

# ПРОЧНОСТЬ И ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

---

УДК 629.7.015.4.023

DOI:10.34759/vst-2020-2-61-70

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

**Свирский Ю.А.\* , Баутин А.А.\*\* , Лукьянчук А.А., Басов В.Н.**

*Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского,  
ЦАГИ, ул. Жуковского, 1, Жуковский, Московская область, 140180, Россия*

*\* e-mail: yury.svirsky@tsagi.ru*

*\*\* e-mail: andrey.bautin@tsagi.ru*

Статья поступила в редакцию 26.02.2020

---

Рассматривается один из методов решения упругопластической задачи при поцикловом расчете, который используется для оценки долговечности с учетом нелинейных эффектов. Для определения кривой статического и циклического деформирования предложена аппроксимация, получаемая на основе стандартных констант материала и принципа Мазинга. Представлено сравнение зависимостей локальных напряжений от номинальных для типовых концентраторов, полученных с помощью предложенной формулы и определённых на основе анализа напряженно-деформированного состояния методом конечного элемента.

*Ключевые слова:* метод расчета долговечности по локальным напряжениям, долговечность элементов с типовыми концентраторами, конечно-элементная модель болтового соединения, кривая циклического деформирования.

---

### Введение

Многочисленные исследования процесса усталости показывают, что этот процесс очень локализован, т. е. определяется не общим напряженно-деформированным состоянием (НДС), а напряжениями и деформациями, действующими в очень небольшой области. Учёт локального упругопластического НДС позволяет объяснить такие явления, как повышение долговечности после редких высоких напряжений растяжения и другие нелинейные эффекты при суммировании усталостных повреждений. К сожалению, необходимость

учёта пластичности и связанных с ней других нелинейных эффектов требует расчёта полуцикл за полуциклом. Принимая во внимание, что долговечность современных конструкций измеряется тысячами и даже миллионами циклов, применение для этих расчётов метода конечных элементов (МКЭ) становится практически нереальным. Время расчета конечно-элементных моделей, предназначенных для определения параметров НДС некоторых концентраторов с заданной точностью, представлено в табл. 1.

Таблица 1

Время расчета упругопластической задачи для типовых концентраторов МКЭ

Образец с концентратором	Коэффициент концентрации напряжений	Количество узлов/элементов модели	Время расчета модели 1 цикл/1000 циклов
Плоский образец с отверстием	3.1	69615/60488	148 с/ 41 ч
Плоский образец с галтельным переходом	1.6	8442/6800	135 с/ 38 ч
Цилиндрический образец с кольцевым надрезом	3.7	148998/138240	4222 с/ 49 дн.
Панель с брошенным стрингером	2.5	117725/85886	~4 ч/~5 мес.

Расчеты проводились с помощью многоцелевого конечноэлементного программного комплекса ABAQUS/CAE 6.13-4. При построении моделей использовался 8-узловой шестигранный конечный элемент сплошной среды с полной схемой интегрирования (C3D8). Системные характеристики: Win64, Intel Core i5 3540, 20 Гб, NVIDIA Quadro 600.

### Основные положения

Методы расчёта долговечности с учетом локального упругопластического НДС начали интенсивно развиваться начиная с конца 60-х годов прошлого века [1–6] и уже к началу нашего века получили широкое распространение в промышленности [7, 8]. Для оценки долговечности с учетом локального упругопластического НДС был предложен ряд приближенных решений упругопластической задачи. Эти решения в методике расчета долговечности по локальным напряжениям и деформациям основываются на использовании гипотез о связи упругого решения с упругопластическим. Возможно использование двух вариантов.

1. Применение формулы Нейбера [9], связывающей упругопластические напряжения и деформации в максимально нагруженной точке с номинальными напряжениями:

$$(e_a \cdot s_a) = \frac{(K_t \cdot \sigma_a)^2}{E}, \quad (1)$$

где  $K_t$  – упругий коэффициент концентрации напряжений (для соединений следует учитывать различие коэффициентов концентрации напряжений при растяжении и сжатии);  $\sigma_a$  – амплитуда номинальных напряжений (полного цикла, определённого с помощью метода полных циклов или «дождя» [10–11]).

2. Применение подхода Молски–Глинка [12], аналогичного теории  $J$ -интеграла в механике раз-

рушения: предполагается, что энергия упругой деформации в зоне разрушения равна энергии, которая затрачивается при упругопластических деформациях. В этом случае формула может быть получена путём интегрирования с использованием аппроксимации кривой деформирования. Например, при аппроксимации кривой деформирования в степенном виде (уравнение Рамберга–Осгуда [13, 14])

$$e_a = \frac{s_a}{E} + \left( \frac{s_a}{C_a} \right)^{C_n}, \quad (2)$$

где  $e_a$  – амплитуда локальных деформаций;  $s_a$  – амплитуда локальных напряжений;  $E$  – модуль упругости;  $C_n$  – показатель степени в степенной аппроксимации кривой деформирования;  $C_a$  – константа материала в степенной аппроксимации кривой деформирования по амплитудам.

