

Научная статья
УДК 532.507
DOI: [10.34759/trd-2022-123-08](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-08)

ОБОБЩЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ПУАЗЕЙЛЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ольга Николаевна Хатунцева^{1,2}

¹Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва»,
Королев, Московская область, Россия

²Московский физико-технический институт,
Долгопрудный, Московская область, Россия

olga.khatuntseva@rsce.ru

Аннотация. Проведены исследования возможности описания как ламинарных, так и турбулентных режимов течения жидкости на основе одних и тех же уравнений. Предложено рассматривать уравнения Навье-Стокса (УНС) в фазовом пространстве, расширенном за счет введения дополнительной - стохастической переменной. В результате, в выражении для полной производной по времени появляется дополнительное слагаемое, характеризуемое производством энтропии за счет возбуждения стохастических возмущений.

Для ламинарных режимов течения производство энтропии принимает нулевое значение, дополнительное слагаемое исчезает, и осуществляется переход к УНС в

их стандартном виде, решения которого описывают только ламинарные режимы течения.

Включение в уравнения дополнительного слагаемого, характеризующего производство энтропии (которое всегда неотрицательно), позволяет учитывать необратимость физических процессов по времени в тех случаях, когда это производство ненулевое.

Показано, что возникновение и поддержание недетерминированных – стохастических процессов - в жидкости возможно в тех системах, где существуют несовместимые между собой граничные условия. В этом случае становится невозможным существование одного гладкого решения, и можно говорить лишь о наличии двух или более непересекающихся или пересекающихся негладким образом асимптот решения. Область, находящаяся между этими асимптотами (или в окрестности точки «разрыва» производных) является областью неопределенности, порождающая стохастический процесс.

Для описания таких процессов будем использовать «обобщенные» решения, в которых учитывается вклад каждой асимптоты решения в общее решение в каждой точке исследуемой области.

В такой постановке найдены «ламинарное» и обобщенное «турбулентное» решения плоской задачи Пуазейля. Приведено сравнение экспериментального универсального пристеночного профиля скорости и обобщенного «турбулентного» решения задачи для различных значений числа Рейнольдса.

Ключевые слова: турбулентное течение Пуазейля, универсальный профиль скорости, ламинарно-турбулентный переход

Для цитирования: Хатунцева О.Н. Обобщенное аналитическое решение плоской задачи Пуазейля для турбулентного режима течения несжимаемой жидкости // Труды МАИ. 2022. № 123. DOI: [10.34759/trd-2022-123-08](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-08)

GENERALIZED ANALYTICAL SOLUTION OF THE PLANE POISEUILLE PROBLEM FOR THE TURBULENT REGIME OF INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW

Olga N. Khatuntseva^{1,2}

¹Korolev Rocket and Space Corporation «Energia»,
Korolev, Moscow region, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology,
Dolgoprudny, Moscow region, Russia

Olga.Khatuntseva@rsce.ru

Abstract. The possibility of describing both laminar and turbulent modes of fluid flow based on the same equations has been investigated. It is proposed to consider the Navier-Stokes equations (NSE) in a phase space expanded by the introduction of an additional stochastic variable. As a result, an additional term appears in the expression for the total time derivative, characterized by the production of entropy due to the excitation of stochastic perturbations.

For laminar flow modes, entropy production takes zero value, the additional term

disappears, and the transition to the NSE in their standard form is carried out, while the corresponding solutions describe only laminar flow modes.

The inclusion of an additional term, characterized by entropy production (which is always non-negative), into the equations allows us to take into account the time irreversibility of physical processes in cases where this production is non-zero.

It is shown that the occurrence and maintenance of nondeterministic - stochastic processes - in a liquid is possible in those systems, where incompatible boundary condition occurs. In this case, the existence of one smooth solution becomes impossible, and we can only talk about the presence of two or more non-intersecting or non-smoothly intersecting asymptotes of the solution. The region located between these asymptotes (or in the vicinity of the point of "discontinuity" of derivatives) is an uncertainty domain that generates a stochastic process.

As generalized solutions to problems with two asymptotes of the solution, functions were considered that are the sum of two terms, each of which is the product of two functions: one of which determines one of the asymptotes of the solution, and the second determines the degree of influence of this asymptote on the overall solution at each point of the studied domain.

The "laminar" and generalized "turbulent" solutions of the plane Poiseuille problem are found in this formulation. The comparison of the found solution with experimental data of the wall-mounted universal velocity profile is given for different values of the Reynolds number.

Keywords: turbulent Poiseuille flow, universal velocity profile, laminar-turbulent transition.

For citation: Khatuntseva O.N. Generalized analytical solution of the plane Poiseuille problem for the turbulent regime of incompressible fluid flow. *Trudy MAI*, 2022, no.123.

DOI: [10.34759/trd-2022-123-08](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-08)

1. Введение

Исследование и описание стохастических процессов и, в частности, турбулентного режима течения жидкости, представляется чрезвычайно интересной, но трудной задачей. С одной стороны, до сих пор ведутся дискуссии, является ли турбулентный режим, в самом деле, стохастическим, то есть полностью недетерминированным процессом, и не является ли случайность в этом процессе кажущейся, основанной лишь на ограниченности наших знаний. С другой стороны, не решен вопрос, могут ли детерминированные уравнения Навье-Стокса (УНС), подчиняющиеся теореме Коши о существовании и единственности, описывать этот режим.

По-видимому, оснований сомневаться в стохастической природе турбулентности нет, хотя бы потому, что в тех немногих задачах, которые допускают аналитические решения УНС (например, в задаче Хагена-Пуазейля, плоской задаче Куэтта и плоской задаче Пуазейля), эти решения описывают только детерминированные - ламинарные режимы течения. Довольно успешное применение уравнений Навье-Стокса при решении практических

гидродинамических задач при реализации турбулентных режимов течения можно объяснить тем, что, как было показано ранее [1-6], УНС теряют свои детерминированные свойства при их интегрировании вычислительными методами и, таким образом, получают возможность моделировать случайные процессы.

В разных методах численного интегрирования «потеря» детерминированных свойств уравнениями происходит по-разному. Так, в методах осреднения по Рейнольдсу изначально предполагают и закладывают недетерминированное статистическое описание основных характеристик течения: скорости, давления и пр., вид УНС изменяют за счет введения дополнительных членов, описывающих корреляции пульсаций, а для замыкания моментных характеристик используют дополнительные модели и уравнения, их описывающие. Численные решения, найденные таким образом, не являются результатом непосредственного интегрирования уравнений Навье-Стокса. И, соответственно, «турбулентные» решения для осредненных характеристик течения, отличные от решений, описывающих ламинарные режимы, являются не вторыми решениями УНС, а просто решениями другой системы уравнений. Специальная «настройка» моделей для замыкания моментных характеристик и подбор значений достаточно большого количества параметров (в некоторых задачах порядка десяти) позволяют довольно хорошо описывать осредненные характеристики турбулентных течений для конкретных задач с заданными граничными условиями, однако не дают универсальных подходов к решению задач с произвольной геометрией течения [7-19].

