ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

доктора физико-математических наук **Кудрявцевой Елены Александровны** на диссертационную работу Соколова Сергея Викторовича «Топологические и качественные методы анализа динамики твердого тела и идеальной жидкости», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 — теоретическая механика

Актуальность темы диссертационного исследования

Качественный анализ динамических систем, возникающих в задачах динамики твердого тела, и анализ фазовой топологии интегрируемых гамильтоновых систем является главной темой многочисленных публикаций, как теоретического так и прикладного характера. Здесь можно упомянуть задачи вихревой динамики, современные проблемы анализа движения вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, анализ динамики и фазовой топологии движения твердого тела вокруг неподвижной точки, содержащего полости, заполненные идеальной жидкостью, совершающей вихревое движение, которые требуют для решения задач классификации возможных типов движений, определения их устойчивости, нахождения возможных асимптотических движений применения современного аппарата топологического и качественного анализа.

В связи с этим актуальным представляется исследование, выполненное с применением существующих и развитием новых качественных и топологических методов анализа динамических систем, возникающих при описании движений твердых тел и идеальной жидкости, проведенное в рамках представленной диссертации.

Содержание и структура работы

Диссертация Соколова С.В. состоит из введения, обзора литературы, 7 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 274 страниц, из них 253 страниц текста, включая 62 рисунка. Библиография включает 231 наименование на 21 странице.

В **первой главе** представлены результаты, полученные для анализа динамики двух прямолинейных вихревых нитей в жидкости, заключенной внутри области, имеющей форму бесконечного кругового цилиндра. Здесь изучаются две близких задачи: система двух вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключенном в ловушку, и классическая задача о движении точечных вихрей в идеальной жидкости. Задача имеет 2 степени свободы, один существенный параметр $a = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \neq 0$ (отношение интенсивностей вихрей), и 2π-периодичный дополнительный первый интеграл F — момент завихренности.

В первом разделе 1.1 изучены относительно-стационарные движения системы двух вихрей для случая $a < 0$ интенсивностей противоположных знаков. Доказано отсутствие особенностей ранга 0 отображения момента $\mathcal{F}$. Найдены уравнения, задающие множество $\mathcal{C}$ относительных равновесий (особенностей ранга 1) и доказано, что оно является инвариантным 2-мерным подмногообразием $\mathcal{C} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ (теорема 1). Найдено (явное параметрическое — в случае конденсата, неявное — в случае идеальной жидкости) задание бифуркационной кривой (множества критических значений отображения момента) $\Sigma := \mathcal{F}(\mathcal{C}) = \Pi_1 \cup \Pi_2$ (теорема 2). В случае конденсата установлены геометрические свойства бифуркационной кривой: указаны асимптоты всех ее ветвей, доказано существование точки $Q_1 \in \Pi_1$ с максимальным уровнем энергии на одной из ее ветвей ($\Pi_1 = \mathcal{F}(\mathcal{N}_1)$), на другой ее ветви ($\Pi_2 = \mathcal{F}(\mathcal{N}_2)$) доказано существование точки $Q_4 \in \Pi_2$ возврата (каспа) и заданы уравнения для ее точек $Q_4, Q_3 \in \Pi_2$ возврата и перегиба; при $a = -1$ в обоих случаях — конденсата и идеальной жидкости — доказано отсутствие ветви Π_2 и симметричность ветви Π_1 при отражении относительно оси энергии (теорема 5). Изучены динамические свойства найденных относительных равновесий: получены формула для угловой скорости λ равномерного вращения вихрей вокруг оси цилиндра при относительно-стационарном движении (в случае конденсата, см. с.57) и для радиусов орбит вихрей при таком вращении (в случае конденсата), установлен знак неравенства между этими радиусами и указана точка $Q_2 \in \Pi_1$ смены знака неравенства, в точке перегиба Q_3 достигается максимум расстояния между вихрями и максимум разности радиусов орбит вихрей (теоремы 4 и 6); получены формулы для коэффициентов характеристического многочлена линеаризации гамильтонова потока в относительном равновесии; установлена невырожденность и тип по Вильямсону (эллиптический, гиперболический) для найденных относительных равновесий; показано, что смена типа происходит в (вырожденной) критической окружности, отвечающей точке $Q_4 \in \Pi_2$ возврата — в случае конденсата (теорема 3), точке касания ветвей Π_1, Π_2 и точке возврата кривой Π_1 — в случае идеальной жидкости (предложения 1 и 2).