Мы получим уравнение относительно  $s_a$  в виде:

$$\frac{s_a^2}{E} + \frac{2 \cdot C_n}{C_n + 1} \cdot \frac{s_a^{C_n+1}}{C_a^{C_n+1}} - \frac{(K_t \cdot \sigma_a)^2}{E} = 0. \quad (3)$$

Для сравнения аналогичное уравнение для формулы Нейбера записывается в виде:

$$\frac{s_a^2}{E} + \frac{s_a^{C_n+1}}{C_a^{C_n+1}} - \frac{(K_t \cdot \sigma_a)^2}{E} = 0. \quad (4)$$

Определение упругопластического НДС сводится к решению нелинейного уравнения (3) или

(4) относительно  $s_a$  и нахождению деформаций по использованной аппроксимации кривой деформирования. В качестве численного метода рекомендуется использовать итерационный метод Ньютона [15], беря в качестве нулевого приближения упругое решение. Окончание итерационного процесса происходит при достижении заданной точности вычислений либо при превышении заданного максимального числа итераций.

Сравнение этих формул с решением, полученным МКЭ для полосы со свободным отверстием (рис. 1), приведено на рис. 2.

Обобщение этих формул с учётом другого вида аппроксимации кривой деформирования в настоящей работе предлагается в следующем виде:

$$\frac{s_a^2}{E} + \rho \cdot \frac{(s_a - S_e)^{C_n+1}}{C_a^{C_n+1}} - \frac{(K_t \cdot \sigma_a)^2}{E} = 0, \quad (5)$$

где константа  $\rho$  определяется путём сравнения с решением МКЭ. Формулы Нейбера и Молски—Глинка получаются из формулы (5) как частные случаи.

При этом предлагается и другой вариант аппроксимации кривых деформирования для проведения расчетов (рис. 3):

$$\Delta e = \frac{\Delta s}{E} \text{ при } \Delta s \leq S_e; \quad (6)$$

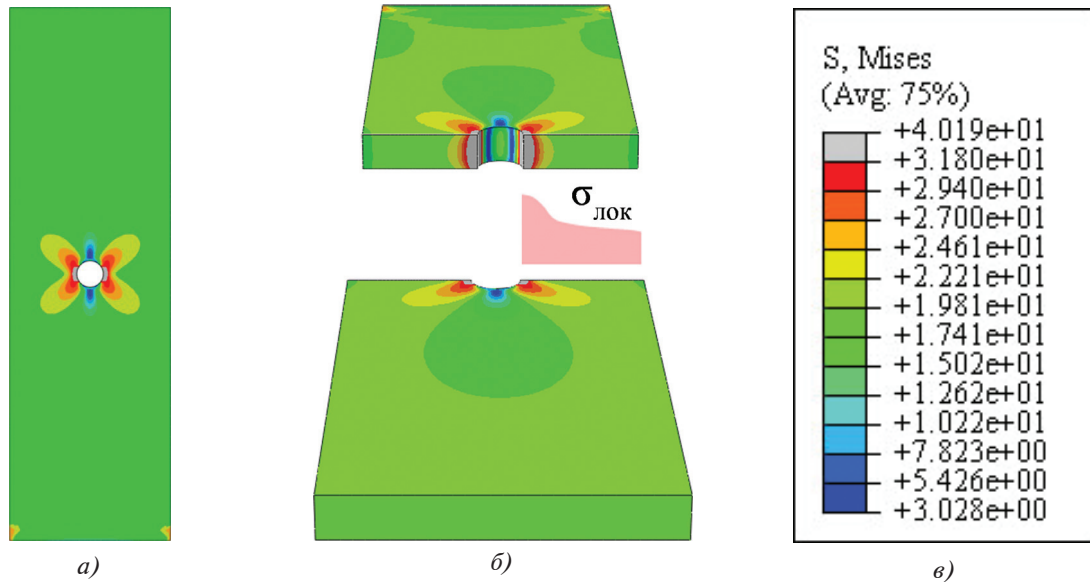


Рис. 1. Полоса со свободным отверстием: *a* — вид образца со свободным отверстием сверху; *б* — поле напряжений (по Мизесу) и распределение локальных напряжений вблизи отверстия, полученные с помощью МКЭ; *в* — пояснение для цветового изображения полей напряжений к рис. 1, *a* и *б*

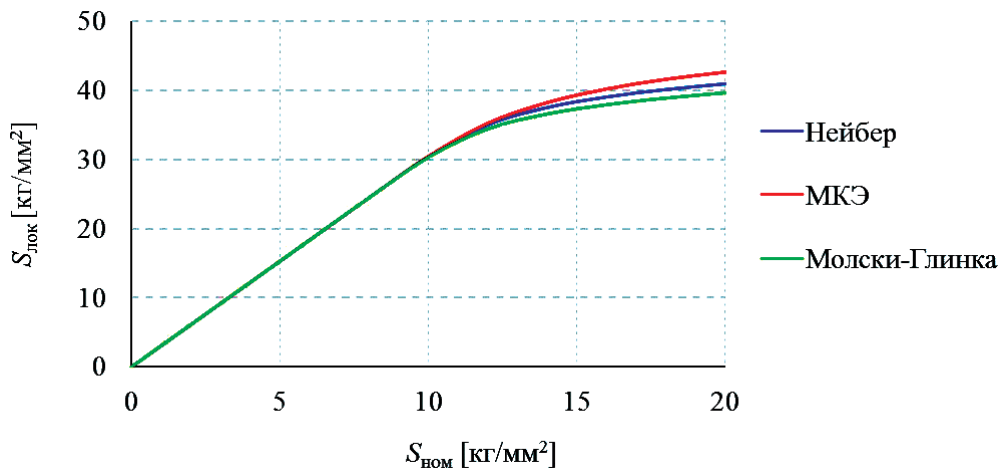


Рис. 2. Зависимость локальных напряжений  $S_{\text{лок}}$  от номинальных напряжений  $S_{\text{ном}}$

