УДК 681.51

Минимаксное оценивание движения летательного аппарата в условиях априорной стохастической неопределённости

А.Р. Панков, А.С. Попов.

Рассмотрена задача параметрической идентификации кинематической модели движения летательного аппарата (ЛА) в условиях неполной информации о характеристиках параметров модели и ошибок наблюдений. Исследуются методы борьбы с систематическими ошибками наблюдений. Получены явные выражения для некоторых минимакных оценивателей движения ЛА. Рассмотрены результаты численных экспериментов.

Введение

Проблемы и методы оценивания параметров движения летательного аппарата (ЛА) по результатам траекторных измерений изучены достаточно хорошо в случае точно известных характеристик случайных ошибок наблюдений и при отсутствии систематических ошибок [1-4].
На практике указанная информация зачастую отсутствует или имеет весьма приблизительный характер. В частности, ковариационные матрицы случайных ошибок измерений обычно известны лишь с точностью до принадлежности некоторому априорно заданному множеству допустимых ковариационных матриц, которое может быть довольно широким. Что же касается систематических погрешностей наблюдений, то их адекватная математическая модель обычно отсутствует [1].

Указанные проблемы вызвали необходимость разработки методов гарантирующего оценивания параметров движения ЛА [6], обладающих устойчивостью к возможным отклонениям реальных характеристик ошибок наблюдений от их расчётных значений.

В данной работе рассматривается метод оценивания параметров движения ЛА в условиях неполной априорной информации о характеристиках ошибок наблюдения (неопределённо-стохастическая модель).

Для построения соответствующих алгоритмов оценивания использован минимаксный подход и теория двойственности экстремальных задач [6,7,8].

1. Модель наблюдений

1.1 Кинематическая модель движения ЛА

Рассмотрим кинематическую модель движения ЛА в некоторой декартовой системе координат. Пусть $Z_t = \{ z_{1t}, z_{2t}, z_{3t} \}^*$ - вектор декартовых координат ЛА в момент t∈[0, T], где T – момент времени окончания наблюдения за движением ЛА. Здесь и далее * - операция транспонирования. Пусть также $\{\psi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ - полная система функций в пространстве $L_2[0, T]$.

Представим зависимость координат ЛА от времени в виде $z_{it} = \sum_{k=1}^{n_i} a_{ik}\psi_k(t)$, где $\{n_i\}$ - определяют порядок модели движения по каждой координате, а i=1,2,3,

Пусть $\theta = \{a_{11},...a_{1n_1}, a_{21},...a_{2n_2}, a_{31},...a_{3n_3}\}^*$,

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \cdots & \psi_{n_1}(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \psi_1(t) & \cdots & \psi_{n_2}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \psi_1(t) & \cdots & \psi_{n_3}(t) \end{bmatrix}$$

Теперь модель движения ЛА можно представить в окончательном виде

$$Z_t = \Psi(t)\,\theta,\ t \in [0, T].$$

1.2 Модель траекторных наблюдений

Рассмотрим связь декартовых координат Z_t с измеряемыми координатами Q_t :

$$Q_t = \varphi(Z_t),$$

где $\varphi(\cdot)$ задаёт связь декартовых координат с измеряемыми. При проведении траеткорных наблюдений имеют место два случая [1, 2]:

1) $Q_t = \{r_t, \beta_t, \varepsilon_t\}^*$, где r_t - наклонная дальность, β_t - азимут, ε_t - угол места.

$$\left[\begin{array}{l} r_t = \left[(z_{1t})^2 + (z_{2t})^2 + (z_{3t})^2\right]^{1/2} \\ \beta_t = \begin{cases} \arccos(z_{1t}\left[(z_{1t})^2 + (z_{2t})^2\right]^{-1/2}), \text{если } z_{2t} \ge 0 \\ \pi + \arccos(z_{1t}\left[(z_{1t}) + (z_{2t})^2\right]^{-1/2}), \text{если } z_{2t} < 0 \end{cases} \\ \varepsilon_t = \arcsin(z_{3t} / r_t) \end{array}\right.$$

2) $Q_t = \{ r_t,\ \cos(\varphi_{1t}), \cos(\varphi_{2t}) \}^*$, где $\cos(\varphi_{kt}) = z_{kt} / r_t$, k=1,2 – направляющие косинусы.

Модель реальных наблюдений имеет вид

$$\tilde{Q}_t = Q_t + \Delta Q_t ,$$

где $\tilde{Q}_t$ - результат измерения вектора Q_t , ΔQ_t - ошибка наблюдения. Далее предполагается:

$\Delta Q_t = \rho_t + \nu_t$, где $\{\nu_t\}$ - векторный белый шум (случайные ошибки наблюдений), $M[\nu_t] = 0$, $\{\rho_t\}$ - неслучайная функция времени (систематическая погрешность).