Второй раздел 1.2 посвящен относительно-стационарным движениям двух вихрей, имеющих интенсивности одинакового знака ($a > 0$), в конденсате. Получены теоремы 7 (повтор теоремы 1), 8 и предложения 1 и 2 (аналогичные теоремам 1, 2, 3). Полученная в теореме 8 бифуркационная диаграмма имеет существенные отличия от ситуации классической идеальной жидкости. Найдены асимптоты бифуркационной кривой, доказано существование точки перегиба Q_3 ветви Π_2 и смена знака неравенства между радиусами орбит вихрей у относительно-стационарного движения при прохождении через эту точку.

Во **второй главе** рассматривается интегрируемая гамильтонова система с 3 степенями свободы, описывающая движение в идеальной жидкости кругового цилиндра и вихревой нити в отсутствии силы тяжести. Изучается редуцированная система с 2 степенями свободы, описывающая скорость движения цилиндра и движение вихря относительно цилиндра. Редуцированная система имеет 4 параметра R, a, λ, λ_1, и изучается при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_1$ (в случае $\lambda = \lambda_1$ возможны некомпактные движения, поэтому он не рассматривается). Построены неявные задания множества $\mathcal{N}$ относительных равновесий (точек ранга 1) редуцированной системы и доказано, что оно является инвариантным 2-мерным подмногообразием $\mathcal{C} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ (теорема 10). Найдено явное (параметрическое) задание бифуркационной диаграммы $\Sigma = \Pi_1 \cup \Pi_2$ (теорема 11).

Рассматриваемая система представляет собой центральную проблему в теории взаимодействия твёрдого тела с точечными вихрями в плоской гидродинамике идеальной 20 несжимаемой жидкости (аналогично случаю Эйлера, задаче трёх вихрей и проблеме Кеплера). Выделенность этого случая обусловлена тем, что при добавлении таких малых возмущений, как, например, отклонение формы цилиндра от круговой, второй и более вихрь, отличная от нулевой плавучесть и др., система теряет свойство интегрируемости, что будет показано в следующих главах.

Третья глава посвящена анализу движения в идеальной жидкости бесконечного кругового цилиндра, взаимодействующего с прямолинейными вихревыми нитями, при обтекании с отличной от нуля циркуляцией в поле силы тяжести. Из главы 2 мы знаем, что движение в отсутствии силы тяжести описывается гамильтоновой системой, которая в случае одного вихря является вполне интегрируемой по Лиувиллю и обладает регулярной динамикой. В этой главе продолжено исследование динамики твердого тела, взаимодействующего с вихревыми нитями, но уже в присутствии поле тяжести.

В первом разделе 3.1 рассмотрена система, состоящая из цилиндра и одного вихря. Получена гамильтонова форма уравнений, обобщающая результаты предыдущей главы на случай действия силы тяжести. Найдены неявно (3.1.8) положения равновесия редуцированной системы; исследована зависимость их типа и устойчивости от параметров a, R, λ, λ_1 с помощью численного нахождения (при некоторых значениях параметров) коэффициентов характеристического многочлена (3.1.9).

Во втором разделе 3.2 получены уравнения движения для цилиндра, взаимодействующего с N вихревыми нитями. Найдены первые интегралы этой системы.

В третьем разделе 3.3 сделана попытка численно (с помощью сечений Пуанкаре) продемонстрировать, что даже в случае $N = 1$ при наличии силы тяжести гамильтонова система, описывающая движение цилиндра и вихря, является неинтегрируемой и демонстрирует хаотический характер динамики.

В **четвертой главе** рассмотрена задача о движении в поле силы тяжести твердого тела, обладающего формой кругового цилиндра, взаимодействующего с двумя точечными вихрями ($N = 2$), в идеальной жидкости. Предполагается, что циркуляция жидкости вокруг цилиндра $\lambda = 0$, а интенсивности вихрей противоположны $\lambda_1 = -\lambda_2$. Основное внимание сконцентрировано на исследовании движений с "симметричными" конфигурациями относительно вертикальной плоскости: когда вихри симметричны друг другу, а цилиндр симметричен сам себе. В этом случае уравнения движения рассматриваются на соответствующем инвариантном многообразии.