Реализацию методов прямого численного моделирования (DNS) также нельзя считать свободной от случайных недетерминированных процессов. В работах [1-2] показано, что «турбулентные» решения, найденные на основе DNS, по сути, представляют собой моделирование стохастического процесса на основе аналоговых принципов.

Для того чтобы описывать как ламинарные, так и турбулентные режимы течения на основе одних и тех же уравнений в работах [3-6] (см. также библиографию к этим работам) было предложено рассматривать УНС в фазовом пространстве, расширенном за счет введения дополнительной - стохастической переменной. В результате, в выражении для полной производной по времени появляется дополнительное слагаемое, характеризующее производство энтропии за счет возбуждения стохастических возмущений. Для ламинарных режимов течения производство энтропии принимает нулевое значение, дополнительное слагаемое исчезает, и осуществляется переход к уравнениям Навье-Стокса в их стандартном виде, решения которого описывают только ламинарные режимы течения.

Включение в выражение для полной производной по времени дополнительного слагаемого, характеризующего производство энтропии (которое всегда неотрицательно), позволяет, в частности, учитывать необратимость физических процессов по времени в тех случаях, когда это производство ненулевое.

Вопрос возможности возникновения стохастических процессов в реальных - «физических» - системах рассматривался в работах [4], [6]. Было показано, что возникновение и поддержание недетерминированных - стохастических процессов -

в жидкости возможно в тех системах, где существуют несовместимые между собой граничные условия. В этом случае становится невозможным существование одного гладкого решения, и можно говорить лишь о наличии двух или более непересекающихся или пересекающихся негладким образом (с разрывом производных) асимптот решения. Область, находящаяся между этими асимптотами (или в окрестности точки «разрыва» производных) является областью неопределенности, порождающая стохастический процесс.

Стохастический процесс в системе может возникнуть и в том случае, если гладкое решение для заданных граничных условий при заданном значении параметра существует, однако сами значения параметра в разных областях течения различаются. Это может происходить, например, в тех случаях, когда значения параметра определяются дополнительными факторами, такими как, например, характерный размер вязкого слоя, который может принимать разные значения в разных областях течения. Так, в плоской задаче Куэтта [6], его значения в пристеночной области и вблизи точки «перегиба» профиля скорости различны и, соответственно, различаются значения параметра, определяющие решения в этих областях. В этом случае также можно говорить о наличии двух или более непересекающихся или пересекающихся негладким образом асимптот решения и области неопределенности, порождающей стохастический процесс.

Для описания таких процессов будем использовать «обобщенные» решения, в которых учитывается вклад каждой асимптоты решения в общее решение в каждой точке исследуемой области.

В такой постановке в работах [4], [6] были найдены «ламинарные» и обобщенные «турбулентные» решения задачи Хагена-Пуазейля (для течения несжимаемой нетеплопроводной жидкости в трубе кругового сечения) и плоской задачи Куэтта (для безнапорного течения несжимаемой нетеплопроводной жидкости, находящейся между движущимися в противоположных направлениях плоскими стенками канала). Сравнение с экспериментальными данными показало работоспособность представленного подхода к решению такого рода задач.

В данной работе найдем решение уравнений Навье-Стокса, записанных в фазовом пространстве, расширенном с помощью дополнительной «стохастической» - переменной, для профиля скорости несжимаемой нетеплопроводной жидкости при ламинарном режиме течения и обобщенное решение для профиля скорости при турбулентном режиме течения в плоской задаче Пуазейля.

2. Решения плоской задачи Пуазейля для ламинарного и турбулентного режимов течения несжимаемой жидкости

Для того чтобы найти решение гидродинамической задачи как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течения, в уравнениях Навье-Стокса (УНС) необходимо учесть то, что их отличает друг от друга, а именно, производство энтропии, обусловленное возбуждением стохастических возмущений. Будем основываться на подходе, приведенном в работах [3-6]. Кратко повторим здесь основные рассуждения.

Уравнения Эйлера и Навье-Стокса (являющиеся уравнениями в частных производных (УЧП) вида: $df/dt = \hat{A} f$) получаются в результате перехода от интегральных соотношений, в которых учитывается влияние на выделенную область внешних воздействий, к равенству подынтегральных выражений, при условии независимости интегральных соотношений от величины рассматриваемого объема, по которому производится интегрирование. При этом предполагается, что вид выражения для полной производной по времени: df/dt , должен быть определен исходя из учета всех независимых степеней свободы для выделенного объема в интегральных соотношениях.

В детерминированных физических процессах полная производная по времени определяется соотношением:

$$df/dt = \partial f / \partial t + \sum_i \dot{x}_i \partial f / \partial x_i .$$

Предположим, что в выделенной области возможно возбуждение внутренних стохастических процессов (механизмы их возбуждения обсуждались выше и будут рассмотрены ниже). В таких системах полную производную по времени необходимо рассматривать с учетом всех дополнительных независимых степеней свободы - стохастических возмущений. Функционалом, осуществляющим связь между микро- и макропроцессами является энтропия, которая характеризуется плотностью вероятности стохастических возмущений, поэтому в таком процессе можно перейти от рассмотрения функциональной зависимости от отдельных независимых возмущений к рассмотрению зависимости функции от энтропии S в целом:

$$f = f(t, \vec{x}; S).$$

В этом случае полную производную функции f по времени с учетом возможного изменения энтропии можно записать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial S} \frac{dS}{dt},$$

где выражение для энтропии, учитывающее стохастические возмущения на всех возможных масштабах, может быть представлено в виде:

$$S(t, \vec{r}; \tau) = - \int \varphi[p(t, \vec{r}; \tau)] \ln \varphi[p(t, \vec{r}; \tau)] d[p(t, \vec{r}; \tau)].$$

В этом выражении функция $\varphi[p(t, \vec{r}; \tau)]$ - это плотность вероятности реализации возмущения скорости величины $p(t, \vec{r}; \tau)$ в заданный момент времени t в рассматриваемой точке пространства \vec{r} на временном масштабе рассмотрения τ .

Чтобы избежать неопределенности при постановке начальных и граничных условий, обусловленной возможной неоднозначностью задания начального уровня отсчета энтропии, представим выражение для полной производной по времени через переменную, определяемую плотностью вероятности реализации случайной величины:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{\delta S / \delta \varphi} \frac{dS}{dt}.$$

Производная: $\delta S / \delta \varphi$, является функциональной производной. Ее значение равно: $\delta S / \delta \varphi = - \ln \varphi(p) - 1$ (см. [3-6]).

