1.$$

Поскольку  $\frac{d\Psi_0}{dz} = 0$ , то сопряженная переменная  $\Psi_0$  будет постоянна на всем участке полета КА в атмосфере:

$$\Psi_0 \equiv -1.$$

С учетом этого условия константа  $a_3$ , знаком которой определяется знак производной сопряженной переменной  $d\Psi_1/dz$ , связана с параметрами движения КА в конечной точке траектории следующим соотношением

$$a_3 = \frac{dz}{d\rho} - \frac{d\theta}{d\rho} \Psi_1.$$

Анализ динамики полета КА на участке вылета его из атмосферы показывает, что наиболее интенсивно на этом участке изменяется зависящая от высоты движения аппарата плотность атмосферы ( $d\rho$ ). Более слабо меняется приращение  $dz$ , а изменение траекторного угла  $d\theta$  близко к нулю. Это позволяет пренебречь вторым слагаемым последнего уравнения.

Поскольку в конечной точке участка аэродинамического торможения КА  $d\rho < 0$ , а  $dz > 0$  можно сделать вывод о том, что константа  $a_3$  является отрицательной, а производная  $d\Psi_1/dz$  является монотонно убывающей, обращающейся в ноль не более одного раза в процессе полета аппарата в атмосфере. Следовательно, согласно уравнению (21) угол крена  $\gamma$  при оптимальном управлении КА может переключаться не более одного раза с  $\gamma = 0$  на  $\gamma = \pi$ , где моменты переключения будут зависеть от высоты условного перицентра траектории входа КА в атмосферу. В предельных случаях угол  $\gamma$  может принимать постоянные значения на всей траектории полета, равные  $\gamma = 0$  или  $\gamma = \pi$ . Такие режимы

полета КА, очевидно, будут соответствовать движению по нижней и верхней границам коридора входа в атмосферу, соответственно.

Определим закон оптимального управления КА углом атаки  $\alpha$ . Используя уравнение (16) с учетом условий  $\Psi_0 \equiv -1$  и  $\Psi_2 \equiv 0$  получим:

$$\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} / \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} = \cos \gamma \Psi_1.$$

Для зависимостей аэродинамических коэффициентов  $C_x$  и  $C_y$  от угла атаки  $\alpha$  закон оптимального управления имеет вид:

$$\alpha = \frac{1}{2l} \operatorname{arctg} \left( \frac{B \cos \gamma \Psi_1}{A} \right) + \frac{n}{l}. \quad (20)$$

Анализ этого уравнения показывает, что в отличие от оптимального управления КА при спуске в атмосферах планет, функция  $\alpha(z)$  имеет ярко выраженный локальный минимум  $\alpha_{min} = \frac{n}{l}$ , который достигается в момент переключения угла крена  $\gamma$  с нулевого значения на  $\gamma = \pi$ . При этом наибольшие значения угла атаки  $\alpha$  лежат в области, соответствующей максимальным значениям аэродинамического качества, и реализуются на начальном и конечном участках полета КА в атмосфере.

При нулевом значении переменной  $\Psi_2$  (16) оптимальный закон управления углом  $\gamma$ , обеспечивающий максимум гамильтониана  $H$ , имеет вид :

$$\cos \gamma = \operatorname{sign} \Psi_1, \quad (21)$$

т. е. либо  $\gamma = 0$  при  $\Psi_1 \geq 0$ , либо  $\gamma = \pi$  при  $\Psi_1 < 0$ .

Таким образом, с помощью соотношений (21), (20) определены законы двухпараметрического оптимального управления углами крена и атаки при

обеспечении максимума скорости вылета КА из атмосферы на участке предварительного аэродинамического торможения в процессе выведения аппарата на орбиту искусственного спутника планет назначения.