В частности, изучена конфигурация, аналогичная задаче Фёппля: цилиндр движется в поле тяжести в сопровождении вихревой пары, причем каждый вихрь неподвижен относительно цилиндра. Показано, что, в отличие от конфигурации Фёппля, в поле силы тяжести относительное равновесие вихрей невозможно. Рассмотрена «ограниченная» задача: цилиндр предполагается достаточно тяжелым, вследствие чего влияние вихревой пары на его падение пренебрежимо мало. Обе задачи (полная и ограниченная) в результате численного исследования демонстрируют качественно сходство. В большинстве случаев решения имеют характер рассеяния.

В **пятой главе** рассмотрена еще одна задача о падении в поле силы тяжести кругового цилиндра, взаимодействующего с точечным вихрем, в идеальной жидкости. В отличие от глав 2 и 3, в главе 5 циркуляция жидкости вокруг цилиндра предполагается равной нулю ($\lambda = 0$). Используя автономный интеграл, проведена редукция системы на одну степень свободы в ранее не рассматриваемом случае нулевой циркуляции. Показано, что в отличие от случая циркуляционного обтекания в отсутствии точечных вихрей, в котором движение цилиндра будет происходить в ограниченной горизонтальной полосе, при наличии вихрей и циркуляции равной нулю вертикальная координата цилиндра неограниченно убывает (предложение 1). Дальнейшее внимание в главе сконцентрировано на численном исследовании динамики системы, которая при нулевой циркуляции обладает некомпактными траекториями. Численно построены функции рассеяния вихря на цилиндре. Вид этих функций свидетельствует о хаотическом характере рассеяния и, следовательно, об отсутствии дополнительного аналитического интеграла.

Шестая глава посвящена изложению результатов приложения методов топологического и качественного анализа к задачам динамики твердого тела. Речь идет об исследованиях, обобщающих один из важнейших классических результатов динамики твердого тела — интегрируемый случай движения твердого тела вокруг неподвижной точки, полученный С.В. Ковалевской, а именно об обобщенном двухполевом гиростате и волчке Ковалевской в неевклидовом случае.

В первых двух разделах 6.1 и 6.2 изучается обобщенный двухполевой гиростат. Это — система с 3 степенями свободы, параметрами $a, b, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda$, и коммутирующими первыми интегралы H, K, G.

В первом разделе 6.1 при $\lambda \neq 0$ найдены параметрические задания дискриминантных поверхностей Π_1, Π_2 спектральной кривой для соответствующей (известной ранее) L-A пары, явно найдены четыре линии самопересечения для этих поверхностей, вычислены коэффициенты характеристического многочлена (и определен их тип) для точек ранга 1 в прообразе этих кривых.

Во втором разделе 6.2 при $\lambda = 0$ найдены новые инвариантные соотношения и доказано, что они задают замыкание $\mathcal{M}$ множества точек ранга 2, отвечающее листу Π_2 бифуркационной диаграммы (теорема 16). Доказано, что $\mathcal{M} \setminus \{\Phi_0 = 0\}$ является 4-мерным регулярным симплектическим подмногообразием (теорема 17), состоящим из эллиптических точек ранга 2 (теорема 18), где Φ_0 — функция от G, H.

Наконец, в третьем разделе 6.3 изучается движение волчка Ковалевской в неевклидовом пространстве. Это — система с 2 степенями свободы, параметрами k, b_1 и дополнительным первым интегралом F. Используя технику Ковалевской и Кёттера, найдены уравнения Абеля–Якоби и приведены разделяющиеся переменные на плоскости.

Седьмая глава посвящена актуальной проблеме изучения фазовой топологии и механической интерпретации одного из самых сложных интегрируемых случаев на алгебре

Ли $so(4)$ с дополнительным интегралом четвертой степени — случаю Адлера–ван Мёрбеке. Система имеет 2 степени свободы, параметры $a, b, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, дополнительный первый интеграл K (теорема 19).

В первом разделе 7.1 найдено дискриминантное множество спектральной кривой соответствующей (известной ранее) L-A пары (теорема 20) в случае $(a^2 - b^2)(a^2 - 9b^2) \neq 0$. Найдены точки самопересечения дискриминантной кривой. Получены критические точки ранга 0 отображения момента и определены их типы (теорема 21). В частности, удалось показать, что случай Адлера–ван Мёрбеке топологически неэквивалентен другим известным интегрируемым случаям на алгебре Ли $so(4)$. Построена бифуркационная диаграмма системы при некоторых значениях параметров, в предположении что найденные дуги дискриминантного множества содержат всю бифуркационную диаграмму (с.229).

Во втором разделе 7.2 приведена возможная механическая интерпретация рассматриваемого случая (с.233, 234).

