УДК 514.181.2:519.651

Применение вейвлетов в системах автоматизированного проектирования

Битюков Ю.И.*, Калинин В.А.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: yib72@mail.ru*

***e-mail: kalininmtak@gmail.com*

Аннотация

Данная статья посвящена применению теории вейвлетов в задачах геометрического моделирования конструкций летательных аппаратов. Представленные методы моделирования используются в CAD/CAM/CAE – системах изготовления конструкций из композиционных материалов. В качестве примера рассмотрена вентиляторная лопатка самолета МС-21.

Ключевые слова: вейвлет, системы автоматизированного проектирования, сплайн, геометрическое моделирование, алгоритм Чайкина, фильтр анализа, фильтр синтеза, блок фильтров.

Введение

При проектировании сложной техники постепенно происходит переход от традиционных средств обработки геометро–графической информации к безбумажным технологиям. Это открывает новые возможности по использованию систем автоматизации проектирования, порождает новые технологии, связанные с использованием электронной модели объекта проектирования.

В настоящее время на предприятиях, занимающихся проектированием и изготовлением сложной авиационной техники, активно используются CAD/CAM/CAE/PDM–системы. Это обусловлено целым рядом причин, среди которых главное место занимают проблемы управления качеством выпускаемой продукции особенно при её выходе на мировой рынок. Базируясь на принципах оптимизации и контроля параметров изделий на всех этапах проектирования и изготовления, такие системы обеспечивают комплексное выполнение проектных работ при значительном сокращении их сроков и одновременном повышении качества. Основной целью при этом является постоянное снижение себестоимости выпускаемой продукции и обновление ее ассортимента, улучшение показателей надежности, ремонтопригодности, экономичности и др.

В CAD/CAM/CAE-системах традиционно уделяется повышенное внимание совершенствованию технологии геометрического трехмерного моделирования. Одним из основных достижений современного периода можно считать разработку методов моделирования кривых и поверхностей произвольной формы на основе технологии Bezier (Безье) и NURBS, ставшей международным промышленным стандартом для проектирования сложных криволинейных поверхностей. Однако главной проблемой здесь является не столько сам процесс моделирования, сколько способы модификации и оптимизации созданных геометрических моделей, что очень критично при итерационном режиме работы конструктора. Кроме того, известно, что наибольший объем работ занимает не сам процесс проектирования, а итерационный процесс внесения в проект улучшающих изменений. Именно поэтому сегодня актуальными являются проблемы совершенствования методов геометрического моделирования трехмерных объектов, использующих стандартный для CAD/CAE/CAM-систем математический аппарат, а также адаптации этих методов для конкретных промышленных приложений.

Вейвлеты являются математическим инструментом для иерархического представления функций. Имея своими исконными областями применения теорию приближения, физику и обработку сигналов, вейвлеты с недавних пор стали использоваться во многих задачах геометрического моделирования преимущественно в компьютерной графике [6]. Некоторые применения в CAD-системах можно найти в работе [4]. Если в компьютерной графике бывает достаточно лишь видимой гладкости кривых и поверхностей, то в CAD/CAM/CAE-системах требуются поверхности, принадлежащие различным классам гладкости C^k. Данная статья является развитием результатов, полученных в работах [1,2,3]. В этой статье мы построим вейвлет-базис на отрезке, на основе B-сплайна произвольного порядка n. С помощью такого вейвлет-базиса будут построены двумерные вейвлеты. На основе этих построений будет обобщен известный алгоритм Чайкина построения кривых и поверхностей произвольного класса гладкости. Следует заметить, что в работе [3] вейвлет-базис был построен для случая n=3, а в работе [1] для случаев n=0,1,2,3.

Построение вейвлет-базиса на отрезке с использованием В-сплайнов

Под вейвлет-преобразованием в теории вейвлетов понимается разложение функции по системе вейвлетов $\psi_{j,k}$ – функций, каждая из которых является сдвинутой и масштабированной (сжатой или растянутой) копией одной функции $\psi \in L^2(\mathbf{R})$, называемой материнским вейвлетом: $\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)$.

Построение вейвлет-систем тесно связано с понятием кратномасштабного анализа (КМА) [10], т.е. последовательности $\ldots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots$ подпространств $L^2(\mathbf{R})$, для которой $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$; $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$; $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j \cdot x) \in V_j$, $\forall j \in \mathbf{Z}$; существует функция $\varphi \in V_0$, называемая масштабирующей функцией или отцовским вейвлетом, такая, что последовательность $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ образует базис Рисса в V_0.

Известно, что [7] масштабирующая функция удовлетворяет масштабному соотношению $\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} u_k \varphi(2x-k),\ u_k \in \mathbf{C}$.

Последовательность $\{u_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ называется масштабной последовательностью.

КМА приводит к базису в $L^2(\mathbf{R})$. Как известно [9,11], применение таких базисов для разложения функции, определенной на отрезке, порождает искусственные скачки на краях, отраженные в значениях вейвлет-коэффициентов. Кроме того, это неэффективно с точки зрения вычислений. Поэтому полезными были бы вейвлет-системы на отрезке. Чтобы разложить функцию, определенную на отрезке $[a;b]$ необходимо построить вейвлет-базис в $L^2[a;b]$. В этой статье мы рассмотрим подход, предложенный в статьях [3, 1] и применим его к построению вейвлет-базиса на отрезке в случае, когда в качестве масштабирующей функции выбран B-сплайн произвольного порядка n.

Для геометрических приложений мы будем рассматривать действительное пространство $L^2(\mathbf{R})$. Рассмотрим действительные функции, определенные на отрезке $[a;b]$. Пусть функция $\varphi \in L^2\left(\mathbf{R}\right)$ удовлетворяет масштабному равенству $\varphi\left(x\right) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} u_k \varphi\left(2x-k\right),\ u_k \in \mathbf{R}$ и имеет компактный носитель. Обозначим $\varphi_{jk}(x) = \varphi\left(2^j x - k\right),\ x \in [a;b],\ j,k \in \mathbf{Z}$. Ясно, что для каждого j отличными от нуля на отрезке $[a;b]$ будет лишь конечное число таких функций. Пусть для определенности это будут функции $\varphi_{j,0}, \varphi_{j,1}, \ldots, \varphi_{j,n_j-1}$. Для дальнейших построений изложим кратко подход к построению вейвлет-систем на отрезке, предложенный в статье [3].

Рассмотрим последовательность $V_0 \subset V_1 \subset \ldots$ подпространств $L^2[a;b]$

$$V_j = \mathrm{lin}\left\{\varphi_{j,0}, \varphi_{j,1}, \ldots, \varphi_{j,n_j-1}\right\} = \left\{\sum_{s=0}^{n_j-1} a_s \varphi_{j,s} : a_s \in \mathbf{R},\ s = 0,1,\ldots,n_j - 1\right\},\ \dim V_j = n_j .$$

Поскольку $V_{j-1} \subset V_j$, то $\varphi_{j-1,k} = \sum_{s=0}^{n_j-1} p_{s,k}^{j} \varphi_{j,s}$. Введем обозначения [3]

$$\Phi_j(x) = \left(\varphi_{j,0}(x), \varphi_{j,1}(x), \ldots, \varphi_{j,n_j-1}(x)\right),\ \mathrm{P}_j = \left(p_{s,k}^{j}\right)_{s=0,\ \ k=0}^{n_j-1,\ n_{j-1}-1} .$$

Тогда $\Phi_{j-1} = \Phi_j \mathrm{P}_j$. Обозначим символом W_{j-1} ортогональное дополнение к пространству V_{j-1} в пространстве V_j. Такое ортогональное дополнение в теории вейвлетов называется уточняющим или детализирующим подпространством [7], поскольку оно содержат информацию, необходимую для перехода от уровня разрешения j к уровню j+1. Поскольку $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ и $W_{j-1} \subset V_j$, то W_{j-1} конечномерное пространство. Если $W_j = \mathrm{lin}\left\{\psi_{j,0}, \psi_{j,1}, \ldots, \psi_{j,m_j-1}\right\}$, $\dim W_j = m_j$, то $\psi_{j-1,k} = \sum_{s=0}^{n_j-1} q_{s,k}^{j} \varphi_{j,s}$. Функции $\psi_{j,k}$ называются вейвлетами, а детализирующие пространства W_j называются вейвлет-пространствами [7]. Снова введем в рассмотрение матрицы [3]

$$\Psi_j(x) = \left(\psi_{j,0}(x), \psi_{j,1}(x), \ldots, \psi_{j,m_j-1}(x)\right),\ \mathrm{Q}_j = \left(q_{s,k}^{j}\right)_{s=0,\ \ k=0}^{n_j-1,\ m_{j-1}-1} .$$

Тогда $\Psi_{j-1} = \Phi_j \mathrm{Q}_j$. Следует заметить, что $n_j + m_j = n_{j+1}$.