Так как, $-(\ln \varphi + 1)\delta \varphi = \delta(-\varphi \ln \varphi)$, то, выражение для полной производной

по времени можно записать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} \frac{dS}{dt}, \quad \text{где } \tilde{s}(p) = -\varphi(p) \ln \varphi(p).$$

Последнее слагаемое в этом выражении становится ненулевым только в том случае, когда в рассматриваемой системе осуществляется производство энтропии: $dS/dt > 0$. Включение в полную производную по времени слагаемого: $\dot{S} \partial f / \partial \tilde{s}$, позволяет, в частности, учитывать необратимость физических процессов по времени. В самом деле, при ненулевом производстве энтропии dS/dt , оно всегда положительно, независимо от направленности протекания процесса. Поэтому при изменении направления течения времени, член: $\dot{S} \partial f / \partial \tilde{s}$, остается тем же самым, а все остальные слагаемые, входящие в полную производную по времени, меняют знаки. В результате для систем, в которых производство энтропии ненулевое, теряется свойство обратимости по времени.

Введя обозначение: $dS/dt = 1/\tau$, где τ – временной масштаб, на котором происходит необратимое изменение энтропии стохастической системы на единицу, выражение для полной производной от функции f по времени можно окончательно записать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}.$$

А, учитывая, что влияние на выделенную область внешних воздействий не изменяется, можно записать соотношение для нахождения функции $f = f(t, \bar{x}, \tilde{s})$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} = \hat{A}f.$$

Для решения плоской задачи Пуазейля, с учетом возможного существования стохастического процесса, достаточно рассмотреть систему уравнений, состоящую из уравнения неразрывности (которое для несжимаемой жидкости не изменяется при расширении фазового пространства за счет введения дополнительной «стохастической» переменной) и модифицированных УНС:

$$\begin{cases} \nabla \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ν , ρ - вязкость и плотность жидкости, ∇P - градиент давления, τ – временной масштаб, на котором происходит изменение энтропии на единицу, $\tilde{s} = \tilde{s}(p) = -\varphi(p) \ln \varphi(p)$ - переменная, характеризуемая плотностью вероятности φ возникновения стохастического возмущения p .

В качестве решения системы уравнений (1) будут выступать значения скорости $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{r}, \tilde{s}; \tau) = \vec{V}(t, \vec{r}, \tilde{s}(\varphi); \tau)$, которые могут реализоваться с вероятностью φ (на масштабе рассмотрения τ) в момент времени t , в точке $\vec{r}(x, y, z)$.

Решая задачу в классической постановке [20-23], будем предполагать, что скоростями в поперечных направлениях y и z можно пренебречь по сравнению с продольной скоростью V . Следовательно, давление в поперечных направлениях будет постоянным, и продольная составляющая скорости V не будет зависеть от

значения продольной координаты x . Исходя из этого, в квазистационарном случае (когда $\partial V/\partial t = 0$) систему уравнений (1) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial V}{\partial \tilde{s}} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

В приближении постоянства градиента давления в продольном направлении, полученное уравнение запишем в виде:

$$\frac{b^2}{\tau \nu} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2} + 2, \quad (2)$$

где $\tilde{y} = y/b$, b - полуширина канала, $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = V/U$ - безразмерная квазистационарная компонента скорости в продольном направлении в расширенном стохастическом пространстве с дополнительной переменной \tilde{s} , $U = -\frac{b^2}{2\rho\nu} \frac{dP}{dx}$ - скорость жидкости в центре канала при ламинарном режиме течения [20-23].

Нерассмотренные в уравнениях компоненты скорости, характеризующие трехмерный пространственный характер течения, будут иметь вид стохастических пульсаций, которые учитываются в уравнении (2) за счет введения дополнительной переменной \tilde{s} .

Уравнение (2) можно упростить, введя вместо временного масштаба τ безразмерный коэффициент γ ($0 < \gamma \leq 1$) - параметр, характеризующий пространственный масштаб, и воспользовавшись соотношением: $\tau = \frac{\gamma b}{U} = \frac{\gamma b^2}{\nu Re}$, где

$Re = Ub/\nu$ - число Рейнольдса при ламинарном режиме течения жидкости.

Подставляя зависимость $\tau(\gamma)$ в уравнение (2), приходим к соотношению:

$$\frac{\text{Re}}{\gamma} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2} + 2. \quad (3)$$

Уравнение (3) будем решать, используя граничные условия – “прилипание” жидкости на стенке трубы в отсутствии пульсаций: $\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) \Big|_{\substack{\tilde{y}=\pm 1 \\ \tilde{s}=0}} = 0$, с образованием линейного профиля скорости вблизи стенок на длине вязкого слоя $V^+ \sim \xi^+$ (смысл скорости V^+ и расстояния ξ^+ будет разъяснен позднее), а также равенство нулю, в отсутствии пульсаций, производной скорости в поперечном направлении в центре канала: $\partial \tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) / \partial \tilde{y} \Big|_{\substack{\tilde{y}=0 \\ \tilde{s}=0}} = 0$.

Сделав в (3) замену:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \tilde{u}(\tilde{y}, \tilde{s}) - \tilde{y}^2, \quad (4)$$

получим

$$\frac{\text{Re}}{\gamma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}. \quad (5)$$

Решая уравнение (5) методом разделения переменных:

$$\tilde{u}(\tilde{y}, \tilde{s}) = N(\tilde{s})F(\tilde{y}), \quad (6)$$

получим два уравнения:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{d\tilde{s}} = \frac{a\gamma}{\text{Re}} \quad (7)$$

и

$$\frac{d^2 F}{d\tilde{y}^2} = aF, \quad (8)$$

где $a = a(\gamma, Re)$ - произвольная константа при любых фиксированных значениях параметров γ и Re .

Нулевое значение константы a соответствует решению УНС для ламинарного течения несжимаемой жидкости в плоском канале. Это решение будет также являться первым решением задачи течения жидкости в плоском канале с учетом возможной реализации стохастических возмущений скорости (когда эти возмущения не реализуются) для любых значений числа Рейнольдса.

