




«Утверждаю»

  
Ректор  
Федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования  
«Удмуртский государственный университет»  
д.ист.н., профессор Мерзлякова Г.В.  
« 19 » ноября 2018 г.

### ОТЗЫВ

ведущей организации–

**Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Удмуртский государственный университет»  
на диссертационную работу  
Беличенко Михаила Валериевича  
«Исследование устойчивости частных случаев движений  
твёрдого тела с вибрирующей точкой подвеса»,  
представленную к защите в диссертационном совете Д 212.125.14 при ФГБОУ ВО  
«Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)»  
на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика».**

#### Актуальность темы диссертации.

Диссертационная работа М.В. Беличенко посвящена исследованию вопросов существования и устойчивости периодических движений тяжелого твердого тела с различной геометрией масс, а также стационарных вращений и маятниковых движений в приближенной задаче динамики волчка Лагранжа, при наличии высокочастотных вибраций точки подвеса.

Задачи такого рода составляют специальный раздел динамики твердого тела и важны как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. Явление вибрации неизбежно при эксплуатации сложных механизмов в самых разных областях техники. Вибрационные эффекты часто приводят к дестабилизации рабочих режимов механизмов или их составных частей, а могут, напротив, привести к повышению динамической устойчивости.

С теоретической точки зрения, рассматриваемые задачи весьма сложны, их исследование началось с работ А. Стефенсона (1908 г.), открывшего возможность стабилизации неустойчивого верхнего положения маятника при высокочастотных вибрациях точки подвеса. В последующие десятилетия усилия исследователей были направлены на изучение, прежде всего, маятниковых систем при наличии вибрации. Сравнительно недавно А.П. Маркеевым (2009 г.) были получены приближенные автономные дифференциальные уравнения тяжелого твердого тела с произвольной геометрией масс, типа модифицированных уравнений Эйлера — Пуассона, при наличии



высокочастотных периодических или условно-периодических вибраций одной из точек тела. В рамках этой приближенной системы к настоящему времени решен ряд задач, изучающий частные движения тела (относительные равновесия, перманентные вращения) с вертикально вибрирующей точкой подвеса.

Данная диссертационная работа является одной из первых, где изучается твердое тело с различной (в том числе произвольной) геометрией масс и при этом вибрации отличны от вертикальных. Задачи в такой постановке являются новыми, их результаты не могут опираться на классическую задачу динамики тяжелого твердого тела с неподвижной точкой (вследствие наложения дополнительного силового поля) и лишь в малой степени стыкуются с результатами исследования маятниковых систем с вибрирующим подвесом. Таким образом, актуальность и новизна темы диссертации не вызывают сомнений.

#### **Характеристика диссертационной работы по главам.**

Диссертация М.В. Беличенко состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы. Текст работы изложен на 111 страницах. Список литературы включает в себя 103 наименования.

Во **введении** описана актуальность, теоретическая и практическая значимость работы, выполнен обзор литературы, определены цель, задачи и методы исследования, дано описание содержания диссертации по главам.

**В первой главе** исследуются движения тяжелого твердого тела с различной геометрией масс в случае горизонтальных высокочастотных гармонических колебаний малой амплитуды одной из его точек. Ставится задача о существовании, бифуркациях и устойчивости, в линейном приближении, высокочастотных периодических (с периодом, равным периоду колебаний точки подвеса) движений тела. Выписан гамильтониан системы, при помощи метода Дебри — Хори он приведен к виду, главная (приближенная) часть которого автономна. Выписаны также приближенные автономные уравнения в форме модифицированных уравнений Эйлера — Пуассона.

На первом этапе проводится исследование приближенной автономной системы. Описаны конфигурации тела с различной, в том числе произвольной, геометрией масс в положениях его относительного равновесия, для которых радиус-вектор центра масс относительно точки подвеса занимает вертикальное положение (вертикальные равновесия). Для трех частных случаев геометрии масс, когда центр масс тела лежит на главной оси или главной плоскости инерции или когда тело динамически симметрично, описаны конфигурации, отвечающие боковым равновесиям, для которых указанный радиус-вектор отклонен от вертикали. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости вертикальных и боковых равновесий для трех описанных частных случаев геометрии масс.

Методом Пуанкаре построены высокочастотные периодические движения тела, рождающиеся из вертикальных и боковых относительных равновесий приближенной системы. Сделаны выводы об их устойчивости (в линейном приближении).