Пусть $f \in L^2[a;b]$ и $S_j : L^2[a;b] \to V_j$ - проектор. Тогда приближение $S_j f$ можно разложить на более грубое приближение $S_{j-1} f$ и уточняющее слагаемое $S_{j-1}^{W} f$

$$S_j f = \sum_{k=0}^{n_j-1} c_{jk}\varphi_{jk} = S_{j-1}f + S_{j-1}^{W} f = \sum_{k=0}^{n_{j-1}-1} c_{j-1,k}\varphi_{j-1,k} + \sum_{k=0}^{m_{j-1}-1} d_{j-1,k}\psi_{j-1,k} .$$

Введем в рассмотрение два вектора коэффициентов $\mathrm{C}_j = \left(c_{j,0},...,c_{j,n_j-1}\right)^T$, $\mathrm{D}_j = \left(d_{j,0},...,d_{j,m_j-1}\right)^T$. Первый вектор описывает приближение функции *f*, а второй вектор представляет собой вейвлет-коэффициенты, которые характеризуют отклонение $S_{j-1}f$ от $S_j f$. Имеем [3] $\Phi_j \mathrm{C}_j = \Phi_{j-1}\mathrm{C}_{j-1} + \Psi_{j-1}\mathrm{D}_{j-1} = \Phi_j \mathrm{P}_j \mathrm{C}_{j-1} + \Phi_j \mathrm{Q}_j \mathrm{D}_{j-1}$. Отсюда находим [3] $\mathrm{C}_j = \mathrm{P}_j \mathrm{C}_{j-1} + \mathrm{Q}_j \mathrm{D}_{j-1}$. По данному равенству можно восстановить приближение $S_j f$ по более грубому приближению $S_{j-1}f$ и вейвлет-коэффицентам. Поскольку линейные операторы (проекторы) $V_j \to V_{j-1}$, $V_j \to W_{j-1}$ определяются некоторыми матрицами $\mathrm{A}_j, \mathrm{B}_j$, то $\mathrm{C}_{j-1} = \mathrm{A}_j \mathrm{C}_j$, $\mathrm{D}_{j-1} = \mathrm{B}_j \mathrm{C}_j$. Графически вейвлет-разложение аппроксимации $S_j f$ и вейвлет-восстановление этой аппроксимации можно изобразить в виде диаграмм

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}_j \arrow[r, "\mathrm{A}_j"] \arrow[dr, "\mathrm{B}_j"'] & \mathrm{C}_{j-1} \arrow[r] \arrow[dr] & ...\mathrm{C}_1 \arrow[r, "\mathrm{A}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{B}_1"'] & \mathrm{C}_0 \\
 & \mathrm{D}_{j-1} & ... & \mathrm{D}_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{C}_j & \mathrm{C}_{j-1} \arrow[l, "\mathrm{P}_j"'] & ...\mathrm{C}_1 \arrow[l] & \mathrm{C}_0 \arrow[l, "\mathrm{P}_1"'] \\
 & \mathrm{D}_{j-1} \arrow[ul, "\mathrm{Q}_j"] & ... \arrow[ul] & \mathrm{D}_0 \arrow[ul, "\mathrm{Q}_1"]
\end{tikzcd}$$

Под вейвлет-преобразованием функции *f* будем понимать нахождение векторов $\mathrm{C}_0, \mathrm{D}_0, \mathrm{D}_1, ..., \mathrm{D}_{j-1}$.

Известна [3] связь между матрицами $\mathrm{A}_j, \mathrm{B}_j$ и $\mathrm{P}_{j,}$ Q_j:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_j \\ \mathrm{B}_j \end{pmatrix} = \left(\mathrm{P}_j \;\; \mathrm{Q}_j \right)^{-1}.$$

Заметим, что

$$\mathrm{A}_j \cdot \mathrm{P}_j = \mathrm{E},\ \mathrm{B}_j \cdot \mathrm{Q}_j = \mathrm{E},\ \mathrm{A}_j \cdot \mathrm{Q}_j = 0,\ \mathrm{B}_j \cdot \mathrm{P}_j = 0,\ \mathrm{P}_j \cdot \mathrm{A}_j + \mathrm{Q}_j \cdot \mathrm{B}_j = \mathrm{E}. \qquad (1)$$

Матрица Q_j в статье [3] определяется из однородной системы линейных уравнений $\mathrm{T}_j \cdot \mathrm{Q}_j = 0$, где $\mathrm{T}_j = \mathrm{P}_j^T \left[\left(\Phi_j, \Phi_j \right) \right]$, а $\left[\left(\Phi_j, \Phi_j \right) \right] = \left(\left(\varphi_{j,i}, \varphi_{j,s} \right) \right)_{i,s=0}^{n_j-1}$ - матрица скалярных произведений.

Матрицы Q_j и P_j известны как фильтры синтеза. Матрицы A_j и B_j известны как фильтры анализа. Множество $\left\{ \mathrm{P}_j, \mathrm{Q}_j, \mathrm{A}_j, \mathrm{B}_j \right\}$ называется блоком фильтров.

Теперь применим описанный подход к построению вейвлет-системы на отрезке, используя в качестве масштабирующей функции B-сплайн произвольного порядка. Определим B-сплайны порядка *n*, как свертку [7]

$$N_n = N_{n-1} * N_0, \quad N_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1), \\ 0, & x \notin [0;1). \end{cases}$$

Отметим некоторые известные свойства B-сплайнов [7]. Во-первых, $N_n(x) \ge 0,\ \forall x$. Во-вторых, $\mathrm{supp} N_n(x) = [0; n+1]$. Хорошо известно [7] преобразование Фурье функции N_n:

$$\hat{N}_n\left(y\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(y/2)}{(y/2)} \right)^{n+1} e^{-i(n+1)y/2}.$$

Имеем $\dfrac{\hat{N}_0(2y)}{\hat{N}_0(y)} = \dfrac{1}{2}\left(1+e^{-iy}\right) = \delta_0(y)$. Отсюда находим

$$\hat{N}_n(2y) = \left(\hat{N}_0(2y)\right)^{n+1} = \left(\hat{N}_0(y)\delta_0(y)\right)^{n+1} = \hat{N}_n(y)\left(\delta_0(y)\right)^{n+1} = \hat{N}_n(y)\delta_n(y),$$

$$\delta_n(y) = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+e^{-iy}\right)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k e^{-iky} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in Z} u_k e^{-iky},\ C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}.$$

Поэтому

$$u_k = \frac{C_{n+1}^k}{\sqrt{2}2^n},\ k\in\{0,1,...,n+1\};\ \ u_k = 0,\ k\notin\{0,1,...,n+1\}.$$

Итак, функция $\varphi(x) = N_n(x)$, удовлетворяет масштабному равенству

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{C_{n+1}^k}{2^n}\varphi(2x-k).$$

Построим последовательность подпространств $V_{\alpha,0}\subset V_{\alpha,1}\subset ...$ пространства $L^2[0;\alpha(n+1)],\ \alpha = 1,2,...$, используя функцию $\varphi(x)$. Имеем

$$\varphi_{j,m}(x) = \varphi\left(2^j x - m\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{s=2m}^{n+1+2m} C_{n+1}^{s-2m}\varphi_{j+1,s}(x).$$

Функция $\varphi_{j,m}(x)\neq 0$ на отрезке $[0;\alpha(n+1)]$, если $0\le 2^j x - m\le n+1$. Таким образом, m принимает следующие значения $-n,...,2^j\alpha(n+1)-1$ и $\operatorname{supp}\varphi_{j,m} = \left[\dfrac{m}{2^j};\dfrac{m+n+1}{2^j}\right]\cap\left[0;\alpha\left(n+1\right)\right]$. Графики функций $\varphi_{j,k}$ на отрезке $\left[0;\,\alpha\left(n+1\right)\right]$ представлены на рис.1. Итак,

$$\Phi_j = \left(\varphi_{j,-n},...,\varphi_{j,2^j\alpha(n+1)-1}\right),\ \dim V_{\alpha,j} = 2^j\alpha(n+1)+n.$$

Заметим, что линейное пространство $V_{\alpha,j} = \mathrm{lin}\left\{\varphi_{j,-n}, \varphi_{j,-n+1}, \ldots, \varphi_{j,2^j(n+1)-1}\right\}$ представляет собой пространство сплайнов степени n дефекта 1 с узлами на сетке $\Delta: 0 < \dfrac{\alpha(n+1)}{2^j \alpha(n+1) - n} < \dfrac{2\alpha(n+1)}{2^j \alpha(n+1) - n} < \ldots < \alpha(n+1)$, поскольку B-сплайны образуют базис в таком пространстве [12]. Как известно [13], для любой функции $f \in C[0; \alpha(n+1)]$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует для некоторого j такой сплайн $g \in V_{\alpha,j}$, что $\| f - g \|_{C[0;\alpha(n+1)]} < \varepsilon$.

Поскольку множество непрерывных функций всюду плотно в пространстве $L^2[0; \alpha(n+1)]$, то мы получаем $\overline{\bigcup_{j=0}^{+\infty} V_{\alpha,j}} = L^2[0; \alpha(n+1)]$.

Пусть $x \in [0; \alpha(n+1)]$, тогда $y = 2^j x \in [0; 2^j \alpha(n+1)]$. На отрезке $[0; 2^j \alpha(n+1)]$ отличными от нуля могут быть только следующие B-сплайны

$$N_n(y+n),\ N_n(y+n-1), \ldots, N_n(y), \ldots, N_n(y - 2^j \alpha(n+1) + 1).$$

Из известного [7] тождества $\sum_{k \in \mathbf{Z}} N_n(x-k) \equiv 1,\ \forall x \in \mathbf{R}$, следует

$$\sum_{k=-n}^{2^j \alpha(n+1)-1} \varphi_{j,k}(x) = \sum_{k=-n}^{2^j \alpha(n+1)-1} N_n\left(2^j x - k\right) = \sum_{k=-n}^{2^j \alpha(n+1)-1} N_n\left(y - k\right) = 1,\ \ \forall x \in [0; \alpha(n+1)].$$

Поскольку $\dim V_{\alpha,j} = 2^j \alpha(n+1) + n$ и $V_{\alpha,j} = V_{\alpha,j-1} \oplus W_{\alpha,j-1}$, то $\dim W_{\alpha,j-1} = 2^{j-1} \alpha(n+1)$.

