

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)»

*На правах рукописи*



**Тихоновец Алена Васильевна**

**РАЗРАБОТКА КОМБИНИРОВАННОЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЙ ВЫСОКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ  
НЕРАВНОВЕСНОСТИ**

*Специальность: 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы*

**АВТОРЕФЕРАТ**

Диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2020 год

Работа выполнена на кафедре «Аэродинамика летательных аппаратов» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: **Никитченко Юрий Алексеевич**, доктор физико-математических наук, с.н.с. федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Официальные оппоненты: **Кузнецов Михаил Михайлович**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической физики государственного образовательного учреждения высшего образования Московской области «Московский государственный областной университет»

**Борзенко Евгений Иванович**, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения физико-технического факультета федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет»

Ведущая организация: Государственный научный центр Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского»

Защита диссертации состоится «11» декабря 2020 г. в 12 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, А-80, ГСП-3, МАИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и на сайте МАИ по ссылке [https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=117686](https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=117686)

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

Отзывы на автореферат в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, Ученый совет МАИ.

Ученый секретарь диссертационного совета,

Д 212.125.14., к.ф.м.н, с.н.с



Гидаспов В.Ю.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность темы исследования.**

Современные аэрокосмические, вакуумные и нанотехнологии, а также ряд других областей техники нуждаются в совершенствовании вычислительных методов и математических моделей течений газа в широком интервале значений плотности, скорости, температур, чисел Маха и Кнудсена.

Особенностью ряда газодинамических процессов является их существенная неравновесность, обусловленная быстрыми изменениями параметров газа, т.е. малым временем протекания этих процессов. Под термином «неравновесное состояние» будем понимать такое состояние газовой среды, при котором функция распределения молекул по скоростям существенно отличается от равновесной (локально-максвелловской) функции распределения. В неравновесной газовой среде энергия неравномерно распределена между степенями свободы молекул, как поступательными, так и внутренними. Исследование таких неравновесных состояний представляет большие математические трудности, а разработка методов описания неравновесных течений оказывается в числе наиболее актуальных задач современной аэромеханики и газовой динамики.

Проблема постановки граничных условий на твердой поверхности для уравнений вязкого теплопроводного газа становится весьма актуальной в случае гиперзвуковых и умеренно разреженных течений. Сильный разогрев поверхностей, возникающий, например, при гиперзвуковом обтекании летательного аппарата, активизирует хемосорбционные процессы на его поверхности. Технологии получения химически чистых веществ широко используют конденсацию отдельных компонент газовой смеси на охлаждаемых, часто – криогенных, поверхностях разделительной установки. Простейшим устройством, использующим конденсационные процессы для выделения одной из компонент смеси, является бытовой кондиционер.

Существенный интерес представляет задача обтекания поверхностей большой кривизны «острых кромок». В окрестности этой поверхности даже при умеренных сверхзвуковых течениях возникает высокоградиентная область, характеризующаяся высокой степенью неравновесности газовой среды. При расчете гиперзвуковых течений решение этой задачи становится принципиально важным.

**Степень разработанности темы** определяется тем, что имеется достаточно большое количество теоретических работ, описывающих разнообразные физико-математические модели динамики газовой среды.

Гибридные модели, объединяющие кинетические уравнения (для описания пристеночной области течения) и классические гидродинамические модели (для описания остального поля течения) позволяют оптимизировать описание и по степени неравновесности, и по экономичности.

**Цель диссертационной работы** – разработка физико-математической модели, объединяющей кинетическое и гидродинамическое описание течения, и повышение её вычислительной экономичности.

Для достижения поставленной цели **были решены следующие задачи:**

- Разработка метода сшивания (комбинирования) кинетической и гидродинамической моделей применительно к многоатомным газам.
- Разработка метода решения модельного кинетического уравнения (*МКЕ*), не требующего сохранения значений функции распределения во всей вычислительной области.
- Тестирование комбинированной модели в области течений высокой динамической неравновесности.
- Анализ и обобщение результатов.
- Выработка рекомендаций.

**Объект исследования** – течения высокой степени неравновесности.

**Предмет исследования** – физико-математические модели неравновесных течений однокомпонентных газов.

**Научная новизна** диссертационной работы состоит в следующем:

- Разработана комбинированная физико-математическая модель течения многоатомного газа, обеспечивающая гладкое решение в области сшивания кинетической и гидродинамической составляющей.
- Сформулированы условия гладкости решения.
- Предложен метод решения кинетической составляющей комбинированной модели, позволяющий существенно сократить необходимый объем оперативной памяти вычислительного устройства.
- Получено поле течения вблизи поглощающей газ поверхности при малых числах Кнудсена.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Физико-математическая модель течения и метод ее численной реализации могут быть использованы:

- при изучении сильно неравновесных течений;
- при разработке вычислительных ядер CFD-пакетов.

**Реализация результатов работы.**

Результаты работы использованы в учебном процессе МАИ:

- в курсе «Динамика неравновесных сред», читаемом студентам специальности 24.03.03
- в курсе «Современные модели неравновесных течений», читаемом аспирантам специальности 05.07.01.

**Методология и методы исследования.**

В работе применялся аналитический метод исследования. Для изучения свойств полученной гибридной модели использовался метод численного эксперимента.

**Достоверность полученных результатов** подтверждена сравнением полученных расчетных данных с данными экспериментальных и расчетных исследований разных авторов.

**На защиту выносятся:**

- Комбинированная кинетико-гидродинамическая модель (*КНМ*) однокомпонентных газов.

- Методика повышения экономичности вычислительного процесса при реализации кинетической составляющей комбинированной модели.

- Рекомендации по выбору размера кинетической области при расчете ударных волн.

**Соответствие паспорту специальности.**

Содержание диссертации полностью соответствует задачам, указанным в паспорте специальности 01.02.05 «Механика жидкости, газа и плазмы».

Разработанный в работе метод сшивания (комбинирования) кинетической и гидродинамической моделей применительно к многоатомным газам соответствует областям, указанным в пунктах 5: «Динамика разреженных газов и молекулярная газодинамика» и 18: «Аналитические, асимптотические и численные методы исследования уравнений кинетических и континуальных моделей однородных и многофазных сред (конечно-разностные, спектральные, методы конечного объема, методы прямого моделирования и др.)» паспорта.

Методика получения поля течения вблизи поглощающей газ поверхности при малых числах Кнудсена соответствует пункту 8: «Физико-химическая гидромеханика (течения с химическими реакциями, горением, детонацией, фазовыми переходами, при наличии излучения и др.)» паспорта.

**Апробация и внедрение результатов.**

Материалы работы докладывались:

- Гагаринские чтения – 2016: XLII Международная молодёжная научная конференция. Доклад «Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта»

- INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL SCIENCE 2019 (ICCS 2019), июнь 2019, Фару, Португалия. Доклад «Special Aspects of Hybrid Kinetic-Hydrodynamic Model When Describing the Shape of Shockwaves»

- INTERNATIONAL CONGRESS ON INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGY 2020 (ICICT 2020), февраль 2020, Лондон, Великобритания. Доклад «Active Surface Calculation Method Using Kinetic-Hydrodynamic Model»

Результаты работы использованы в учебном процессе МАИ:

- в курсе «Динамика неравновесных сред», читаемом студентам специальности 24.03.03

- в курсе «Современные модели неравновесных течений», читаемом аспирантам специальности 05.07.01.

### Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, списка сокращений и условных обозначений, четырех глав, заключения и библиографического списка. Общий объем составляет 108 страниц, включая 70 рисунков. Библиографический список содержит 101 наименование.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность в разработке новой физико-математической модели неравновесных течений однокомпонентных газов, сформулированы цель и задачи исследования, выделены научная новизна и теоретическая значимость работы, представлена общая структура диссертации.

**В первой главе** рассматривается метод комбинирования кинетической и гидродинамической моделей течения. Разработан метод сшивания (комбинирования) кинетической и гидродинамической моделей применительно к многоатомным газам. Разработан метод решения модельного кинетического уравнения (*МКЕ*), не требующий сохранения значений функции распределения во всей вычислительной области.

В качестве гидродинамической модели рассматривается модель *NSF*, отличающаяся от традиционной системы уравнений сохранения в приближении Навье-Стокса наличием коэффициента объемной вязкости в уравнениях неравновесных напряжений.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$P_{ij} = p_{ij} + \delta_{ij} p \quad (2)$$

$$p_{ij} = -\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} h \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad (3)$$

$$\text{Здесь: } q_i = -\frac{9\gamma-5}{4(\gamma-1)} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi_i = -\frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}, \omega_i = -\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Граничные условия на твердой поверхности модели *NSF* формулируются как условия скольжения погранслоя. Если в пристеночной области возникает высоко неравновесное состояние и используется *MKE*, то разрабатываемой комбинированной модели течения такие граничные условия не требуются.

Специально отметим, что в определении молекулярно-кинетической теории, в отличие от механики сплошной среды, нормальные напряжения  $P_{ii}$  являются положительно определенными величинами. Для совместимости кинетической модели *MKE* и гидродинамической *NSF* в системе (1) тензор напряжений записан в молекулярно-кинетической трактовке.

Коэффициент вязкости  $\mu$  и параметр  $Z$ , показывающий, сколько межмолекулярных столкновений приходится на одно неупругое столкновение, определяются зависимостями, используемыми в модели *MKE*, но с сохранением порядка приближения модели *NSF*, т.е.  $\mu = \mu(T_i = T)$ ,  $Z = Z(T_i / T_r = 1)$ . Коэффициент объемной вязкости позволяет выразить  $T_i$  и  $T_r$  через температуру  $T$  в гидродинамическом приближении.

В качестве кинетической модели рассматривается модельное кинетическое уравнение многоатомных газов *MKE*.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{f^+ - f}{\tau_p} \quad (4)$$

После формального интегрирования по пространству вращательных энергий (4) может быть приведено к двум уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| + \xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| = \frac{p}{\mu} \left| \frac{f_t^+ - f_t}{f_r^+ - f_r} \right| \quad (5)$$

Здесь:

$$f_t = \int f d\varepsilon; \quad f_r = \int \varepsilon f d\varepsilon;$$

$$f_t^+ = \frac{n}{(2\pi RT_t^+)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_\alpha c_\alpha}{2RT_t^+}\right) \left(1 + \frac{\phi_\alpha c_\alpha}{3\rho(RT_t^+)^2} \left(\frac{c_\alpha c_\alpha}{5RT_t^+} - 1\right)\right);$$

$$f_r^+ = \frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} kT_r^+ f_t^+;$$

$$T_t^+ = T + \frac{5-3\gamma}{2} \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (T_t - T_r); \quad T_r^+ = T - \frac{3}{2}(\gamma-1) \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (T_t - T_r);$$

Макроскопические параметры газа определяются следующим образом:

$$n = \int f_t d\mathbf{c}; \quad P_{ij} = m \int c_i c_j f_t d\mathbf{c}; \quad T_t = P_{\alpha\alpha} / 3\rho R; \quad \frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} nkT_r = \int f_r d\mathbf{c}; \quad \phi_i = \int \frac{m_0 c^2}{2} c_i f_t d\mathbf{c};$$

Для формулировки граничных условий на твердой поверхности достаточно задать закон взаимодействия молекул газа с поверхностью. В настоящей работе использован закон диффузного отражения с полной аккомодацией энергии. Этот

закон вполне адекватен реальным физическим процессам, протекающим на шероховатых поверхностях при умеренных энергиях ( $< 1$  эв) движения молекул.

Рисунок 1 демонстрирует удовлетворительное совпадение расчетного профиля плоской гиперзвуковой ударной волны с экспериментальными данными даже для такого «тонкого» параметра, как температура вращательных степеней свободы. В тестовых расчетах настоящей работы не комбинированная с гидродинамической моделью модель *МКЕ* рассматривается как эталонная.

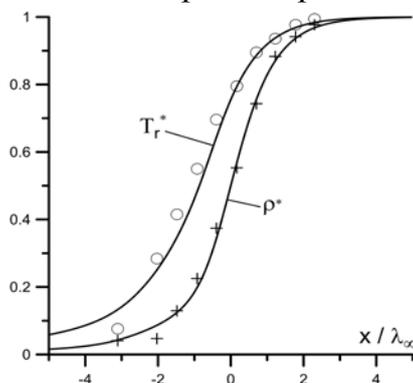


Рисунок 1. Приведенные профили вращательной температуры и плотности. Модельное кинетическое уравнение (*МКЕ*). Газ – азот.  $M_\infty = 7$ .  $\circ$  и  $+$  – экспериментальные данные.

Важнейшим свойством сшиваемых моделей является тот факт, что гидродинамическая модель является строгим первым приближением кинетической. У большинства известных гибридных моделей это свойство отсутствует, что не позволяет получать гладкие решения в области сшивания даже при слабой неравновесности течения.

Одно из приложений комбинированной модели предполагает применение кинетической модели в сильно неравновесных областях поля течения и гидродинамической модели – в остальных областях.

Другое приложение относится к слабо неравновесным течениям вблизи активных (поглощающих или выделяющих газ) поверхностей. В этом случае кинетическая модель необходима только для формирования физически адекватных граничных условий на поверхности. На Рисунке 2 представлены схемы одномерной расчетной области для обоих случаев, варианты *A* и *B* соответственно. Вертикальной линией на варианте *B* обозначена обтекаемая поверхность.