Если $a \neq 0$ (когда стохастические возмущения реализуются), то решением уравнения (7) являются функции

$$N(\tilde{s}) \sim e^{\frac{a\gamma}{Re}\tilde{s}}. \quad (9)$$

Гладкими решениями уравнения (8) являются выражения:

$$F = \frac{ch(\sqrt{a}\tilde{y})}{ch\sqrt{a}}, \text{ где } a > 0; \quad F = \frac{\cos(\sqrt{|a|}\tilde{y})}{\cos\sqrt{|a|}}, \text{ где } a < 0.$$

Соответствующие им выражения для скорости (с учетом (9)) имеют вид:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{ch(\sqrt{a}\tilde{y})}{ch\sqrt{a}} e^{\frac{a}{Re}\tilde{s}} - \tilde{y}^2, \quad a > 0, \quad (10)$$

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{\cos(\sqrt{|a|}\tilde{y})}{\cos\sqrt{|a|}} e^{-\frac{|a|}{Re}\tilde{s}} - \tilde{y}^2, \quad a < 0. \quad (11)$$

Несмотря на то, что решения (10), (11) системы уравнений (1) при любых ненулевых значениях параметра a (с учетом условия “прилипания” жидкости на стенках канала и условия нулевого значения производной скорости в его центре) являются гладкими, сами значения параметра a должны определяться с использованием дополнительных факторов. Учет этих факторов может привести к отличию решений в пристеночной и в центральной областях канала. В этом случае также, как и в случае полностью несовместимых граничных условий задачи, можно говорить о наличии двух или более непересекающихся или пересекающихся негладким образом асимптот решения и области неопределенности, порождающей стохастический процесс.

Рассмотрим поведение течения жидкости вблизи стенок канала. Для этого введем переменную $\xi = b - y$ или безразмерную переменную $\tilde{\xi} = 1 - \tilde{y}$ (здесь $\tilde{\xi} = \xi/b$, $\tilde{y} = y/b$), значение которой будет отсчитываться от стенки. Выражения (10)-(11) перепишем в виде зависимостей безразмерных скоростей от безразмерных расстояний относительно динамических значений скорости V_* и длины y_* , соответственно (учитывая при этом, что $y_*V_*/\nu \sim 1$):

$$\frac{V(\xi, \tilde{s})}{V_*} \tilde{V}_* = \frac{ch\left(\sqrt{a}\left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \tilde{y}_*\right)\right)}{ch\sqrt{a}} e^{\frac{a}{\text{Re}} \tilde{y}_*} - \left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \tilde{y}_*\right)^2, \quad a > 0.$$

$$\frac{V(\xi, \tilde{s})}{V_*} \tilde{V}_* = \frac{\cos\left(\sqrt{|a|}\left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \tilde{y}_*\right)\right)}{\cos\sqrt{|a|}} e^{\frac{|a|}{\text{Re}} \tilde{y}_*} - \left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \tilde{y}_*\right)^2, \quad a < 0.$$

Динамические характеристики течения: $\tilde{V}_* = V_*/U$ и $\tilde{y}_* = y_*/b$, входящие в эти выражения, можно определить, используя соотношения [20]:

$$\tilde{V}_* = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\nu}{Ub}} = \frac{2}{\sqrt{2\text{Re}}}, \quad (12)$$

$$\tilde{y}_* = \frac{y_*}{b} = \frac{y_* V_*}{\nu} \frac{\nu}{Ub V_*} \sim \frac{1}{\text{Re} \tilde{V}_*} = \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}, \quad (y_* V_*/\nu \sim 1). \quad (13)$$

здесь $\sigma = \frac{2b\Delta z \Delta P}{2\Delta z \Delta x} \approx -b \frac{dP}{dx} = \frac{2\rho\nu U}{b}$ - отнесенная к единице площади сила трения,

$U = -\frac{b^2}{2\rho\nu} \frac{dP}{dx}$ - скорость течения жидкости на оси канала при ламинарном режиме.

Используя соотношения (12), (13) перепишем выражения для скорости в виде:

$$\frac{V(\xi, \tilde{s})}{V_*} = \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left(\frac{\text{ch} \left(\sqrt{a} \left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \right) \right)}{\text{ch} \sqrt{a}} e^{\frac{a}{\text{Re}} \tilde{s}} - \left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \right)^2 \right), \quad a > 0.$$

$$\frac{V(\xi, \tilde{s})}{V_*} = \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left(\frac{\cos \left(\sqrt{|a|} \left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \right) \right)}{\cos \sqrt{|a|}} e^{\frac{|a|}{\text{Re}} \tilde{s}} - \left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \right)^2 \right), \quad a < 0.$$

При нулевом значении стохастического возмущения ($\tilde{s} = 0$) в точке $\xi = y_*$ ($y_* V_*/\nu \sim 1$), значение скорости должно быть равно значению динамической скорости: $V = V_*$. Поэтому от полученных выражений можно перейти к уравнениям:

$$\sqrt{2\text{Re}} \left(\text{ch} \left(\sqrt{\frac{a}{2\text{Re}}} \right) - \text{sh} \left(\sqrt{\frac{a}{2\text{Re}}} \right) \text{th} \sqrt{a} \right) - \sqrt{2\text{Re}} - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} = 0, \quad a > 0. \quad (14)$$

$$\sqrt{2\text{Re}} \left(\cos \left(\sqrt{\frac{|a|}{2\text{Re}}} \right) + \sin \left(\sqrt{\frac{|a|}{2\text{Re}}} \right) \text{tg} \sqrt{|a|} \right) - \sqrt{2\text{Re}} - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} = 0, \quad a < 0. \quad (15)$$

Действительным решением уравнения (14) является только значение $\sqrt{a} \approx 0$, что соответствует ламинарному решению. При определении профиля турбулентного течения, это решение нас интересовать не будет, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только случай отрицательных значений параметра a .

Предполагая, что $|a|/(2\text{Re}) < 1$, и разлагая тригонометрические функции, содержащие числа Рейнольдса в уравнении (15), в ряд Тейлора, запишем полученное уравнение с точностью до $O(1/(2\text{Re}))$:

$$\frac{|a|+2}{2\sqrt{2\text{Re}}} - \sqrt{|a|} \cdot \text{tg} \sqrt{|a|} \approx 0, \quad a < 0. \quad (16)$$

При больших значениях $|a|$: $2 \ll |a| < 2\text{Re}$, от уравнения (16) можно перейти к приближенному соотношению:

$$\sqrt{|a_k|} \approx \sqrt{8\text{Re}} \cdot \text{tg} \sqrt{|a_k|}, \quad \text{или} \quad b_k \approx \text{tg}(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k), \quad \text{где} \quad b_k = \sqrt{|a_k|}/\sqrt{8\text{Re}},$$

из которого, в частности, следует зависимость: $\pm \sqrt{b_k^2 + 1} \approx 1/\cos(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k)$.

Выражения для компонентов скорости (см. (11)), соответствующие этому решению, представимы в виде:

$$\tilde{V}_k(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{\cos(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k \tilde{y})}{\cos(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k)} e^{-8b_k^2 \tilde{y} \tilde{s}} - \tilde{y}^2 = \pm \sqrt{b_k^2 + 1} \cdot \cos(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k \tilde{y}) e^{-8b_k^2 \tilde{y} \tilde{s}} - \tilde{y}^2.$$

Длина волны колебаний компонентов скорости: $(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k)^{-1}$ должна быть больше характерного размера «вязкого» слоя: $\tilde{y}_* = 1/\sqrt{2\text{Re}}$, поэтому $b_k < 1/2$ и $|a_k| < 2\text{Re}$.