Учитывая, что $C_{n+1}^m = \dfrac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} = C_{n+1}^{n+1-m}$, и обозначив $p_m = C_{n+1}^m$, получаем для четных $n = 2k$

$$p_0 = C_{2k+1}^0, p_1 = C_{2k+1}^1, \ldots, p_k = C_{2k+1}^k, p_{k+1} = p_k, p_{k+2} = p_{k-1}, \ldots, p_{2k+1} = p_0,$$

для нечетных $n = 2k+1$

$$p_0 = C_{2k+2}^0, p_1 = C_{2k+2}^1, \ldots, p_k = C_{2k+2}^k, p_{k+1} = C_{2k+2}^{k+1}, p_{k+2} = p_k, \ldots, p_{2k+2} = p_0.$$

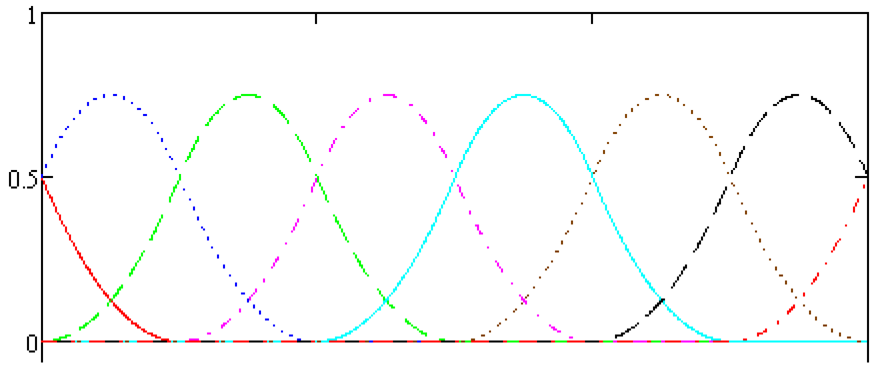


Рис. 1. Графики функций $\varphi_{j,m}$, $j=1, n=2, m=-2,-1,0,\ldots,5, \alpha=1$

Введем обозначение

$$\mathrm{p} = \begin{cases} \left(p_0, p_1, \ldots, p_k, p_k, \ldots, p_1, p_0, 0, \ldots, 0\right)^T, & n = 2k; \\ \left(p_0, p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}, p_k, \ldots, p_1, p_0, 0, \ldots, 0\right)^T, & n = 2k+1, \end{cases} \qquad \mathrm{p} \in \mathbf{R}^{2^j \alpha(n+1)+n}.$$

Кроме того, определим оператор $R_s : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ следующим правилом

$$R_s \mathrm{a} = \begin{cases} \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{s}, a_1, \ldots, a_{m-s}\Big)^T, & m > s \geq 0; \\ \left(a_{|s|+1}, \ldots, a_m, 0, \ldots, 0\right)^T, & -m < s < 0; \end{cases} \qquad \mathrm{a} = \left(a_1, \ldots, a_m\right)^T.$$

Если $|s|$ i m, то $R_s a = 0$. Отметим некоторые свойства данного оператора.

Лемма 1. Справедливы следующие равенства

1) Если $k, j \geq 0$, то $\left(R_{k+j}\mathrm{a}\right)^T \cdot \mathrm{b} = \left(R_k \mathrm{a}\right)^T \cdot \left(R_{-j}\mathrm{b}\right)$;

2) Если $i, j \geq 0$ или $i, j \leq 0$, то $R_{i+j}\mathrm{a} = R_i \circ R_j \mathrm{a}$;

3) Если $\mathrm{a}=\left(a_1,...,a_k,0,...,0\right)^T\in\mathbf{R}^m$, $\mathrm{b}=\left(b_1,...,b_m\right)^T$, то $\mathrm{a}^T\cdot\mathrm{b}=\left(R_{m-k}\mathrm{a}\right)^T\cdot R_{m-k}\mathrm{b}$ и $R_{-j}\circ R_s\mathrm{a}=R_{s-j}\mathrm{a},\ 0\le s\le m-k,\ j\ge 0$.

4) Если $\mathrm{a}=\Big(\underbrace{0,...,0}_{l},a_1,...,a_k\Big)^T\in\mathbf{R}^m$, $\mathrm{b}=\Big(\underbrace{0,...,0}_{n},b_1,...,b_s\Big)^T\in\mathbf{R}^m$, то

$$\mathrm{a}^T\cdot\mathrm{b}=\left(R_{-\min(l,n)}\mathrm{a}\right)^T\cdot R_{-\min(l,n)}\mathrm{b}.$$

Доказательство. Докажем первое свойство, остальные очевидны.

$$\left(R_{k+j}\mathrm{a}\right)^T\cdot\mathrm{b}=\left(0,...,0,a_1,...,a_{m-k-j}\right)^T\cdot\left(b_1,...,b_m\right)=\sum_{i=1}^{m-k-j}a_ib_{k+j+i};$$

$$\left(R_k\mathrm{a}\right)^T\left(R_{-j}\mathrm{b}\right)=\left(0,...,0,a_1,...,a_{m-k}\right)^T\left(b_{j+1},...,b_m,0,...,0\right)=$$

$$=0b_{j+1}+...+0b_{j+k}+a_1b_{j+k+1}+...+a_{m-j-k}b_m=\left(R_{k+j}\mathrm{a}\right)^T\cdot\mathrm{b}.\ \blacksquare$$

Используя введенные выше обозначения, матрицу P_j можно записать следующим образом:

$$\mathrm{P}_j=\frac{1}{2^n}\Big(\left(R_{-n}\mathrm{p}\right),\left(R_{-n+2}\mathrm{p}\right),...,\left(R_{n-2+2^j\alpha(n+1)}\mathrm{p}\right)\Big).\qquad(2)$$

Для определения матрицы T_j рассмотрим скалярные произведения

$$q_k=\left(N_n(\cdot),N_n(\cdot-k)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}N_n(x)N_n(x-k)dx=\int_0^{n+1}N_n(x)N_n(x-k)dx.$$

Ясно, что $q_k=0,\ k\le -n-1,\ k\ge n+1$. Кроме того,

$$q_k=\begin{cases}\displaystyle\int_k^{n+1}N_n(x)N_n(x-k)dx,\ 0\le k<n+1;\\ \displaystyle\int_0^{n+k+1}N_n(x)N_n(x-k)dx,\ -n-1<k<0.\end{cases}$$

Заметим, что

$$q_k = \int_k^{n+1} N_n(x) N_n(x-k)\,dx = \int_0^{n+1-k} N_n(y+k) N_n(y)\,dy = q_{-k},\ k = 0,1,\ldots,n.$$

Легко видеть, что, если ввести в рассмотрение матрицы $\Lambda = \left(\lambda_{m,k}\right)_{m=-n,\ k=0}^{n,\ n}$, $\Omega = \left(\omega_{k,m}\right)_{k,m=1}^{n}$, $\Theta = \left(\theta_{k,m}\right)_{k,m=1}^{n}$, где $\lambda_{m,k} = \int_k^{k+1} N_n(z) N_n(z-m)\,dz$,

$$\Omega = \begin{bmatrix} \lambda_{0,n} & \lambda_{1,n} & \lambda_{2,n} & \cdots & \lambda_{n-1,n} \\ \lambda_{1,n} & \sum_{s=n-1}^{n} \lambda_{0,s} & \sum_{s=n-1}^{n} \lambda_{1,s} & \cdots & \sum_{s=n-1}^{n} \lambda_{n-2,s} \\ \lambda_{2,n} & \sum_{s=n-1}^{n} \lambda_{1,s} & \sum_{s=n-2}^{n} \lambda_{0,s} & \cdots & \sum_{s=n-2}^{n} \lambda_{n-3,s} \\ \lambda_{3,n} & \sum_{s=n-1}^{n} \lambda_{2,s} & \sum_{s=n-2}^{n} \lambda_{1,s} & \cdots & \sum_{s=n-3}^{n} \lambda_{n-4,s} \\ & & \cdots & & \\ \lambda_{n-1,n} & \sum_{s=n-1}^{n} \lambda_{n-2,s} & \sum_{s=n-2}^{n} \lambda_{n-3,s} & \cdots & \sum_{s=1}^{n} \lambda_{0,s} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \sum_{s=0}^{n-1} \lambda_{0,s} & \sum_{s=0}^{n-2} \lambda_{-1,s} & \sum_{s=0}^{n-3} \lambda_{-2,s} & \cdots & \lambda_{1-n,0} \\ \sum_{s=0}^{n-2} \lambda_{-1,s} & \sum_{s=0}^{n-2} \lambda_{0,s} & \sum_{s=0}^{n-3} \lambda_{-1,s} & \cdots & \lambda_{2-n,0} \\ \sum_{s=n-1}^{n-3} \lambda_{-2,s} & \sum_{s=n-2}^{n-3} \lambda_{-1,s} & \sum_{s=n-3}^{n} \lambda_{0,s} & \cdots & \lambda_{3-n,0} \\ & & \cdots & & \\ \lambda_{1-n,n} & \lambda_{2-n,0} & \lambda_{3-n,0} & \cdots & \lambda_{0,0} \end{bmatrix}$$