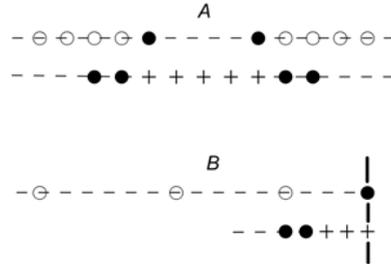


Рисунок 2. Схемы расчетных областей в одномерном случае.  $\circ$  – узлы гидродинамической модели,  $+$  – узлы кинетической модели,  $\bullet$  – узлы сшивания моделей

В обоих вариантах Рисунка 2 расчетная область изображена дважды, отдельно для гидродинамической (светлые кружки) и кинетической (крестики) моделей. В варианте А область гидродинамического решения разделена на две подобласти. Граничные условия левой подобласти формируются в узле (узел сшивания), обозначенном черной точкой и принадлежащем области кинетического решения. Для выбранного разностного шаблона достаточно одного узла. Значения  $\rho, u_x, T$  в этом узле определяются как моменты весовой функции, вычисленной в кинетической области. Аналогично стоит решение в правой подобласти гидродинамического решения. При описании течения в пристеночной области достаточно одной гидродинамической подобласти. В варианте А между гидродинамической подобластью и стенкой располагается кинетическая подобласть (на Рисунке 2 не показано).

Граничные условия кинетического решения формируются в узлах гидродинамической области (черные кружки): по два узла в каждой гидродинамической подобласти для соответствующих ( $\xi_x > 0$  или  $\xi_x < 0$ ) разностных шаблонов. Поскольку гидродинамическая модель менее информативна, чем кинетическая модель, для восстановления весовой функции в узлах сшивания используется аппроксимирующая весовая функция  $f_A$ . В случае пристеночного течения в граничном со стенкой узле восстанавливается весовая функция, определяемая законом взаимодействия молекул с твердой поверхностью.

С учетом порядка приближения гидродинамической модели, в качестве аппроксимирующей весовой функции целесообразно принять разложение равновесной, максвелловой функции. Вариант аппроксимирующей функции, содержащей все неравновесные величины модели NSF:

$$f_{Ai} = f_M \left( 1 + \frac{1}{\rho (RT_i)^2} \left( \frac{1}{2} P_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta + \varphi_\alpha \left( \frac{c^2}{5RT_i} - 1 \right) c_\alpha \right) \right) \quad (6)$$

$$f_{Ar} = kT_r \left( \frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} f_{Ai} + f_M \frac{\omega_\alpha c_\alpha}{\rho R^2 T_i T_r} \right) \quad (7)$$

$$f_M = \frac{n}{(2\pi RT_i)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_i}\right) \quad (8)$$

Макропараметры этих выражений определяются гидродинамической моделью и рассматриваются в соответствующем приближении:

$$T_i = T_r = T, \quad p_{ij} = -\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} Z \right) \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha},$$

$$\varphi_i = -\frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \omega_i = -\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

**Во второй главе** выполнено численное моделирование первой тестовой задачи – плоского течения Куэтта.

В качестве первой тестовой задачи выбрано плоское течение Куэтта, в котором две плоские бесконечные поверхности движутся в противоположных направлениях оси  $Ox$  с относительной скоростью  $u_w$ . Это одномерное течение хорошо изучено как экспериментально, так и теоретически.

Схема течения и используемая система координат показаны на Рисунке 3. Температура поверхностей –  $T_w$ . До начала движения плотность газа и концентрация молекул имели значения  $\rho_0$  и  $n_0$ .

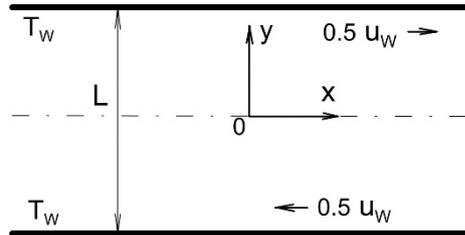


Рисунок 3. Схема тестовой задачи.

Варьирование числами  $M$  и  $Kn$  позволяет изучать течения различной степени неравновесности. Величина касательного напряжения  $p_{xy}$  может приближаться к величине давления  $p$ .

Особенностью течения Куэтта является обращение уравнения сохранения массы (первое уравнение системы (1)) в тривиальное тождество. Поле плотности определяется по уравнению сохранения импульса, записанному для  $u_y$ .

Разработанная модель предполагает разбиение поля течения на две области – кинетическую и гидродинамическую. Кинетическая область непосредственно граничит с обтекаемой поверхностью. Ее протяженность в направлении нормали к поверхности составляет несколько длин свободного пробега молекул  $\lambda$  (кнудсеновский слой). Остальное поле течения занято гидродинамической областью.

На смежных границах указанных областей расположена область сшивания кинетической и гидродинамической моделей. В кинетической и гидродинамической областях соответствующие модели течения реализуются

традиционным для них образом. В области сшивания численное решение моделей специфично.

Передача информации в виде значений  $\rho, u_i, T, p$  от кинетической модели к гидродинамической не вызывает затруднений. Указанные газодинамические параметры являются моментами аппроксимирующей функции, определяемой кинетической моделью.

Обратный информационный обмен неоднозначен. По газодинамическим параметрам, определенным гидродинамической моделью, принципиально невозможно восстановить аппроксимирующую функцию в динамически неравновесном течении. В условиях близких к равновесным, возможны адекватные аппроксимации функции. Отметим, что модель *NSF* теоретически обоснована только в слабо неравновесных течениях (модель первого приближения процедуры Чепмена-Энскога). Этой модели соответствует аппроксимирующая функция, часто называемая «навье-стоксовой».

Если область сшивания моделей находится в слабонеравновесной области течения, то передача информации от модели *NSF* к кинетической модели посредством весовой функции типа навье-стоксовой будет вполне обоснована. Модель течения и аппроксимирующая весовая функция будут соответствовать одному порядку приближения. Пригодность модели течения для описания процессов в рассматриваемой области будет означать пригодность аппроксимирующей функции для передачи информации в кинетическую модель.

На Рисунке 4 показана схема расчетной области. Для численного решения задачи используется конечно-разностный метод. Область сшивания моделей обозначена символом *C* с тремя перечеркнутыми узлами.

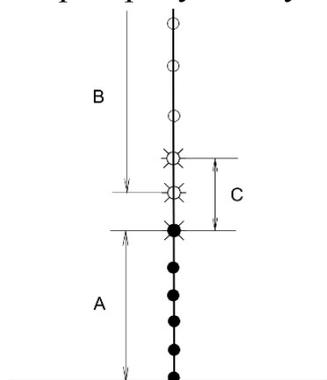


Рисунок 4. Схема расчетной области. *A* - кинетическая область, *B* - гидродинамическая область, *C* - область сшивания.

В узлах кинетической области (область *A*, темные точки) решается кинетическое модельное уравнение (5). Параметры  $\rho, u_i, T, p$ , определённые в верхней точке области *A*, служат краевыми значениями для модели *NSF*. Эта модель решается в гидродинамической области (область *B*, светлые точки). Аппроксимирующие весовые функции восстанавливаются в двух верхних узлах области сшивания.

На обтекаемой поверхности, в нижнем узле области  $A$ , выставляются кинетические граничные условия в их традиционной форме.