Объединяя модели для $\tilde{Q}_t$ и Z_t , получаем

$$\tilde{Q}_t = H_t(\theta) + \Delta Q_t, t = 1,..., T ,$$

где $H_t(\theta) = \varphi(\Psi(t)\theta)$ - параметрическая модель точных наблюдений (нелинейная). Существует множество эффективных способов оценки параметров нелинейной модели, в данной статье применяется линеаризация модели с последующей оценкой параметров модели.

2. *Линеаризация параметрической модели*

Для упрощения дальнейших исследований проведём линеаризацию модели наблюдения, т.е. представим её в линейном по θ виде:

$$Y_t = X_t\theta + \Delta Q_t, t = 1,..., T \tag{1}$$

1. Пусть имеется некоторое опорное значение θ_0 для вектора параметров θ, тогда

$\tilde{Q}_t = H_t(\theta_0) + G_t(\theta - \theta_0) + \Delta Q_t$, где $G_t = \left.\dfrac{\partial H_t(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta = \theta_0}$

Теперь, обозначая

$$X_t = G_t, \quad Y_t = \tilde{Q}_t + G_t\theta_0 - H_t(\theta_0), \tag{2}$$

приходим к модели (1).

2. Если ошибки ΔQ_t малы по сравнению с Q_t , то можно воспользоваться следующим способом линеаризации: из $Z_t = \varphi^{-1}(\tilde{Q}_t - \Delta Q_t)$ следует $Z_t = \varphi^{-1}(\tilde{Q}_t) - C_t\Delta Q_t$, где $C_t = \left.\dfrac{\partial\varphi^{-1}(Q_t)}{\partial Q_t}\right|_{Q_t = \tilde{Q}_t}$. Опять приходим к уравнению (1), если положить

$$X_t = C_t^{-1}\Psi(t), \quad Y_t = C_t^{-1}\varphi^{-1}(\tilde{Q}_t) \tag{3}$$

Далее считаем, что соответствующие преобразования уже проведены, и мы в качестве исходной модели наблюдения используем (1).

3. Постановка задачи минимаксного оценивания

3.1 Описание множеств неопределённости

Опишем теперь множества неопределённости ковариационных матриц и систематических ошибок модели (1), записанной в матричном виде:

$$Y = X\theta + \Delta Q \ ,$$

где $Y = (Y_1,...,Y_T)^*$, $X=(X_1^*,...,X_T^*)^*$, $\Delta Q = (\Delta Q_1,...,\Delta Q_T)^*$.

При сделанных выше предположениях $\Delta Q = \rho + \nu$. Вектор наблюдений $Y \in H$, а белый шум $\nu \in L$, $\rho \in M \subseteq K$,где H, L, K – конечномерные евклидовы пространства с соответствующими скалярными произведениями и нормами, M – выпуклый центрально-симметричный компакт. Тогда множество неопределённости W ковариационной матрицы R_ν случайных погрешностей ν имеет вид:

$$W = \left\{R_\nu \in L^+(L \times H) : R_\nu \in \tilde{W}\right\} \ , \tag{4}$$

где $L^+(L \times H)$ - семейство неотрицательно определённых самосопряжённых операторов в $L \times H$,

$\tilde{W}$ - выпуклое компактное подмножество операторов из $L^+(L \times H)$.

Конкретизируем предположение о множестве неопределённости систематических ошибок измерения:

$$M = \{\rho \in K : \rho^* \Sigma \rho \le 1\}, \tag{5}$$

где $\Sigma \in L^+(K)$ - некоторая весовая матрица, задаваемая априорно.

Обозначим через P_ε обобщённое распределение неопределённо-стохастического вектора $\varepsilon = \mathrm{col}[\rho, \nu]$. Далее, суммируя всё вышесказанное, предположим, что

$P_\varepsilon \in \Xi$, где

$$\Xi = \{P_\varepsilon : \rho \in M, R_\nu \in W, M[\nu] = 0\} \tag{6}$$

Таким образом, Ξ - множество допустимых распределений вектора ε. Если Ξ не является одноточечным, то оно задаёт класс неопределённостей модели наблюдения (1), которую мы называем, следуя [6, 7], *обобщённой неопределённо-стохастической линейной моделью* наблюдения.

3.2 Критерий

Пусть $\tilde{\theta} = F(Y)$ - оценка параметра θ по наблюдениям Y в модели (1), где F – оператор оценивания. Предполагается, что F принадлежит классу $\Im$ линейных операторов оценивания. Далее через $\Delta\tilde{\theta} = \tilde{\theta} - \theta$ будем обозначать ошибку оценки $\tilde{\theta}$. В данной работе будем использовать следующий критерий качества оценки:

$$J(F, P_\varepsilon) = E_{P_\varepsilon}\left\{\left\|\Delta\tilde{\theta}\right\|^2\right\}, \tag{7}$$

где E_{P_ε} - оператор усреднения по распределению P_ε.