и векторы

$$\mathrm{d}_1 = \left(\omega_{11}, \omega_{21}, \ldots, \omega_{n1}, q_n, 0, \ldots, 0\right)^T,\ \mathrm{d}_2 = \left(\omega_{12}, \omega_{22}, \ldots, \omega_{n2}, q_{n-1}, q_n, 0, \ldots, 0\right)^T, \ldots,$$

$$\mathrm{d}_n = \left(\omega_{1n}, \omega_{2n}, \ldots, \omega_{nn}, q_1, \ldots, q_n, 0, \ldots, 0\right)^T \in \mathbf{R}^{2^j \alpha(n+1)+n},$$

$$\mathrm{u}_1 = \left(0, \ldots, 0, q_n, \ldots, q_1, \theta_{11}, \ldots, \theta_{n1}\right)^T,\ \mathrm{u}_2 = \left(0, \ldots, 0, q_n, \ldots, q_2, \theta_{12}, \ldots, \theta_{n2}\right)^T, \ldots,$$

$$\mathrm{u}_n = \left(0, \ldots, 0, q_n, \theta_{1n}, \ldots, \theta_{nn}\right)^T \in \mathbf{R}^{2^j \alpha(n+1)+n},$$

$$\mathrm{q} = (q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1, q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbf{R}^{2^j \alpha(n+1)+n},$$

то матрица $\left[\left(\Phi_j, \Phi_j\right)\right]$ может быть представлена в виде

$$\left[\left(\Phi_j, \Phi_j\right)\right] = \frac{1}{2^j}\left(\mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_n, \mathrm{q}, R_1\mathrm{q}, \ldots, R_{2^j \alpha(n+1)-n-1}\mathrm{q}, \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n\right).$$

Перейдем теперь к построению матрицы

$$2^j \cdot \mathrm{T}_j = 2^j \cdot \mathrm{P}_j^T \left[\left(\Phi_j, \Phi_j \right) \right] = \left(t_{i,s} \right)_{i=1,\ s=1}^{2^{j-1}\alpha(n+1)+n,\ 2^j \alpha(n+1)+n}$$

Пусть

$$t_{i+1,s} = \left(R_{-n+2i} \mathrm{p} \right)^T \cdot \mathrm{d}_s,\ i = 0,1,...,n-1,\ s = 1,...,n;$$

$$g_{i+1-2^{j-1}\alpha(n+1),\ s} = \left(R_{-n+2i} \mathrm{p} \right)^T \cdot \mathrm{u}_s,\ i = 2^{j-1}\alpha(n+1),...,n-1+2^{j-1}\alpha(n+1),\ s = 1,...,n.$$

По лемме 1, для $s = 0,1,...,2^j \alpha(n+1) - n - 1$, имеем

$$t_{i+1,s+n+1} = \left(R_{-n+2i} \mathrm{p} \right)^T \cdot R_s \mathrm{q} = \mathrm{p}^T \cdot \left(R_{n-2i} \circ R_s \right) \mathrm{q} = \mathrm{p}^T \cdot R_{n-2i+s} \mathrm{q}.$$

По определению векторов p и q, получаем

$$\mathrm{p}^T \cdot R_{n-2i+s} \mathrm{q} = 0 \iff \left(s - 2i \geq 2 \right) \vee \left(s - 2i \leq -3n - 1 \right).$$

Обозначим $w_{l+3n} = \mathrm{p}^T \cdot R_{n+l} \mathrm{q}, \quad l = -3n,...,1$. Далее, для $i \geq 0,\ s = 1,...,n$ имеем

$$\left(R_{n+2i} \mathrm{p} \right)^T \cdot \mathrm{d}_s = \mathrm{p}^T \cdot R_{-n-2i} \mathrm{d}_s = \mathrm{p}^T \cdot \left(R_{-2i} \circ R_{-n} \right) \mathrm{d}_s.$$

Поскольку $R_{-n} \mathrm{d}_s = R_{-(2n+1-s)} \mathrm{q}$, то $\left(R_{n+2i}\ \mathrm{p} \right)^T \cdot \mathrm{d}_s = \mathrm{p}^T \cdot R_{-(2n+1-s+2i)}\ \mathrm{q}$.

Следовательно,

$$\left(R_{n+2i} \mathrm{p} \right)^T \cdot \mathrm{d}_s = 0 \iff s - 2i \leq 0.$$

Заметим, что $\left(R_{n+2i}\ \mathrm{p} \right)^T \mathrm{d}_n = \mathrm{p}^T R_{-n-1-2i} \mathrm{q}$ и $\left(R_{n+2i}\ \mathrm{p} \right)^T \mathrm{q} = \mathrm{p}^T \cdot R_{-n-2i} \mathrm{q}$.

По лемме 1, для $i = 0,1,...,2^{j-1}\alpha(n+1) - 1$, получаем $\left(R_{-n+2i} \mathrm{p} \right)^T \cdot \mathrm{u}_s = \left(R_{2i} \mathrm{p} \right)^T \cdot R_n \mathrm{u}_s$. Но $R_n \mathrm{u}_s = R_{2^j \alpha(n+1)+s-1} \mathrm{q}$, поэтому $\left(R_{-n+2i} \mathrm{p} \right)^T \cdot \mathrm{u}_s = \left(R_{2i}\ \mathrm{p} \right)^T \cdot R_{2^j \alpha(n+1)+s-1} \mathrm{q}$. По лемме 1 имеем $\left(R_{-n+2i} \mathrm{p} \right)^T \cdot \mathrm{u}_s = \mathrm{p}^T \cdot R_{2^j \alpha(n+1)+s-1-2i} \mathrm{q}$. Следовательно,

$$\left(R_{-n+2i}\mathrm{p}\right)^T \cdot \mathrm{u}_s = 0 \;\Leftrightarrow\; s - 2i \ge n + 3 - 2^j \alpha(n+1).$$

Заметим, что

$$\left(R_{-n+2i}\;\mathrm{p}\right)^T R_{2^j\alpha(n+1)-n-1}\mathrm{q} = \mathrm{p}^T \cdot R_{-2i+2^j\alpha(n+1)-1}\mathrm{q} \text{ и } \left(R_{-n+2i}\mathrm{p}\right)^T \cdot \mathrm{u}_1 = \mathrm{p}^T \cdot R_{2^j\alpha(n+1)-2i}\mathrm{q}.$$

Итак, теперь можно выписать матрицу T_j. Пусть

$$\mathrm{w} = \left(w_0 \;\; w_1 \;\; w_2 \;\; \ldots \;\; w_{3n} \;\; w_{3n+1} \;\; 0\ldots 0\right)^T \in \mathbf{R}^{2^j\alpha(n+1)+n};$$

$$\mathrm{t}_i = \left(t_{i,1}\; t_{i,2}\; \ldots\; t_{i,n}\;\; 0\ldots 0\right)^T \in \mathbf{R}^{2^j\alpha(n+1)+n},\; i = 1,\ldots,n;$$

$$\mathrm{g}_i = \left(0,\ldots,0,\; g_{i,1},\ldots,g_{i,n}\right)^T \in \mathbf{R}^{2^j\alpha(n+1)+n},\; i = 1,\ldots,n.$$

Тогда

$$\mathrm{T}_j = \frac{1}{2^j}\begin{pmatrix} \left(\mathrm{t}_1 + \left(R_n \circ R_{-2n-n}\right)\mathrm{w}\right)^T \\ \ldots \\ \left(\mathrm{t}_n + \left(R_n \circ R_{-2-n}\right)\mathrm{w}\right)^T \\ \mathrm{w}^T \\ \left(R_2\mathrm{w}\right)^T \\ \ldots \\ \left(R_{2^j\alpha(n+1)-2n-2}\mathrm{w}\right)^T \\ \left(R_{-n} \circ R_{2^j\alpha(n+1)-2n+n}\mathrm{w} + \mathrm{g}_1\right)^T \\ \ldots \\ \left(R_{-n} \circ R_{2^j\alpha(n+1)-2+n}\mathrm{w} + \mathrm{g}_n\right)^T \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что имеют место равенства

$$\mathrm{p}^T \cdot R_{-2n+i}\mathrm{q} = \mathrm{p}^T \cdot R_{n+1-i}\mathrm{q},\; i = 0,1,\ldots,s, \quad s = \begin{cases} n + \dfrac{n}{2}, & n - \text{четное;} \\ n + \dfrac{n-1}{2}, & n - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Поэтому для $n = 2k$ имеем $\mathrm{w} = \left(w_0,\, w_1,\ldots,w_{3k-1},w_{3k},w_{3k},w_{3k-1},\ldots,w_1,w_0,0,\ldots,0\right)^T$, а для $n = 2k+1$ $\mathrm{w} = \left(w_0,\, w_1,\ldots,w_{3k},w_{3k+1},w_{3k+2},w_{3k+1},w_{3k},\ldots,w_1,w_0,0,\ldots,0\right)^T$.