### **Анализ численных результатов**

Предполагается, что управление КА осуществляется за счет изменения угла крена в пределах от 0 до 180°. Численное решение задач проводилось при варьировании начальных условий входа в атмосферу и основных проектно-баллистических параметров КА в следующих пределах:

$$\begin{aligned}45 \text{ км/с} &\leq V_0 \leq 70 \text{ км/с}, \\100 \text{ кг/м}^2 &\leq P_x \leq 500 \text{ кг/м}^2, \\0,3 &\leq K_6 \leq 0,7.\end{aligned}\tag{22}$$

Неточность знания параметров атмосферы Юпитера обычно компенсируется использованием трех моделей изменения характеристик атмосферы от высоты: номинальной, «холодной», «теплой» [19]. Различия в значениях плотностей атмосферы для указанных моделей могут достигать существенных величин. В связи с этим, при проведении расчетов траекторий использовался принцип гарантированного обеспечения целевых критериев оптимальности и ограничений, т.е. при определении или обосновании того или иного функционала управления рассматривались наихудшие условия его выполнения с точки зрения использования различных моделей атмосферы. Рассматривались круговые орбиты с высотами  $H \leq 60$  тыс. км.



На рис. 1 и 2 приведены зависимости скорости  $V$ , высоты полета  $h$ , угла крена от времени  $t$  при оптимальном управлении из условия  $V_{kmax}$ .

Из рассмотрения представленных зависимостей видно, что угол крена меняет свою величину от 0 до  $\pi$  через  $\sim 240$  секунд. В этот момент сопряженная переменная  $\Psi_2$  меняет свой знак с положительного на отрицательный. В процессе движения КА в атмосфере его скорость снижается от 60 км/с до 43 км/с, а минимальная высота полета - достигает 170 км. Сопряженные переменные  $\Psi_1$  и  $\Psi_4$  монотонно возрастают в процессе движения КА в атмосфере.

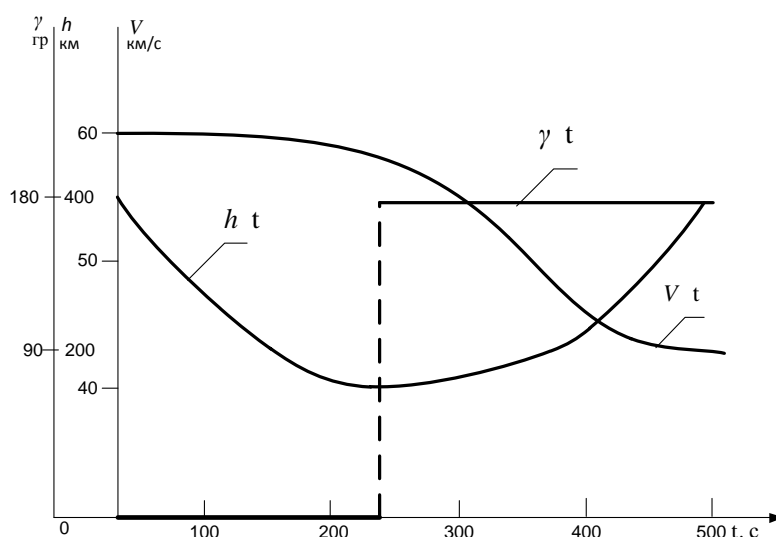


Рис. 1. Зависимости скорости  $V$ , высоты полета  $h$ , угла крена  $\gamma$  от времени полета  $t$  при оптимальном управлении КА ( $K_G = 0,34$ ;  $h_{\pi} = 500$  км,  $P_x = 200$  кг/м<sup>2</sup>,  $H = 5000$  км)