Заметим, что при одном и том же алгоритме оценивания F критерий (7) будет принимать различные значения при изменении распределения P_ε параметров ε модели (1).

Очевидно, что оценка $\tilde{\theta}$ тем точнее, чем меньше значение критерия $J(F, P_\varepsilon)$. В силу того, что распределение $P_\varepsilon \in \Xi$ и , следовательно, в общем случае точно неизвестно, оптимизацию оценки $\tilde{\theta}$ по критерию (7) на заданном выше классе операторов оценивания мы будем проводить с использованием минимаксного подхода.

3.3 Минимаксная оценка и её характеристики

Определение 1 [6]. Оценка $\hat{\theta} = \hat{F}(Y)$ в модели (1) называется минимаксной на классе неопределённости Ξ, если $\hat{F} \in \Im$ и

$$\sup_{P_\varepsilon \in \Xi} J(\hat{F}, P_\varepsilon) \le \sup_{P_\varepsilon \in \Xi} J(F, P_\varepsilon) \quad \forall F \in \Im \tag{8}$$

Если существует хотя бы один оператор $\hat{F}$, удовлетворяющий (8), то будем писать:

$$\hat{F} \in \arg\min_{F \in \Im} \sup_{P_\varepsilon \in \Xi} J(F, P_\varepsilon)$$

Далее полагаем, что вектор θ идентифицируем, т.е.

$$\exists \bar{F} \in \Im: \ \sup_{P_\varepsilon \in \Xi} J(\bar{F}, P_\varepsilon) < \infty \tag{9}$$

Подводя итог вышесказанному, запишем критерий (7) в следующем эквивалентном виде:

$$J(F, P_\varepsilon) = J(F, W, M)$$

Введём следующие обозначения:

$$I(F) = \sup_{R_v \in W,\ \rho \in M} J(F, W, M) \tag{10}$$

$$\underline{I}(W, M) = \inf_{F \in \mathfrak{I}} J(F, W, M) \tag{11}$$

Функционал (11) называется двойственным функционалом. Таким образом, задача минимаксной идентификации в условиях априорной стохастической неопределённости имеет следующую постановку:

$$\hat{F} = \arg\min_{F \in \mathfrak{I}} I(F) \tag{12}$$

Задача (12) называется прямой задачей минимаксной оптимизации. При различных упрощающих предположениях о множествах W и M задача (12) может быть сведена к специальным задачам нелинейного программирования [4,9]. В данной работе используется другой подход к построению $\hat{F}$, основанный на численном или аналитическом решении двойственной задачи

$$\left(\hat{R}_v, \hat{\rho}\right) \in \arg\max_{R_v \in W\ \ \rho \in M} \underline{I}(W, M) \tag{13}$$

и использовании её решения $\left(\hat{R}_v, \hat{\rho}\right)$ для аналитического построения минимаксного оператора $\hat{F}$.

4. Решение задачи минимаксного оценивания

В данном разделе сформулированы основные результаты построения минимаксного оценивателя $\hat{F}$.

Теорема 1. Пусть выполнены все ограничения, наложенные на множества неопределённости ковариационной матрицы случайного вектора и систематическую погрешность. Пусть также выполнено условие (9), тогда

1. $\max\limits_{R_v \in W} \max\limits_{\rho \in M} \underline{I}(W, M) = \max\limits_{\rho \in M} \max\limits_{R_v \in W} \underline{I}(W, M)$ (14)

2. $\Sigma^{+} = \arg\max_{\rho\in \underline{M}} I(W, M)$ (15)

3. справедливо соотношение двойственности

$$\min_{F\in\Im}\sup_{P_\varepsilon\in\Xi} J(F, P_\varepsilon) = \max_{P_\varepsilon\in\Xi}\ \inf_{F\in\Im} J(F, P_\varepsilon) \tag{16}$$

Доказательство. Введём в рассмотрение следующий критерий, по которому и будем идентифицировать параметры модели:

$$J^{o}(F, P_\varepsilon) = E_{P_\varepsilon}\left\{\left(\Delta\tilde{\theta}\right)\left(\Delta\tilde{\theta}\right)^{*}\right\} \tag{17}$$

Запишем модель (1) следующим образом (следуя [6,7]) с точностью до обозначений:

$$\begin{cases} Y = X\theta + \rho + D\xi + \nu \\ u = A\theta + B\xi \end{cases} \tag{18}$$

