На правах рукописи

Ковалев Николай Владиславович

КАЧЕСТВЕННЫЙ И АСИМТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ НЕКОТОРЫХ КВАЗИКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.02.01 — «Теоретическая механика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель:	**Байков Александр Евгеньевич** кандидат физико-математических наук
Официальные оппоненты:	**Кугушев Евгений Иванович** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Теоретическая механика и мехатроника» ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
	Асланов Владимир Степанович доктор технических наук, профессор, заведующий кафедры «Теоретическая механика» ФГБОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева»
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)»**

Защита состоится 27 декабря 2019 г. в 13:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ: http://www.mai.ru.

Автореферат разослан «___» ___________ 2019 г.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, отдел учёного и диссертационного советов.

Учёный секретарь диссертационного совета Д 212.125.14, кандидат физико-математических наук, доцент В. Ю. Гидаспов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время внимание исследователей всё чаще занимают квазиконсервативные механические системы. Так называется широкий класс голономных систем, в которых наряду с консервативными (потенциальными) силами действуют малые неконсервативные позиционные силы и разной природы малые диссипативные силы, например, силы сухого трения или силы трения вязкого. Теория квазиконсервативных систем разработана недостаточно хорошо, несмотря на большое число приложений. Можно указать целые научно-технические области, где модели реальных систем есть квазиконсервативные системы: проектирование конструкций в машиностроении, строительная механика, авиация, ракетная техника.

Квазиконсервативный характер имеют системы со слабой обратной связью, нелинейные электрические цепи, ансамбли слабо связанных осцилляторов. В диссертационной работе исследуются автономные квазиконсервативные системы с одной степенью свободы. Также рассматриваются квазиконсервативные системы слабо связанных нелинейных (консервативных) осцилляторов.

В некоторых работах по неконсервативной механике обнаружено, что при построении периодического решения, исследовании его устойчивости, оценки области притяжения соответствующего предельного цикла, естественно возникает неавтономный интеграл системы усреднённых уравнений движения. В диссертационной работе устанавливается то, как факт существования периодических решений квазиконсервативной системы можно получить через её неавтономные интегралы. Ввиду того, что построить хотя бы один (нетривиальный) неавтономный интеграл общей квазиконсервативной системы в явном виде возможным не представляется, в работе предлагается метод прямого разложения неавтономных интегралов, обобщающий классический метод малого параметра теории возмущений.

Задачи о движении механических систем с сухим трением в настоящее время очень популярны среди исследователей. Они находят множество приложений, в частности, в создании новых систем передвижения. В третьей и четвёртой главах диссертационной работы исследуются движения некоторых механических систем с сухим трением.

Цель диссертационной работы состоит в применении уже существующих качественных и асимптотических методов исследования квазиконсервативных систем, в том числе, систем с сухим трением, и в создании новых методов исследования динамики систем, основанных на неавтономных интегралах. В диссертационной работе поставлены следующие задачи.

1. Создать метод построения семейства интегралов квазиконсервативной системы в виде прямого разложения в ряд по малому параметру, обобщающий классический метод малого параметра решения задачи Коши в теории возмущений.

2. Найти применение семейства неавтономных интегралов для отыскания периодических решений квазиконсервативных систем с одной степенью свободы, получить конструктивный критерий существования периодических решений.
3. Обобщить метод прямого разложения и критерий существования периодических решений для квазиконсервативных систем слабо связанных нелинейных осцилляторов с n степенями свободы.
4. Рассмотреть поступательные движения ящика с внутренним осциллятором по горизонтальной шероховатой плоскости: найти зону залипания, исследовать характер движений ящика.
5. Рассмотреть кусочно-линейный осциллятор, представляющий собой два соединённых между собой и неподвижными стенками ящика, находящихся на конвейерной ленте. Исследовать уравнения движения методом усреднения, выявить зоны залипания первого и второго ящиков, построить семейство неавтономных интегралов кусочно-линейного осциллятора.

Методы исследований. В диссертационной работе применялись следующие классические методы теории дифференциальных уравнений и теоретической механики: метод малого параметра (для построения семейств неавтономных интегралов) и метод усреднения (для исследования движений кусочно-линейного осциллятора). Обоснование сходимости рядов неавтономных интегралов по малому параметру аналогично результатам А. Пуанкаре о сходимости решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Математическая строгость моделей механических систем с сухим трением основана на понятии решения в смысле А.Ф. Филиппова и доказанных им теорем о существовании и единственности в будущем решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие новые теоретические результаты.

1. Предложен и обоснован метод прямого разложения семейства неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной степенью свободы. Обнаружено, что метод эффективен, если уравнения движения рассмотреть в переменных действие-угол невозмущённой системы.
2. Обоснована сходимость ряда по степеням малого параметра, дающего прямое разложение неавтономного интеграла, если получать соответствующее разложение как решение задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка.
3. Сформулирован и доказан критерий существования периодических решений квазиконсервативных систем в терминах неавтономных интегралов. Эффект от применения критерия обеспечивается предложенным выше методом построения семейства неавтономных интегралов.

4. Полученный выше критерий применён для оценки числа предельных циклов одного частного случая уравнения Льенара.
5. Метод прямого разложения семейства неавтономных интегралов распространён для систем слабо связанных нелинейных осцилляторов с n степенями свободы. Эффективность метода, связанная с переменными действие-угол, сохранилась благодаря разделению переменных в невозмущённой системе, имеющей гамильтонов вид.
6. Обобщён критерий существования периодических решений для систем слабо связанных нелинейных осцилляторов с n степенями свободы.
7. Исследованы поступательные движения ящика с внутренним осциллятором по горизонтальной плоскости: получена зона залипания, дано полное описание движений ящика до сваливания его в зону залипания.
8. Рассмотрен кусочно-линейный осциллятор, представляющий собой два ящика на ленте конвейера, соединённых между собой и неподвижными стенками пружинами. Получены и приведены к безразмерному виду уравнения движения. Найдено а) положение равновесия, б) инвариантные торы системы, в) зоны залипания. Построено множество предельных торов в фазовом пространстве системы.
9. Исследованы усреднённые уравнения движения кусочно-линейного осциллятора, имеющие неявный вид. Доказано, что любая траектория системы, не принадлежащая множествам предельных и инвариантных торов, приближается к множеству предельных торов. Дальнейшая динамика системы связана со сваливанием в зону застоя и движением по предельным торам.
10. Построено семейство неавтономных интегралов системы уравнений движения кусочно-линейно осциллятора.