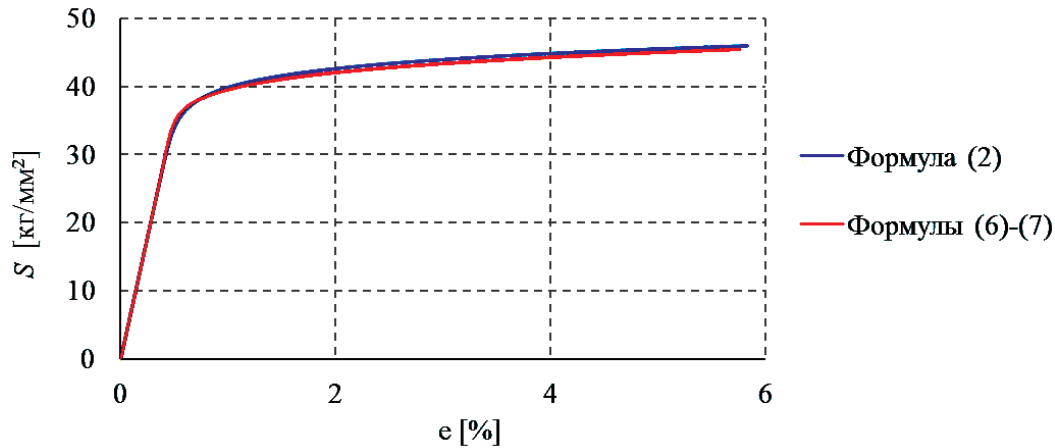


Рис. 3. Сравнение аппроксимаций кривых деформирования по формулам (2), (6), (7), материал Д16чТ (табл. 2)

$$\Delta e = \frac{\Delta s}{E} + \left( \frac{\Delta s - S_e}{C_d} \right)^{C_n} \quad \text{при } \Delta s > S_e; \quad (7)$$

$$e_a = \frac{s_a}{E} + \left( \frac{s_a - S_e}{C_a} \right)^{C_n} \quad \text{при } s_a > S_e, \quad (8)$$

где  $\Delta e$  — размах деформаций;  $\Delta s$  — размах напряжений;  $E$  — модуль упругости;  $S_e$  — предел пропорциональности с допуском на пластическую деформацию 0.01%;  $C_n$  — показатель степени в степенной аппроксимации кривой деформирования;  $C_a$  — константа материала в степенной аппроксимации кривой деформирования по амплитудам;  $C_d$  — константа материала в степенной аппроксимации кривой деформирования по размахам (статической кривой).

Формула (7) используется для расчётов по статической кривой деформирования, формула (8) — по циклической.

В соответствии с принципом Мазинга [16, 17] (циклическая кривая получается из статической, если считать её записанной в амплитудах)

$$C_a = \frac{C_d}{2 \frac{C_n - 1}{C_n}}. \quad (9)$$

*Примечание.* В соответствии с принципом Мазинга значение  $S_e$  становится пределом пропорциональности для амплитуд.

Преимущества используемого метода:

— в упругой области используется чисто упругое решение;

— кривая деформирования будет иметь линейный участок, который не требует решения нели-

нейного уравнения, и в то же время она будет непрерывной, что исключит проблемы с её использованием при итерационном процессе;

— константы в формулах (6) и (7) можно определить по справочным значениям  $S_{0.2}$  — предела текучести,  $S_b$  — предела прочности и  $\delta$  — удлинения при разрушении

$$C_n = \frac{\lg \left( \delta - \frac{S_b}{E} \right) - \lg(0.002)}{\lg(S_b - S_e) - \lg(S_{0.2} - S_e)};$$

$$C_a = \frac{S_{0.2} - S_e}{C_n \sqrt[4]{0.002}};$$

$S_{0.2}$  — предел текучести с допуском на пластическую деформацию 0.2%.

#### Определение диаграмм деформирования с помощью МКЭ для типовых концентраторов авиационной конструкции

Сравнение расчета МКЭ и результата, полученного по предлагаемому методу, приведено ниже для различных концентраторов напряжений. Упругопластический характер деформирования материала моделировался с помощью средств ABAQUS, при этом использовалась аппроксимация кривой деформирования по точкам. Для получения промежуточных точек кривой деформирования использовались уравнения (6) и (7). Значения всех используемых механических характеристик были взяты из справочника [18].

Расчет и сравнение проводились для четырёх вариантов геометрических концентраторов, встречающихся в конструкции самолёта: полосы с от-

вертием, галтельного перехода, выточки в цилиндрическом образце и отверстия в конструкции брошенного стрингера с оптимизированной формой стенки. При моделировании использовались характеристики тех материалов, из которых могут быть изготовлены элементы, содержащие данные концентраторы в конструкции самолёта. Раз-

мер элементов в наиболее нагруженных местах образцов выбирался с учетом локальной концентрации напряжений, которая была получена по данным справочника [19].