На начальном этапе тестирования моделей выбирались свободные параметры  $s$ ,  $h$  и  $Z$  из условия наилучшего соответствия расчетных и экспериментальных коэффициентов трения в криптоне при  $M = 0.88$  и в воздухе при  $M = 1.4$ . Интервал чисел Кнудсена –  $Kn = 10^{-2} \dots 1$ . Для модели  $NSF$  принято:  $s = 0.7$ ,  $h = 5$ . Для кинетической модели:  $s = 1$ ,  $Z = 5$ . Эти же значения использовались в гидродинамической и кинетической областях модели  $KHM$ . Область сшивания этой модели находилась на расстоянии  $2\lambda$  от твердой поверхности.

Результаты расчетов показали, что наиболее наглядно расхождения профилей наблюдается на профилях температуры.

При данном числе Кнудсена модель  $NSF$  с граничными условиями скольжения погранслоя теоретически обоснована. Профили всех моделей практически совпадают.

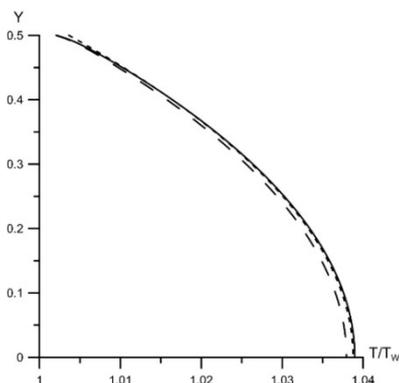


Рисунок 5. Профили температуры,  $M = 1$ ,  $Kn = 0.01$ .

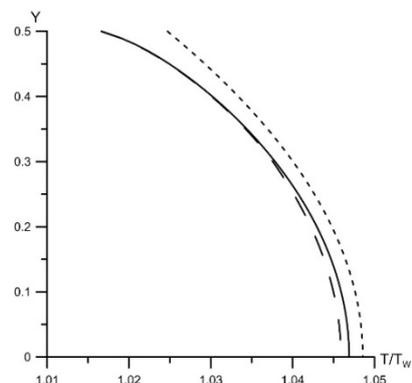


Рисунок 6. Профили температуры,  $M = 1$ ,  $Kn = 0.1$ .

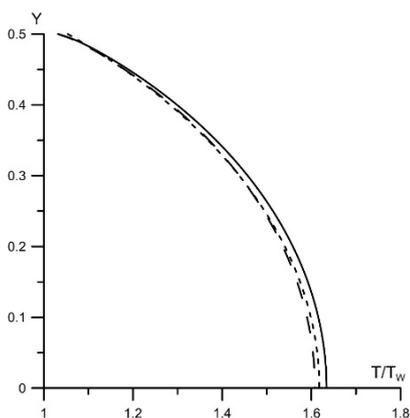


Рисунок 7. Профили температуры,  $M = 4$ ,  $Kn = 0.01$ .

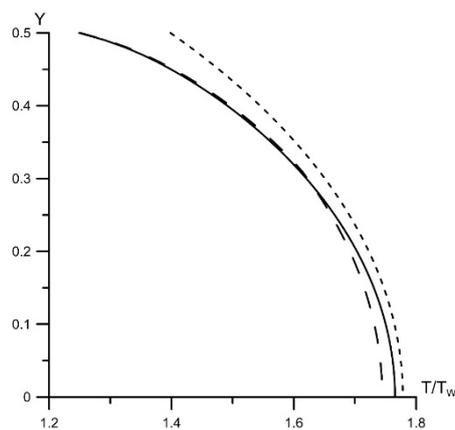


Рисунок 8. Профили температуры,  $M = 4$ ,  $Kn = 0.1$ .

Сплошная линия – кинетическая модель ( $MKE$ ); мелкий пунктир – модель  $NSF$ ; крупный пунктир –  $KHM$ .

На Рисунке 6 представлены результаты расчета при  $M = 1$  и  $Kn = 0.1$ . Это значение  $Kn$  соответствует переходной области течения, в которой модель  $NSF$  не

обоснована теоретически, что и подтверждает Рисунок 6. *KHM*, использующая *NSF* в большей части расчетной области, дает существенно лучший профиль, даже с учетом погрешности коррекции плотности.

Графики Рисунка 7 построены при  $M = 4$ ,  $Kn = 0.01$ . Из сравнения с Рисунком 6 видно, что увеличение числа Маха до гиперзвуковых значений не существенно влияет на погрешность модели *NSF*, пока число Кнудсена находится в континуальной области течения. Отклонение профиля *KHM* не сильно отличается от Рисунка 6, если рассматривать это отклонение в относительном измерении. На Рисунке 8 приведены графики для  $M = 4$ ,  $Kn = 0.1$ . Сравнение с Рисунком 7 показывает существенное отклонение профиля модели *NSF* в верхней части рисунка, соответствующей пристеночной области. Это свидетельствует о том, что в переходной области течения при больших скоростях граничные условия скольжения погранслоя перестают адекватно описывать процесс взаимодействия газа с твердой поверхностью.

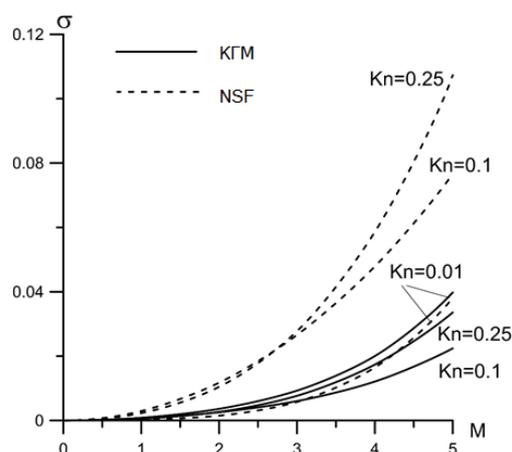


Рисунок 9. График среднеквадратичного отклонения профилей температуры в зависимости от чисел Маха и Кнудсена.

Наибольшее отклонение от *MKE* имеет профиль *KHM*. Это отклонение связано с указанными выше погрешностями коррекции концентрации. Рисунок 9 позволяет оценить влияние этих погрешностей.

При данных параметрах течения модель *KHM* потребляла в несколько десятков раз меньше процессорного времени и оперативной памяти, чем кинетическая модель.

На Рисунке 9 показана зависимость среднеквадратического отклонения ( $\sigma$ ) профилей температуры ( $T/T_w$ ) моделей *NSF* и *KHM* от профиля *MKE* в зависимости от чисел  $M$  и  $Kn$ .

Характер зависимостей вполне ожидаем. Увеличение чисел  $M$  и  $Kn$  означает повышение степени неравновесности течения, оцениваемой как произведение  $M \cdot Kn$ . Модель *NSF* теоретически обоснована только в слаборавновесных течениях, что и подтверждают кривые на Рисунке 9. Отклонения *KHM* существенно меньше.

Обращает на себя внимание кривая *KHM* при значениях  $Kn = 0.01$ ,

отвечающих минимальной степени неравновесности в рассмотренном интервале чисел  $Kn$ . Эта кривая близка к соответствующей кривой модели  $NSF$ , и даже несколько превосходит ее. К тому же, эта кривая проходит существенно выше кривых  $KHM$ , соответствующих большей степени неравновесности.