В третьем разделе 7.3 предложен способ визуализации перестроек торов Лиувилля.

Степень обоснованности и достоверности научных положений и выводов

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обеспечивается тем, что асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений, полученных численно с помощью пакетов символьных вычислений, согласуется с аналитическими оценками для интегральных кривых рассматриваемых динамических уравнений. Хаотический характер динамики рассмотренных систем с недостаточным для интегрируемости по Лиувиллю количеством первых интегралов, полностью верифицируется грубостью полученных для таких систем сечений Пуанкаре. Для большинства сформулированных в работе утверждений приведены подробные математические доказательства.

Материалы диссертации опубликованы в 40 печатных работах, из них 17 статей в рецензируемых журналах из перечня рекомендованных ВАК, среди которых 10 публикаций, индексируемых международными базами Scopus и Web of Science. Основные результаты диссертации обсуждались на многочисленных международных и всероссийских конференциях.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты, полученные в представленной диссертации Соколова С.В., могут быть использованы в задачах вихревой динамики, динамики твердого тела в идеальной жидкости и динамики твердого тела во внешних полях для

- нахождения и анализа устойчивости особых невырожденных траекторий динамических систем;
- построения бифуркационных диаграмм и комплексов, а также анализа посредством их орбитальной устойчивости критических движений;

- получения стратификаций фазового пространства в конкретных системах с использованием метода критических подсистем;
- исследования фазовой топологии задач качения твердых тел, которые приводят к уравнениям движения с наложенными неголономными связями; задач вихревой динамики, как в идеальной жидкости, так и в бозе-эйнштейновском конденсате; задач динамики цилиндрического твердого тела, в присутствии вихревых структур, которые являются интегрируемыми системами с избыточным набором интегралов, т.е. являются задачами некоммутативного интегрирования; построения фазовых портретов и сечений Пуанкаре как интегрируемых систем, так и более общих хаотических систем;
- применения методов качественного и топологического анализа к проблемам квантовой теории сильнокоррелированных систем в современных системах пониженной размерности физики конденсированных сред, а также в системах ультрахолодных атомов, помещенных в ловушку.

Результаты диссертационной работы Соколова С.В. могут быть использованы в научных исследованиях Института океанологии РАН им. П.П. Ширшова, Института водных проблем РАН, Института проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Института механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Московского авиационного института (национального исследовательского университета.

Замечания по диссертационной работе

В работе есть ряд неточностей, большинство из которых легко исправляются.

1. В главе 1 неверно указано в (1.1.7) и на с.73 фазовое пространство задачи — следует выкинуть из него множество столкновения вихрей. Множество возможных значений каждой координаты вихря ошибочно указано в (1.1.9) как отрезок $[0,1]$ вместо интервала $(-1,1)$. В теореме 1 утверждается без доказательства, что множество точек ранга 1 является подмногообразием (это можно вывести из формул (1.1.19) и (1.1.21) радиусов $r_i(s)$ и $r_i(t)$ орбит вихрей: из неравенства $r_1'(s)<0$ при $s>1$ следует, что $\mathcal{N}_1$ — гладкое подмногообразие, а из $(r_1^2)'(t)<0$ при $1<t<1/|a|$, $a\in(-1,0)$, — что $\mathcal{N}_2$ — гладкое подмногообразие). Критические окружности (относительные равновесия) названы "особыми периодическими движениями" (с.55 и ниже), в то время как угловая скорость λ (с.57) вращения вихрей при относительно стационарном движении может быть равной нулю (а именно, $\lambda=0$ для относительного равновесия с максимальным уровнем энергии, т.е. отвечающего точке $Q_1\in\Pi_1$), т.е. указанная критическая окружность (отвечающая точке Q_1) не является "единым периодическим движением", а состоит из бесконечного числа "движений" — положений равновесия.

В первом положении, выносимом на защиту, неточно сказано “приведено полное описание динамики системы в окрестности особых (критических) периодических траекторий”. Однако указанная динамика описана недостаточно полно: получены (в теореме 4) лишь формулы для радиусов орбит вихрей при относительно-стационарных вращениях, но не указана формула для угловой скорости этого вращения. Следовало бы указать, что угловая скорость относительно-стационарного вращения вихрей совпадает с коэффициентом λ (в формуле (1.1.32) и следующей формуле, в формуле (1.1.33) и следующей формуле), и поэтому меняет знак в точке Q_1 максимума энергии.