На рис. 4–6 изображены зависимости  $S_{лок}$ — $S_{ном}$  для образца с отверстием, галтельного перехода и выточки, полученные по предлагаемому

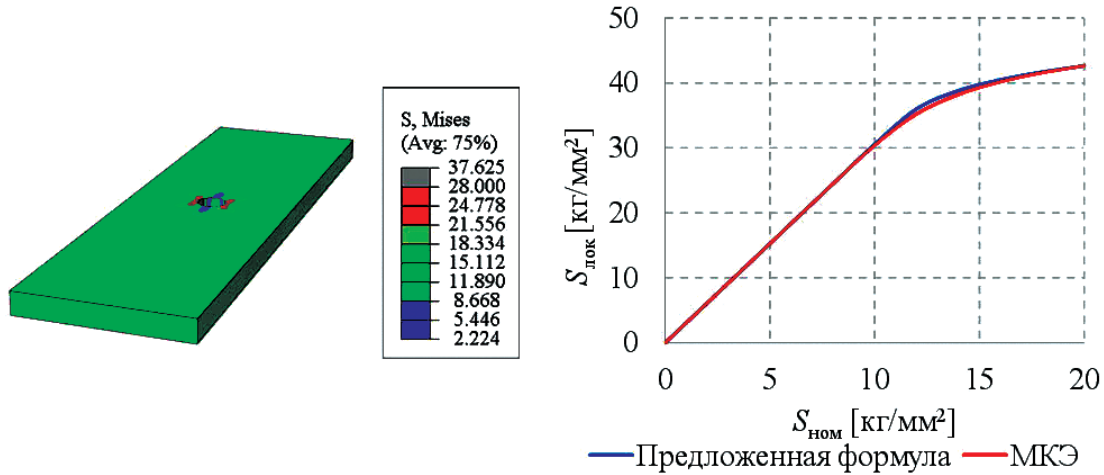


Рис. 4. Зависимость  $S_{лок}$ — $S_{ном}$  для полосы со свободным отверстием

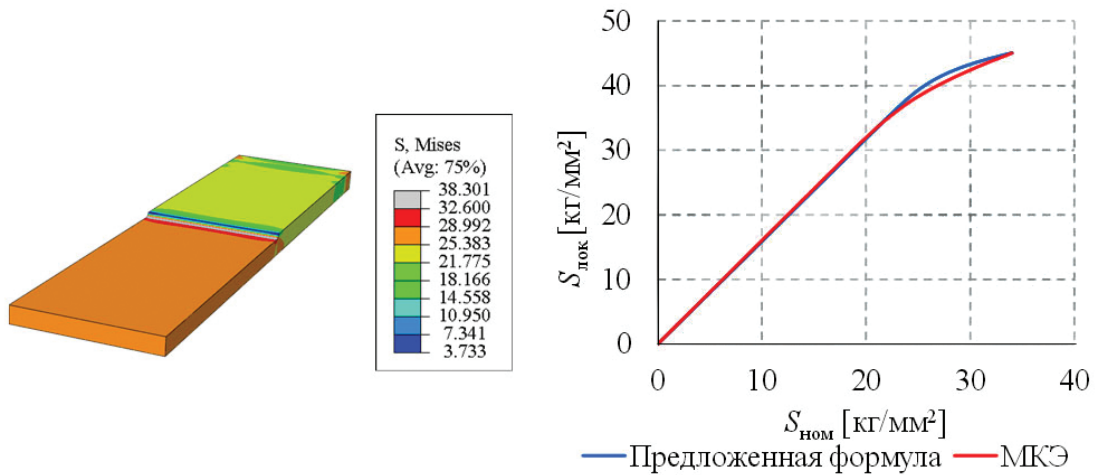


Рис. 5. Зависимость  $S_{лок}$ — $S_{ном}$  для галтельного перехода

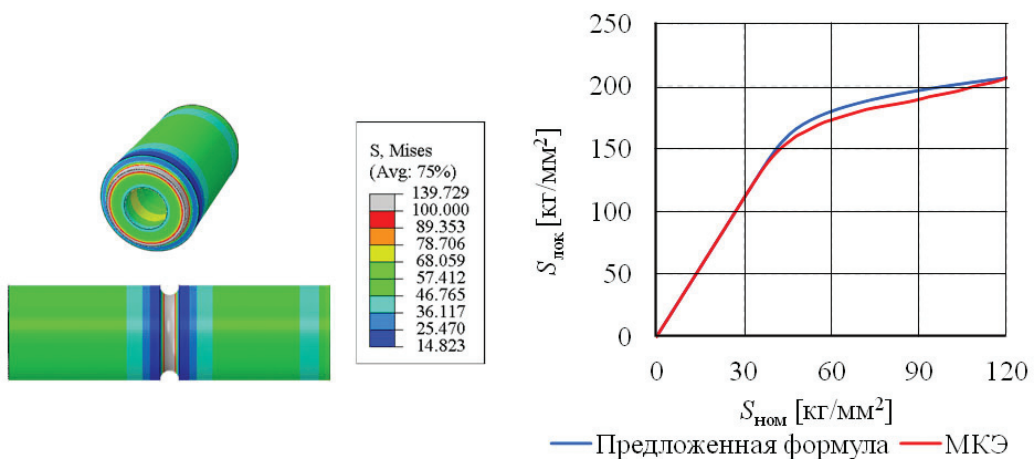


Рис. 6. Зависимость  $S_{лок}$ — $S_{ном}$  для выточки в цилиндрическом элементе шасси

Таблица 2

**Механические характеристики материала Д16чТ для образца с отверстием**

$S_b$	$S_{0,2}$	$\delta, \%$	$E$	$S_e$
48.6	38.1	14.1	7200	28.00

Таблица 3

**Механические характеристики материала 1163РДТВ для образца с отверстием**

$S_b$	$S_{0,2}$	$\delta, \%$	$E$	$S_e$
47.4	34.3	21.5	7450	32.6

Таблица 4

**Механические характеристики материала 30ХГСАИ2А-ВД для образца с отверстием**

$S_b$	$S_{0,2}$	$\delta, \%$	$E$	$S_e$
172.4	140.0	11.7	19500	100

методу и путём обработки расчета по методу конечного элемента. Используемые для расчета механические характеристики приведены в табл. 2—4 [18].