По-видимому, такое поведение  $KHM$  объясняется неточностью коррекции концентрации, так как при этом числе  $Kn$  обе сшитые модели достаточно хорошо описывают течение. Уместно напомнить, что коррекция концентрации является специфической процедурой решения задачи о течении Куэтта.

Результаты расчетов показали, что  $KHM$  ненамного уступает в точности кинетической модели и существенно превосходит ее в экономичности. При  $Kn = 0.01$   $KHM$  требовала в несколько десятков раз меньше процессорного времени, чем кинетическая модель.

При описании течений плотных газов экономичность  $KHM$  не зависит от числа  $Kn$  и слабо зависит от числа  $M$ . Таким образом, разработанная модель течения в отношении адекватности граничных условий наследует свойства кинетической модели, а в отношении экономичности – свойства модели  $NSF$ .

**В третьей главе** решается задача о структуре ударной волны. Задача решается в стационарной постановке и формулируется следующим образом. На границах расчетной области выставляются условия Ренкина–Гюгонио. Размер расчетной области составляет несколько десятков длин свободного пробега молекулы в невозмущенном потоке:

$$\lambda_\infty = 3.2\mu_\infty (2\pi RT_\infty)^{-1/2} / \rho_\infty \quad (9)$$

Система уравнений модели  $MKE$  преобразуется следующим образом:

$$\xi_x \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} f_t \\ f_r \end{vmatrix} = \frac{p}{\mu} \begin{vmatrix} f_t^+ - f_t \\ f_r^+ - f_r \end{vmatrix} \quad (10)$$

Преобразования входящих в (10) функций и параметров очевидны.

Во всех расчетах принимались аппроксимации коэффициента вязкости  $\mu = \mu(T_t^s)$  для кинетической модели и  $\mu = \mu(T^s)$  для гидродинамической. Показатель степени  $s$  выбирался из соображений наилучшего совпадения профиля плотности с экспериментальными профилями. Разностные схемы соответствуют описанным ранее, вариант А.

В численных тестах законы сохранения выполнялись с точностью до шестого знака. Вычислительная погрешность определяется в основном погрешностью численного интегрирования по пространству скоростей. При  $M_\infty = 7$  параметры скоростной сетки составляли:

- протяженность сетки на одной полуветвиоси  $\xi_x - 22\sqrt{RT_\infty}$  ;
- шаг сетки  $\Delta\xi_x = \sqrt{RT_\infty} / 7$ .

Расчетные профили ударной волны комбинированной модели сравнивались с профилями моделей  $MKE$  и  $NSF$ . Расчеты показали, что наибольшее расхождение

между профилями комбинированной модели и модели *МКЕ* имеет место на профилях температуры. Профили плотности и групповой скорости согласовывались существенно лучше.

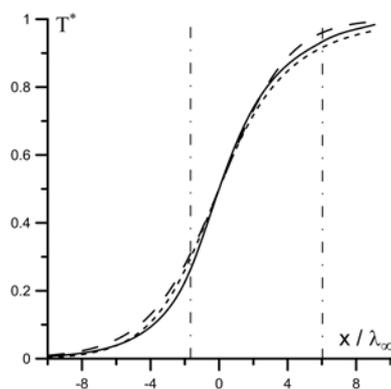


Рисунок 10. Приведенные профили температуры в плоской ударной волне двухатомного газа.  $M_\infty = 1.55$

Сплошная линия – *КГМ*; мелкий пунктир – модель *МКЕ*; крупный пунктир – модель *NSF*; вертикальные штрихпунктирные линии – границы кинетической области комбинированной модели.

В области умеренных чисел Маха комбинированная модель давала гладкие профили, хотя в области кинетического решения наблюдалось заметное отличие от профилей модели *МКЕ*. На Рисунке 10 показаны профили температуры для  $M_\infty = 1.55$ .

Размер кинетической области *КНМ* составлял  $7.8\lambda_\infty$ . Узлы сшивания моделей находились в высокоградиентной области. При увеличении размера кинетической области соответствующий профиль сближался с профилем модели *МКЕ*. Анализ вторых производных температуры в узлах сшивания не выявил разрыва первых производных, то есть изломов графика.

Такой характер решения наблюдался до  $M_\infty \approx 2$ . При бóльших числах Маха даже при достаточно больших размерах кинетической области ( $20 \div 30 \lambda_\infty$ ) в ее граничных узлах возникал разрыв производных. Вместе с тем, профиль кинетической области *КНМ* сближался с профилем модели *МКЕ*.

На Рисунке 11 приведены профили температуры в случае гиперзвукового течения. В левом граничном узле кинетической области *КНМ* наблюдается явно выраженный разрыв производных. Размер кинетической области *КНМ* составляет  $17.2 \lambda_\infty$ . Профиль кинетической области *КНМ* практически совпадает с профилем *МКЕ*. Из Рисунка 11 также следует, что, несмотря на разрыв производной в граничном узле кинетической области, *КНМ* позволяет существенно улучшить гидродинамическое решение.

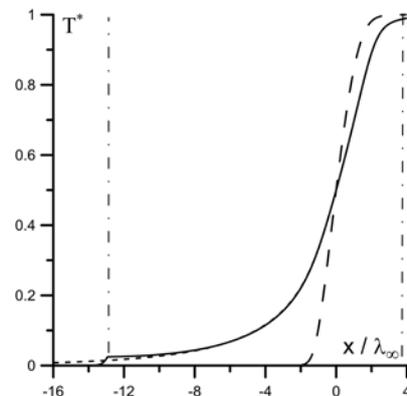


Рисунок 11. То же, что на Рисунке 10,  $M_\infty = 7$

Такой парадоксальный характер решения модели КНМ наблюдался и при других числах Маха и размерах кинетической области.

Кроме этого, оба способа численного решения, описанные выше, дали практически совпадающие результаты. Таким образом, обнаруженный эффект вырождения решения кинетической области модели КНМ в чисто кинетическое решение модели МКЕ при возникновении разрывов, не является особенностью вычислительного метода.

Еще одной характерной особенностью *КНМ* является то, что во всей расчетной области, в том числе и в узле разрыва производной, законы сохранения выполняются с точностью до погрешности численного интегрирования весовой функции по пространству скоростей.

Количественная оценка максимальной относительной погрешности вычисления температуры в зависимости от размера кинетической области *КНМ* приведена на Рисунке 12.

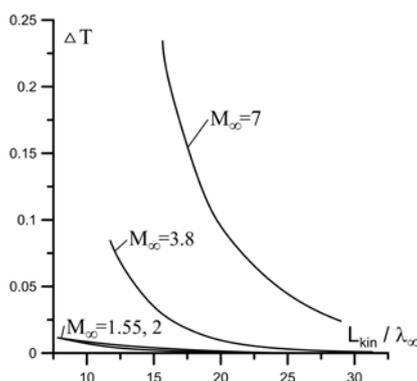


Рисунок 12. Максимальная относительная погрешность вычисления температуры в зависимости от протяженности кинетической области *КНМ*

Показано, что рост степени неравновесности, то есть произведения  $M_{\infty}Kn_{\infty}$ , приводит к нарушению гладкости решения. Для сохранения гладкости можно порекомендовать следующее:

- при  $M_{\infty} \leq 2$  степень неравновесности не должна превышать 1;
- при  $M_{\infty} > 3.5$  степень неравновесности не должна превышать 0.2.