Выражение, определяющее общий вклад «коротковолновых» возмущений, характеризуемых параметрами b_k , в безразмерное значение скорости, можно представить в виде ряда:

$$\sum_k c_k \sqrt{b_k^2 + 1} \cdot \cos(\sqrt{8\text{Re}b_k} \tilde{y}) e^{-8b_k^2 \tilde{s}} - \sum_k c_k \tilde{y}^2, \text{ где } b_k \approx \text{tg}(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k), b_k < 1/2. \quad (17)$$

Найдем теперь выражение, определяющее общий вклад «длинноволновых» возмущений в безразмерное значение скорости.

Если значения параметра a по абсолютной величине значительно меньше квадратного корня из числа Рейнольдса, то уравнение (16) сводится к виду:

$$\sqrt{|a|} \cdot \text{tg} \sqrt{|a|} \approx 0, \quad a < 0. \quad (18)$$

Решения уравнения (18): $\sqrt{|a_n|} \approx \pi n$, где n - целые числа и $\pi^2 n^2 \ll \sqrt{2\text{Re}}$.

Таким образом, частными решениями задачи для турбулентного течения являются выражения, заданные соотношением (11) со значениями параметров $\sqrt{|a_n|} \approx \pi n$:

$$\tilde{V}_n(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{\cos(\pi n \tilde{y})}{\cos(\pi n)} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}} \tilde{s}} - \tilde{y}^2. \quad (19)$$

Выражение, определяющее общий вклад «длинноволновых» возмущений (19) в безразмерное значение скорости, представимо в виде:

$$\sum_n (-1)^n c_n \cos(\pi n \tilde{y}) e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}} \gamma \tilde{s}} - \sum_n c_n \tilde{y}^2, \quad \pi^2 n^2 \ll \sqrt{2 \text{Re}}. \quad (20)$$

Объединяя выражения (17) и (20), можно записать:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \sum_{\pi^2 n^2 \ll \sqrt{2 \text{Re}}} (-1)^n c_n \cos(\pi n \tilde{y}) e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}} \gamma \tilde{s}} + \sum_{b_k < 1/2} c_k \sqrt{b_k^2 + 1} \cdot \cos(\sqrt{8 \text{Re} b_k} \tilde{y}) e^{-8 b_k^2 \gamma \tilde{s}} - \left(\sum_n c_n + \sum_k c_k \right) \tilde{y}^2. \quad (21)$$

Вблизи стенки канала – в окрестности точки $\tilde{y} = 1$, из соотношения (21)

получим выражение:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) \Big|_{\tilde{y}=1} = \sum_n c_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}} \gamma \tilde{s}} + \sum_k c_k e^{-8 b_k^2 \gamma \tilde{s}} - \sum_n c_n - \sum_k c_k.$$

Раскладывая в этом выражении экспоненты в ряд Тейлора с точностью до первой степени γ , включительно, запишем

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) \Big|_{\tilde{y}=1} = -\gamma \tilde{s} \left(\frac{\pi^2}{\text{Re}} \sum_n c_n n^2 + 8 \sum_k c_k b_k^2 \right). \quad (22)$$

Это выражение характеризует возмущение безразмерной скорости вблизи стенки, реализующейся с вероятностью, описываемой стохастической переменной \tilde{s} . Для того, чтобы стохастическое возмущение скорости, с одной стороны, «диссипировало» на длине вязкого масштаба, а, с другой стороны, не исчезло полностью, «амплитуда» ее изменения на масштабе $\gamma = 1$ должна быть порядка безразмерной динамической скорости: $\tilde{V}_* = 2/\sqrt{2 \text{Re}}$ (см. соотношение (12)):

$$\frac{\pi^2}{\text{Re}} \sum_n c_n n^2 + 8 \sum_k c_k b_k^2 \sim \tilde{V}_* = \frac{2}{\sqrt{2\text{Re}}}.$$

Или, по-другому,

$$\pi^2 \sum_n c_n n^2 + 8\text{Re} \sum_k c_k b_k^2 \sim \sqrt{2\text{Re}}. \quad (23)$$

Запишем выражение (21), как функцию от переменной $\tilde{\xi} = 1 - \tilde{y}$, значения которой отсчитываются от стенки канала:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\tilde{\xi}, \tilde{s}) = & \sum_n (-1)^n c_n \cos(\pi n(1 - \tilde{\xi})) e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}} \tilde{s}} + \\ & + \sum_k c_k \sqrt{b_k^2 + 1} \cdot \cos(\sqrt{8\text{Re}} b_k (1 - \tilde{\xi})) e^{-8b_k^2 \tilde{s}} - \left(\sum_n c_n + \sum_k c_k \right) (1 - \tilde{\xi})^2. \end{aligned}$$

Представляя косинусы разностей в этом выражении в виде суммы произведений косинусов и синусов, и разлагая, полученные тригонометрические функции в ряды Тейлора до второй степени по $\tilde{\xi}$, включительно, а также учитывая соотношения (23) и зависимость: $b_k \approx \text{tg}(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k)$, в отсутствии возмущения (когда $\tilde{s} = 0$), вблизи стенки получим выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\tilde{\xi}, \tilde{s}) \Big|_{\substack{\tilde{s} \rightarrow 0 \\ \tilde{s} = 0}} \approx & 2\sqrt{2\text{Re}} \tilde{\xi} \left(\sum_k c_k b_k^2 + \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \left(\sum_n c_n + \sum_k c_k \right) \right) - \\ & - \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \tilde{\xi}^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2\text{Re}}} \left(\sum_n c_n + \sum_k c_k \right) \right). \end{aligned}$$

Используя динамические переменные (12)-(13), это выражение можно переписать в виде:

$$V^+ \approx \xi^+ \left(\sqrt{2\text{Re}} \sum_k c_k b_k^2 + \sum_n c_n + \sum_k c_k \right) - \frac{1}{4} \xi^{+2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2\text{Re}}} \left(\sum_n c_n + \sum_k c_k \right) \right). \quad (24)$$

В этом выражении приняты стандартные обозначения: $V^+ = V/V_* = \tilde{V}/\tilde{V}_*$,
 $\xi^+ = \xi/y_* = \tilde{\xi}/\tilde{y}_*$.

В точке $\xi^+ = 1$, значение скорости V^+ равно единице: $V^+|_{\xi^+=1} = 1$, поэтому из уравнения (24) можно получить соотношение:

$$\sqrt{2\text{Re}} \sum_k c_k b_k^2 = \frac{5}{4} - \sum_n c_n - \sum_k c_k + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right).$$

Подставляя его в выражение (24), запишем

$$V^+ \approx \frac{5}{4} \xi^+ - \frac{1}{4} \xi^{+2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right). \quad (25)$$

Это выражение описывает течение жидкости вблизи стенок канала. Оно имеет такой же вид, как и соотношение для скорости течения жидкости вблизи стенки трубы кругового сечения в задаче Хагена-Пуазейля, найденное в работе [4].