Научная и практическая значимость полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем.

1. Создание нового метода обнаружения в квазиконсервативных системах периодических движений, критически важных для анализа динамики. Метод основан на построении семейства неавтономных интегралов. Эффективность метода продемонстрирована в задаче об оценке числа предельных циклов одного частного случая уравнения Льенара. Последнее может служить моделью большого числа систем с нелинейной обратной связью, например, нелинейных электрических цепей.
2. Новый метод обнаружения периодических решений обобщён для систем слабо связанных нелинейных осцилляторов с n степенями свободы.
3. Исследована динамика двух кусочно-линейных осцилляторов, представляющих собой модели механических систем с сухим трением Амонтона-Кулона. Результаты представляют интерес при создания новых систем передвижения.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается: 1) строгим использованием классических концепций теоретической механики и адекватного математического аппарата, 2) применением классических аналитических и приближенно-аналитических методов исследования, 3) использованием математического пакета Maple версии 13.0 (Maple build ID 397624).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и научных семинарах: 1) III Международная школа-конференция молодых учёных "Нелинейная динамика машин" (Москва, 2016), 2) Международная конференция "Ломоносов-2018" (Москва, 2018), 3) Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам DIFF2018 (Суздаль, 2018), 4) Семинар "Динамические системы и механика" кафедр 811 и 802 МАИ (Москва, 2019), 5) XLV Международная молодёжная научная конференция "Гагаринские чтения 2019" (Москва, 2019).

Личный вклад. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в диссертационной работе. Также автором выполнены все аналитические и численные расчёты с использованием упомянутых в диссертационной работе методов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных и электронных изданиях, среди которых 1 статья, опубликованная в журнале, индексируемых в Scopus [2], 2 статьи – в журналах, рекомендованных ВАК РФ для представления результатов диссертационного исследования на соискание ученых степеней кандидата наук [1, 3], 1 статья – в сборнике трудов конференции [4], и 3 печатные работы – в тезисах докладов научных конференций [5–7].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из Введения, трёх глав, заключения и приложения с расчётами. Полный объём диссертации составляет 91 страницу с 15 рисунками. Список литературы содержит 39 наименований.

Благодарности. Прежде всего автор хотел бы выразить глубокую благодарность своему научному руководителю Александру Евгеньевичу Байкову за многолетнее внимание к работе и обсуждение кандидатской диссертации на всех этапах ее создания. Автор безгранично признателен родителям Елене Валерьевне и Владиславу Александровичу за неоценимую моральную поддержку, без которой диссертационная работа не была бы завершена.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, описаны методы исследования, обоснована научная новизна и отмечена практическая значимость.

В **первой главе** рассматривается класс автономных квазиконсервативных систем с одной степенью свободы. Невозмущённая система, соответствующая нулевому значению малого параметра ε, есть автономная система Гамильтона с одной степенью свободы. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y(x,y) + \varepsilon f_1(x,y) + \varepsilon^2 f_2(x,y) + \cdots, \\ \dot{y} = -H_x(x,y) + \varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y) + \cdots, \end{cases} \tag{1}$$

где $H(x,y) -$ функция Гамильтона невозмущённой системы, $x -$ координата, $y -$ импульс, $\varepsilon -$ малый параметр, $f_k(x,y)$ и $g_k(x,y) -$ произвольные функции, H_x и $H_y -$ частные производные функции Гамильтона невозмущённой системы по x и y.

В первом параграфе первой главы решается задача о построении неавтономных интегралов системы (1) в виде разложения в ряд по малому параметру ε:

$$I(x,y,t) = H(x,y) + \varepsilon I_1(x,y,t) + \varepsilon^2 I_2(x,y,t) + \cdots. \tag{2}$$

Отметим, что неавтономным интегралом называется функция от фазовых переменных и времени, постоянная на решениях системы. Из критерия неавтономного интеграла следует, что коэффициенты ряда (2) определяются один за другим как решения следующих линейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} + \{I_i, H\} = F_i, \qquad i = 1,2,\ldots, \tag{3}$$

где

$$\frac{\partial I_i}{\partial x} H_y - \frac{\partial I_i}{\partial y} H_x = \{I_i, H\}, \qquad -H_x f_i - H_y g_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial I_k}{\partial x} f_{i-k} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial I_k}{\partial y} g_{i-k} = F_i,$$

$\{I_i, H\} -$ скобка Пуассона. Уравнения (3) есть уравнения в частных производных первого порядка. Хорошо известно, что для интегрирования таких уравнений необходимо найти $(n-1)$ независимых интегралов системы характеристик, где $n\ -$ число фазовых переменных. Поскольку $n = 2$ (число фазовых переменных квазиконсервативной системы с одной степенью свободы), то для интегрирования уравнений и нахождения очередного коэффициента разложения неавтономного интеграла необходимо найти всего один интеграл системы характеристик. В качестве последнего можно взять саму функцию Гамильтона невозмущённой системы $H = H(x,y)$.

К сожалению, упомянутый метод интегрирования уравнений в частных производных первого порядка предполагает не только квадратуры, но и обращение функций. Чтобы обойти сложившиеся препятствие в методе прямого разложения, во втором параграфе первой главы предлагается рассмотреть уравнения движения в переменных действие-угол r и φ невозмущённой системы:

$$\begin{cases} \dot{r} = X_\varphi(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \cdots) - Y_\varphi(\varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots), \\ \dot{\varphi} = \omega(r) + Y_r(\varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots) - X_r(\varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \cdots), \end{cases} \tag{4}$$

где $\omega(r) = H_r -$ частота невозмущённой системы, X_φ, X_r, Y_φ, $Y_r -$ частные производные функций X и Y по соответствующим координатам. В переменных

r и φ функция Гамильтона невозмущённой системы зависит только от действия r. Последнее обстоятельство освобождает от необходимости обращения функций при интегрировании уравнений

$$\varepsilon^i: \ \frac{\partial I_i}{\partial t} + \frac{\partial I_i}{\partial \varphi}\omega(r) = F_i, \qquad i = 1,2, \dots, \tag{5}$$

где

$$F_i = -\omega(r)\left[X_\varphi g_i - Y_\varphi f_i\right] - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial I_k}{\partial r}\left[X_\varphi g_{i-k} - Y_\varphi f_{i-k}\right]$$
$$- \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi}\left[Y_r f_{i-k} - X_r g_{i-k}\right].$$

Решения уравнений (5) есть коэффициенты разложения неавтономного интеграла системы (4) в ряд по малому параметру ε:

$$I(r,\varphi,t) = H(r) + \varepsilon I_1(r,\varphi,t) + \varepsilon^2 I_2(r,\varphi,t) + \cdots. \tag{6}$$

Итак, в переменных действие-угол невозмущённой системы метод прямого разложения неавтономного интеграла эффективен и его можно применять в практических задачах об исследовании динамики квазиконсервативных систем, где необходимо построить неавтономные интегралы.