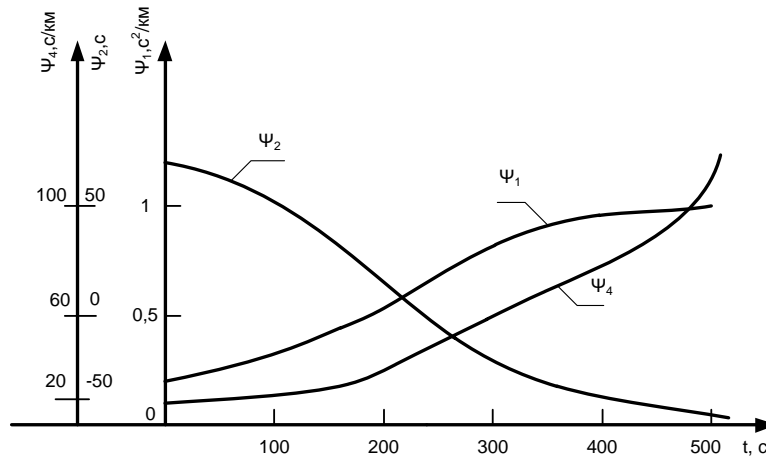


Рис. 2. Зависимости сопряженных переменных от времени полета  $t$  при оптимальном управлении КА ( $K_6 = 0,34$ ;  $h_{\pi} = -500$  км,  $P_x = 200$  кг/м<sup>2</sup>,  $H = 5000$  км)  
 Проведем анализ потребных энергетических затрат на формирование орбит

ИСЮ  $\Delta V$  в зависимости от высот условного перицентра  $h_{\pi}$ , лежащих внутри физически реализуемого коридора входа  $\Delta h_{\pi} = h_{\pi}^B - h_{\pi}^H$ . На рис. 3 приведены зависимости, позволяющие оценить энергозатраты  $\Delta V$  для высот перицентра  $h_{\pi}$  при формировании круговых орбит ИСЮ с различными высотами  $H$ .

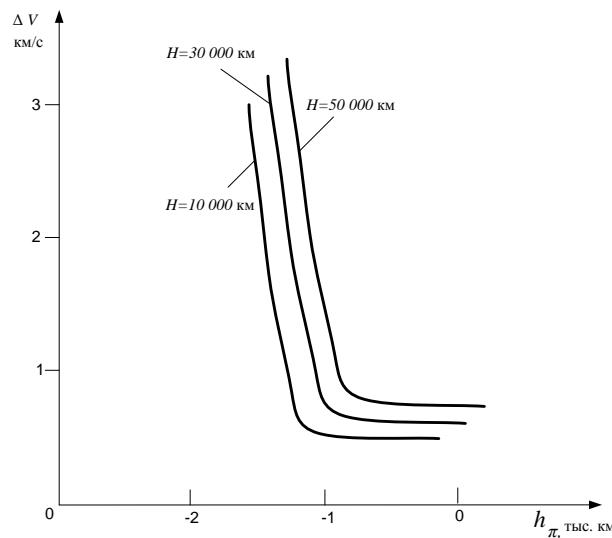


Рис. 3. Зависимости потребных энергетических затрат  $\Delta V$  от высоты условного перицентра траектории входа  $h_{\pi}$  ( $V_0 = 60$  км/с,  $P_x = 300$  кг/м<sup>2</sup>,  $K_6 = 0,6$ ), данные приведены с учетом возможного разброса параметров атмосферы

Из рассмотрения представленных результатов видно, что существует достаточно значительный диапазон изменения высот  $h_{\pi}$  вблизи верхней границы коридора входа, где потребные энергозатраты практически не меняются. Этот диапазон составляет  $\sim 70\%$  от ширины физически реализуемого коридора входа. Так, при выведении КА на орбиту высотой  $H = 10\,000$  км изменение  $h_{\pi}$  от  $h_{\pi}^B = -100$  км до  $h_{\pi} = -1100$  км величина  $\Delta V$  составляет  $\sim 300$  м/с, дальнейшее изменение  $h_{\pi}$  до  $h_{\pi}^H = -1600$  км приводит к значительному увеличению энергозатрат до  $\sim 3$  км/с, т.е.  $\sim$  в 4 раза. Аналогичный характер изменения зависимости  $\Delta V(h_{\pi})$  имеет место и при формировании более высоких орбит ИСЮ. При этом потребные энергозатраты возрастают с увеличением высот  $H$ . Так, для высоты  $H = 30\,000$  км минимальные значения  $\Delta V_{min}$  составляют  $\sim 650$  м/с, а  $\Delta V_{max} \sim 3,2$  км/с. Для высоты  $H = 50\,000$  км значения  $\Delta V_{min}$  и  $\Delta V_{max}$  соответственно составляют  $\sim 800$  м/с и  $\sim 3,6$  км/с. Следует отметить, что с ростом высот формируемых орбит  $H$  обе границы коридора входа  $h_{\pi}^B$  и  $h_{\pi}^H$  увеличиваются. Так, рост высот  $H$  от  $10\,000$  км до  $50\,000$  км приводит к изменению высоты  $h_{\pi}^B$  от  $-100$  км до  $150$  км, а высоты  $h_{\pi}^H$  – от  $-1600$  км до  $-1050$  км.