Константа  $\rho$  в формуле (5) подбиралась по максимальным значениям напряжений, но в общем случае определение её значения зависит от требований расчётной модели. Выбранный в на-

стоящей работе вариант обеспечивает наибольшую точность при расчёте по приближенной формуле максимальных напряжений.

Эксцентриситет приложения нагрузки при моделировании галтельного перехода компенсировался приложением симметричных граничных условий (рис. 7).



Рис. 7. Схема приложения симметричных граничных условий для устранения изгиба при нагружении образца с галтельным переходом

Основные геометрические параметры для моделирования сбега стрингера были выбраны по сборочным чертежам панели кессона крыла среднемагистрального пассажирского самолёта. Материалом стрингера, обшивки и крепёжных элементов являлся алюминиевый деформируемый сплав Д16чТ (см. табл. 2). Рассматривалась оптимизированная геометрия стенки стрингера с углом сбега, равным  $30^\circ$  (рис. 8).

Расчетная модель панели со стрингером состояла из части обшивки, стрингера и шестнадцати моделей заклёпок, обеспечивающих связь между листом обшивки и примыкающей полкой стрингера (рис. 8). Для учета объемного напряженного состояния в окрестности заклёпочного соединения компоненты соединения моделировались с использованием объемных восьми узловых эле-

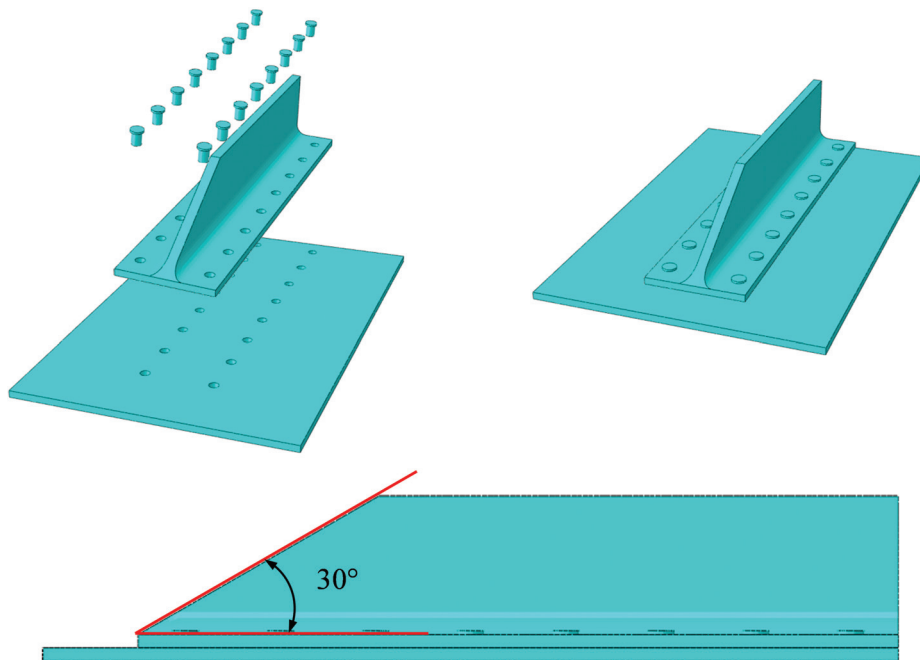


Рис. 8. Схема сборки панели с брошенным стрингером и геометрия сбега стенки стрингера, выбранная для сравнения предложенной аналитической зависимости и метода конечного элемента

ментов типа С3D8. Для моделирования контактных взаимодействий между заклёпкой и поверхностями отверстий заклёпка по высоте имела не менее шести элементов. Размер использовавшихся при моделировании элементов варьировался в пределах 0.5 до 1 мм со сгущением сетки в районе заклёпок.

Наиболее нагруженное место в модели стрингера выбиралось в одном из отверстий под заклёпки. На рис. 9 изображена зависимость, полученная путём моделирования и расчёта по формуле (5).