Итак, нужно найти $2^{j-1}\alpha(n+1)$ линейно независимых решений $\mathrm{h}_s=\left(h_{1,s},h_{2,s},...,h_{2^j\alpha(n+1)+n,s}\right)^T$ системы линейных уравнений $\mathrm{T}_j\mathrm{h}_s=0$. Эти решения и представляют собой столбцы матрицы $\mathrm{Q}_j=\left(\mathrm{h}_1,...,\mathrm{h}_{2^{j-1}\alpha(n+1)}\right)$. Поскольку $rg\mathrm{T}_j=rg\,\mathrm{P}_j=2^{j-1}\alpha(n+1)+n$ (по количеству линейно независимых столбцов), то $\dim\ker\mathrm{T}_j=2^{j-1}\alpha(n+1)$. Поэтому такие линейно независимые решения можно найти. Нам нужны не произвольные линейно независимые решения. Мы будем искать столбцы h_s таким образом, чтобы функции $\psi_{j,s}(x)=\sum\limits_{i=1}^{2^j\alpha(n+1)+n}h_{i,s}\cdot\varphi_{j,-n+(i-1)}(x)$, по возможности представляли собой сдвинутые версии одной функции, т.е. имели бы одну форму (за исключением, конечно, граничных вейвлетов). Осуществить это можно следующим образом. Рассмотрим сначала случай $n=2k$. Положим

$$\mathrm{h}_s=\left(0,...,0,h_{2k+2(s-n-1)+1,s},...,h_{2k+2(s-n-1)+6k+1,s},1,0,...,0\right)^T,\ s=n+1,...,2^{j-1}\alpha(n+1)-n,$$

где

$$\begin{pmatrix}\left(R_{-6k}\tilde{\mathrm{w}}\right)^T\\ \left(R_{-6k+2}\tilde{\mathrm{w}}\right)^T\\ \cdots\\ \left(R_{6k}\tilde{\mathrm{w}}\right)^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_{2k+2(s-n-1)+1,s}\\ \cdots\\ h_{2k+2(s-n-1)+6k+1,s}\\ 1\end{pmatrix}=0,\quad \tilde{\mathrm{w}}=\left(w_0,w_1,...,w_{3k},w_{3k},...,w_0\right)^T\in\mathbf{R}^{3n+2}.$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix}\left(R_{-6k}\tilde{\mathrm{w}}\right)^T\\ \left(R_{-6k+2}\tilde{\mathrm{w}}\right)^T\\ \cdots\\ \left(R_{6k}\tilde{\mathrm{w}}\right)^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_{s-n,\,2k+2(s-n)-1} & \cdots & t_{s-n,\,8k+2(s-n)}\\ & \cdots & \\ t_{6k+(s-n),\,2k+2(s-n)-1} & \cdots & t_{6k+(s-n),\,8k+2(s-n)}\end{pmatrix}.$$

Оставшиеся 2n решений, соответствующие граничным вейвлетам, мы выберем следующим образом. Для $i=1,2,...,n$ положим

$$\mathrm{h}_{n-i+1}=\left(0,...,0,h_{2k-i+1,n-i+1},...,h_{8k+2-2i,n-i+1},1,0,...,0\right)^T,$$

где

$$\begin{pmatrix} t_{1,\,2k+1-i} & \dots & t_{1,\,8k+2-2i} \\ & \dots & \\ t_{6k+1-i,\,2k+1-i} & \dots & t_{6k+1-i,\,8k+2-2i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{2k-i+1,n-i+1} \\ \dots \\ h_{8k+1-2i,n-i+1} \\ 1 \end{pmatrix}=0,$$

$$\mathrm{h}_{2^{j-1}\alpha(n+1)-n+i}=\left(0,...,0,h_{2^j\alpha(n+1)-3n-1-2i,2^{j-1}\alpha(n+1)-n+i},...,h_{2^j\alpha(n+1)+i-1,2^{j-1}\alpha(n+1)-n+i},1,0,...,0\right)^T,$$

где

$$\begin{pmatrix} t_{2^{j-1}\alpha(n+1)-2n+i,\,2^j\alpha(n+1)-3n-1+2i} \dots t_{2^{j-1}\alpha(n+1)-2n+i,\,2^j\alpha(n+1)+i} \\ \dots \\ t_{2^{j-1}\alpha(n+1)+n,\,2^j\alpha(n+1)-3n-1+2i} \quad \dots \quad t_{2^{j-1}\alpha(n+1)+n,\,2^j\alpha(n+1)+i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{2^j\alpha(n+1)-3n-1+2i,2^{j-1}\alpha(n+1)-n+i} \\ \dots \\ h_{2^j\alpha(n+1)+i-1,2^{j-1}\alpha(n+1)-n+i} \\ 1 \end{pmatrix}=0.$$

На рис. 2 представлены графики некоторых вейвлетов для n=4.

Рассмотрим теперь случай $n=2k+1$. Для $i=n+1,...,2^{j-1}(n+1)-n$ положим $\mathrm{h}_i=\left(0,...,0,h_{n+2(i-n-1)+1},...,h_{n+2(i-n-1)+3n},1,0,...,0\right)^T$, где

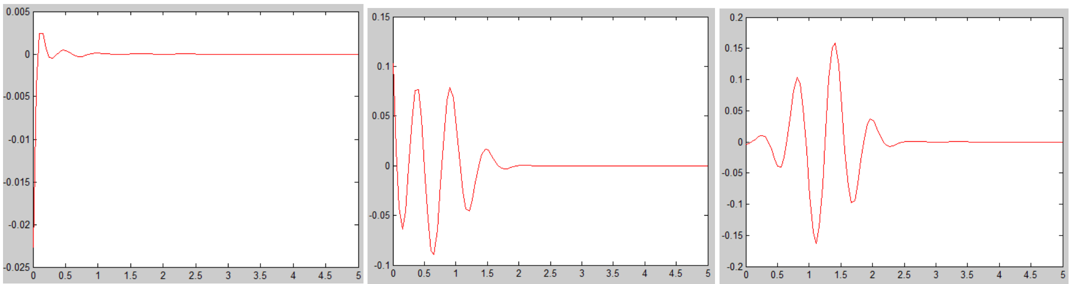
$$\begin{pmatrix} t_{i-n,\,n+2(i-n-1)+1} & \dots & t_{i-n,\,n+2(i-n-1)+3n+2} \\ t_{i-n+3n,n+2(i-n-1)+1} & \dots & t_{i-n+3n,\,n+2(i-n-1)+3n+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{n+2(i-n-1)+1} \\ \dots \\ h_{n+2(i-n-1)+3n+1} \\ 1 \end{pmatrix}=0.$$

Для $2n$ граничных вейвлетов положим $\mathrm{h}_i=\left(0,...,0,h_i,...,h_{2i+2n},1,0,...,0\right)^T$,

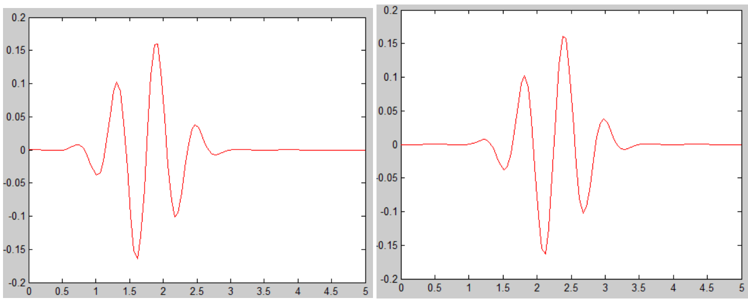
$\mathrm{h}_{2^{j-1}\alpha(n+1)-n+i}=\left(0,...,0,1,h_{2^j\alpha(n+1)+2i-3n},...,h_{2^j\alpha(n+1)+i},0,0,...,0\right)^T$, $i=1,2,...,n$ где

$$\begin{pmatrix} t_{1,\,i} & \dots & t_{1,\,2i+2n} \\ t_{2n+i,i} & \dots & t_{2n+i,\,2i+2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_i \\ \dots \\ h_{2i+2n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} t_{2^{j-1}\alpha(n+1)-2n+i,\; 2^j\alpha(n+1)+2i-3n-1} & \dots & t_{2^{j-1}\alpha(n+1)-2n+i,\; 2^j\alpha(n+1)+i} \\ t_{2^{j-1}\alpha(n+1)+n,\; 2^j\alpha(n+1)+2i-3n-1} & \dots & t_{2^{j-1}\alpha(n+1)+n,\; 2^j\alpha(n+1)+i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h_{2^j\alpha(n+1)+2i-3n} \\ \dots \\ h_{2^j\alpha(n+1)+i-1} \end{pmatrix} = 0.$$



а) б) в)



г) д)

Рис. 2. Вейвлеты для n=4. а), б), в), г) граничные вейвлеты, д) внутренний вейвлет

Двумерные вейвлеты

Рассмотрим теперь применение вейвлет-систем на отрезке к построению двумерных вейвлетов. Пусть даны последовательности $V_{0,i} \subset V_{1,i} \subset \ldots \subset V_{j,i} \subset$ конечномерных подпространств $L^2[a_i;b_i]$, масштабирующие функции $\varphi^{(i)}$ и блоки фильтров $\mathrm{P}_{j,i}, \mathrm{Q}_{j,i}, \mathrm{A}_{j,i}, \mathrm{B}_{j,i}$, i=1,2.

Стандартный подход [10] к построению многомерных вейвлет-систем является взятие тензорных произведений функций из одномерных базисов. Определим подпространства $V_j^2 = V_{j,1} \otimes V_{j,2} = \mathrm{lin}\left\{ f_1 \otimes f_2 : \, f_1 \in V_{j,1}, \; f_2 \in V_{j,2} \right\}$, где функция $f_1 \otimes f_2$ определяется правилом $f_1 \otimes f_2 \left(x, y \right) = f_1(x) f_2(y)$. Ясно, что функции из пространства V_j^2 могут быть представлены в виде

$$f_1 \otimes f_2 \left(x, y \right) = \left(\sum_{k=0}^{n_{j,1}-1} c_{j,k}^{(1)} \varphi_{j,k}^{(1)} \right) \otimes \left(\sum_{s=0}^{n_{j,2}-1} c_{j,s}^{(2)} \varphi_{j,s}^{(2)} \right) (x, y) = \sum_{k=0}^{n_{j,1}-1} \sum_{s=0}^{n_{j,2}-1} c_{j,k}^{(1)} c_{j,s}^{(2)} \varphi_{j,k}^{(1)}(x) \varphi_{j,s}^{(2)}(y).$$

Очевидно, что функции $\varphi_{j,k}^{(1)} \otimes \varphi_{j,s}^{(2)}$ образуют базис в пространстве V_j^2.