Анализ представленных данных показывает, что энергетически рациональным является реализация входа КА в атмосферу вблизи верхней границы коридора. В связи с этим, крайне важным представляется обеспечение ширины «горизонтального» участка зависимости  $\Delta V(h_{\pi})$  большей, чем ширина навигационного коридора входа, равного  $1100$  км. Это может быть обеспечено при использовании КА с аэродинамическим качеством, достигающим  $0,6$ . Кроме того, благоприятным фактором для осуществления успешной космической экспедиции

является уточнение моделей атмосфер Юпитера, что с большой вероятностью будет способствовать увеличению физически реализуемого коридора входа. Так, например, если уточняемые модели атмосферы будут близки к номинальной, то значительно уменьшится возможный разброс параметров атмосферы, а физически реализуемый коридор входа КА увеличится  $\sim$  до  $\pm 800$  км ( $K_6=0,6$ ). Это, в свою очередь, позволит снизить требования к располагаемым значениям аэродинамического качества КА. В частности, для рассматриваемого диапазона высот формируемых орбит могут использоваться аппараты с  $K_6$  не менее 0,5.

Оценим влияние значений начальной скорости входа КА в атмосферу  $V_0$  и приведенной нагрузки на лобовую поверхность аппарата  $P_x$  на потребные энергетические затраты  $\Delta V$ .

На рис. 4 представлены зависимости энергозатрат  $\Delta V$  от значений  $V_0$  и  $P_x$ . Показано, что при увеличении как скорости  $V_0$ , так и приведенной нагрузки  $P_x$  потребные энергозатраты возрастают. Так, при изменении  $V_0$  от 55 км/с до 65 км/с энергозатраты  $\Delta V$  возрастают от  $\sim 400$  м/с до  $\sim 750$  м/с для  $H=10000$  км и от  $\sim 900$  м/с до  $\sim 1200$  м/с для  $H=50000$  км. Увеличение  $P_x$  от  $100$  кг/м<sup>2</sup> до  $500$  кг/м<sup>2</sup> приводит к менее интенсивному возрастанию  $\Delta V$  от  $\sim 500$  м/с до  $\sim 580$  м/с для  $H=10000$  км и от  $\sim 1000$  м/с до  $\sim 1050$  м/с для  $H=50000$  км. При таком характере изменения зависимостей  $\Delta V(V_0)$  представляется энергетически эффективным использование схем входа КА в атмосферу Юпитера с возможно меньшими скоростями. Что касается выбора рациональных значений  $P_x$ , то он, очевидно, должен проводиться с точки зрения других критериев, например, из условия снижения перегрузочных и

температурных режимов, обеспечения рационального массово-габаритного баланса КА и др.