Рассмотрим разложение скорости в окрестности точки $\xi_0^+ > 1$, расположенной вблизи от точки $\xi^+ \sim 1$.

Учитывая, что в области: $\xi^+ > 1$, выражение для скорости может зависеть от слагаемых $\sim \left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+}\right)^m$, в которых $m \geq 3$, при этом члены $\sim \left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+}\right)^n$, где $n \leq 2$, должны остаться прежними, выражение (25) можно представить в виде:

$$V^+ \left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right) = \frac{5}{4} \xi_0^+ \left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+} - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right)^2 \right) + \frac{5}{4} \xi_0^+ \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi_0^+}{5} \right) \left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right)^2 + \sum_{m \geq 3} c_m \left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right)^m + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках первого слагаемого в правой части последнего соотношения, является разложением функции логарифма: $\ln(1 + \xi^+/\xi_0^+)$, в окрестности точки: $\xi^+ = \xi_0^+$, до квадратичного члена включительно. Поэтому в области $\xi^+ > 1$, в окрестности точки ξ_0^+ , последнее выражение можно переписать в виде:

$$V^+ \left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right) \approx \frac{5}{4} \xi_0^+ \ln \left(1 + \frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right) + \frac{5}{4} \xi_0^+ \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi_0^+}{5} \right) \left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right)^2 + \sum_{m \geq 3} c_m \left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right)^m + O \left(\frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}} \right). \quad (26)$$

До границы «вязкого» слоя - в области $\xi^+ \leq 1$, выражение (26) совпадает с выражением для скорости в пристеночной части (25) с точностью не хуже, чем $O\left((1/\xi_0^+)^3\right)$, при любом $1 < \xi_0^+ \leq 12/5$.

Если приближаться к точке $\xi^+ = 1$ (границе «вязкого» слоя) со стороны центральной части канала – от точки ξ_0^+ , то скорость V^+ должна стремиться к значению единица. Поэтому из выражения (26) следует соотношение:

$$\frac{5}{4} \xi_0^+ \ln \left(1 + \frac{1}{\xi_0^+} \right) + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{2\xi_0^+} - \frac{1}{5} \right) + \sum_{m \geq 3} c_m \left(\frac{1}{\xi_0^+} \right)^m \approx 1.$$

Нетрудно видеть, что этой зависимости с точностью $\sim O\left((1/\xi_0^+)^3\right)$, удовлетворяют все значения ξ_0^+ из интервала: $1 < \xi_0^+ \leq 12/5$. Учитывая это, а также то, что в области $\xi^+ \geq 1$ для любых значений ξ_0^+ из интервала: $1 < \xi_0^+ \leq 12/5$, кубический член разложения логарифма: $1/3 \cdot (\xi^+/\xi_0^+)^3$, по абсолютной величине превосходит значение квадратичного слагаемого, входящего в выражение (26): $(1/2 - \xi_0^+/5)(\xi^+/\xi_0^+)^2$,

выражение (26) можно переписать в виде:

$$V^+ \approx \frac{5}{4} \xi_0^+ \ln \left(1 + \frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right) + O \left(\left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right)^3, \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}} \right) = \frac{5}{4} \xi_0^+ \ln \left(1 + \frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right) + \sum_{m \geq 3} l_m \left(\frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right)^m + O \left(\frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}} \right). \quad (27)$$

В точке $\xi^+ = 1$, значение скорости V^+ должно быть равно единице. Второе слагаемое (27) в окрестности точки $\xi^+ = 1$ должно быть пренебрежимо мало (по построению решения выше), а первое слагаемое в этом выражении ближе всего к единице при значении $\xi_0^+ \approx 2$ (для значений ξ_0^+ из интервала $1 < \xi_0^+ \leq 12/5$).

Учитывая это, и приняв $\xi_0^+ \approx 2$, выражение (27) можно записать в виде:

$$V^+ = 5/2 \cdot \ln(1 + \xi^+/2) + \sum_{m \geq 3} l_m (\xi^+/2)^m + O(1/\sqrt{2 \operatorname{Re}}). \quad (28)$$

В центре канала, задаваемом координатой: $\xi_c^+ = (b - y)/y_*|_{y=0} = 1/\tilde{y}_* = \sqrt{2 \operatorname{Re}}$, производная скорости для асимптоты решения, найденной вблизи стенки канала, должна, по крайней мере, стремиться к нулю, так как в противном случае скорость будет задаваться быстрорастущей «вогнутой» функцией, что противоречит условию устойчивости.

Условие, накладываемое на точность определения производной скорости в центре канала, должно быть таким же, как и при нахождении решения в пристеночной области: $\sim O(1/\sqrt{2 \operatorname{Re}})$. Поэтому коэффициенты l_m в выражении (28) по абсолютной величине должны быть меньше или порядка $1/(\sqrt{2 \operatorname{Re}})^m$, где $m \geq 3$, что меньше принятой погрешности вычисления: $\sim O(1/\sqrt{2 \operatorname{Re}})$. Поэтому, при нахождении

асимптоты решения вблизи стенки канала, слагаемые, с такими множителями, рассматриваться не могут. Следовательно, выражение (28) должно быть переписано в виде:

$$V^+(\xi^+) \approx \frac{5}{2} \ln(1 + \xi^+/2) + O(1/\sqrt{2 \operatorname{Re}}) \underset{\xi^+ \gg 1}{\approx} \frac{1}{\kappa} \ln \xi^+ + \text{const}. \quad (29)$$

Здесь $\kappa \approx 0.4$ - значение постоянной Кармана, которое удалось определить в данной работе аналитически.

Выражение (29) определяет асимптоту решения задачи, найденную вблизи стенки канала и продолженную на всю область течения. Однако ее нельзя считать общим решением задачи, поскольку она не удовлетворяет в точности второму граничному условию, задающему нулевую производную скорости на оси канала.

Этому граничному условию может соответствовать другая ветвь решения уравнения, которая имеет вид, объединяющий разложение по различным модам решений уравнений (5), (8) с учетом выражений (4), (9):

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \sum_k c_k e^{-\frac{|a_k|}{\operatorname{Re}} \gamma \tilde{s}} \cos(\sqrt{|a_k|} \tilde{y}) + \sum_n c_n e^{\frac{a_n}{\operatorname{Re}} \gamma \tilde{s}} \operatorname{ch}(\sqrt{a_n} \tilde{y}) - \tilde{y}^2,$$

где $a_k < 0$, $a_n > 0$.