Не обоснована компактность (финитность) движений, т.е. компактность двумерных инвариантных интегральных подмногообразий, а также утверждение о количестве их связных компонент, т.е. необосновано утверждается, что они являются несвязными объединениями торов и чему равно количество этих торов (с.55, 62, 79–80, рис. 1.1, 1.4–1.7, 1.11, 1.12). Впрочем, такое обоснование не представляет труда.

Решения, отвечающие критическим окружностям, ошибочно названы устойчивыми (с.57, строки 11, 13) вместо орбитально устойчивых. Описание результатов раздела 1.1.5 (например, в названии и первой фразе этого раздела) претендует на изучение и решение гораздо более общей задачи, чем сделано в этом разделе, а именно: следует заменить “Изучим классификацию возможных движений точечных вихрей...” на “Изучим динамические свойства относительно-стационарных (т.е. критических) движений точечных вихрей...”.

Доказательство пункта 1 теоремы 4 изложено длиннее страницы, но этот пункт очевиден и просто доказывается, а именно: критическое решение (так как оно является относительным равновесием) совпадает (с точностью до масштабной замены времени) с интегральной траекторией гамильтонова потока, отвечающего дополнительному первому интегралу — моменту завихренности; поэтому такое решение является равномерным движением вихрей по круговым орбитам.

На с.62, в первой фразе нижнего абзаца ошибочно говорится, что движение вихрей, отвечающее внутренней точке камеры бифуркационного комплекса, является относительно-стационарным (в то время как таковым являются лишь критические движения, отвечающие граничной точке камеры).

Теорема 7 — это повтор теоремы 1.

2. Всюду в диссертации (введение и главы 1—5) следует заменить “движение цилиндра и точечного вихря” либо на “движение цилиндра и прямолинейной вихревой нити”, либо на “движение круга и точечного вихря” (в частности, в названиях разделов 3.1 и 3.2, подписи к рисункам 3.1, 4.2).

3. В главе 2 **неверны формулы** (2.2.6) и (2.2.7) для дополнительных первых интегралов K и F; видимо в них надо заменить $\frac{1}{2}(\frac{R^2}{r_1^2} - 1)$ на $\lambda_1(\frac{R^2}{r_1^2} - 1)$, а av^2 на a^2v^2, так как в противном случае неверно соотношение $F = 2\lambda K + P^2 + Q^2 + 2R^2\lambda_1^2$ на с.90.

Во втором положении, выносимом на защиту, говорится "в случае различной **топологии симплектического листа**". Однако пуассонова структура (2.2.5) невырождена, поэтому симплектический лист совпадает со всем фазовым пространством (которое некомпактно), поэтому термин "симплектический лист" (упомянутый также в подписях к рис. 2.2 и 2.3, но нигде больше не упомянутый в данной диссертации) непонятен по отношению к данной задаче.

Также **неверны утверждения о компактности** симплектического листа: в подписи к рис. 2.2, 2.3, 2.4, 2.8 ("в случае компактного симплектического листа" следует заменить на "в случае $\lambda\lambda_1 < 0$", а "в некомпактном случае" — на "в случае $\lambda\lambda_1 > 0$"). На с.91, строки 6–7, ошибочно сказано, что в случае $\lambda \cdot \lambda_1 < 0$ симплектический лист (т.е. фазовое пространство, как пояснено выше) редуцированной системы компактен (это неверно и следует, например, из некомпактности бифуркационного комплекса, или из формулы для фазового пространства редуцированной системы, см. ниже). Поэтому непонятно, почему случаи $\lambda\lambda_1 < 0$ и $\lambda\lambda_1 > 0$ названы компактным и некомпактным соответственно (с.94, строка 3 снизу; с.96, строка 3 снизу).

В формуле на с.91 для фазового пространства $\mathcal{M}$ редуцированной системы (точнее, в формуле для $\mathcal{B}$ — прямого произведения плоскости на круг радиуса R, ошибочно названного шаром радиуса P) надо заменить пару (x_1, y_1) на четверку (x_1, y_1, v_1, v_2).

На с.91, строки 12–15, сказано, что по теореме Нехорошева инвариантному двумерному тору редуцированной системы отвечает двумерный тор в полном фазовом пространстве. На самом деле для применимости теоремы Нехорошева нужно убедиться в компактности соответствующего движения в полном фазовом пространстве. А она следует из того, что ввиду (2.2.6) при $\lambda \neq 0$ координаты x_c, y_c выражаются явно через остальные фазовые переменные (изменяющиеся в компакте) и значения констант движения Q, P.