**Во второй главе** изучается динамика волчка Лагранжа в предположении, что точка его подвеса совершает высокочастотные периодические вибрации в трехмерном пространстве. Методами, аналогичными используемым в первой главе, получен приближенный гамильтониан, отвечающий приведенной автономной гамильтоновой



системе с двумя степенями свободы. Выписана точность решений приближенной системы уравнений движения. Дальнейшее исследование проводится в рамках этой приближенной системы.

Для различных вариантов вибрации точки подвеса решается задача о существовании, числе и устойчивости (в линейной и нелинейной постановках) стационарных вращений волчка. Выписана схема исследования и, в частности, условия, накладываемые на угловую скорость стационарного вращения, при которых осуществляется гиростабилизация исследуемого движения.

Для законов вибрации, допускающих вертикальное положение оси волчка, найдены условия устойчивости для висящего и перевернутого «спящего» волчка Лагранжа, а также для вращения волчка около наклонных осей, дана их интерпретация. В случае вибраций оси волчка вдоль наклонной прямой показано существование двух или четырех вариантов стационарных вращений и построена бифуркационная диаграмма, аналогичная полученной ранее при решении задачи динамики плоского маятника в случае произвольных высокочастотных периодических вибраций точки подвеса, происходящих в плоскости движения маятника (результаты О.В. Холостовой). В более сложном варианте вибраций, когда отлично от нуля среднее значение одного из смешанных произведений компонент скорости точки подвеса, бифуркационная диаграмма аналогична, но на устойчивость влияет дополнительный параметр, поэтому картина устойчивости более сложная. Для последнего варианта вибраций найдены также равновесия другого типа, не имеющие аналогов в случае вибраций точки подвеса вдоль наклонной прямой или маятниковых задачах.

**В третьей главе** продолжается изучение динамики волчка Лагранжа с вибрирующим подвесом в рамках приближенных уравнений, полученных во второй главе. Предполагается, что закон вибрации точки подвеса позволяет оси волчка занимать вертикальное положение. В рамках приближенной системы существуют частные решения, при которых ось волчка совершает маятниковые движения в фиксированной вертикальной плоскости. Выписано уравнение маятникового движения, отвечающее модельной гамильтоновой системе с одной степенью свободы. Построены фазовые портреты этой системы. В плоскости параметров выделены области, где, в зависимости от соотношения между вертикальной и продольной интенсивностями вибраций, а также уровня энергии, происходят колебания оси волчка (в окрестности нижнего, верхнего или бокового положения равновесия), а также вращения. Во всем диапазоне параметров проведено интегрирование уравнений движения модельной системы. Выписаны частоты колебаний и вращений.

Проведено исследование орбитальной устойчивости в линейном приближении найденных маятниковых движений. Показано, что характер устойчивости зависит от соотношений между вертикальной и продольной, а также между вертикальной и поперечной интенсивностями вибраций. В областях колебаний и вращений вводятся переменные действие — угол и затем осуществляется изоэнергетическая редукция на нулевом уровне энергии. В результате исследование сводится к рассмотрению неавтономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы. Описаны множества порождающих точек областей неустойчивости (областей параметрического резонанса). Границы областей параметрического резонанса построены численно. Получена серия диаграмм устойчивости, описана эволюция характера устойчивости всех



рассматриваемых маятниковых движений в зависимости от значений параметров вибрации. Обсуждается возможность стабилизации этих движений за счет подбора поперечной интенсивности вибрации.

В заключении сформулированы основные выводы и результаты диссертационной работы.

#### **Научная новизна результатов и выводов диссертации.**

Диссертация содержит новые научные результаты в области исследования динамики твердого тела с различной геометрией масс при наличии высокочастотных вибраций точки подвеса:

- В рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений движения исследована задача о существовании и бифуркациях положений относительно равновесия тяжелого твердого тела при наличии высокочастотных горизонтальных гармонических вибраций точки подвеса. Для случая произвольной геометрии масс тела описаны относительные равновесия, для которых центр масс лежит на одной вертикали с точкой подвеса. Для ряда частных случаев геометрии масс (телос центром масс на главной оси инерции или в главной плоскости инерции и динамически симметричное тело), помимо вертикальных, найдены наклонные положения относительного равновесия. решен вопрос об их устойчивости.
- Для указанных частных случаев геометрии масс построены высокочастотные периодические движения тела, рождающиеся из положений относительного равновесия приближенной задачи. Решен вопрос об их устойчивости в линейном приближении.
- Исследованы стационарные вращения в приближенной задаче динамики волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает высокочастотное периодическое движение в трехмерном пространстве. Для случаев вибраций, допускающих вертикальные положения оси волчка, проведен линейный и нелинейный анализ устойчивости стационарных вращений, происходящих вокруг вертикальной и наклонных осей.
- В рамках приближенной системы решена задача о существовании, бифуркациях и устойчивости в линейном приближении стационарных вращений волчка Лагранжа для широкого спектра законов движения точки подвеса, включающего в себя произвольные вибрации в горизонтальной и вертикальной плоскостях и другие варианты.
- В приближенной задаче о движении волчка Лагранжа для случаев вибраций, допускающих вертикальные положения оси, рассмотрены маятниковые движения волчка. Проведено интегрирование маятниковых движений во всем диапазоне изменения параметров задачи. Исследована орбитальная устойчивость этих движений в линейном приближении.
- Построены диаграммы устойчивости для колебаний оси волчка в окрестности нижнего, верхнего и наклонного положений, и для вращений. Проанализирована эволюция областей устойчивости и неустойчивости этих движений в зависимости от соотношений между продольной, поперечной и вертикальной составляющими вибраций.