По аналогии с предложенной моделью может быть построена комбинированная модель, в которой для гидродинамического описания течения используются моментные уравнения любого, сколь угодно высокого порядка. При этом снимается вопрос выставления граничных условий на твердой поверхности. Для всех моментов, входящих в систему дифференциальных уравнений, имеют место граничные условия Дирихле.

Для практических задач, связанных с описанием течений вблизи твердых поверхностей, разработанная комбинированная модель пригодна в представленном виде. По-видимому, дополнительной разработки требует только несложный алгоритм перехода от одного варианта модели к другому при описании течений в широком интервале чисел Кнудсена.

В четвёртой главе рассматривается задача об обтекании активной поверхности.

Рассматривается плоское течение в прямоугольных декартовых координатах  $OXY$ . Невозмущенный поток двигался в направлении оси  $OX$  через левую границу вычислительной области. В потоке, поперек его, расположена тонкая пластина бесконечного размаха. Начало системы координат совмещено с центром пластины. Лобовая поверхность пластины поглощает газ. Задача симметрична относительно сечения  $y=0$ . Схема задачи показана на Рисунке 13. Изображена верхняя полуобласть поля течения.

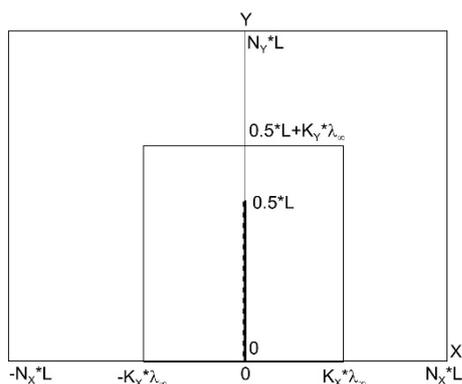


Рисунок 13. Схема вычислительной области. Жирная линия – пластина, поглощающая поверхность обозначена пунктиром;  $K_x$  – ширина кинетической полуобласти в длинах пробега молекулы;  $N_x$  – ширина гидродинамической полуобласти в единицах высоты пластины;  $N_y$  – высота гидродинамической полуобласти в единицах высоты пластины.

Размер всей вычислительной области, он же внешний размер гидродинамической области, составлял:  $N_x = 3...4$ ,  $N_y = 2...3$ . Размер кинетической области, он же внутренний размер гидродинамической области, принимался  $K_x = 10...20$ ,  $K_y = 10...15$ .

Кинетические конечно-разностные схемы строились на трех узлах вверх по потоку (молекулярному).

В гидродинамической области использовалась схема Лакса-Вендрофа на четырех узлах, асимметрично смещенных вверх по потоку. Эта схема условно устойчива. При тестировании новых моделей нежелательно использовать абсолютно устойчивые схемы, позволяющие добиваться сходимости решения даже при неполной физической адекватности модели течения. Целью настоящих тестов была проверка физической адекватности, что и обусловило выбор схемы решения.



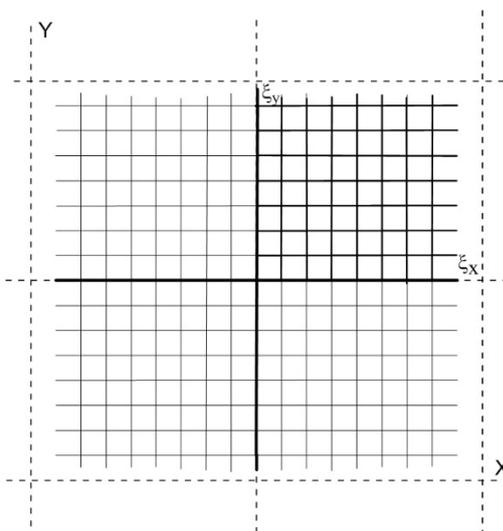


Рисунок 15. Вычислительная сетка в пространстве скоростей. Пунктирные линии – геометрическая сетка, сплошные линии – скоростная сетка, утолщенные сплошные линии – рассчитываемый квадрант скоростной сетки ( $\xi_x \geq 0, \xi_y \geq 0$ )

В трёхмерном случае вместо квадрантов используются октанты.

Если используется конечно-разностная схема на трех узлах геометрической расчетной сетки, то для продвижения по координате  $Y$  достаточно значений  $f$  на трех строках сетки с координатами  $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}$ . На Рисунке 15 показаны строки, используемые для вычисления  $f$  на  $n$ -ой и  $(n+1)$ -ой строках. Продвижение по  $Y$  снизу вверх, т.е.  $\xi_y \geq 0$ . Функция  $f$  записана в 4-мерный массив, в котором координата  $Y$  имеет три значения: 0, 1 и 2. Значения функции вычисляются в сечении массива  $y = 0$  по значениям в сечениях  $y = 1$  и  $y = 2$ .

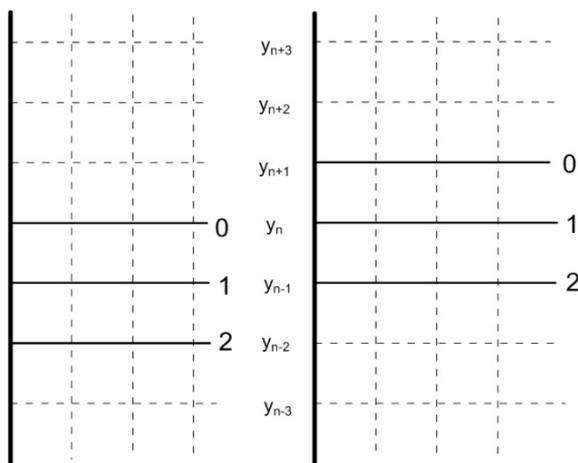


Рисунок 15. Алгоритм вычисления весовой функции при  $n$ -ом и  $(n+1)$ -ом значениях координаты  $Y$ . Жирная линия – пластина.

После определения  $f$  во всех узлах выбранного квадранта (пространство скоростей) и во всех узлах сечения  $y = 0$  (геометрическое пространство) вычисляются и записываются в память неполные моменты весовой функции. Неполные моменты вычисляются для молекулярных скоростей  $\xi_i$ .

При переходе на следующую,  $(n+1)$ -ю строку основной геометрической сетки, сечение массива  $y=0$  перенумеровывается (но не перезаписывается) как  $y=1$ , сечение  $y=1$  – как  $y=2$ . Вычисление сечения  $y=0$  продолжается по описанной выше схеме.

После вычисления неполных моментов во всех квадрантах всех геометрических узлов определяются макропараметры газовой среды.