В третьем параграфе первой главы рассмотрен вопрос о сходимости рядов прямого разложения неавтономных интегралов. Метод, изложенный выше, даёт формальный ряд – для его построения не требуется сходимость рядов правых частей уравнения движения. Однако, для дальнейшего применения неавтономных интегралов метод прямого разложения должен быть обоснован. Мы развиваем классические результаты А. Пуанкаре по обоснованию метода малого параметра[1], где в доказательстве используется метод мажорант. В предположении сходимости рядов правых частей уравнений движения квазиконсервативной системы сформулирована и доказана теорема о сходимости рядов прямого разложения при условии сходимости правых частей уравнений движения и в том предположении, что неавтономный интеграл удовлетворяет при $t = 0$ аналитическому относительно малого параметра ε начальному условию:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\} + f(x,y,\varepsilon)\frac{\partial I}{\partial x} + g(x,y,\varepsilon)\frac{\partial I}{\partial y} = 0, \qquad I|_{t=0} = \phi(x,y,\varepsilon). \tag{7}$$

<u>Теорема 1</u>. Пусть ряды для правых частей системы (1) $f(x,y,\varepsilon) = \varepsilon f_1(x,y) + \cdots$, $g(x,y,\varepsilon) = \varepsilon g_1(x,y) + \cdots$ и ряд для начальной функции задачи (7)

[1] *Пуанкаре А.* Избранные труды в трёх томах. Т.1: Новые методы небесной механики, М.: Наука 1971, 772 с.

$\phi(x,y,\varepsilon) = H(x,y) + \varepsilon\phi_1(x,y) + \cdots$ равномерно сходятся в окрестности точки (x_0, y_0). Тогда существует окрестность точки $(x_0, y_0, 0)$, в которой прямое разложение решения задачи (7) сходится равномерно.

В четвёртом параграфе первой главы в виде теоремы сформулирован и доказан критерий существования периодических решений квазиконсервативных систем с одной степенью свободы в терминах неавтономных интегралов.

Теорема 2. Пусть $I(r,\varphi,t)$, $J(r,\varphi,t) -$ два независимых неавтономных интеграла системы (4). Тогда если для R и T выполнены равенства

$$\begin{cases} I(R,\varphi_0,0) = I(R,\varphi_0 + 2\pi, T), \\ J(R,\varphi_0,0) = J(R,\varphi_0 + 2\pi, T), \end{cases}$$

то R и $\varphi_0 -$ начальные условия решения $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ системы (4), соответствуещего T-периодическому решению $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы (1).

Период T и начальное условие действия R находятся в виде разложения в ряд по малому параметру:

$$R = r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \cdots, \qquad T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \cdots.$$

В пятом параграфе полученный критерий существования периодических решений применён к исследованию уравнению Дюффинга

$$\ddot{x} + \varepsilon x^3 + x = 0. \tag{8}$$

Как хорошо известно, уравнение (8) имеет континуальное множество периодических решений, начальное условие действия $r(0) = r_0$ определяется как параметр, не зависящий от ε. Для уравнения (8) построено семейство неавтономных интегралов и найден период решений в виде разложений в ряд по малому параметру.

Шестой параграф первой главы посвящён оценки числа предельных циклов одного класса уравнений Льенара:

$$\ddot{x} + \varepsilon P^{(N)}(x)\dot{x} + x = 0, \tag{9}$$

где

$$P^{(N)}(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n,$$

$a_n -$ коэффициенты полинома $P^{(N)}(x)$, $\varepsilon -$ малый параметр.

Для уравнения (9) построено семейство неавтономных интегралов и при помощи теоремы 2 дана оценка числа предельных циклов.

Во **второй главе** рассматривается класс автономных квазиконсервативных систем с $n \geq 2$ степенями свободы, представляющих собой n нелинейных осцилляторов, слабо связанных неконсервативными возмущениями. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \dfrac{\partial H_k}{\partial y_k} + \varepsilon f_{1k}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) + \varepsilon^2 f_{2k}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) + \cdots \\ \dot{y}_k = -\dfrac{\partial H_k}{\partial x_k} + \varepsilon g_{1k}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) + \varepsilon^2 g_{2k}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) + \cdots \\ k = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{10}$$

где функция Гамильтона невозмущённой системы представляет собой сумму функций Гамильтона каждого осциллятора:

$$H = H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = H_1(x_1, y_1) + \cdots + H_n(x_n, y_n) = H_1 + \cdots + H_n. \tag{11}$$

В первом параграфе второй главы рассматривается задача построения для системы (10) неавтономных интегралов в виде разложения в ряд по малому параметру ε:

$$\begin{gathered} I(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) = H_1(x_1, y_1) + \cdots + H_n(x_n, y_n) + \\ +\varepsilon \left[I_1^{(1)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) + I_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) \right] + \\ +\varepsilon^2 \left[I_2^{(1)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) + \cdots + I_2^{(n)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) \right] + \cdots \end{gathered} \tag{12}$$

Из критерия неавтономного интеграла следует, что коэффициенты ряда (12) определяются один за другим как решения следующих линейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\varepsilon^i: \ \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial t} + \left\{ I_i^{(k)}, H \right\} = F_i, \qquad i = 1,2, \dots, \tag{13}$$

где

$$\left\{ I_i^{(k)}, H \right\} = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial x_l} \frac{\partial H_l}{\partial y_l} - \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial y_l} \frac{\partial H_l}{\partial x_l} \right),$$

$$F_i = -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} f_{ik} - \frac{\partial H_1}{\partial y_k} g_{ik} - \sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{i-1} \left(\frac{\partial I_l^{(k)}}{\partial x_m} f_{(i-l)m} + \frac{\partial I_l^{(k)}}{\partial y_m} g_{(i-l)m} \right).$$

Уравнение (13) имеет тот же тип, что и уравнение (3) из первой главы. Напомним, что интегрирование уравнения (3), и, следовательно, уравнения (13), подразумевает обращение функций.