Рассмотрим, как связаны между собой базисы пространств V_{j-1}^2 и V_j^2. Имеем

$$\varphi_{j-1,k}^{(1)} \otimes \varphi_{j-1,s}^{(2)} = \left(\sum_{m=0}^{n_{j,1}-1} p_{m,k}^{j,1} \varphi_{j,m}^{(1)} \right) \otimes \left(\sum_{l=0}^{n_{j,2}-1} p_{l,s}^{j,2} \varphi_{j,l}^{(2)} \right) = \sum_{m=0}^{n_{j,1}-1} \sum_{l=0}^{n_{j,2}-1} p_{m,k}^{j,1} p_{l,s}^{j,2} \; \varphi_{j,m}^{(1)} \otimes \varphi_{j,l}^{(2)}.$$

Отсюда $V_{j-1}^2 \subset V_j^2$. Введем в рассмотрение матрицы $\Phi_j^2 = \left(\varphi_{j,k}^{(1)} \otimes \varphi_{j,s}^{(2)} \right)_{k,s=0}^{n_{j,1}-1,\, n_{j,2}-1}$. Тогда предыдущее равенство можно записать в виде $\Phi_{j-1}^2 = \mathrm{P}_{j,1}^T \Phi_j^2 \mathrm{P}_{j,2}$.

Определим пространства W_j^2 следующим образом $V_j^2 = V_{j-1}^2 \oplus W_{j-1}^2$. Поскольку $V_{j,i} = V_{j-1,i} \oplus W_{j-1,i}$, то

$$V_j^2 = V_{j-1}^2 \oplus \left(W_{j-1,1} \otimes V_{j-1,2} \right) \oplus \left(V_{j-1,1} \otimes W_{j-1,2} \right) \oplus \left(W_{j-1,1} \otimes W_{j-1,2} \right).$$

Отсюда $W_{j-1}^2 = \left(W_{j-1,1} \otimes V_{j-1,2} \right) \oplus \left(V_{j-1,1} \otimes W_{j-1,2} \right) \oplus \left(W_{j-1,1} \otimes W_{j-1,2} \right)$. Таким образом, базис в пространстве W_j^2 образуют функции

$$\left\{\psi^{(1)}_{j,k}\otimes\varphi^{(2)}_{j,s}\right\}_{k=0,\ s=0}^{m_{j,1}-1,\ n_{j,2}-1}\cup\left\{\varphi^{(1)}_{j,k}\otimes\psi^{(2)}_{j,s}\right\}_{k=0,\ s=0}^{n_{j,1}-1,\ m_{j,2}-1}\cup\left\{\psi^{(1)}_{j,k}\otimes\psi^{(2)}_{j,s}\right\}_{k=0,\ s=0}^{m_{j,1}-1,\ m_{j,2}-1}.$$

Заметим, что, если ввести в рассмотрение матрицы

$$\Psi^2_{1,j}=\left(\varphi^{(1)}_{j,k}\otimes\psi^{(2)}_{j,s}\right)_{k=0,\ s=0}^{n_{j,1}-1,\ m_{j,2}-1},\Psi^2_{2,j}=\left(\psi^{(1)}_{j,k}\otimes\varphi^{(2)}_{j,s}\right)_{k=0,\ s=0}^{m_{j,1}-1,\ n_{j,2}-1},\Psi^2_{3,j}=\left(\psi^{(1)}_{j,k}\otimes\psi^{(2)}_{j,s}\right)_{k=0,\ s=0}^{m_{j,1}-1,\ m_{j,2}-1},$$

то, как и выше, получим $\Psi^2_{1,j-1}=\mathrm{P}^T_{j,1}\Phi_j\mathrm{Q}_{j,2}$, $\Psi^2_{2,j-1}=\mathrm{Q}^T_{j,1}\Phi_j\mathrm{P}_{j,2}$, $\Psi^2_{3,j}=\mathrm{Q}^T_{j,1}\Phi_j\mathrm{Q}_{j,2}$.

Пусть $f\in L^2\left([a_1;b_1]\times[a_2;b_2]\right)$ и $S_j:L^2\left([a_1;b_1]\times[a_2;b_2]\right)\to V^2_j$ - проектор. Тогда

$$S_j f=\sum_{m=0}^{n_{j,1}-1}\sum_{l=0}^{n_{j,2}-1}c^j_{m,l}\varphi^{(1)}_{j,m}\otimes\varphi^{(2)}_{j,l}=\sum_{m=0}^{n_{j,1}-1}\sum_{l=0}^{n_{j,2}-1}\left(\sum_{k=0}^{n_{j-1,1}-1}\sum_{s=0}^{n_{j=1,2}-1}c^{j-1}_{k,s}p^{j,1}_{m,k}p^{j,2}_{l,s}+\right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{m_{j-1,1}-1}\sum_{s=0}^{n_{j-1,2}-1}r^{j-1}_{k,s}q^{j,1}_{m,k}p^{j,2}_{l,s}+\sum_{k=0}^{n_{j-1,1}-1}\sum_{s=0}^{m_{j-1,2}-1}h^{j-1}_{k,s}p^{j,1}_{m,k}q^{j,2}_{l,s}+\sum_{k=0}^{m_{j-1,1}-1}\sum_{s=0}^{m_{j-1,2}-1}d^{j-1}_{k,s}q^{j,1}_{m,k}q^{j,2}_{l,s}\right)\varphi^{(1)}_{j,m}\otimes\varphi^{(2)}_{j,l}.$$

Если ввести в рассмотрение матрицы

$$\mathrm{C}_j=\left(c^j_{m,l}\right)_{m,l=0}^{n_{j,1}-1,n_{j,2}-1},\ \mathrm{R}_j=\left(r^j_{k,s}\right)_{k=0,\ s=0}^{m_{j,1}-1,n_{j,2}-1},\ \mathrm{H}_j=\left(h^j_{k,s}\right)_{k=0,s=0}^{n_{j,1}-1,m_{j,2}-1},\ \mathrm{D}_j=\left(d^j_{k,s}\right)_{k=0,s=0}^{m_{j,1}-1,m_{j,2}-1},$$

то из последнего равенства получаем

$$\mathrm{C}_j=\mathrm{P}_{j,1}\mathrm{C}_{j-1}\mathrm{P}^T_{j,2}+\mathrm{Q}_{j,1}\mathrm{R}_{j-1}\mathrm{P}^T_{j,2}+\mathrm{P}_{j,1}\mathrm{H}_{j-1}\mathrm{Q}^T_{j,2}+\mathrm{Q}_{j,1}\mathrm{D}_{j-1}\mathrm{Q}^T_{j,2}. \tag{3}$$

Поскольку линейные операторы (проекторы) $S^V_{j,i}:V_{j,i}\to V_{j-1,i}$, $S^W_{j,i}:V_{j,i}\to W_{j-1,i}$ определяются матрицами $\mathrm{A}_{j,i}=\left(a^{j,i}_{k\,m}\right)_{k=0,\ m=0}^{n_{j-1,i}-1,n_{j,i}-1}$, $\mathrm{B}_{j,i}=\left(b^{j,i}_{k\,m}\right)_{k=0,\ m=0}^{n_{j-1,i}-1,n_{j,i}-1}$, то должны иметь место равенства

$$\varphi^{(i)}_{j,k}=\sum_{s=0}^{n_{j-1,i}-1}a^{j,i}_{s,k}\cdot\varphi^{(i)}_{j-1,s}+\sum_{l=0}^{m_{j-1,i}-1}b^{j,i}_{l,k}\cdot\psi^{(i)}_{j-1,l}.$$

Отсюда находим

$$\varphi^{(1)}_{j,k}\otimes\varphi^{(2)}_{j,m}=\sum_{s=0}^{n_{j-1,1}-1}\sum_{u=0}^{n_{j-1,2}-1}a^{j,1}_{s,k}a^{j,2}_{u,m}\varphi^{(1)}_{j-1,s}\otimes\varphi^{(2)}_{j-1,u}+\sum_{l=0}^{m_{j-1,1}-1}\sum_{u=0}^{n_{j-1,2}-1}b^{j,1}_{l,k}a^{j,2}_{u,m}\psi^{(1)}_{j-1,l}\otimes\varphi^{(2)}_{j-1,u}+$$

$$+\sum_{s=0}^{n_{j-1,1}-1}\sum_{v=0}^{m_{j-1,2}-1}a^{j,1}_{s,k}b^{j,2}_{v,m}\varphi^{(1)}_{j-1,s}\otimes\psi^{(2)}_{j-1,v}+\sum_{l=0}^{m_{j-1,1}-1}\sum_{v=0}^{m_{j-1,2}-1}b^{j,1}_{l,k}b^{j,2}_{v,m}\psi^{(1)}_{j-1,l}\otimes\psi^{(2)}_{j-1,v}.$$