При решении задачи обтекания пластины с  $Kn=0.01$  описанная методика позволила сократить объем памяти примерно на два порядка.

Расчеты проводились для двухатомного газа при  $M=2.31$  и  $Kn=0.1\dots 0.001$ . Для выбранного числа Маха имеется достаточно большой набор экспериментальных и расчетных данных в переходной области течения. Результаты расчетов, включая поля течения, сравнивались с расчетами по МКЕ, которые удовлетворительно согласуются с данными.

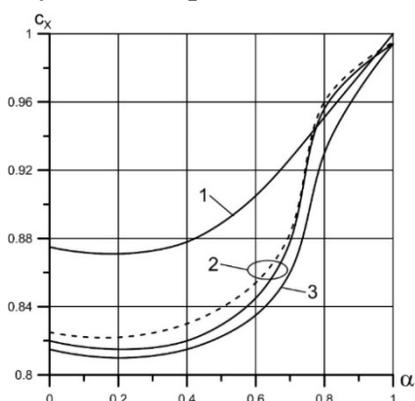


Рисунок 16. Зависимость коэффициента лобового сопротивления пластины от коэффициента поглощения ее лобовой поверхности. 1 – МКЕ и КНМ,  $Kn=0.1$ ; 2 – пунктир МКЕ,  $Kn=0.01$ , 2 – сплошная КНМ; 3 – КНМ,  $Kn=0.001$ .

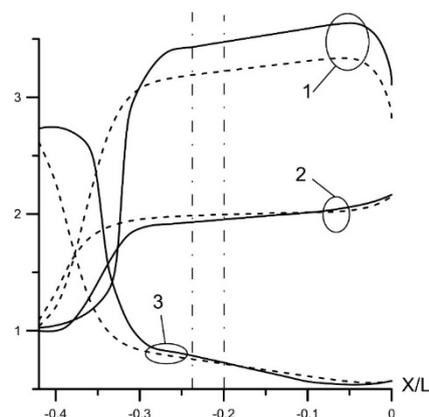


Рисунок 17. Распределение плотности, скорости  $u_x$  и температуры перед лобовой поверхностью.  $Kn=0.01$ ,  $\alpha=0.6$ ,  $y=0$ . 1 – плотность; 2 – температура; 3 –  $u_x$ .

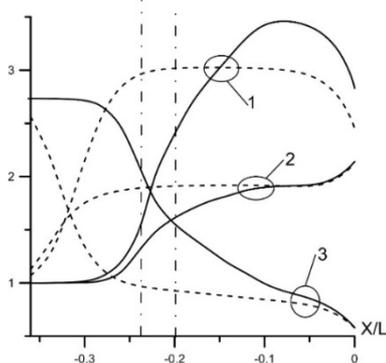


Рисунок 18. Распределение плотности, скорости  $u_x$  и температуры перед лобовой поверхностью.  $Kn=0.01$ ,  $\alpha=0.6$ ,  $y=0.5$ . 1 – плотность; 2 – температура; 3 –  $u_x$ .

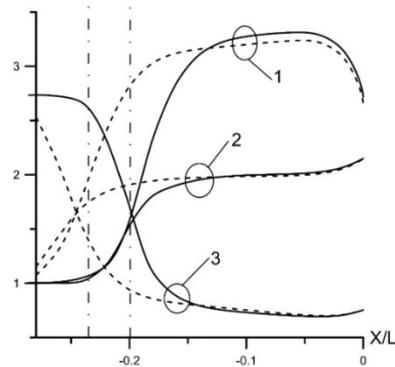


Рисунок 19. Распределение плотности, скорости  $u_x$  и температуры перед лобовой поверхностью.  $Kn=0.01$ ,  $\alpha=0.7$ ,  $y=0$ . 1 – плотность; 2 – температура; 3 –  $u_x$ .

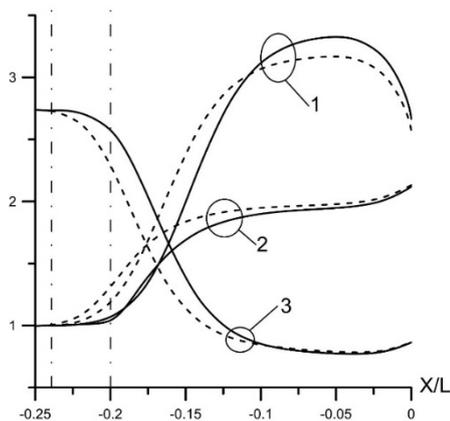


Рисунок 20. Распределение плотности, скорости  $u_x$  и температуры перед лобовой поверхностью.  $Kn = 0.01$ ,  $\alpha = 0.75$ ,  $y = 0$ . 1 – плотность; 2 – температура; 3 –  $u_x$ .

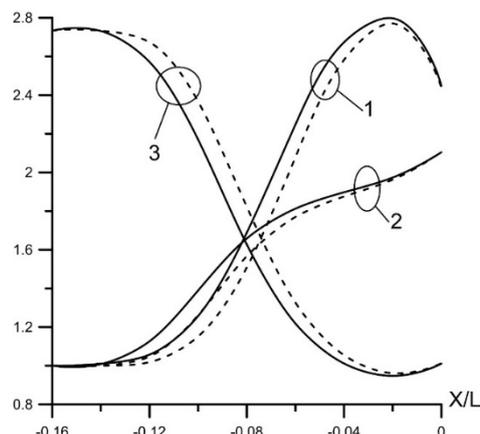


Рисунок 21. Распределение плотности, скорости  $u_x$  и температуры перед лобовой поверхностью.  $Kn = 0.01$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $y = 0$ . 1 – плотность; 2 – температура; 3 –  $u_x$ .

Пунктирные линии – *МКЕ*; сплошные линии – *КГМ*; вертикальные штрихпунктирные линии – границы области сшивания.

На Рисунке 16 показана зависимость  $c_x(\alpha)$ .  $\alpha$  в данном случае – коэффициент поглощения поверхности. При  $Kn = 0.1$  расчеты по *МКЕ* и *КНМ* совпадают, так как при этих числах Кнудсена практически вся вычислительная область находилась в кинетической составляющей *КНМ*, а ее гидродинамическая составляющая выполняла функции граничных условий на внешней границе вычислительной области. В *МКЕ* и кинетической составляющей *КНМ* использовались идентичные расчетные сетки.

При  $Kn = 0.01$  и  $\alpha < 0.7$  имеет место некоторое расхождение между используемыми моделями. Как следует из представленных графиков, при этих значениях параметров вся высокоградиентная область находится в гидродинамической составляющей *КНМ*. Методы механики сплошной среды существенно уступают в точности расчета высокоградиентных областей методам молекулярно-кинетической теории. Это, видимо и является причиной расхождения результатов расчета.

Расчеты течения при  $Kn = 0.001$  являлись своего рода противоположностью расчетов при  $Kn = 0.1$ . Практически вся вычислительная область принадлежала гидродинамической составляющей *КНМ*. Кинетическая составляющая выполняла функции граничных условий на пластине. Наблюдается отсутствие «горба» в области  $\alpha \approx 0.8$ , характерного как для кинетической, так и для комбинированной модели.