Из устройства функции Гамильтона (11) следует интегрируемость по Лиувиллю[2] невозмущённой системы. Более того, возможно разделение переменных и эффективное введение переменных действие-угол. Во втором параграфе второй главы предлагается рассмотреть уравнения движения в переменных действие-угол $r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ невозмущённой системы:

[2] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики, М.: Едиториал УРСС, 2003, 416 с.

$$\begin{cases} \dot{r}_k = \dfrac{\partial X_k}{\partial \varphi_k}(\varepsilon g_{1k} + \varepsilon^2 g_{2k} + \cdots) - \dfrac{\partial Y_k}{\partial \varphi_k}(\varepsilon f_{1k} + \varepsilon^2 f_{2k} + \cdots), \\ \dot{\varphi}_k = \omega_k(r_k) + \dfrac{\partial Y_k}{\partial r_k}(\varepsilon f_{1k} + \varepsilon^2 f_{2k} + \cdots) - \dfrac{\partial X_k}{\partial r_k}(\varepsilon g_{1k} + \varepsilon^2 g_{2k} + \cdots), \\ k = 1,2,\dots,n, \end{cases} \tag{14}$$

где $\omega_k(r_k) = \frac{\partial H_k}{\partial r_k}$ – частота k-го осциллятора, а функция Гамильтона невозмущённой системы в новых переменных зависит только от переменных действия $r_1, \dots, r_n$ и имеет вид

$$H = H(r_1, \dots, r_n) = H_1(r_1) + \cdots + H_n(r_n) = H_1 + \cdots + H_n.$$

Последнее обстоятельство освобождает от необходимости обращения функций при интегрировании уравнений

$$\frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial \varphi_1}\omega_1(r_1) + \cdots + \frac{\partial I_i^{(k)}}{\partial \varphi_n}\omega_n(r_n) = F_i^{(k)}, \qquad i = 1,2,\dots, \tag{15}$$

где

$$F_i^{(k)} = -\omega_k(r_k)\left[\frac{\partial X_k}{\partial \varphi_k}g_{ik} - \frac{\partial Y_k}{\partial \varphi_k}f_{ik}\right] - \sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{i-1}\left(\frac{\partial I_l^{(k)}}{\partial r_m}\left[\frac{\partial X_m}{\partial \varphi_m}g_{(i-l)m} - \frac{\partial Y_m}{\partial \varphi_m}f_{(i-l)m}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{\partial I_l^{(k)}}{\partial \varphi_m}\left[\frac{\partial Y_m}{\partial r_m}f_{(i-l)m} - \frac{\partial X_m}{\partial r_m}g_{(i-l)m}\right]\right).$$

Решения уравнений (15) есть коэффициенты разложения неавтономного интеграла системы (14) в ряд по малому параметру ε:

$$\begin{gathered} I(r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n, t) = H_1(r_1) + \cdots + H_n(r_n) + \\ +\varepsilon\left[I_1^{(1)}(r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n, t) + \cdots + I_1^{(n)}(r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n, t)\right] + \\ +\varepsilon^2\left[I_2^{(1)}(r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n, t) + \cdots + I_2^{(n)}(r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n, t)\right] + \cdots \end{gathered} \tag{16}$$

В третьем параграфе второй главы теорема 2 обобщена на квазиконсервативные системы слабо связанных осцилляторов с $n \geq 2$ степенями свободы.

<u>Теорема 3.</u> Пусть $I_1(r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n, t), \dots,$ $I_{2n}(r_1, \dots, r_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n, t)$ – $2n$ независимых неавтономных интегралов системы (14). Тогда если выполняется

$$\begin{cases} I_1\left(R_0^{(1)},\dots,R_0^{(n)},\Phi_0^{(1)},\dots,\Phi_0^{(n)},0\right) = \\ \qquad\qquad = I_1\left(R_0^{(1)},\dots,R_0^{(n)},\Phi_0^{(1)}+2\pi l_1,\dots,\Phi_0^{(n)}+2\pi l_n,T\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ I_{2n}\left(R_0^{(1)},\dots,R_0^{(n)},\Phi_0^{(1)},\dots,\Phi_0^{(n)},0\right) = \\ \qquad\qquad = I_{2n}\left(R_0^{(1)},\dots,R_0^{(n)},\Phi_0^{(1)}+2\pi l_1,\dots,\Phi_0^{(n)}+2\pi l_n,T\right), \end{cases}$$

то $R_0^{(1)}$,…, $R_0^{(n)}$, $\Phi_0^{(1)}$,…, $\Phi_0^{(n)}$ – начальные условия решения $r_1 = r_1(t)$,…, $r_n = r_n(t)$, $\varphi_1 = \varphi_1(t)$,…, $\varphi_n = \varphi_n(t)$ системы (14), соответствующего T-периодическому решению $x_1 = x_1(t)$,…, $x_n = x_n(t)$, $y_1 = y_1(t)$,…, $y_n = y_n(t)$ системы (10).

Период T и начальные условия действий $R_0^{(1)}$,…, $R_0^{(n)}$ находятся в виде разложения в ряд по малому параметру:

$$R_0^{(k)} = \rho_0^{(k)} + \varepsilon\rho_1^{(k)} + \varepsilon^2\rho_2^{(k)} + \cdots, \qquad T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \cdots,$$
$$k = 1,2,\dots n.$$

Начальные условия углов $\Phi_0^{(1)}$,…, $\Phi_0^{(n)}$ в ряд не раскладываются; более того, одно из них можно взять произвольным и считать известным.

Во **третьей главе** рассматривается задача об исследовании движений некоторых кусочно-линейных систем, представляющие собой модели механических систем с силами сухого трения Амонтона-Кулона. В первом параграфе третьей главы разобран пример простой системы: ящик, закреплённый пружинами к неподвижным стенкам, который находится на подвижной ленте конвейера (рисунок 1).