Матрицы D и B нулевые в рассматриваемой модели (однако в отличии от моделей, рассмотренных в [6,7], здесь присутствует систематическая ошибка в наблюдениях - ρ). Оцениватель параметров движения по наблюдениям из заданного класса линейных оценок:

$$\hat{\theta} = F(Y) = FY$$

Общее выражение для значения критерия выглядит следующим образом:

$J^{o} = (F\tilde{W} - \tilde{I})\rho\rho^{*}(F\tilde{W} - \tilde{I})^{*} + FR_{\nu}F^{*}$, где

$\tilde{W} = [0\ I_{H}];\ \ \tilde{I} = [0\ 0]\cdot$

Тогда $J^{o} = F\rho\rho^{*}F + FR_{\nu}F^{*}$

Заменим $\rho = (\Sigma^{+})^{1/2}\mu$, где $\mu \in R^{Tm\times 1}$, $\|\mu\| \le 1$ (m – размерность одного наблюдения), тогда

$$\max_{R\nu\in W,\rho\in M} J^{o} = \max_{R\nu\in W,\rho\in M}(F\rho\rho^{*}F + FR_{\nu}F^{*}) \Rightarrow$$

$$\max_{R\nu\in W,\rho\in M} J^{o} = \max_{\rho\in M} F\rho\rho^{*}F + \max_{R\nu\in W} FR_{\nu}F^{*} =$$

$$= F\Sigma^{+}F + \max_{R\nu\in W} FR_{\nu}F^{*}$$

Поскольку
$$\max_{R\nu\in W,\rho\in M} J(F, P_\varepsilon) = \max_{R\nu\in W,\rho\in M} \operatorname{tr}[J^{o}(F, P_\varepsilon)] \ge$$
$$\ge \operatorname{tr}[\max_{R\nu\in W,\rho\in M} J^{o}(F, P_\varepsilon)],$$

то пункт 2 в теореме 1 доказан. Пункт 1 следует непосредственно из последнего равентсва в силу коммутативности операции сложения.

Существование седловой точки следует также непосредственно из пункта 1 и доказательства существования седловой точки для модели (18) [6]. Теорема доказана.

В качестве отдельного утверждения сформулируем следующий важный результат, доказательство которого вытекает непосредственно из предыдущей теоремы.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 минимаксная оценка параметров модели (1) имеет вид:

$$\hat{\theta} = F(\hat{V})Y \tag{19}$$

где

$$F(V) = \left(X^* V^{-1} X\right)^{-1} X^* V^{-1}, \quad \hat{V} = \hat{R}_v + \Sigma^+, \tag{20}$$

$$\hat{R}_v = \arg\max_{R_v \in W} \ tr\left\{F^*\left(R_v + \Sigma^+\right)\left(R_v + \Sigma^+\right)F\left(R_v + \Sigma^+\right)\right\} \tag{21}$$

5. Алгоритм вычисления минимаксных оценок

5.1 Общий случай (решение двойственной задачи)

Процедура нахождения "наихудшей" матрицы в общем случае решается только численно. Опишем итерационный алгоритм решения двойственной задачи (13), позволяющий найти матрицу наихудших ковариаций $\hat{V}$, определённую по формуле (20).

Алгоритм. 1) выбрать произвольную матрицу $R_v^{(0)} \in W$, определить $V^{(0)} = R_v^{(0)} + \Sigma^+$ (см. (20)) и положить S=0;

2) определить $F^{(S)} = \arg\min_{F \in \Im} J(F, R_v^{(S)}, \Sigma^+)$ по формуле:

$$F^{(S)} = (X^* \left(V^{(S)}\right)^{-1} X)^+ X^* \left(V^{(S)}\right)^{-1}$$

3) решить задачу обобщённого линейного программирования:

$$\tilde{R}_v^{(S)} \in \arg\max_{R_v \in W} J(F^{(S)}, W, \Sigma^+)$$

4) вычислить $\delta_s = J(F^{(S)}, \tilde{R}_v^{(S)}, \Sigma^+) - J(F^{(S)}, R_v^{(S)}, \Sigma^+) \geq 0$

если $\delta_s = 0$, то положить $\hat{V} = R_v^{(S)} + \Sigma^+$ и закончить итерационный процесс;

если $\delta_s \ge 0$, то перейти к следующему шагу;

5) определить число $\gamma_s \in [0, \tilde{\gamma}_s]$ из условия

$$\gamma_s \in \arg \max_{\gamma_s \in [0, \tilde{\gamma}_s]} J(F, R_{\nu\gamma}^{(S)}, \Sigma^+), \text{ где}$$

$$R_{\nu\gamma}^{(S)} = (1-\gamma) R_\nu^{(S)} + \gamma \tilde{R}_\nu^{(S)}, \quad \tilde{\gamma}_s = \max\{\gamma \ge 0 : R_{\nu\gamma}^{(S)} \in W\};$$

6) положить $R_\nu^{(S+1)} = R_{\nu\gamma}^{(s)}$, увеличить s на 1 и перейти к шагу 2) алгоритма.