На с.92 "устойчивости интегрируемых гамильтоновых систем" следует заменить на "устойчивости инвариантных (критических) подмногообразий интегрируемых гамильтоновых систем".

Не изучена зависимость бифуркационного комплекса от параметров R, a, λ, λ_1. Поэтому в подписях к рис. 2.2, 2.3, 2.4, 2.8 следовало бы заменить "Бифуркационная диаграмма" на "Пример бифуркационной диаграммы". Например, бифуркационная диаграмма на рис. 2.3 отвечает значениям параметров $0 < \lambda/\lambda_1 < 1$, так как при значении $\lambda/\lambda_1 > 1$ пересечение бифуркационного комплекса с вертикальной прямой $h = \text{const}$ является лучом $[f_1, +\infty)$ в этой прямой (а не объединением двух лучей $(-\infty, f_0] \cup [f_1, +\infty)$, как на рисунке).

В теореме 11 **неверна формула** для коэффициента квадратного уравнения при z.

Нет аналитического обоснования (для всех значений параметров задачи) вида бифуркационной диаграммы, количества торов в прообразе внутренней точки камеры бифуркационного комплекса (на рис. 2.2, 2.3), невырожденности и типов критических периодических движений (с.96).

4. В главе 3, на с.109, допущена опечатка в формуле (3.1.2) для потенциала течения идеальной жидкости: следует заменить коэффициент λ перед разностью двух арктангенсов на λ_1 (аналогично формулам на с.138 и 160).

   "Классификация возможных движений" (п.3.1.5) необоснована, получена на основе численных экспериментов.

   В разделе 3.2.2 и теореме 13 (и в ее повторении — теореме 14) указан гамильтонов вид уравнений движения. Интересно отметить, что рассматриваемая здесь скобка Пуассона приводится к (почти каноническому) виду заменой $\tilde{v}_1 = v_1 - \frac{\lambda}{2a}y_c - \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i y_i(1-\frac{R^2}{x_i^2+y_i^2})$, $\tilde{v}_2 = v_2 + \frac{\lambda}{2a}x_c + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x_i(1-\frac{R^2}{x_i^2+y_i^2})$. А именно: после этой замены ненулевые компоненты скобки Пуассона суть $\{x_i, y_i\} = -\frac{1}{\lambda_i}$, $\{x_c, \tilde{v}_1\} = \{y_c, \tilde{v}_2\} = \frac{1}{a}$.

   В разделе 3.3 **нет проверки** того, что указанные в качестве "сечений Пуанкаре" поверхности действительно являются сечениями Пуанкаре: всюду трансверсальны фазовым траекториям системы, и пересекают любую фазовую траекторию.

5. В главе 4 теорема 14 — это повтор теоремы 13 из главы 3.

   На с.142, строка после (4.5.3), следует заменить "Рассмотрим движения системы на инвариантном многообразии" на "Рассмотрим при $\lambda = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_1$ движения системы на инвариантном многообразии", и убрать из (4.5.4) соотношения $\lambda = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_1$. Аналогично следует изменить формулу (4.6.1) и содержащую ее фразу.

   Указаны уравнения движения (4.5.5) на инвариантном подмногообразии. Однако не утверждается и не обсуждается гамильтоновость этих уравнений. Гамильтоновость устанавливается так. В качестве инвариантного многообразия возьмем множество всех неподвижных точек канонической (т.е. сохраняющей скобку Пуассона) инволюции (т.е. отображения, обратного самому себе) вида $(x_1, y_1, x_2, y_2, v_1, v_2, x_c, y_c) \mapsto (-x_2, y_2, -x_1, y_1, -v_1, v_2, -x_c, y_c)$. Тогда оно состоит из точек вида $(x_1, y_1, -x_1, y_1, 0, v_2, 0, y_c)$ и является 4-мерным симплектическим подмногообразием (можно доказать, что множество неподвижных точек любой канонической инволюции симплектического многообразия является симплектическим подмногообразием, но в данном случае это можно проверить и непосредственно). Это множество инвариантно относительно фазовых потоков систем с гамильтонианами H и Q, так как указанная инволюция сохраняет H, Q, а потому переводит фазовые траектории в фазовые траектории. Отсюда следует, что ограничение системы на данное инвариантное (симплектическое 4-мерное) подмногообразие является интегрируемой гамильтоновой системой с гамильтонианом и дополнительным первым интегралом

(4.5.7), и скобкой Пуассона как для x_1, y_1, v_1, v_2 в (4.3.5). Полученная скобка Пуассона сильно упрощается с помощью указанной выше замены $(x_1, y_1, v_1, v_2) \to (x_1, y_1, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$.