Поэтому

$$c^{j-1}_{s,u}=\sum_{k=0}^{n_{j,1}-1}\sum_{m=0}^{n_{j,2}-1}c^{j}_{k,m}a^{j,1}_{s,k}a^{j,2}_{u,m};\ \ r^{j-1}_{l,u}=\sum_{k=0}^{n_{j,1}-1}\sum_{m=0}^{n_{j,2}-1}c^{j}_{k,m}b^{j,1}_{l,k}a^{j,2}_{u,m};$$
$$h^{j-1}_{s,v}=\sum_{k=0}^{n_{j,1}-1}\sum_{m=0}^{n_{j,2}-1}c^{j}_{k,m}a^{j,1}_{s,k}b^{j,2}_{v,m};\ \ \ d^{j-1}_{l,v}=\sum_{k=0}^{n_{j,1}-1}\sum_{m=0}^{n_{j,2}-1}c^{j}_{k,m}b^{j,1}_{l,k}b^{j,2}_{v,m}.$$

Итак,

$$\mathrm{C}_{j-1}=\mathrm{A}_{j,1}\mathrm{C}_j\mathrm{A}^T_{j,2};\ \mathrm{R}_{j-1}=\mathrm{B}_{j,1}\mathrm{C}_j\mathrm{A}^T_{j,2};\ \mathrm{H}_{j-1}=\mathrm{A}_{j,1}\mathrm{C}_j\mathrm{B}^T_{j,2};\ \mathrm{D}_{j-1}=\mathrm{B}_{j,1}\mathrm{C}_j\mathrm{B}^T_{j,2}.\quad (4)$$

Формулы (4) дают вейвлет-разложение аппроксимации $S_j f$ функции двух аргументов, а формула (3) дает вейвлет-восстановление этой аппроксимации.

Алгоритм Чайкина и его обобщение

Пусть $\mathrm{c}_{j,i}=\left(x_{j,i},y_{j,i},z_{j,i}\right)^T\in\mathbf{R}^3,\ i=1,2,...,N_j$. Фиксируем в пространстве $\mathbf{R}^3$ декартову систему координат O,**i**,**j**,**k**. Пусть $\mathbf{c}_{j,i}=x_{j,i}\mathbf{i}+y_{j,i}\mathbf{j}+z_{j,i}\mathbf{k}$ вершины ломаной γ_j и j – номер итерации. Согласно алгоритму Чайкина [2, 5], переход от ломаной γ_j к ломаной γ_{j+1} с вершинами $\mathbf{c}_{j+1,1},\mathbf{c}_{j+1,2},...,\mathbf{c}_{j+1,N_{j+1}}$, $N_{j+1}=2N_j-2$ осуществляется следующим образом:

$$\mathbf{c}_{j+1,2i-1}=\frac{3}{4}\mathbf{c}_{j,i}+\frac{1}{4}\mathbf{c}_{j,i+1};\ \mathbf{c}_{j+1,2i}=\frac{1}{4}\mathbf{c}_{j,i}+\frac{3}{4}\mathbf{c}_{j+1,i+1},\ i=1,2,...,N-1.\qquad (5)$$

Равенства (5) можно представить в матричном виде. Введем в рассмотрение матрицы

$$\mathrm{C}_j=\begin{pmatrix} \mathrm{c}_{j,1}^T \\ \mathrm{c}_{j,2}^T \\ \dots \\ \mathrm{c}_{j,N_j}^T \end{pmatrix},\ \mathrm{P}_j=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3\ 1 & & & \\ 1\ 3 & & & \\ & 3\ 1 & & \\ & 1\ 3 & & \\ & & \dots & \\ & & & 3\,1 \\ & & & 1\,3 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица P_j (она совпадает с матрицей (2) при n=2) имеет размер $N_j \times N_{j-1}$, при этом $N_j=2N_{j-1}-2,\ N_0=N,\ j=1,2,\dots$. Тогда равенства (5) примут вид $\mathrm{C}_{j+1}=\mathrm{P}_{j+1}\cdot \mathrm{C}_j$. Из формул (5) находим

$$\mathbf{c}_{j,i}=\frac{3}{2}\mathbf{c}_{j+1,2i-1}-\frac{1}{2}\mathbf{c}_{j+1,2i},\ \mathbf{c}_{j,i+1}=\frac{3}{2}\mathbf{c}_{j+1,2i}-\frac{1}{2}\mathbf{c}_{j+1,2i-1},\ i=1,\dots,N-1.$$

Из последнего равенства находим $\mathbf{c}_{j,i}=\dfrac{3}{2}\mathbf{c}_{j+1,2i-2}-\dfrac{1}{2}\mathbf{c}_{j+1,2i-3},\ i=2,\dots,N$.

Следовательно, для $i=2,\dots,N-1$ имеем [5]

$$\mathbf{c}_{j,i}=-\frac{1}{4}\mathbf{c}_{j+1,2i-3}+\frac{3}{4}\mathbf{c}_{j+1,2i-2}+\frac{3}{4}\mathbf{c}_{j+1,2i-1}-\frac{1}{4}\mathbf{c}_{j+1,2i},$$

или, если ввести в рассмотрение матрицу [5] размера $N_{j-1}\times N_j$

$$\tilde{\mathrm{A}}_j=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 & & & & & & & & \\ -1 & 3 & 3 & -1 & & & & & & \\ & & -1 & 3 & 3 & -1 & & & & \\ & & & \dots & & & & & & \\ & & & & & & -1 & 3 & 3 & -1 \\ & & & & & & & & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

то $\mathrm{C}_j=\tilde{\mathrm{A}}_{j+1}\cdot \mathrm{C}_{j+1}$. Заметим, что $\tilde{\mathrm{A}}_j\cdot \mathrm{P}_j=\mathrm{E}$.

Под кратномасштабной кривой будем понимать кривую с параметрическим представлением

$$\gamma_j: \ \mathbf{r}_j\left(t\right) = \sum_{k=-n}^{2^j\alpha(n+1)-1} \varphi_{j,k}(t)\cdot \mathbf{c}_{j,k} = \Phi_j \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{c}_{j,-n}^T \\ \mathrm{c}_{j,-n+1}^T \\ \dots \\ \mathrm{c}_{j,2^j\alpha(n+1)-1}^T \end{pmatrix}, \ t \in [0;\alpha(n+1)], \qquad (6)$$

т.е., если $\mathrm{r}_j(t) = \left(x_j(t), y_j(t), z_j(t)\right)^T$, то $x_j(\cdot), y_j(\cdot), z_j(\cdot) \in V_{\alpha,j}$. Пусть

$$\mathrm{C}_j = \begin{pmatrix} \mathrm{c}_{j,-n}^T \\ \mathrm{c}_{j,-n+1}^T \\ \dots \\ \mathrm{c}_{j,2^j\alpha(n+1)-1}^T \end{pmatrix}, \ \mathrm{D}_j = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{j,-n}^T \\ \mathrm{d}_{j,-n+1}^T \\ \dots \\ \mathrm{d}_{j,2^j\alpha(n+1)-1}^T \end{pmatrix}.$$

Тогда, если $\mathrm{C}_j = \mathrm{P}_j\mathrm{C}_{j-1} + \mathrm{Q}_j\mathrm{D}_{j-1}$, то

$$\Phi_j\mathrm{C}_j = \Phi_j\mathrm{P}_j\mathrm{C}_{j-1} + \Phi_j\mathrm{Q}_j\mathrm{D}_{j-1} = \Phi_{j-1}\mathrm{C}_{j-1} + \Psi_{j-1}\mathrm{D}_{j-1}.$$

Отсюда получается схема последовательной модификации кривой $\mathbf{r}_j(t) = \mathbf{r}_{j-1}(t) + \mathbf{e}_{j-1}$, где $e_{j-1} = \Psi_{j-1}\mathrm{D}_{j-1}, \ j = 1,2,\ldots$ Покажем, что описанный выше алгоритм Чайкина укладывается в данную схему.

Пусть n=2, $N_j = 3\cdot 2^j + 2$ и $\mathrm{P}_j, \mathrm{Q}_j, \mathrm{A}_j, \mathrm{B}_j$ - блок фильтров для последовательности вложенных подпространств $V_0 \subset V_1 \subset \ldots$ пространства $L^2\left[0;3\right]$, построенной на основе В-сплайна 2-го порядка. Заметим, что $2\cdot N_{j-1} - 2 = 3\cdot 2^j + 2 = N_j$. Согласно алгоритму Чайкина $\mathrm{C}_{j-1} = \tilde{\mathrm{A}}_j\mathrm{C}_j$, но $\mathrm{A}_j\mathrm{P}_j = \mathrm{E}$, поэтому $\mathrm{C}_{j-1} = \mathrm{A}_j\mathrm{P}_j\tilde{\mathrm{A}}_j\mathrm{C}_j = \mathrm{A}_j\mathrm{C}'_j$, где $\mathrm{C}'_j = \mathrm{P}_j\tilde{\mathrm{A}}_j\mathrm{C}_j$. Поскольку для алгоритма Чайкина $\mathrm{C}_j = \mathrm{P}_j\mathrm{C}_{j-1}$, то $\mathrm{C}'_j = \mathrm{P}_j\tilde{\mathrm{A}}_j\mathrm{C}_j = \mathrm{P}_j\tilde{\mathrm{A}}_j\mathrm{P}_j\mathrm{C}_{j-1} = \mathrm{P}_j\mathrm{C}_{j-1} = \mathrm{C}_j$.

Здесь был использован тот факт, что $\tilde{A}_j P_j = E$. Итак, $C_{j-1} = A_j C_j$. Пусть $D_{j-1} = B_j C_j$. Тогда $C_j = P_j C_{j-1} + Q_j D_{j-1}$. Следует заметить, что в алгоритме Чайкина $D_{j-1} = B_j C_j = B_j P_j C_{j-1} = 0$. Таким образом, действительно алгоритм Чайкина представляет собой вейвлет-восстановление кривой класса гладкости C^1.