Докажем сходимость описанного итерационного процесса. Пусть $\Omega = \arg\max_{R_\nu \in W} \underline{I}(R_\nu, \Sigma^+)$ - множество всех точек глобального максимума двойственного функционала $\underline{I}(R_\nu, \Sigma^+)$.

$d(R_\nu, \Omega) = \inf_{\tilde{R}_\nu \in W} \left\| R_\nu - \tilde{R}_\nu \right\|$ - расстояние от R_ν до множества Ω.

Теорема 3. Пусть множество W – выпукло и компактно. Тогда $d(R_\nu^{(S)}, \Omega) \to 0$ при $S \to \infty$, если $\{R_\nu^{(S)}\}$ - бесконечная последовательность. Если же $\hat{R}_\nu = R_\nu^{(S)}$ при $S < \infty$, то $\hat{R}_\nu \in \Omega$.

Доказательство. Рассмотрим многозначное алгоритмическое отображение $\ell : W \to W$, где $R_\nu^{(S+1)} = \ell(R_\nu^{(S)})$, $R_\nu^{(0)} \in W$ определённое алгоритмом. В условиях теоремы $\underline{I}(R_\nu, \Sigma^+) = \inf_{F \in \Im} J(F, R_\nu, \Sigma^+)$, где F – оператор оценивания обобщённым методом наименьших квадратов, определённый формулой (19), который даёт оценку параметров Θ по Y в модели (1), т.е. $\hat{\theta} = FY$

В силу компактности W, условия $R_\nu > 0$, заключаем, что F – непрерывно зависит от R_ν, а множество $\Im^0 = \{F : R_\nu \in W\}$ - компактно. Следовательно по теореме 7.2 из [11] заключаем, что функционал

$$\underline{I}(R_\nu, \Sigma^+) = \inf_{F \in \Im} J(F, R_\nu, \Sigma^+) \tag{22}$$

непрерывен по R_ν на W.

Покажем, что $\hat{R}_\nu \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $\delta_S = 0$. Функционал $\underline{I}(R_\nu, \Sigma^+)$ есть точная нижняя грань на $\Im^0$ линейных по R_ν функций $J(F, R_\nu, \Sigma^+)$, поэтому $\underline{I}(R_\nu, \Sigma^+)$ вогнут на W. В силу этого условие $\hat{R}_\nu \in \Omega$ равносильно:

$$\sup_{R_\nu \in W} \underline{I}^{(,)}(R_\nu^{(S)}, \Sigma^+)(R_\nu - R_\nu^{(S)}) = 0 \tag{23}$$

- производная $\underline{I}(R_\nu, \Sigma^+)$ в точке $R_\nu^{(S)}$ по направлению ΔR_ν.

В силу (22), компактности W и теоремы 3.5 из [10] заключаем, что

$$\underline{I}^{(,)}(R_\nu^{(S)}, \Sigma^+)(R_\nu - R_\nu^{(S)}) = \inf_{F^{(S)} \in \Im} J(F^{(S)}, R_\nu, \Sigma^+) - \inf_{F^{(S)} \in \Im} J(F^{(S)}, R_\nu^{(S)}, \Sigma^+) =$$
$$\inf_{F^{(S)} \in \Im} J(F^{(S)}, R_\nu, \Sigma^+) - \underline{I}(R_\nu^{(S)}, \Sigma^+) = \underline{I}(R_\nu, \Sigma^+) - \underline{I}(R_\nu^{(S)}, \Sigma^+),$$

поэтому условие (23) равносильно $\delta_S = 0$, т.е. $\hat{R}_\nu \in \Omega$.

Если же $\hat{R}_\nu \notin \Omega$, то $\delta_S > 0$ в силу вогнутости и линейности функционала $\underline{I}(R_\nu, \Sigma^+)$ на компакте.

Из определения $R_\nu^{(S+1)}$ следует, что

$$\underline{I}(R_\nu^{(S+1)}, \Sigma^+) = \sup_{0 \le \tau \le \tau_S} \underline{I}((1-\tau)R_\nu^{(S)} + \tau \tilde{R}_\nu^{(S)}, \Sigma^+) \ge \underline{I}(R_\nu^{(S)}, \Sigma^+) \tag{24}$$

причём, в силу вогнутости $\underline{I}(R_\nu, \Sigma^+)$ на W, равенство (24) возможно лишь при $\delta_S = 0$, что следует из (23). Поэтому $\underline{I}(R_\nu^{(S+1)}, \Sigma^+) > \underline{I}(R_\nu^{(S)}, \Sigma^+)$, если $\delta_S > 0$ (т.е., если $R_\nu \notin \Omega$).