Как было отмечено, существенное влияние на проектные параметры КА оказывает ширина навигационного коридора входа  $\Delta h_{\pi}^{\text{наВ}}$ . При проведении исследований численные и графические результаты были получены с учетом величины  $\Delta h_{\pi}^{\text{наВ}} = 1100$  км. Вместе с тем, представляется практически важным оценить основные параметры траекторий полета аппарата и возможности снижения требований к проектным характеристикам перспективных КА при условии уменьшения значений  $\Delta h_{\pi}^{\text{наВ}}$ . Как следует из анализа зависимостей  $\Delta V(h_{\pi})$ , представленных на рис. 3, потребные энергозатраты практически не изменяются при снижении навигационного коридора  $\Delta h_{\pi}^{\text{наВ}}$  относительно значения 1100 км. При этом меньшие величины  $\Delta h_{\pi}^{\text{наВ}}$  могут быть реализованы на КА, располагающими меньшими значениями аэродинамического качества  $K$ . Так, даже с учетом наиболее неблагоприятного разброса параметров атмосферы, коридор входа величиной  $\Delta h_{\pi}^{\text{наВ}} = 700$  км может быть превышен на КА с  $K_6 \geq 0,35$ , а коридор  $\Delta h_{\pi}^{\text{наВ}} = 500$  км – на КА с  $K_6 \geq 0,3$ . При рассмотрении номинальной модели атмосферы предельные значения аэродинамического качества уменьшаются до величин 0,3 и 0,25 соответственно ( $H=8000$  км,  $V_0=60$  км/с,  $P_x=300$  кг/м<sup>2</sup>).

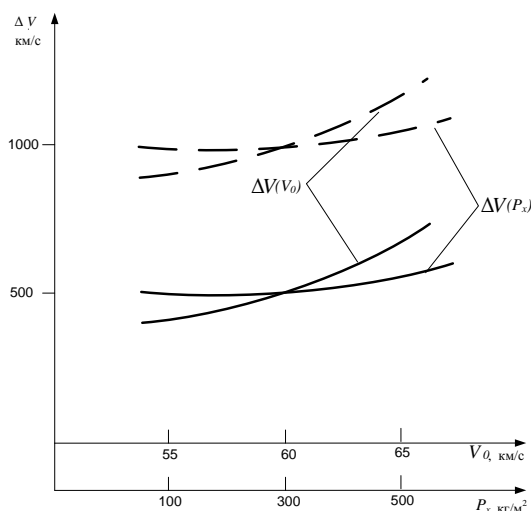


Рис. 4 Зависимости потребных энергозатрат  $\Delta V$  от величин  $V_0$  и  $P_x$  ( $K_6=0,5$ , сплошная линия -  $H=10000$  км, штриховая линия -  $H=50000$  км), данные приведены с учетом возможного разброса параметров атмосферы

Дадим сравнительную оценку энергетическим затратам, потребным на формирование орбит искусственного спутника Юпитера при комбинированном и ракетодинамическом способах.

Показано, что для всего рассматриваемого диапазона исходных данных комбинированный способ выведения приводит к значительному энергетическому выигрышу. Так, для космических аппаратов с проектно-баллистическими характеристиками, удовлетворяющими условиям  $K_6 \geq 0,5$  и  $P_x \leq 500$  кгс/м<sup>2</sup>, подлетающих к атмосфере Юпитера с начальными скоростями  $V_0=55-65$  км/с ( $\Delta h_{\pi}^{\text{нав}}=1100$  км), энергетические затраты более чем в 2-5 раз меньше по сравнению с ракетодинамическим способом выведения на орбиты с высотами апоцентра  $H \leq 60000$  км: значения  $\Delta V$  при комбинированном способе, как уже отмечалось, составляют 600-1000 м/с, а при ракетодинамическом – достигают 15-18 тыс. км/с.

Представленные материалы показывают принципиальную возможность и высокую энергетическую эффективность применения комбинированного способа выведения аппаратов, располагающих аэродинамическим качеством 0,5-0,6 на орбиты искусственного спутника Юпитера с использованием проведения предварительного аэродинамического торможения в атмосфере.

### **Заключение**

1. Показано, что применение такой схемы выведения КА на орбиту ИСЮ по сравнению с использованием известных схем построения спутниковых орбит, где гашение скорости аппарата осуществляется в результате выполнения ракетодинамических маневров при подлете КА к планете, позволяет получить значительный энергетический выигрыш. В целом, при формировании спутниковых орбит Юпитера - ~ в 2-5 раз.