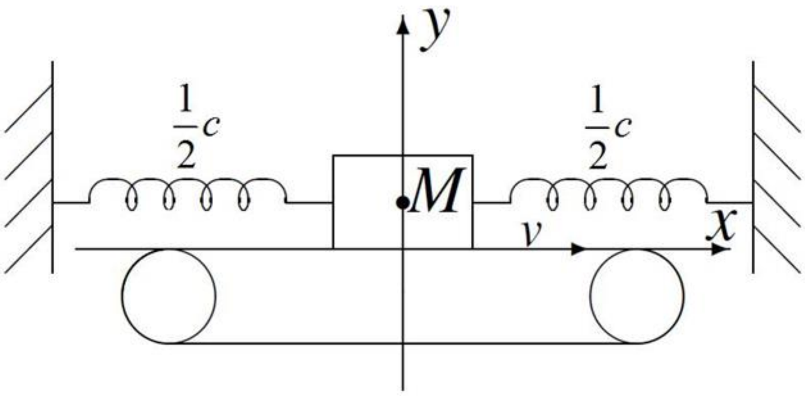

Рисунок 1 – Ящик на ленте конвейера.

Для этой системы получено и приведено к безразмерному виду уравнение движения, найдена зона залипания ящика на подвижной ленте конвейера и продемонстрирован выход на финальный режим движения, представляющий собой предельный цикл. Описаны траектории системы и построен фазовый портрет (рисунок 2), где зона залипания выделена красным, внутренние окружности – жёлтыми, предельная окружность – фиолетовым, прочие траектории маркированы синим цветом.

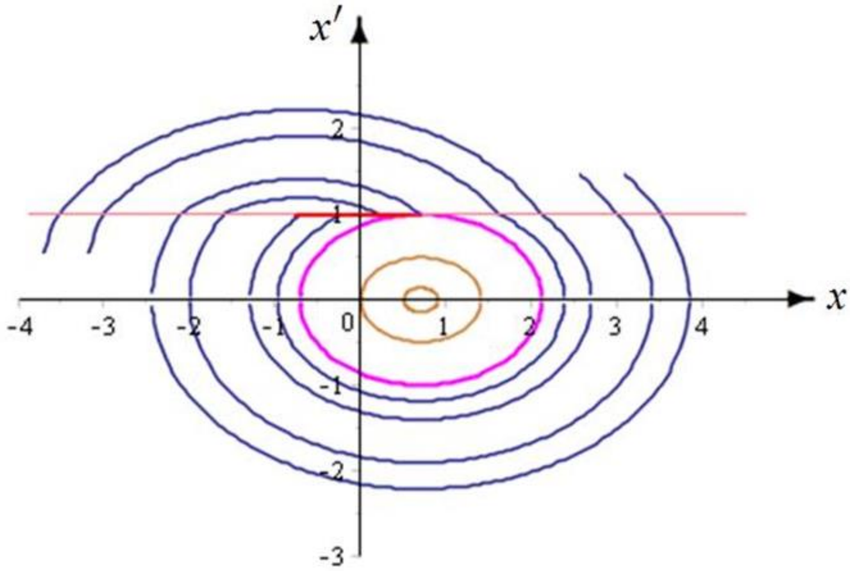

Рисунок 2 ─ Фазовый портрет ящика на конвейерной ленте.

Во втором параграфе третьей главы изучаются поступательные движения ящика на горизонтальной плоскости, внутри которого на закреплённой горизонтальной невесомой спице движется материальная точка, присоединённая к точкам крепления спицы пружинами (рисунок 3).

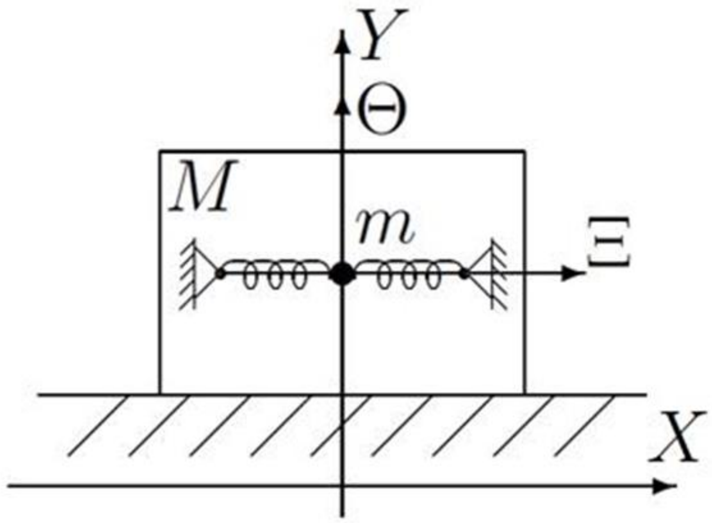

Рисунок 3 – Ящик с внутренним осциллятором на горизонтальной плоскости.

Энергия в этой системе убывает из-за отрицательной работы сил трения. Получены и приведены к безразмерному виду уравнения движения, найдена зона залипания ящика на горизонтальной плоскости. На основании численных экспериментов по построению траекторий изучаемой системы для некоторых частных начальных условий можно сделать следующий вывод относительно финальных движений ящика. Вначале ящик поступательно движется по плоскости в одну сторону. Затем, теряя энергию из-за трения, первый раз оказывается в зоне залипания, но наличие внутреннего осциллятора делает возможным выход ящика из зоны залипания (если материальная точка движется по синей дуге эллипса). После выхода из зоны залипания ящик начинает движение в другую сторону и через некоторое время вновь оказывается в зоне залипания. Через конечное число таких итераций ящик оказывается в зоне залипания, но материальная точка движется уже по внутреннему (или предельному) эллипсу, поэтому ящик остаётся в зоне залипания навечно. Построен фазовый портрет, где внутренние окружности выделены красным цветом, предельная окружность – зелёным, прочие траектории маркированы синим цветом (рисунок 4).

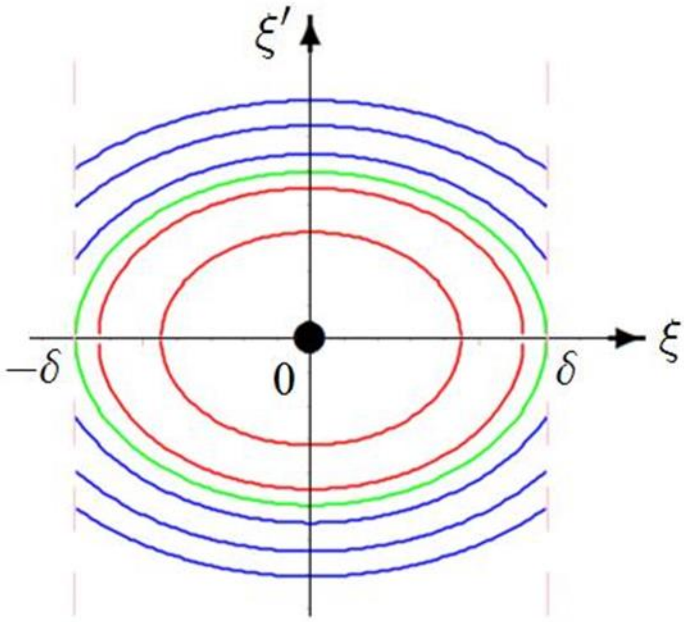

Рисунок 4 – Движение материальной точки в зоне залипания ящика.