Представим теперь отображение ℓ в виде композиции алгоритмических отображений: $\ell = \ell_1 \circ \ell_2 \circ \ell_3$, где

1) $\ell_1 : W \to \Im^0 \times W$, где $(F^{(S)}, R_\nu^{(S)}) = \ell_2(R_\nu^{(S)})$

2) $\ell_2 : \Im^0 \times W \to W \times W$, где паре $(F^{(S)}, R_\nu^{(S)})$ ставится в соответствие $(R_\nu^{(S)}, \tilde{R}_\nu^{(S)})$, т.е. ℓ_2 задаёт направление для максимизации $\underline{I}(R_\nu, \Sigma^+)$, а $\tilde{R}_\nu^{(S)}$ определено в п. 3) алгоритма.

3) $\ell_3 : W \times W \to W$ и переводит пару $(R_\nu^{(S)}, \tilde{R}_\nu^{(S)})$ в $R_\nu^{(S+1)}$ по правилу $R_\nu^{(S+1)} = (1-\gamma)R_\nu^{(S)} + \gamma \tilde{R}_\nu^{(S)}$, а $\tilde{\gamma}_s$ находится из решения

$\tilde{\gamma}_s = \max\{\gamma \geq 0 : (1-\gamma)R_\nu^{(S)} + \gamma \tilde{R}_\nu^{(S)} \in W\}$, являющегося частью действий п. 5) алгоритма.

В силу вышесказанного, можно видеть, что каждое из отображений ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 определяется с помощью решения соответствующей задачи оптимизации на компактах. Таким образом, в силу теоремы 3.7 из [11] заключаем, что ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 - замкнутые отображения, а ℓ - замкнуто на W, как композиция замкнутых отображений на компактных множествах (следствие 4.2.1 из [11]).

Таким образом, отображение ℓ обладает следующими свойствами:

1) $\ell : W \to W$, где W – компакт.

2) если $\ell(R_\nu^{(S)}) = R_\nu^{(S)}$, то $R_\nu^{(S)} \in \Omega$, если $R_\nu^{(S+1)} = \ell(R_\nu^{(S)}) \neq R_\nu^{(S)}$, то $\underline{I}(R_\nu^{(S+1)}, \Sigma^+) > \underline{I}(R_\nu^{(S)}, \Sigma^+)$.

3) ℓ замкнуто в каждой точке $R_\nu \in W$.

В силу теоремы А и леммы 11.2 из [11] заключаем, что для последовательности $\{R_\nu^{(S)}\}$ вида $R_\nu^{(S)} = \ell\left(R_\nu^{(S)}\right)\ \forall R_\nu^{(0)} \in W$ справедливо $d(R_\nu^{(S)}, \Omega) \to 0$ при $S \to \infty$, причём, если $R_\nu^{(S)} = \ell(R_\nu^{(S)})$, то $R_\nu^{(S)} \in \Omega$. Теорема 3 доказана.

Замечание. Теорема 3 устанавливает возможность следующих случаев:

1) алгоритм сходится за конечное число шагов;
2) если подпоследовательность $R_\nu^{(S_n)}$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_\nu^{(S_n)} \in \Omega$, при этом хотя бы одна такая подпоследовательность существует. Если же такая подпоследовательность единственна, то $\lim\limits_{S\to\infty} R_\nu^{(S)} \in \Omega$;
3) Если $\Omega = \hat{R}_\nu$ - одноточечное множество, то $R_\nu^{(S)} \to \hat{R}_\nu$ при $S \to \infty$.

4) Задаче обобщённого линейного программирования посвящены многие эффективные методы [12, 13], и её решение не должно вызывать затруднений.

5.2 Специальные виды множеств неопределённости

В большинстве приложений ограничения на ковариационную матрицу ошибок наблюдений имеют такой вид, который позволяет решать задачу нахождения «наихудшей» ковариационной матрицы аналитически. Приведём некоторые примеры специальных множеств неопределённости.

1) $W = \left\{R : \underline{R}_{ij} \leq R_{ij} \leq \overline{R}_{ij}\right\} \Leftrightarrow W = \left\{R : \underline{R} \leq R \leq \overline{R}\right\}$, где неравенство понимается покомпонентно.