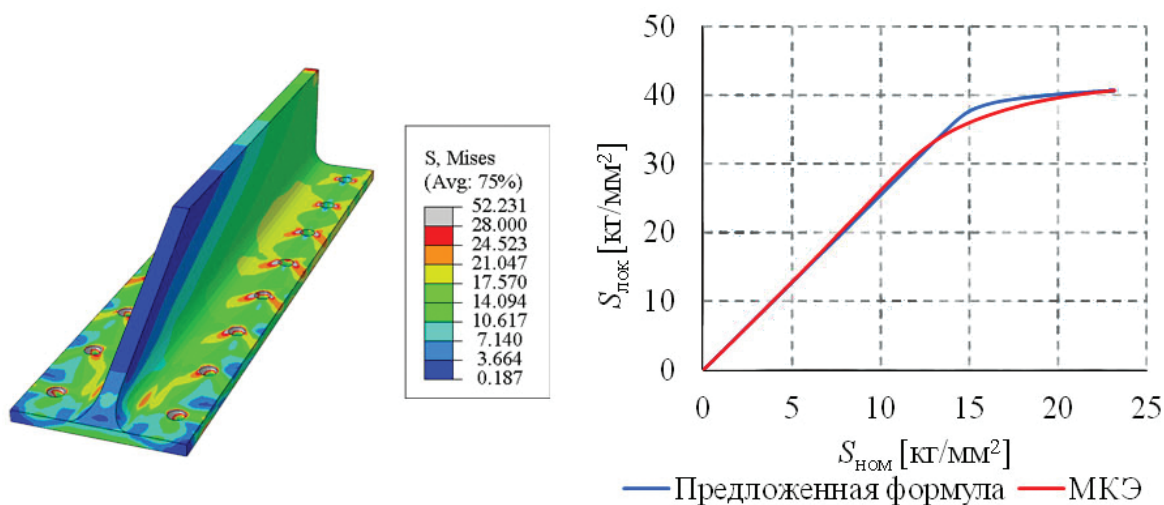


Рис. 9. Зависимость  $S_{\text{лок}}—S_{\text{ном}}$  для брошенного стрингера оптимизированной конструкции (наиболее нагруженное место выбрано на краю отверстия)

Усреднённое расхождение двух кривых, представленных на рис. 9, в части пластической деформации составляет около 2%.

В общем случае для анализа локальных напряжений в соединениях, подобной задаче со стрингером, необходимо учитывать нелинейную зависимость местных напряжений между рядами связей от общей нагрузки на стык. Исследование этой зависимости подробно рассматривается в работах [20—25].

### Выводы

Предложенная аппроксимация кривых статического и циклического деформирования, получаемая на основе стандартных констант материала и принципа Мазинга, позволит снизить затраты на получение исходных данных для расчётов локальных напряжений и деформаций при циклическом нагружении. Предложенная формула для определения зависимостей локальных напряжений и деформаций от номинальных напря-

жений для типовых концентраторов обеспечивает получение необходимых зависимостей, близких по точности к результатам, определяемым методом конечного элемента. С учетом того, что скорость расчётов по формуле (5) на несколько порядков выше скорости расчётов с помощью МКЭ, а трудоёмкость предложенного подхода в несколько раз меньше, применение данной формулы позволит разрабатывать эффективные методы расчёта долговечности на основе учёта локальных упругопластических напряжений и деформаций

при многоцикловом нагружении, характерном для авиационных конструкций.

*Исследование финансировано Министерством образования и науки Российской Федерации по соглашению №RFMEFI62518X0044.*

### Библиографический список

1. *Martin J.F., Topper T.H., Sinclair G.M.* Computer based simulation of cyclic stress—strain behavior with Applications to Fatigue // *Materials Research and Standards*. 1971. Vol. 11. No. 2, pp. 23—29.
2. *Wetzel R.M.* Smooth Specimen Simulation of Fatigue Behaviour of Notches // *Journal of Materials JMLSA*. 1968. Vol. 3. No. 3, pp. 646—657.
3. *Jhansale H.R., Topper T.H.* Cyclic deformation and fatigue behavior of axial and flexural members—a method of simulation and correlation // *1st International Conference on Structure Mechanics in Reactor Technology (Berlin, September 1972). Part L*, pp. 433—455.
4. *Conle A., Topper T.H.* Sensitivity of fatigue life predictions to approximations in the representation of