В третьем параграфе третьей главы обоснована математическая корректность исследуемой модели. Решение в смысле А.Ф. Филиппова и теорема о существовании и единственности в будущем времени решения задачи Коши[3] дают такое обоснование и позволяют говорить о финальных движениях системы.

В **четвёртой главе** исследуется система двух соединенных пружиной ящиков на ленточном конвейере. Также ящики соединены пружинами с ближайшими стенками (рисунок 5). Между ящиками и лентой действует силы сухого трения Амонотона-Кулона с малым коэффициентом трения.

---

[3] *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, М.: Наука, 1985, 224 с.

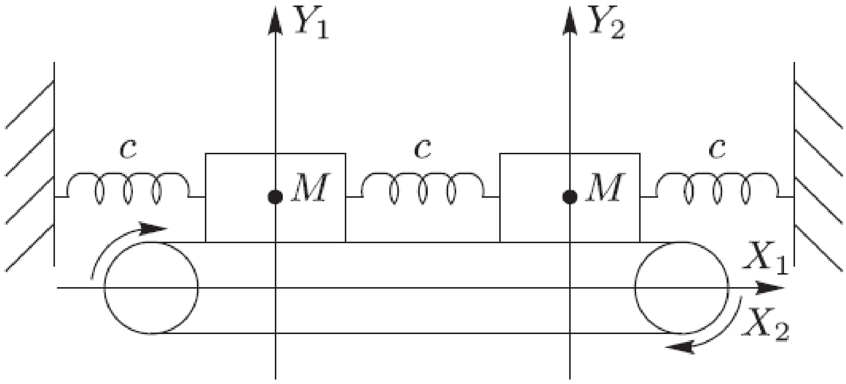

Рисунок 5 – Система из двух ящиков на конвейерной ленте.

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} M\ddot{X}_1 + cX_1 - c(X_2 - X_1) = -fgM\,\mathrm{sign}\big(\dot{X}_1 - v\big), \\ M\ddot{X}_2 + cX_2 - c(X_1 - X_2) = -fgM\,\mathrm{sign}\big(\dot{X}_2 - v\big), \end{cases} \tag{17}$$

В первом параграфе уравнения (17) получены в безразмерном виде, в главных координатах и, наконец, в переменных действие-угол невозмущённой системы $r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2$ (соответствующей нулевому значению коэффициента сухого трения):

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = -\dfrac{\delta\sqrt{r_1}\cos(\varphi_1)}{\sqrt{2}} P_1, \\ \dot{\varphi}_1 = 1 + \dfrac{\delta\sin(\varphi_1)}{2\sqrt{2r_1}} P_1, \\ \dot{r}_2 = -\dfrac{\delta\sqrt{r_2}\cos(\varphi_2)}{\sqrt{2\sqrt{3}}} P_2, \\ \dot{\varphi}_2 = \sqrt{3} + \dfrac{\delta\sin(\varphi_2)}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2r_2}} P_2, \end{cases} \tag{18}$$

где

$$\begin{gathered} P_1 = \mathrm{sign}\left(\sqrt{2r_1}\cos(\varphi_1) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2}\cos(\varphi_2) - 1\right) + \\ + \mathrm{sign}\left(\sqrt{2r_1}\cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}\cos(\varphi_2) - 1\right) + 2, \\ P_2 = \mathrm{sign}\left(\sqrt{2r_1}\cos(\varphi_1) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2}\cos(\varphi_2) - 1\right) - \\ - \mathrm{sign}\left(\sqrt{2r_1}\cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}\cos(\varphi_2) - 1\right). \end{gathered} \tag{19}$$

Уравнения движения кусочно-линейны, поэтому легко локально решаются (и даже глобально в областях непрерывности), однако анализ динамики затруднен из-за отсутствия общего решения во всём фазовом пространстве. Во втором параграфе четвёртой главы движения системы исследуются методом усреднения. Усреднённые уравнения для r_1 и r_2 системы (18) имеют неявный вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}}_1 = -\dfrac{\delta\sqrt{r_1}}{(2\pi)^2\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\varphi_1)P_1 d\varphi_1 d\varphi_2, \\ \dot{\bar{r}}_2 = -\dfrac{\delta\sqrt{r_2}}{(2\pi)^2\sqrt{2\sqrt{3}}}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\varphi_2)P_2 d\varphi_1 d\varphi_2. \end{cases} \tag{20}$$

К сожалению, правые части усреднённых уравнений (20) удалось представить только в квадратурах, но не в явном виде. Однако, тонким анализом неявных правых частей усреднённых уравнений движения было доказано стремление траекторий к множеству в фазовом пространстве, состоящему из так называемых предельных торов. Последнее множество есть граница области инвариантных торов — о них речь идёт в следующем параграфе четвёртой главы.

В третьем параграфе четвёртой главы аналитически определяется область фазового пространства кусочно-линейного осциллятора, где фазовый поток расслаивается на двумерные инвариантные торы:

$$\sqrt{2r_1} + \sqrt{2\sqrt{3}r_2} < 1, \qquad r_1 \geq 0, \qquad r_2 \geq 0. \tag{21}$$

Поскольку частоты угловых переменных невозмущённой задачи не соизмеримы (независимы над рациональными числами), каждая из траекторий в области (21) равномерно и всюду плотно обматывает свой инвариантный тор. Существование инвариантных торов также вытекает из усреднённых уравнений движения, но поскольку все они вырожденные, для установления существования торов полной системы потребовались бы дополнительные исследования.