2) $W = \{R : \|R - R^0\| \leq \varepsilon\} = \{r_{ij} : \sqrt{\sum\limits_{i,j} |r_{ij} - r_{ij}^0|^2} \leq \varepsilon\}$

3) $W=\{R:\|R-R^0\|_S\le\varepsilon\}$, где $\|A\|_S=\lambda_{max}(A)$ - спектральная норма $(\cdot\ ,\ \cdot)$ скалярное произведение, $\lambda_{max}(A)$ - максимальное собственное значение матрицы W.

Заметим, что множества в случаях 1)-3) являются выпуклыми компактами. Случаи 2) и 3) интересны тем, что наихудшие матрицы в них ищутся аналитически. Более того в случаях 2), 3) аналитически ищется также минимаксный оператор оценивания $\hat{F}$.

Сформулируем следующие результаты.

Утверждение 1. Если множество неопределённости ковариационной матрицы описывается в виде ограничения по евклидовой норме около некоторой опорной матрицы R^0:

$W=\{R:\|R-R^0\|\le\varepsilon\}=\{r_{ij}:\sqrt{\sum_{i,j}|r_{ij}-r_{ij}^0|^2}\le\varepsilon\}$, то

$\exists\hat{R}:\ \hat{R}=\arg\max_{R_V\in W}J(F,W,M)$, где $\hat{R}=R^0+\dfrac{\varepsilon}{\|FF^*\|}FF^*$

Доказательство. Рассматриваемая оптимизационная задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \operatorname{tr}F^*RF\to\max\limits_R \\ \|R-R^0\|\le\varepsilon \end{cases}$$

Пусть $F=\{f_1,\dots,f_p\}$, тогда $\operatorname{tr}F^*RF=\sum_{k=1}^{p}f_k^*Rf_k$, где f_k - вектор-столбец матрицы F. Подводя итог сказанному, видим, что оптимизационная задача примет вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{p}f_k^*Rf_k\to\max\limits_R \\ \sum\limits_{i,j}\left(r_{ij}-r_{ij}^0\right)^0\le\varepsilon^2 \end{cases}$$

Обозначая теперь $f_k=\{a_{k1},\dots,a_{kq}\}^*$, в окончательном виде запишем:

$$\begin{cases} \sum_{i,j}\left(\sum_k a_{ki}a_{kj}\right)r_{ij} \to \max\limits_{r_{ij}} \\ \sum_{i,j}\left(r_{ij} - r_{ij}^0\right)^0 \le \varepsilon^2 \end{cases}$$

Решая данную задачу максимизации линейной функции на выпуклом множестве [14],

получим, что максимум доставляется при $r_{ij} = r_{ij}^0 + \frac{\sum_k a_{ki}a_{kj}}{\sqrt{\sum_{i,j}\left(\sum_k a_{ki}a_{kj}\right)^2}}\varepsilon$, или в матричном виде:

$\hat{R} = R^0 + \frac{FF^*}{\|FF^*\|}\varepsilon$. Утверждение доказано.

Утверждение 2. В случае задания множества неопределённости ковариационной матрицы описавается в виде ограничения по спектральной норме около некоторой опорной матрицы Ro: $W = \{R : \|R - Ro\|_{Sp} \le \varepsilon\}$, где $\|A\|_{Sp} = \lambda_{\max}(A)$ или $\|A\|_{Sp} = \max\limits_{|x|=1}(Ax, x)$. Тогда

$$R^0 + \varepsilon I = \arg \max_{R_v \in W} J(F, W, M)$$

Пример

Рассмотрим пример , в котором движение ЛА в декартовой системе координат описывается кинематической моделью вида:

$$Z_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 35000 \\ 250 \\ 30000 \\ 250 \\ 10000 \end{bmatrix}$$

Реально данные измерения движения ЛА - Q_t, содержат случайную и регулярную составляющие ошибки наблюдения. Проводить минимаксную идентификацию будем для линеаризованной системы следующего вида:

$$Y_t = C_t^{-1}\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \theta + \nu_t + \rho_t$$

При моделировании случайная величина: $\nu_t \sim N\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}625 & 2\cdot10^{-5} & 2\cdot10^{-5}\\ 2\cdot10^{-5} & 10^{-8} & 0\\ 2\cdot10^{-5} & 0 & 10^{-8}\end{bmatrix}\right)$

Систематические ошибки в данном примере равнялись трём средним квадратическим отклонениям случайных ошибок в каждом из каналов измерения: $\rho_t = 3\times\begin{bmatrix}25 & 10^{-4} & 10^{-4}\end{bmatrix}^*$.