При значении $\tilde{s} = 0$ в качестве нулевого приближения разложения этого выражения в ряд Тейлора вблизи точки $\tilde{y} = 0$ можно воспользоваться постоянным значением скорости \tilde{V} или скорости V^+ :

$$V^+ \approx V_0^+ = \text{const}, \quad (30)$$

и экстраполировать его на всю рассматриваемую область течения.

Выражение (30) будет характеризовать самый большой масштаб стохастических возмущений при турбулентном режиме течения жидкости в плоском канале, и одновременно будет являться второй ветвью решения задачи.

Существование двух асимптот решения свидетельствует о том, что характер рассматриваемого течения может быть только стохастическим, иначе это противоречило бы теореме Коши о существовании и единственности. Для описания такого типа течений в работах [4], [6] вводится понятие обобщенного решения, в котором учитывается вклад каждой из асимптоты решения на общее решение в каждой точке исследуемой области.

Обобщенное решение имеет вид функции, являющейся суммой двух слагаемых, каждое из которых является произведением двух функций: одна из которых определяет одну из асимптот решения, а вторая определяет степень влияние этой асимптоты на обобщенное решение в каждой точке исследуемой области. Граничные условия, удовлетворяемые для асимптот решения, должны удовлетворяться и для обобщенного решения.

На значение обобщенной скорости должно усиливаться влияние выражения (29) при приближении к пристеночной области и выражения (30) при приближении к центральной части. Влияние выражений (29) и (30) на значение обобщенной скорости должно стремиться к нулю при приближении к центральной и пристеночной областям, соответственно. Поэтому, выражение для обобщенной скорости можно определить, в виде соотношения:

$$\langle V^+ \rangle \approx 5/2 \cdot \ln(1 + \xi^+ / 2) f(\xi^+) + V_0^+ \cdot g(\xi^+),$$

где $f(\xi^+) \Big|_{\xi^+=0} = 1$, $f(\xi^+) \Big|_{\xi^+=\sqrt{2\text{Re}}} = 0$, $g(\xi^+) \Big|_{\xi^+=0} = 0$, $g(\xi^+) \Big|_{\xi^+=\sqrt{2\text{Re}}} = 1$.

Множители: $f(\xi^+)$ и $g(\xi^+)$, в этом выражении характеризуют степень влияние асимптот, задаваемых зависимостями (29) и (30), соответственно, на обобщенное решение в каждой точке исследуемой области распределения скорости (в направлении перпендикулярному потоку).

Ветвь решения, описываемая выражением (29), находилась вблизи стенки, а затем определялась последовательно вдоль всей области течения вплоть до центра канала, с погрешностью, характеризуемой размером вязкого пограничного слоя, и никакие другие масштабы течения не отражались на поиске этого решения. Поэтому, с учетом величины погрешности определения решения данной задачи, изменение влияния этой ветви решения на среднюю скорость течения при приближении к центру канала может иметь только линейный характер. Следовательно, функция $f(\xi^+)$, может иметь только линейную зависимость, соответствующую граничным условиям, то есть определяться выражением:

$$f(\xi^+) = 1 - \xi^+ / \sqrt{2\text{Re}}.$$

Ветвь решения (30) определена в центре канала. На появление этого решения и погрешность его определения оказывают влияние только макро масштабы течения жидкости. Учет других масштабов течения при нахождении этой ветви решения мог бы привести к появлению нелинейности в решении. Попытаемся учесть появление возможной нелинейности в множителе, который отвечает за степень влияния второй ветви решения в каждой точки области течения на обобщенное решение задачи, то

есть при записи функции $g(\xi^+)$. Учитывая, необходимость выполнения условия монотонности, будем предполагать, что вид этой функции имеет зависимость: $g(\xi^+) = (\xi^+ / \sqrt{2\text{Re}})^k$, где $k = \text{const}$ при любом заданном значении числа Рейнольдса. В этом случае функция $g(\xi^+)$ будет удовлетворять требованию равенства единице и нулю в центре канала и у стенки, соответственно.

Таким образом, выражение для обобщенной скорости может быть записано в виде:

$$\langle V^+ \rangle \approx 5/2 \cdot \ln(1 + \xi^+ / 2) \left(1 - \xi^+ / \sqrt{2\text{Re}}\right) + V_0^+ \cdot \left(\xi^+ / \sqrt{2\text{Re}}\right)^k.$$

Вычислив производную обобщенной скорости:

$$\langle V^+ \rangle' = \frac{5}{4} \frac{1 - \xi^+ / \sqrt{2\text{Re}}}{1 + \xi^+ / 2} - \frac{5}{2\sqrt{2\text{Re}}} \cdot \ln(1 + \xi^+ / 2) + \frac{V_0^+ k}{\sqrt{2\text{Re}}} \cdot \left(\frac{\xi^+}{\sqrt{2\text{Re}}}\right)^{k-1},$$

нетрудно убедиться, что для того чтобы в центре канала (в точке $\xi^+ = \sqrt{2\text{Re}}$) производная обобщенной скорости равнялась нулю, значение скорости в центре канала должно быть равным:

$$V_0^+ = \frac{5}{2k} \ln(1 + \sqrt{2\text{Re}}/2).$$

Исходя из этого, выражение для обобщенной скорости можно записать в виде:

$$\langle V^+ \rangle \approx \frac{5}{2} \ln\left(1 + \frac{\xi^+}{2}\right) \left(1 - \frac{\xi^+}{\sqrt{2\text{Re}}}\right) + \frac{5}{2k} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\xi^+}{\sqrt{2\text{Re}}}\right)^k. \quad (31)$$

Воспользовавшись условием равенства производной обобщенной скорости в точке $\xi^+ = 1$ единице, можно найти значения показателей степени k при различных

значениях числа Рейнольдса:

$$k \approx 1 - \ln\left(\left(\sqrt{2\text{Re}}/15 + 1/3 + \ln(3/2)\right) / \ln\left(1 + \sqrt{2\text{Re}}/2\right)\right) / \ln\sqrt{2\text{Re}}. \quad (32)$$

Выражение (31) совместно с (32) характеризуют осредненный профиль скорости турбулентного течения жидкости в плоском канале в зависимости от значения числа Рейнольдса.

Несмотря на то, что уравнения для описания течения жидкости в задаче Хагена-Пуазейля и плоской задаче Пуазейля, полученные из УНС в расширенном фазовом пространстве, отличались, выражения для обобщенной скорости $\langle V^+ \rangle$ и для значения параметра k , полученные в работе [4] и в данной работе оказались одинаковыми.