Четвёртый параграф четвёртой главы посвящён исследованию зон залипания ящиков на конвейерной ленте. Отметим, что зоны залипания систем с разрывными правыми частями в принципе не определяются из усреднённых уравнений движения (19). Зоны залипания ящиков построены в безразмерных переменных и в переменных действие-угол $r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2$ невозмущённой системы. Условия залипания ящиков были рассмотрены на множестве предельных торов (оказалось, что зона залипания одного из ящиков касается ровно в одной точке каждого предельного тора) и вне области инвариантных торов. Для последнего случая построены бифуркационные кривые, определяющие изменения сечений зон залипания.

В пятом параграфе четвёртой главы рассмотрена задача о построении семейства неавтономных интегралов кусочно-линейного осциллятора. Прямое разложение неавтономных интегралов находится по алгоритму, предложенному во второй главе диссертационной работы. Уравнения для определения первых неизвестных коэффициентов разложения неавтономного интеграла $I_1^{(1)}$ и $I_1^{(2)}$ имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I_1^{(1)}}{\partial t} + \dfrac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \varphi_1} + \sqrt{3}\dfrac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \varphi_2} = \dfrac{\sqrt{r_1}\cos(\varphi_1)}{\sqrt{2}} P_1, \\ \dfrac{\partial I_1^{(2)}}{\partial t} + \dfrac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \varphi_1} + \sqrt{3}\dfrac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \varphi_2} = \dfrac{\sqrt{r_2}\cos(\varphi_2)}{\sqrt{2\sqrt{3}}} P_2. \end{cases} \tag{22}$$

Первое уравнение системы (22) интегрируется по переменной φ_1 при фиксированной переменной φ_2:

$$I_1^{(1)} = \int_{\varphi_1^{(0)}}^{\varphi_1^*} \frac{\sqrt{r_1}\cos(\varphi_1)}{\sqrt{2}} P_1 d\varphi_1. \tag{23}$$

Второе уравнение интегрируется по φ_2 при фиксированной φ_1:

$$I_1^{(2)} = \int_{\varphi_2^{(0)}}^{\varphi_2^*} \frac{\sqrt{r_2}\cos(\varphi_2)}{\sqrt{2\sqrt{3}}} P_2 d\varphi_2. \tag{24}$$

Из-за разрывности функций P_1 и P_2, определяемых уравнениями (19), плоскость $0r_1r_2$ пришлось разделить на шесть зон, в каждой из которых коэффициенты квадратур (23) и (24) определяются по-разному (рисунок 6).

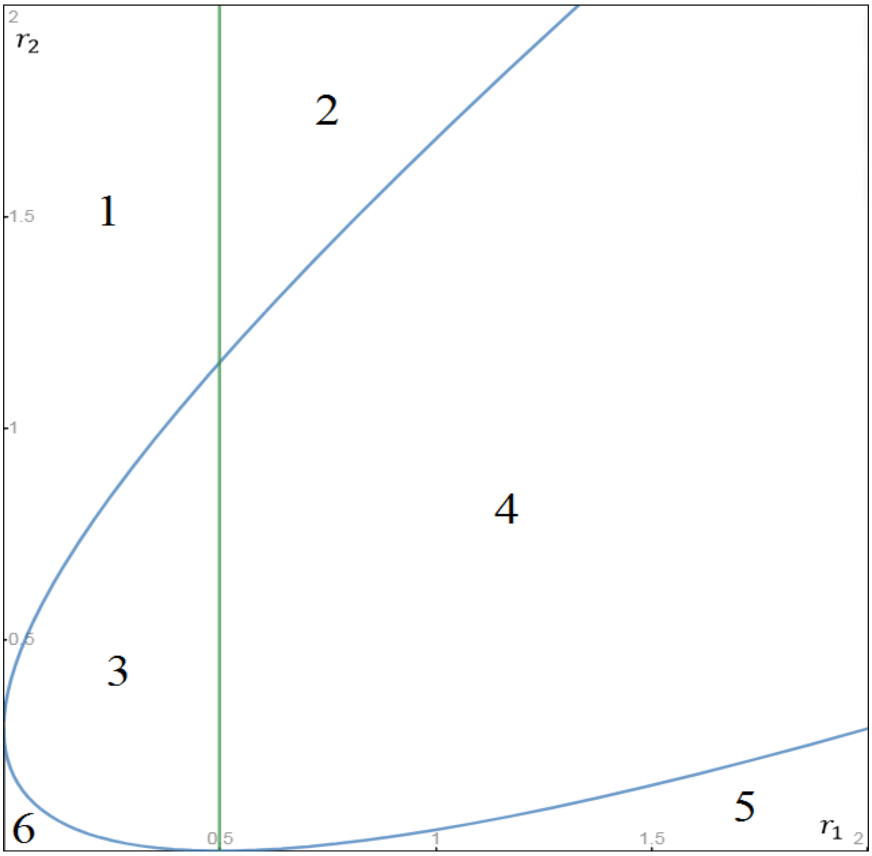

Рисунок 6 – Шесть зон на плоскости $0r_1r_2$.

Для решения задачи был проведён качественный анализ положения кривых разрыва

$$A\colon \sqrt{2r_1}\cos(\varphi_1) + \sqrt{2\sqrt{3}r_2}\cos(\varphi_2) = 1,$$
$$B\colon \sqrt{2r_1}\cos(\varphi_1) - \sqrt{2\sqrt{3}r_2}\cos(\varphi_2) = 1 \qquad (25)$$

на двумерном торе T^2 в каждой из 6 зон, выделенных на плоскости $0r_1r_2$. Выделив на торе T^2 такие участки, на которых функции P_1 и P_2 принимают постоянные значения и зафиксировав нужные параметры, удалось рассчитать первые неизвестные коэффициенты разложения неавтономного интеграла $I_1^{(1)}$ и $I_1^{(2)}$ по формулам (23), (24). Картина расположения кривых (25) на торе T^2 в зоне 1 представлена на рисунке 7.