Для анализа физической адекватности комбинированных или гибридных моделей наиболее интересны режимы течения, при которых область сшивания проходит через высокоградиентную область. Основной проблемой большинства моделей указанного класса является возникновение разрывов производных

газодинамических параметров в этой области. С той точки зрения наиболее интересны распределения параметров перед лобовой поверхностью пластины ( $x < 0$ ) и режимы течения при  $Kn = 0.01$  и  $\alpha = 0.6 \dots 0.8$ .

На Рисунках 17 и 18 представлены распределения плотности, проекции скорости  $u_x$  и температуры вдоль оси  $X$  при  $Kn = 0.01$ . На рисунках коэффициент поглощения поверхности  $\alpha = 0.6$ . На Рисунке 17 распределения построены в сечении симметрии ( $y = 0$ ). Вся высокоградиентная область течения находится в гидродинамической составляющей *КНМ* (слева от области сшивания). Профили плотности, скорости и температуры смещены вниз по потоку относительно профилей *МКЕ*. Наблюдается существенное отличие в профилях плотности. Это особенно заметно на Рисунке 18, на уровне верхней кромки пластины ( $y = 0.5$ ). Область сшивания в этом случае находится в высокоградиентной области.

По мере увеличения коэффициента поглощения высокоградиентная область течения все больше смещается в кинетическую составляющую *КНМ* (справа от области сшивания). Профили *МКЕ* и *КНМ* сближаются и в отношении расположения, и в отношении величин параметров, что видно на рисунках. Примечательно, что даже графики Рисунка 20 не содержат разрывов производных  $\rho$ ,  $u_x$ ,  $T$ .

При  $\alpha = 0.8$  высокоградиентная область находится полностью в гидродинамической подобласти. Правая граница области сшивания имеет координату  $x = -0.2$  и не попадает в поле Рисунка 21. Профили *КНМ* и *МКЕ* почти совпадают. Относительно небольшое различие профилей связано, видимо с тем, что для расчетов при  $Kn = 0.01$  по *МКЕ* использовалась геометрическая сетка с шагом  $2\lambda_\infty$ , а расчеты в кинетической подобласти *КНМ* выполнялись с вдвое меньшим шагом. Необходимость завышения шага в модели *МКЕ* была связана с техническими возможностями используемых вычислительных средств.

**В заключении** перечислены основные результаты и выводы по диссертационной работе, намечены дальнейшие численные исследования.

## ВЫВОДЫ

1. Разработан метод сшивания (комбинирования) кинетической и гидродинамической моделей применительно к многоатомным газам.
2. Разработан метод решения модельного кинетического уравнения (*МКЕ*), не требующий сохранения значений весовой функции во всей вычислительной области.
3. Полученная физико-математическая модель, объединяющая кинетическое и гидродинамическое описание течения (*КНМ*), протестирована в области течений высокой динамической неравновесности.

На примере течения Куэтта (пристеночного сдвигового течения) показано, что *КНМ* ненамного уступает в точности кинетической модели и существенно

превосходит ее в экономичности. При  $Kn = 0.01$  *КНМ* требовала в несколько десятков раз меньше процессорного времени, чем кинетическая модель. При описании течений плотных газов экономичность *КНМ* не зависит от числа  $Kn$  и слабо зависит от числа  $M$ . Таким образом, разработанная модель течения в отношении адекватности граничных условий наследует свойства кинетической модели, а в отношении экономичности – свойства модели *NSF*.

На примере задачи об ударной волне показано, что наибольшее расхождение между профилями комбинированной модели и модели *МКЕ* имеет место на профилях температуры. Профили плотности и групповой скорости согласовывались существенно лучше. В области умеренных чисел Маха комбинированная модель давала гладкие профили, хотя в области кинетического решения наблюдалось заметное отличие от профилей модели *МКЕ*. Анализ вторых производных температуры в узлах шивания не выявил разрыва первых производных, то есть изломов графика. Оба использованных способа численного решения дали практически совпадающие результаты. Таким образом, обнаруженный эффект (наличие разрыва производных) не является особенностью вычислительного метода.

На примере задачи об обтекании активной поверхности показано, что комбинированная кинетико-гидродинамическая модель позволяет физически адекватно описывать процессы, протекающие в переходной области течения газовой среды. В области шивания кинетической и гидродинамической составляющих модели отсутствуют разрывы производных газодинамических параметров. *КНМ* позволяет выставлять граничные условия на поглощающих поверхностях. Значения такой интегральной характеристики, как  $c_x(\alpha)$ , рассчитанные по *КНМ*, удовлетворительно согласуются с результатами расчетов по *МКЕ*. При расчете относительно плотных газов ( $Kn = 0.01$ ) *КНМ* позволяет сократить потребляемый объем памяти вычислительного устройства примерно на три порядка и процессорное время на два порядка по сравнению *МКЕ*. Рассмотренная *КНМ* может быть использована в широком интервале чисел Кнудсена.

4. Предложена методика повышения экономичности вычислительного процесса для многомерных задач. Кинетические уравнения эффективно решаются с использованием методов параллельного программирования. Такие программы выполняются быстрее их последовательных эквивалентов. Время выполнения расчёта снижается во столько раз, сколько выделено процессоров.

Разработанная гибридная модель в будущем может быть распространена на многокомпонентные газы. В дальнейшем планируется провести дополнительные исследования в этой области, а также рассмотреть течения в до- и гиперзвуковой областях.

## СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из списка ВАК:

- Березко М. Э., Никитченко Ю. А., Тихоновец А. В. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта // Труды МАИ, 2017, №94, [http://mai.ru/upload/iblock/f5f/berezko\\_nikitchenko\\_tikhonovets\\_rus.pdf](http://mai.ru/upload/iblock/f5f/berezko_nikitchenko_tikhonovets_rus.pdf)

- Ю. А. Никитченко, С. А. Попов, А. В. Тихоновец, “Комбинированная кинетико-гидродинамическая модель течения многоатомного газа”, // Матем. моделирование, 31:2 (2019), 18–32

- Ю. А. Никитченко, А. В. Тихоновец, “Тестирование кинетико-гидродинамической модели на примере расчета обтекания поглощающей поверхности”, Матем. моделирование, 32:9 (2020), 103–118

Тезисы докладов:

- Березко М.Э., Тихоновец А.В. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта. // Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов. – М.; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2017. – 1479 с.

Сборники трудов конференций (SCOPUS):

- Nikitchenko Y., Popov S., Tikhonovets A. (2019) Special Aspects of Hybrid Kinetic-Hydrodynamic Model When Describing the Shape of Shockwaves. In: Rodrigues J. et al. (eds) Computational Science – ICCS 2019. ICCS 2019. Lecture Notes in Computer Science, vol 11539. Springer, Cham

- Yu. Nikitchenko, S. Popov, A. Tikhonovets. Active Surface Calculation Method Using Kinetic-Hydrodynamic Model. (в печати)