- metal cyclic deformation response in a computer-based fatigue analysis model // 2nd International Conference on Structure Mechanics in Reactor Technology (Berlin, September 1973), pp. 10-14.
5. *Conle A., Nowack H.* Verification of a Neuber-based Notch Analysis by the Companion—specimen Method // *Experimental Mechanics*. 1977. Vol. 17. No. 2, pp. 57—63. DOI: 10.1007/BF02326427
  6. *Crews J.H., Hardrath H.F.* A Study of Cyclic Plastic Stresses at a Notch Root // *Experimental Mechanics*. 1966. Vol. 6, pp. 313-320. DOI: 10.1007/BF02327511
  7. *Conle F.A., Chu C.-C.* Fatigue analysis and the local stress—strain approach in complex vehicular structures // *International Journal of Fatigue*. 1997. Vol. 19. No. 93, pp. 317—323. DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00045-5
  8. *Lee Y., Taylor D.* Strain-Based Fatigue Analysis and Design // *Fatigue Testing and Analysis. Theory and Practice*. Chapter 5. — Elsevier Inc., USA, 2005, pp.181-236. DOI: 10.1016/B978-0-7506-7719-6.X5000-3
  9. *Neuber H.* Theory of Stress Concentration for Shear-Strained Prismatical Bodies with Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law // *Journal of Applied Mechanics*. 1961. Vol. 28. No. 4, pp. 544-550. DOI: 10.1115/1.3641780
  10. ГОСТ 25.101-83. Расчеты и испытания на прочность. Методы схематизации случайных процессов нагружения элементов машин и конструкций и статистического представления результатов. — М.: Изд-во стандартов, 1983. — 25 с.
  11. ASTM E1049-85. Standard Practice for Cycle Counting for Fatigue Loading (Reapproved 1997). — ASTM International, United States, 1997. — 10 p.
  12. *Molsky K., Glinka G.* A Method of Elastic-plastic Stress and Strain Calculation at a Notch Root // *Material Science and Engineering*. 1981. Vol. 50. No. 1, pp. 93-100. DOI: 10.1016/0025-5416(81)90089-6
  13. *Ramberg W., Osgood W.R.* Description of stress-strain curves by three parameters. — National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) TN-902, 1943, Washington, DC, United States, 29 p.
  14. *Patwardhan P.S., Nalavde R.A., Kujawski D.* An Estimation of Ramberg-Osgood Constants for Materials with and without Luder's Strain Using Yield and Ultimate Strengths // *Procedia Structural Integrity*. 2019. Vol. 17, pp. 750-757. DOI: 10.1016/j.prostr.2019.08.100
  15. *Волков Е.А.* Численные методы: Учебное пособие. — Изд. 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2008. — 248 с.
  16. *Masing G.* Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing // *The Second International Congress of Applied Mechanics* (Zurich, 1926).
  17. *Masing G.* Zur Heyn'schen Theorie der Verfestigung der Metalle durch verborgen elastisch Spannungen. — *Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-konzern, III Band, Erstes Heft*, 1923.
  18. Расчётные значения характеристик авиационных металлических конструкционных материалов: Справочник. — М.: ОАК, 2011. — 304 с.
  19. *Петерсон Р.* Коэффициенты концентрации напряжений. Графики и формулы для расчета конструктивных элементов на прочность / Пер. с англ. Б.Н. Ушакова, И.А. Нечая, И.П. Сухарева. — М.: Мир, 1977. — 304 с.
  20. *Панков А.В.* Методика расчета зависимости «нагрузка-смещение» болтов и заклепок в многосрезных соединениях // *Ученые записки ЦАГИ*. 1990. Т. XXI. № 3. С. 95-102.
  21. *Панков А.В., Стебнев В.Н.* Метод расчета распределения усилий по точечным связям соединений большой ширины при произвольном внешнем нагружении // *Ученые записки ЦАГИ*. 1990. Т. XXI. № 4. С. 74-80.
  22. *Панков А.В.* Исследование напряженно-деформированного состояния элементов многосрезных болтовых и заклепочных соединений авиаконструкций // *Ученые записки ЦАГИ*. 1994. Т. XXV. № 3-4. С. 126-133.
  23. *Панков А.В.* Расчет распределения усилий по рядам многосрезного соединения с учетом деформаций изгиба соединяемых элементов // *Ученые записки ЦАГИ*. 1995. Т. XXVI. № 1-2. С. 166-174.
  24. *Дунаев В.В., Громов В.Ф., Макаров А.Ф., Ерёмин М.В.* Кинетика изменения стяжки пакета деталей болтовым соединением с радиальным натягом // *Вестник Московского авиационного института*. 2011. Т. 18. № 4. С. 27-37.
  25. *Громов В.Ф., Дунаев В.В., Макаров А.Ф., Ерёмин М.В.* Повышение качества и ресурса авиационных конструкций в зонах механических соединений // *Вестник Московского авиационного института*. 2010. Т. 17. № 1. С. 18-24.



## APPROXIMATE METHOD FOR LOCAL ELASTIC-PLASTIC PROBLEMS SOLVING

Svirskii Yu.A. \*, Bautin A.A. \*\*, Luk'yanchuk A.A., Basov V.N.

Central Aerohydrodynamic Institute named after N.E. Zhukovsky,  
TsAGI, 1, Zhukovsky str., Zhukovsky, Moscow Region, 140180, Russia

\* e-mail: yury.svirsky@tsagi.ru

\*\* e-mail: andrey.bautin@tsagi.ru

**Abstract**

In the last twenty years, durability computing techniques with account for local elastic-plastic strain-stress state have achieved a status of the Industry Standard while producing aviation, automotive, cargo and earth moving equipment all over the world. Although the fundamental concepts of this approach are quite simple, the large-scale automation and this technique application for strength calculation of both large dynamically loaded structures and machines driving gears led, in one hand, to the new possibilities emergence for engineers, but, on the other hand, they created extra challenges for the designers of the durability evaluation software. Presently, there is a possibility of dynamic models application for aviation structure loading computing, finite element models, allowing compute local strains by the applied loads, and techniques for more accurate plasticity computing for damageability estimation.

The article considers one of the methods for solving the elastic-plastic problem at cycle-by-cycle calculation, which can be applied for the durability evaluation with account for non-linear effects of interaction of loads of various values, especially after rare loads of high values. The need for analytical methods for elastic-plastic stresses computation developing and improving is caused by high labor intensity and low computing speed through numerical methods, such as finite element method.

The article proposes a new approximate formula for determining elastic plastic stresses and strains at the point of failure. The proposed approach is based on the solution of the elastic-plastic problem by the finite element method for the static case, as well as the method developed by the authors for fitting the static and cyclic stress-strain curves based on standard constants and the Masing principle. The suggested formula for determining the dependencies of local stresses and strains on nominal stresses for typical concentrators provides the necessary dependencies, close in accuracy to the results determined by the finite element method. This formula application will allow developing effective methods for durability computing

based on local elastic-plastic stresses and strains under multi-cycle loading, being typical for aircraft structures.

The article presents comparisons of local stresses dependencies at the most stressed points on nominal stresses, obtained with the proposed formula and the finite element method for typical stress concentrators of the aircraft structure such as strips with free hole, fillet, and stringer runout.

**Keywords:** durability computing technique by local tensions, durability of elements with typical concentrators, finite element model of bolted joint, cyclic deformation curve.