Известно, что ковариационная матрица случайного вектора ν принадлежит следующему множеству неопределённости:

$$\begin{pmatrix}600 & 10^{-7} & 2\cdot10^{-6}\\ 10^{-7} & 10^{-10} & 0\\ 2\cdot10^{-6} & 0 & 10^{-10}\end{pmatrix} \le R_\nu \le \begin{pmatrix}1000 & 2\cdot10^{-4} & 2\cdot10^{-4}\\ 2\cdot10^{-4} & 10^{-6} & 0\\ 2\cdot10^{-4} & 0 & 10^{-6}\end{pmatrix}$$

Проведя численное решение задачи нахождения “наихудшей” ковариационной матрицы, получим следующую оценку минимаксной ковариационной матрицы:

$$\hat{R}_\nu = \begin{pmatrix}1000 & 10^{-7} & 2\cdot10^{-4}\\ 10^{-7} & 10^{-6} & 0\\ 2\cdot10^{-4} & 0 & 10^{-6}\end{pmatrix}$$

Учитывая результаты предыдущих разделов видно, что ковариационная матрица $\hat{V}$, которая будет являться матрицей весов в обобщённом методе наименьших квадратов выглядит (с сохранением всех предыдущих обозначений):

$$\hat{V} = \hat{R}_\nu + \Sigma^+ = \begin{pmatrix}1000 & 10^{-7} & 2\cdot10^{-4}\\ 10^{-7} & 10^{-6} & 0\\ 2\cdot10^{-4} & 0 & 10^{-6}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}625\cdot9\cdot S & 0 & 0\\ 0 & 10^{-8}\cdot9\cdot S & 0\\ 0 & 0 & 10^{-8}\cdot9\cdot S\end{pmatrix}$$

Матрица C_t^{-1} в формуле (3) выглядит в данном случае:

$$C_t^{-1} = \begin{bmatrix}\cos(\varphi_2) & \cos(\varphi_1) & \sqrt{1-(\cos(\varphi_1))^2-(\cos(\varphi_2))^2}\\ -\dfrac{\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)}{r} & \dfrac{1-(\cos(\varphi_1))^2}{r} & -\dfrac{\cos(\varphi_1)\cdot\sqrt{1-(\cos(\varphi_1))^2-(\cos(\varphi_2))^2}}{r}\\ \dfrac{1-(\cos(\varphi_2))^2}{r} & -\dfrac{\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)}{r} & -\dfrac{\cos(\varphi_2)\cdot\sqrt{1-(\cos(\varphi_1))^2-(\cos(\varphi_2))^2}}{r}\end{bmatrix}$$

Проводя оценку параметров модели (теорема 2), получим: $\theta = (35067{,}6 \quad 250{,}09 \quad 30065{,}49 \quad 250{,}111 \quad 9954{,}04)^*$. Гарантированное значение критерия $\inf\limits_{F\in\Im} I(F) = 812{,}3$.

Список литературы

1. Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных наблюдений.-М.: Сов. радио, 1978.- 384с.
2. Брандин В.Н., Разоренов Г.Н. Определение траектории космических аппаратов.-М.: Машиностроение, 1978.-216с.
3. Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И. Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов.-М.: Машиностроение, 1989.-312с.
4. Бахшиян Б.Ц., Назтров Р.Р., Эльясберг П.Е. Определение и коррекция движения.-М.: Наука, 1981.-360с.
5. Дмитриевский А.А и др. Баллистика и навигация ракет.-М.: Машиностроение, 1985.-312с.

6. Панков А.Р., Семенихин К.В. Минимаксная идентификация обобщённой неопределённо-стохастической линейной модели.// Автоматика и телемеханика.-1998, №11.-с.158-171.
7. Панков А.Р., Семенихин К.В. Методы параметрической идентификации многомерных линейных моделей в условиях априорной непределённости. // Автоматика и телемеханика.-2000, №5.-с.76-92.
8. Панков А.Р., Миллер Г.Б. Минимаксная линейная рекуррентная фильтрация.// Информационные процессы.- 2001, том 1, №2.-с.150-166.
9. Матасов А.И. Введение в теорию гарантирующего оценивания.-М.: МАИ, 1999.-78с.
10. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума.-М.: Наука, 1982.-144с.
11. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование.-М.: Советское радио, 1973.-312с.
12. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. Том 1.-М.:Мир, 1986.-349с.
13. Eaves B.C., Zangwill W.I. Generalized Cutting Plane Algorithms. // SIAM. J. Control.- 1971,№ 9.-p.529-542.
14. Летова А.Т., Пантелеев А.В. Экстремум функций в примерах и задачах.-М.: МАИ, 1998.-374с.

Сведения об авторах

Панков Алексей Ростиславович, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Московского государственного авиационного института (технического университета), д.ф.-м.н.

Попов Алексей Сергеевич, студент 6-ого курса факультета «Прикладной математики и физики» Московского государственного авиационного института (технического университета).

SSS 1

kljkjlkj
RRR 2
jhgjg
WWW 3
jhhkjh

4