2. Изложен методический подход и алгоритм построения оптимального управления КА при выведении на спутниковую орбиту на основе изменения комбинированной схемы выведения КА на орбиту ИСЮ.

### **Библиографический список**

1. Авдучевский В.С., Антонов Б.М., Анфимов Н.А. и др. Основы теории полета космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1972. – 345 с.
2. Андриевский В.В. Динамика спуска космических аппаратов на Землю. - М.: Машиностроение, 1970. - 235 с.
3. Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. - М.: Наука, 1987. – 440 с.
4. Иванов Н.М. Мартынов А.И. Движение космических летательных аппаратов в атмосферах планет. - М.: Наука, 1985. – 384 с.
5. Иванов Н.М. Мартынов А.И. Управление движением космического аппарата в атмосфере Марса. - М.: Наука, 1977. – 415 с.

6. Иванов Н.М., Мартынов А.И., Соколов Н.Л. Баллистико-навигационные аспекты проблемы торможения КА в атмосфере Юпитера // Космические исследования. 1979. Т. 17. № 1. С. 32 - 44.
7. Иванов Н.М., Мартынов А.И., Соколов Н.Л. Оптимальное управление КА в атмосфере Юпитера // Космические исследования. 1980. Т. 17. № 3. С. 348 - 365.
8. Иванов Н.М., Соколов Н.Л., Осокина О.А. Об эффективности использования двухпараметрического управления углами атаки и крена при спуске КА в атмосфере Земли // Космические исследования. 1998. Т. 36. № 5. С. 528 - 534.
9. Казаковцев В.П., Корянов В.В., Зо Мин Тун. Коррекция траектории перехода космического аппарата на круговую орбиту спутника при использовании торможения в атмосфере в условиях неопределенности ее параметров // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2015. № 5. С. 38 - 46.
10. Соколов Н.Л. Метод расчета приближенно-оптимальных траекторий движения космического аппарата на активных участках выведения на спутниковые орбиты // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49689>
11. Соколов Н.Л. Аналитический метод исследования оптимального управления КА при движении в атмосфере // Лесной вестник. 2015. № 3. С. 37 - 44.
12. Соколов Н.Л. Анализ комбинированных способов формирования орбит искусственного спутника планет // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=69701>



13. Шкадов Л.М., Буханова Р.С., Илларионов В.Ф., Плохих В.П. Механика оптимального пространственного движения летательных аппаратов в атмосфере. - М.: Машиностроение, 1972. - 244 с.
14. Эйсмонт Н.А. Оптимальное управление космическим аппаратом, переводимым с гиперболической траектории на орбиту спутника планеты торможением в атмосфере // Космические исследования. 1972. Т. 10. № 2. С. 290 - 292.
15. Ярошевский В.А., Вэн Нгуен. Аналитические и полуаналитические методы исследования траекторий входа в атмосферу // Ученые записки ЦАГИ. 1997. Т. 28. № 3-4. С. 2 - 35.
16. Allen A.T., Eggers A.T. A study of the motion and aerodynamic heating of ballistic missiles entering the earth's atmosphere at high supersonic speeds, NASA Rep., 1958, no. 1381, 16 p.
17. Champan D.R. An Approximate analytical method for studying entry into planetary atmospheres. Technical Report NACA-TN-4276, Ames Aeronautical Laboratory, Calif., 1958, 103 p.
18. David A. Spencer and Robert Tolson. Airobraking Cost and Risk Decisions // Journal of Spacecraft and Rockets, 2007, vol. 44, no. 6, pp. 1285 – 1293.
19. Nachtsheim P.R., Tindle E., Howe J.T.J. Atmospheric entry into Jupiter's atmosphere in view of recent flyby results // Journal of Spacecraft and rockets, 1976, vol. 13, no. 2, pp. 120 – 122.

20. Vivian Martins Gomes, Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, and Justyna Golebiewska. Dynamics of Space Particles and Spacecrafts Passing by the Atmosphere of the Earth // The Scientific World Journal, volume 2013, Article ID 489645, pp. 6, doi: 10.1155/2013/489645.