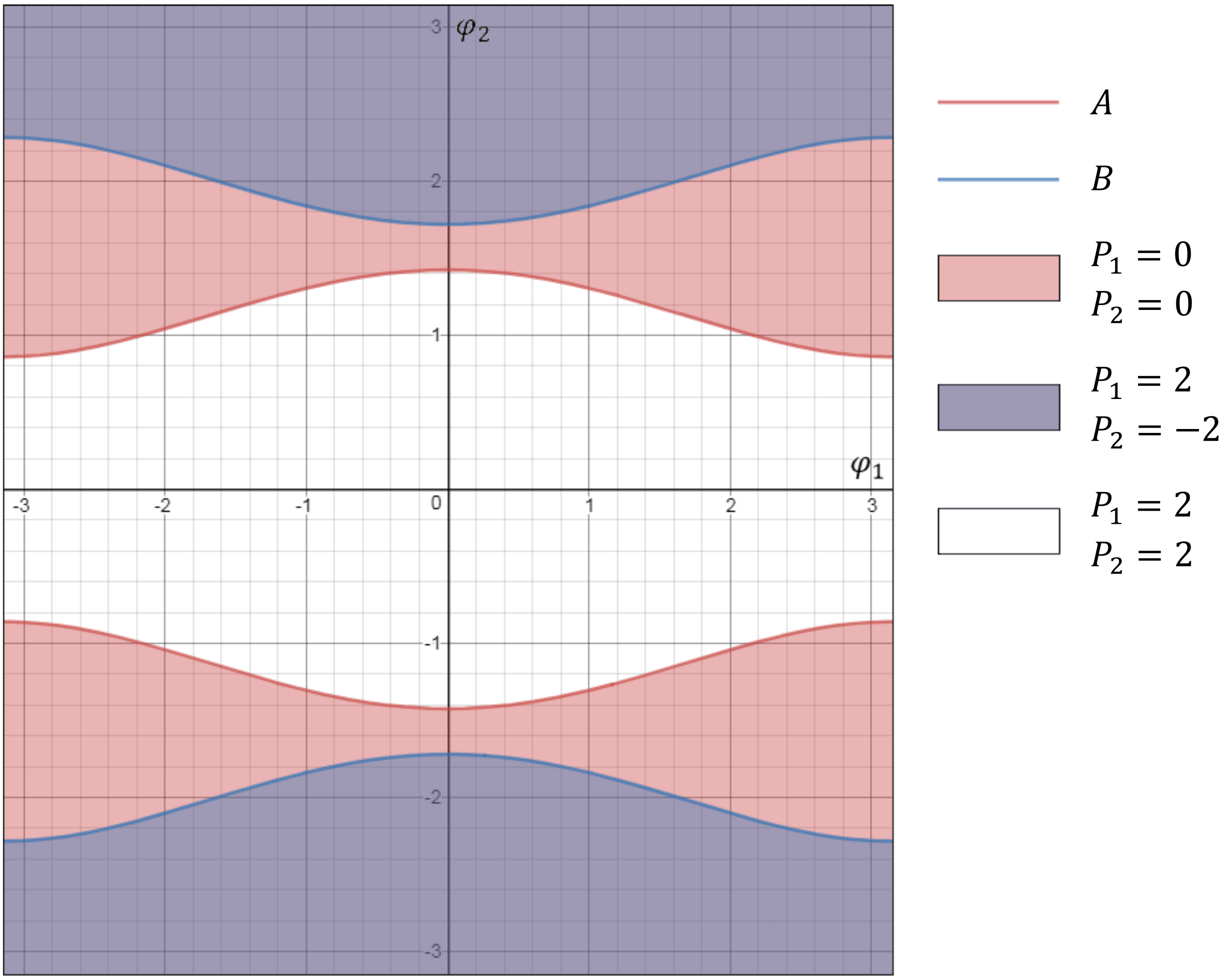

Рисунок 7 – Положение кривых (25) на торе T^2 в зоне 1.

В пятом параграфе представлен результат расчётов коэффициентов разложения неавтономного интеграла до первого порядка малости включительно только в зоне 1. Расчёт коэффициентов разложения в других зонах приведён в приложении А диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Разработан метод построения семейства неавтономных интегралов квазиконсервативной системы с одной степенью свободы в виде прямого разложения в ряд по малому параметру, обобщающий классический метод малого параметра из теории возмущений. Установлена эффективность данного метода в переменных действие-угол невозмущённой системы.
2. Сформулирован и доказан критерий существования периодических решений квазиконсервативных систем с одной степенью свободы в терминах неавтономных интегралов. Критерий был успешно применён для определения континуального множества периодических решений уравнения Дюффинга и для оценки числа предельных циклов одного класса уравнений Льенара.
3. Метод прямого разложения неавтономных интегралов и критерий существования периодических решений обобщены на квазиконсервативные системы с двумя или большим числом степеней свободы, представляющие собой слабо связанные неконсервативными возмущениями нелинейные осцилляторы.
4. Найдена зона залипания, исследован характер движений ящика с внутренним осциллятором по горизонтальной шероховатой плоскости.
5. Методом усреднения исследованы уравнения движения кусочно-линейного осциллятора, представляющего собой два соединённых между собой и неподвижными стенками ящика, находящихся на ленте конвейера. Между ящиками и лентой действовали силы сухого трения Амонтона-Кулона. Доказано притяжение траекторий системы к множеству предельных торов – границе области инвариантных торов. Инвариантные торы, а также зоны залипания ящиков на конвейерной ленте найдены точными методами.
6. Методом прямого разложения, с точностью до первого порядка малости относительно безразмерного коэффициента сухого трения построено семейство неавтономных интегралов кусочно-линейного осциллятора во всём фазовом пространстве.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах из перечня ВАК

1. *Ковалев Н. В.* Прямое разложение неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной степенью свободы // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 3. С. 32–40.
2. *Байков А. Е., Ковалев Н. В.* Исследование динамики кусочно-линейного осциллятора с двумя степенями свободы // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, №4. С. 533-542.
3. *Байков А. Е., Ковалев Н. В.* О зоне залипания ящика с внутренним осциллятором на горизонтальной плоскости // Труды МАИ. 2019. №107.

Публикации в других изданиях

4. *Байков А. Е., Ковалев Н. В.* Неавтономные интегралы и периодические решения квазиконсервативных систем // III Международная школа-конференция молодых учёных «Нелинейная динамика машин». Сборник трудов. 2016. С. 163-171.
5. *Байков А. Е., Ковалев Н. В.* Применение неавтономных интегралов для исследования динамики кусочно-линейного осциллятора // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2018». 2018.
6. *Байков А. Е., Ковалев Н. В.* Методы построения и приложения неавтономных интегралов квазиконсервативных систем // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (DIFF2018). Сборник тезисов докладов. 2018. С. 35-36.
7. *Байков А. Е., Ковалев Н. В.* Приложение неавтономных интегралов к исследованию динамики кусочно-линейных осцилляторов // Сборник тезисов докладов XLV Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения-2019» 2019. С. 755-756.