### **Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации.**

Постановка задач диссертационного исследования была выполнена автором совместно с научным руководителем – доктором физико-математических наук Холостовой Ольгой Владимировной. Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором.

**Достоверность основных научных положений, выводов и рекомендаций** в диссертационной работе Беличенко М.В. обеспечивается применением строгих математических методов исследования, высокой точностью проведенных численных расчетов, а также тем, что выводы, полученные в предельных случаях аналитически, полностью согласуются с результатами численного анализа.

### **Практическая значимость результатов работы.**

Диссертационная работа развивает актуальное направление исследования воздействия высокочастотных вибраций на устойчивость механических систем. Решены новые задачи устойчивости для ряда частных режимов движения твердого тела с произвольной геометрией масс и волчка Лагранжа при наличии вибраций, получены и описаны новые динамические эффекты. Результаты исследования могут быть полезны при разработке вибрационных механизмов и систем, в том числе используемых в авиационной промышленности и ракетостроении, и анализе их свойств.

Часть результатов диссертации может быть включена в качестве дополнительных глав к общему курсу теоретической механики, а также в спецкурсы по динамике твердого тела и теории устойчивости.

### **Полнота опубликованных научных результатов и апробация.**

По тематике диссертации опубликовано 15 работ, из них 3 статьи в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий и рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертации. Все материалы диссертационного исследования достаточно полно отражены в опубликованных работах.

### **Замечания по диссертационной работе:**

- 1) Во второй главе результаты исследования устойчивости стационарных вращений волчка Лагранжа, описанные таблицей 2.1 (стр. 71), проанализированы недостаточно подробно.
- 2) В третьей главе диссертации введено пересекающееся обозначение. При выводе уравнений приближенной системы за  $h$  принято максимальное отклонение точки подвеса от фиксированной точки пространства (стр. 43), а далее так же обозначается уровень энергии маятникового движения (стр. 76).
- 3) В третьей главе границы областей параметрического резонанса получены лишь численно, следовало бы построить их аналитически при малых значениях энергии невозмущенного движения (диаграммы на стр. 88-93).

**Общее заключение.** Диссертационная работа Беличенко М.В. является законченной научно-исследовательской работой, посвященной актуальной научной



проблеме, отличающаяся научной новизной и практической значимостью полученных результатов. Достоверность результатов работы не вызывает сомнений, сами результаты достаточно полно опубликованы и апробированы. Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации. По своему содержанию диссертация полностью соответствует специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика».

Диссертация Беличенко Михаила Валериевича «Исследование устойчивости частных случаев движений твердого тела с вибрирующей точкой подвеса» удовлетворяет всем требованиям Постановления Правительства РФ от 24.09.2013 № 842 «О порядке присуждения учёных степеней» (в редакции Постановления Правительства РФ от 28.08.2017 № 1024), а её автор, Беличенко Михаил Валериевич, заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика».

Отзыв составлен заведующим лабораторией Нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Института математики, информационных технологий и физики ФГБОУ ВО «УдГУ», д.ф.-м.н. Борисовым Алексеем Владимировичем, обсуждён и одобрен на расширенном семинаре лаборатории Нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Института математики, информационных технологий и физики ФГБОУ ВО «УдГУ» (протокол № 3 от «14» ноября 2018 г.).

Заведующий лабораторией Нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения ИМИТиФ ФГБОУ ВО «УдГУ», д.ф.-м.н.

Борисов А.В.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Удмуртский государственный университет»:

Удмуртия, 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

Телефон: (3412)68-16-10

<http://www.udsu.ru/>

E-mail: [rector@udsu.ru](mailto:rector@udsu.ru)

Подпись А.В. Борисова заверяю  
Ученый секретарь Ученого совета



Военкова Н.Ф.