Опечатка: на с.143, в формуле (4.5.7) первое слагаемое должно быть $\frac{1}{2}av_2^2$ вместо $\frac{1}{2}av^2$.

В формулировке теоремы 15 (с.144) об относительно-стационарных симметричных решениях (типа Феппля) надо вставить «с параметрами $\lambda = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_1$» после «вихревой пары».

В доказательстве теоремы 15 есть пробел — не рассмотрен случай $y_1 = 0$. Действительно: в этом случае (4.5.8) и первое уравнение (4.5.10) могут быть выполнены одновременно, так как при v_2 стоит множитель $y_1 = 0$ в первом уравнении (4.5.10), поэтому зависимость v_2 от времени не нарушает (4.5.10). В случае $y_1 = 0$ доказательство проводится так: ввиду $\dot{y}_1 = 0$ имеем $v_2 = -\frac{R^2}{x_1^2}v_2 + \mathrm{const}$ ввиду $x_1 = \mathrm{const}$ (условие относительной стационарности движения — типа Феппля), откуда $v_2 = \mathrm{const}$, что противоречит второму уравнению (4.5.10).

С.145, строка 8: надо вставить «на инвариантном подмногообразии» после «Рассмотрим подробнее особенности движения системы». С.148, строка 5 снизу: надо вставить «на инвариантном подмногообразии» после «Сложность системы (4.5.5)».

При определении ограниченной задачи Феппля в поле тяжести на с.149, строка 1, следует вставить фразу «По-прежнему считаем, что $\lambda = 0$, $\lambda_2 = -\lambda_1$ и рассматриваем систему на инвариантном подмногообразии (4.5.4), описывающую симметричные движения цилиндра и вихревой пары» перед фразой «Таким образом, мы получаем...».

В (4.6.1) не обоснованы соотношения $v_2 = v_2(0) - gt$, $y_c = y_c(0) + v_2(0)t - \frac{1}{2}gt^2$ для «ограниченной» симметричной задачи Феппля в поле тяжести (они видимо взяты из системы (4.5.10) для стационарного решения, которая не имеет решения по доказанному). Таким образом, вид (4.6.2) ограниченной системы не обоснован в диссертации.

Тем не менее, уравнения на $x_1(t), y_1(t), v_2(t)$ (но не на $y_c(t)$) в изучаемой (в качестве «ограниченной» задачи Феппля) системе (4.6.2) качественно совпадают (т.е. переводятся вышеуказанной заменой координат $(x_1, y_1, v_1, v_2) \to (x_1, y_1, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$) с уравнениями на $x_1(t), y_1(t), v_2(t)$ в исходной (не ограниченной) задаче (4.5.5). А именно: надо заменить символ v_2 на символ $\tilde{v}_2$ в системе (4.6.2) и в первой формуле (4.6.1) (но не в последней формуле (4.6.1)), тогда исправленная система (4.6.2) (качественно совпадающая с самой системой (4.6.2)) эквивалентна исходной (не ограниченной) системе (4.5.5). Итак, с качественной точки зрения предложенные в диссертации уравнения на $x_1(t), y_1(t), v_2(t)$ в (4.6.2) верны (и имеют прямое отношения к исходной задаче (4.5.5), если под v_2 понимать $\tilde{v}_2$). Однако, если их рассматривать вместе с уравнением на $y_c(t)$ в (4.6.1), то уравнение на $y_c(t)$ в (4.6.1) надо исправить, исходя из того, что $\dot{\tilde{v}}_2 = -g$ (а $\dot{v}_2 \neq -g$, вообще говоря).

Таким образом, численно найденные (и указанные на рис. 4.6–4.8) симметричные решения «ограниченной» задачи Феппля (4.6.2) **в действительности совпадают** с симметричными решениями исходной задачи (4.5.5) на рис. 4.3–4.5 кроме зависимости $y_c(t)$, которую следует пересчитать и исправить на рис. 4.6–4.8. Кстати, автор тоже обнаружил указанное совпадение «ограниченной» и исходной задач «кроме движения цилиндра»: на с.152, строки 3–4 снизу, сказано «То есть ограниченная система демонстрирует поведение подобное исходной системе за исключением движения цилиндра, на движение которого наложено ограничение». На самом деле, как показано выше, «ограниченная» система для $x_1(t), y_1(t)$ даже совпадает с исходной системой (а не только подобна ей), а движения цилиндра $y_c(t)$ совпадет с движением в силу исходной системы, если его исправить на рис. 4.6–4.8 как указано выше.