Используя аналогичную схему восстановления можно обобщить алгоритм Чайкина для получения кривых произвольного класса гладкости C^k. А именно, рассмотрим произвольную ломаную, заданную набором вершин $\mathbf{c}_{j,-n}, \mathbf{c}_{j,-n+1}, \ldots, \mathbf{c}_{j,2^j \alpha(n+1)-1}$. Положим $C_s = P_s C_{s-1}$, $s = j+1, \ldots$, где P_s определяется равенством (2). В результате получаем вейвлет-восстановление некоторой кривой класса C^{n-1}.

На рис.3 а) представлена начальная ломаная (синяя пунктирная линия), ломаная после трех последовательных преобразований Чайкина (зеленая жирная линия) и соответствующая кратномасштабная кривая (красная тонкая линия). На рисунке 3 б) показано применение обобщения алгоритма Чайкина.

Под кратномасштабной поверхностью будем понимать поверхность с параметрическим представлением

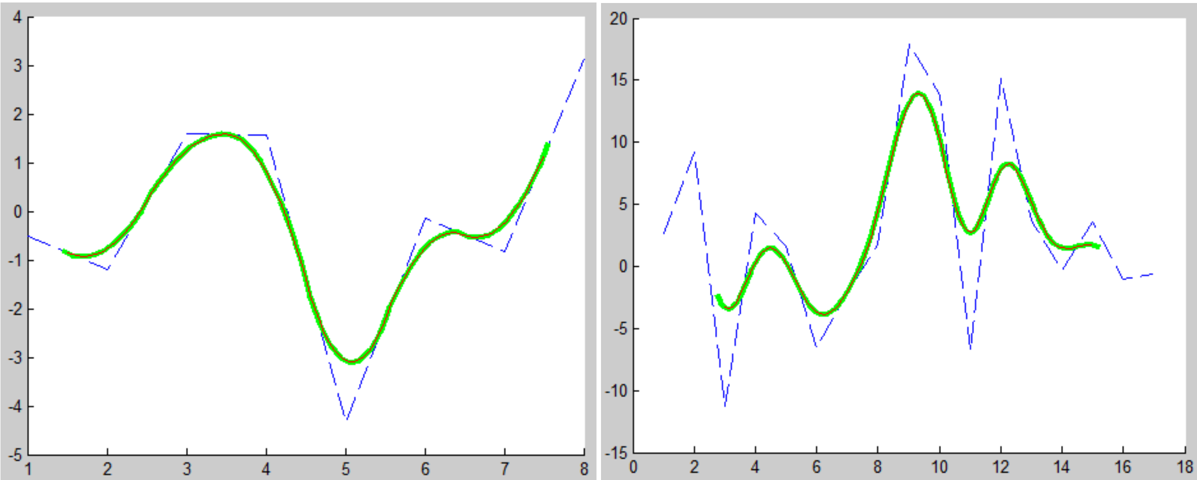
$$\mathbf{r}_{j,k}(u,v) = \sum_{i=-n}^{2^j \alpha(n+1)-1} \sum_{s=-m}^{2^k \beta(m+1)-1} \mathbf{c}_{i,s}^{j,k} \varphi_{j,i}(u) \varphi_{k,s}(v), \;\; u \in [0; \alpha(n+1)], \;\; v \in [0; \beta(m+1)],$$

где $\mathbf{c}_{i,s}^{j,k} = x_{i,s}^{j,k} \mathbf{i} + y_{i,s}^{j,k} \mathbf{j} + z_{i,s}^{j,k} \mathbf{k}$.

Если ввести в рассмотрение матрицы $X_{j,k} = \left(x_{i,s}^{j,k}\right)$, $Y_{j,k} = \left(y_{i,s}^{j,k}\right)$, $Z_{j,k} = \left(z_{i,s}^{j,k}\right)$, то вектор-функцию $\mathbf{r}(u,v)$ можно представить в виде:

$$\mathbf{r}_{j,k}(u,v) = \left(\Phi_j(u)\cdot X_j \cdot \Phi_k(v)^T, \Phi_j(u)\cdot Y_j \cdot \Phi_k(v)^T, \Phi_j(u)\cdot Z_j \cdot \Phi_k(v)^T\right)^T.$$

Заметим, что при каждом фиксированном $u_0 \in [0;\alpha(n+1)]$ или $v_0 \in [0;\beta(m+1)]$ мы получаем кратномасштабную кривую.



а) n=2 б) n=5

Рис. 3. Алгоритм Чайкина и его обобщение. а) стандартный алгоритм Чайкина (n=2); б) обобщенный алгоритм Чайкина (n=5)

Преобразование поверхности осуществим в два этапа. Сначала применим к ломаным с вершинами $\mathbf{c}_{i,s}^{j}$, $s=-m,-m+1,\ldots,2^k\beta(m+1)-1$ обобщенный алгоритм Чайкина. В результате получим набор вершин $\tilde{\mathbf{c}}_{i,s}^{j}$, $s=-m,-m+1,\ldots,2^{k+1}\beta(m+1)-1$. Далее применим обобщенный алгоритм Чайкина к ломаным с вершинами $\tilde{\mathbf{c}}_{i,s}^{j}$, $i=-n,-n+1,\ldots,2^j\alpha(n+1)-1$.

Указанные преобразования можно свести к преобразованию строк и столбцов матриц $X_{j,k}$, $Y_{j,k}$, $Z_{j,k}$:

$$X_{j+1,k+1} = P_{j+1} X_{j,k} P_{k+1}^T;\ Y_{j+1,k+1} = P_{j+1} Y_{j,k} P_{k+1}^T;\ Z_{j+1,k+1} = P_{j+1} Z_{j,k} P_{k+1}^T.$$

Согласно равенствам (6) данное преобразование поверхности представляет собой вейвлет-восстановление некоторой поверхности класса гладкости $C^{\min(m,n)-1}$. На рис. 4 показана вентиляторная лопатка для двигателя самолета МС-21, изготавливаемая из композиционных материалов методом выкладки, смоделированная рассмотренным выше методом.

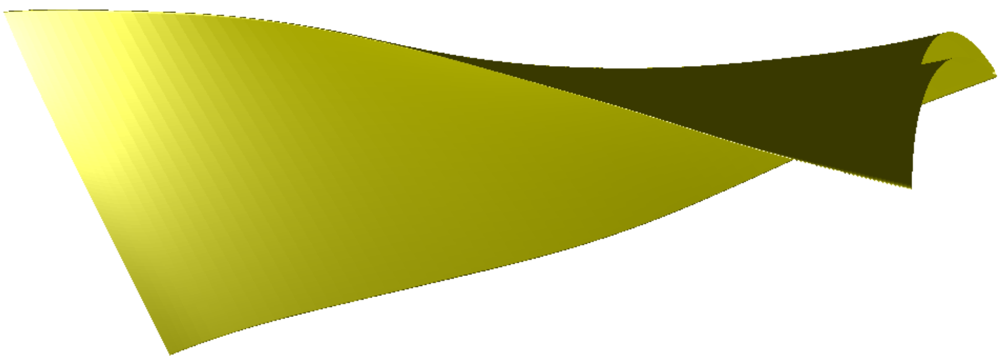


Рис. 4. Вентиляторная лопатка

Заключение

В данной статье мы рассмотрели применение теории вейвлетов в геометрическом моделировании, методы и алгоритмы которого составляют основу для систем автоматизированного проектирования. Был построен вейвлет-базис на отрезке, используя B-сплайн произвольного порядка. На основе такого вейвлет-базиса в статье построены двумерные вейвлеты и получены формулы для вейвлет-разложения и вейвлет-восстановления функций одного и двух аргументов. Показано, что известный алгоритм

Чайкина является частным случаем этих формул. Было получено обобщение этого алгоритма для построения кривых и поверхностей произвольного порядка гладкости.

Библиографический список

1. Eric J.Stollnitz, Tony D. DeRose, David H. Salesin. Wavelets for computer graphics: A primer. IEEE Computer Graphics and Applications, 15(3): pp. 76-84, May 1995 (part 1) and 15(4): pp. 75-85, July 1995 (part 2).
2. Chaikin G.M. An algoritm for high speed curve generation. Computer Graphics and Image Processing, 3(4): pp. 346-349, December 1974.
3. A. Finkelstein and David H. Salesin, Multiresolution Curves, in Siggraph ’94 Proceedings ACM SIGGRAPH, Addison-Wesley eds., pp. 261-268, 1994.
4. Giancarlo Amati, Alfredo Liverani, Gianni Caligiana. The Reuse of Free-Form Surface Features: A Wavelet Approach. Proceedings of the IASTED International Conference APPLIED SIMULATION AND MODELLING, June 28-30, 2004, Rhodes, Greece, pp. 247-252.
5. Mohamed F. Hassan, Neil A. Dodgson. Reverse Subdivision. Advances in Multiresolution for Geometric Modelling, Springer, 2005, pp. 271-283
6. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ. - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. - 272 с.

7. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MatLab. - М.: ДМК Пресс, 2005. - 304 с.
8. Фрейзер М. Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры: Пер. с англ. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. - 487 с.
9. Добеши И. Десять лекций по вэйвлетам. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая механика», 2001. - 464 с.
10. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 616 с.
11. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 2005.- 671 с.
12. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
13. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. – 248 с.