**References**

1. Martin J.F., Topper T.H., Sinclair G.M. Computer based simulation of cyclic stress-strain behavior with Applications to Fatigue. *Materials Research and Standards*, 1971, vol. 11, no. 2, pp. 23–29.
2. Wetzel R.M. Smooth Specimen Simulation of Fatigue Behaviour of Notches. *Journal of Materials JMLSA*, 1968, vol. 3, no. 3, pp. 646–657.
3. Jhansale H.R., Topper T.H. Cyclic deformation and fatigue behavior of axial and flexural members — a method of simulation and correlation. *1st International Conference on Structure Mechanics in Reactor Technology (Berlin, September 1972)*. Part L, pp. 433–455.
4. Conle A., Topper T.H. Sensitivity of fatigue life predictions to approximations in the representation of metal cyclic deformation response in a computer-based fatigue analysis model. *2nd International Conference on Structure Mechanics in Reactor Technology (Berlin, September 1973)*, pp. 10–14.
5. Conle A., Nowack H. Verification of a Neuber-based Notch Analysis by the Companion-specimen Method. *Experimental Mechanics*, 1977, vol. 17, no. 2, pp. 57–63. DOI: 10.1007/BF02326427
6. Crews J.H., Hardrath H.F. A Study of Cyclic Plastic Stresses at a Notch Root. *Experimental Mechanics*, 1966, vol. 6, pp. 313–320. DOI: 10.1007/BF02327511
7. Conle F.A., Chu C.-C. Fatigue analysis and the local stress-strain approach in complex vehicular structures. *International Journal of Fatigue*, 1997, vol. 19, no. 93, pp. 317–323. DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00045-5

8. Lee Y., Taylor D. Strain-Based Fatigue Analysis and Design. *Fatigue Testing and Analysis. Theory and Practice. Chapter 5*. Elsevier Inc., USA, 2005, pp.181-236. DOI: 10.1016/B978-0-7506-7719-6.X5000-3
9. Neuber H. Theory of Stress Concentration for Shear-Strained Prismatical Bodies with Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law. *Journal of Applied Mechanics*, 1961, vol. 28, no. 4, pp. 544-550. DOI: 10.1115/1.3641780
10. *Raschetny i ispytaniya na prochnost'. Metody skhematizatsii sluchainykh protsessov nagruzheniya elementov mashin i konstruksii i statisticheskogo predstavleniya rezul'tatov. GOST 25.101-83* (Strength calculation and testing. Representation of random of machine elements and structures and statistical evaluation of results. State Standard 25.101-83), Moscow, Standarty, 1983, 25 p.
11. *Standard Practice for Cycle Counting for Fatigue Loading (Reapproved 1997). ASTM E1049-85*. ASTM International, United States, 1997, 10 p.
12. Molsky K., Glinka G. A Method of Elastic-plastic Stress and Strain Calculation at a Notch Root. *Material Science and Engineering*, 1981, vol. 50, no. 1, pp. 93-100. DOI: 10.1016/0025-5416(81)90089-6
13. Ramberg W., Osgood W.R. *Description of stress-strain curves by three parameters*. National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) TN-902, 1943, Washington, DC, United States, 29 p.
14. Patwardhan P.S., Nalavde R.A., Kujawski D. An Estimation of Ramberg-Osgood Constants for Materials with and without Luder's Strain Using Yield and Ultimate Strengths. *Procedia Structural Integrity*, 2019, vol. 17, pp. 750-757. DOI: 10.1016/j.prostr.2019.08.100
15. Volkov E.A. *Chislennye metody* (Numerical methods), Saint Petersburg, Lan', 2008, 248 p.
16. Masing G. Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing. *The Second International Congress of Applied Mechanics (Zurich, 1926)*.
17. Masing G. *Zur Heyn'schen Theorie der Verfestigung der Metalle durch verborgen elastish Spannungen*. Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-konzern, III Band, Erstes Heft, 1923.
18. *Raschetnye znacheniya kharakteristik aviatsionnykh metallicheskih konstruksionnykh materialov* (The calculated values of the characteristics of aircraft metallic structural materials), Moscow, OAK, 2011, 304 p.
19. Peterson R.E. *Stress Concentration Factors: Charts and Relations Useful in Making Strength Calculations for Machine Parts and Structural Elements*. Chapman & Hall, 1954, 155 p.
20. Pankov A.V. *Uchenye zapiski TsAGI*, 1990, vol. XXI, no. 3, pp. 95-102.
21. Pankov A.V., Stebenev V.N. *Uchenye zapiski TsAGI*, 1990, vol. XXI, no. 4, pp. 74-80.
22. Pankov A.V. *Uchenye zapiski TsAGI*, 1994, vol. XXV, no. 3-4, pp. 126-133.
23. Pankov A.V. *Uchenye zapiski TsAGI*. 1995, vol. XXVI, no. 1-2, pp. 166-174.
24. Dunaev V.V., Gromov V.F., Makarov A.F., Eryomin M.V. Assembly tie change kinetics for bolted joint items with radial interference. *Aerospace MAI Journal*, 2011, vol. 18, no. 4, pp. 27-37.
25. Gromov V.F., Dunaev V.V., Eryomin M.V., Makarov A.F. Improvement of aviation structure quality and life in mechanical joint. *Aerospace MAI Journal*, 2010, vol. 17, no. 1, pp. 18-24.