Отметим, что «ограниченная» система (4.6.2) является гамильтоновой с гамильтонианом в (4.5.7), в котором вместо v_2 надо подставить $v_2 = \tilde{v}_2 - \frac{\lambda_1}{a} x_1 (1 - \frac{R^2}{x_1^2 + y_1^2})$, и симплектической структурой из п.4 выше.

6. В главе 6 (с.196), **в теореме 16 не обосновано**, что найденные инвариантные соотношения задают 4-мерное подмногообразие $\mathcal{M}$ фазового пространства. Более точно, нет обоснования того, что $\mathcal{M}$ является подмногообразием в окрестности точек нулевого уровня функции $\Phi_0 : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Не найден ранг этих точек.

   В формулировке теоремы 17 следует вставить «образованным сингулярными точками для $\mathcal{M}$, точками ранга ≤ 1, и точками» после «множеством».

   В формулировке теоремы 18 следует заменить «Любой тор, который принадлежит совместной» на «Любой инвариантный двумерный тор, который содержится в $\mathcal{M}$ и в совместной», и вставить «сингулярных точек $\mathcal{M}$ и» после «кроме».

7. В главе 7, в формулировке теоремы 20 (с.218) нужно добавить предположение о том, что $(a^2 - b^2)(a^2 - 9b^2) \neq 0$ (так как при $(a^2 - b^2)(a^2 - 9b^2) = 0$ система (7.1.11) всегда имеет решение вида $(0, \zeta)$, т.е. **теорема 20 неверна** без указанного предположения). Также следует заменить «исчерпывается объединением поверхностей кратных корней многочленов $P(t)$ и $Q(s)$» на «совпадает с множеством пар (h, k) таких, что дискриминант соответствующего многочлена $P(t)$ равен нулю или дискриминант соответствующего многочлена $Q(s)$ равен нулю».

   В предложении 2 (с.219) нужно исправить «поверхности кратных корней» как указано выше.

   Теорема 23 из раздела 7.3 (с.239) — это повтор теоремы 22 из раздела 7.2 (с.233).

8. Опечатки: на с.97, строка 1 снизу (рисунок 2.8 заменить на рисунок 2.9).

9. Допущена неточность: линеаризация гамильтоновой системы в положении равновесия ошибочно названа симплектическим оператором (вместо гамильтонова оператора) на с.198, 199.

На с.239 ошибочно сказано, что совместная поверхность уровня первых интегралов системы Адлера–ван Мербеке обладает зеркальной симметрией относительно каждой гиперплоскости $M_i = 0$ и $S_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$). На самом деле, эта поверхность симметрична относительно композиции двух указанных зеркальных симметрий, т.е. симметрична относительно плоскости $M_i = S_i = 0$ коразмерности 2.

Отмеченные недостатки, однако, не снижают общего положительного впечатления о диссертационной работе.

Заключение

Название диссертационной работы соответствуют ее содержанию, а материалы и результаты диссертационной работы в полном объеме отражены в публикациях автора. Автореферат соответствует диссертации, достаточно точно отражая все основные положения и полученные результаты.

Диссертационная работа Соколова С.В. на тему «Топологические и качественные методы анализа динамики твердого тела и идеальной жидкости» представляет законченную научно-квалификационную работу, которая вносит существенный вклад в теорию вихрей и динамику твердого тела.

Считаю, что диссертационная работа Соколова С.В. полностью соответствует требованиям пунктов 9—14 «Положения о порядке присуждения учёных степеней» (постановление Правительства РФ № 842 от 24.09.13, ред. от 28.08.2017), предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор Соколов Сергей Викторович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 «Теоретическая механика».

Профессор кафедры Дифференциальной геометрии и приложений
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова»
доктор физико-математических наук Е.А. Кудрявцева

119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, дом 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-19
+7 (495) 939-39-40
E-mail: eakudr@mech.math.msu.su

Подпись профессора кафедры Дифференциальной геометрии и приложений,
д.ф.-м.н. Е.А. Кудрявцевой ЗАВЕРЯЮ

Декан механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова
профессор, д.ф.-м.н. В.Н. Чубариков

М.П.