Кроме того, можно заметить, что значение полуширины канала b не входит явным образом в выражения (31), (32). Эта величина влияет на обобщенное решение задачи опосредованно только через значение числа Рейнольдса: $\text{Re} = bU/\nu$. А, поскольку, задачу обтекания плоской пластины можно представить, как частный случай плоской задачи Пуазейля, в которой стенки канала разнесены на бесконечно большое расстояние, то решение этой задачи должно быть аналогично полученному в данной работе решению, с корректировкой на значения числа Рейнольдса, которые в задаче обтекания плоской пластины включают характерный продольный размер.

Поэтому для задачи Хагена-Пуазейля, плоской задачи Пуазейля и задачи обтекания плоской пластины можно говорить о нахождении единого универсального профиля обобщенной скорости.

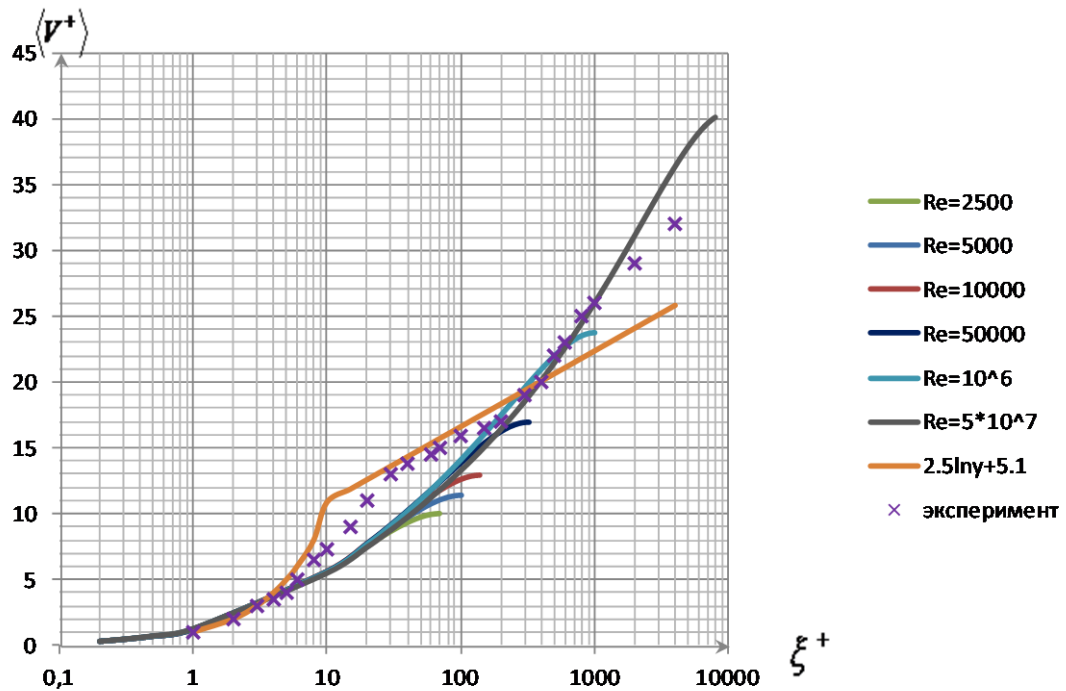


Рис.1 Аналитические и экспериментальные зависимости скорости от расстояния для разных значений числа Рейнольдса.

На рисунке 1 представлены зависимости $\langle V^+ \rangle(\xi^+)$ для разных значений числа Рейнольдса, а также приведены экспериментальные данные (см. [23]) для пристеночного универсального профиля скорости турбулентного течения жидкости, имеющие минимальное отклонение от полученных аналитических значений, а также эмпирический логарифмический профиль скорости: $\langle V^+ \rangle = 2.5 \ln y^+ + 5.1$, который используется в работе [23], как функция для приближенного описания универсального профиля скорости.

Видно, что в широком диапазоне значений ξ^+ имеется хорошее соответствие экспериментальных данных и зависимостей, найденных в настоящей работе (и работе [4]) аналитически.

Отличие характера поведения аналитических и экспериментальных кривых в

диапазоне: $10 < \xi^+ < 100$, может быть обусловлено нестационарными процессами, сопровождаемыми временными и пространственными переходами от турбулентных к ламинарным режимам течения и обратно (явление перемежаемости). Это явление наблюдается в экспериментах при небольших околокритических значениях числа Рейнольдса.

Вопрос влияния крупномасштабных перестроечных нестационарных процессов на функциональную зависимость пристеночного универсального профиля скорости турбулентного течения жидкости требует дальнейшего исследования.

Заключение.

В цикле работ [2]-[6] проведены исследования по возможности описания как ламинарных, так и турбулентных режимов течения жидкости на основе одних и тех же уравнений. Было предложено рассматривать уравнения Навье-Стокса в фазовом пространстве, расширенном за счет введения дополнительной - стохастической переменной. В результате, в выражении для полной производной по времени появляется дополнительное слагаемое, характеризуемое производством энтропии за счет возбуждения стохастических возмущений.

Для ламинарных режимов течения производство энтропии принимает нулевое значение, дополнительное слагаемое исчезает, и осуществляется переход к уравнениям Навье-Стокса в их стандартном виде, решения которого описывают только ламинарные режимы течения.

Включение в уравнения дополнительного слагаемого, характеризующего производством энтропии (которое всегда неотрицательно), позволяет, в частности, учитывать необратимость физических процессов по времени в тех случаях, когда это производство ненулевое.

Было показано, что возникновение и поддержание недетерминированных – стохастических процессов - в жидкости возможно в тех системах, где существуют несовместимые между собой граничные условия. В этом случае становится невозможным существование одного гладкого решения, и можно говорить лишь о наличии двух или более непересекающихся или пересекающихся негладким образом (с разрывом производных) асимптот решения. Область, находящаяся между этими асимптотами (или в окрестности точки «разрыва» производных) является областью неопределенности, порождающая стохастический процесс.

В качестве обобщенных решений задач, имеющих две асимптоты решения, были рассмотрены функции, являющиеся суммой двух слагаемых, каждое из которых является произведением двух функций: одна из которых определяет одну из асимптот решения, а вторая определяет степень влияние этой асимптоты на общее решение в каждой точке исследуемой области.

В такой постановке в работах [4], [6] были найдены «ламинарные» и обобщенные «турбулентные» решения задачи Хагена-Пуазейля (для течения несжимаемой нетеплопроводной жидкости в трубе кругового сечения) и плоской задачи Куэтта (для безнапорного течения несжимаемой нетеплопроводной жидкости, находящейся между движущимися в противоположных направлениях

плоскими стенками канала). В данной работе найдены «ламинарное» и обобщенное «турбулентное» решения плоской задачи Пуазейля.

Показано что, несмотря на то, что начальные уравнения для описания течения жидкости в трубе кругового сечения и для описания течения жидкости в плоском канале отличались, выражение для обобщенной скорости оказались одинаковыми. Кроме того, отмечено, что задачу обтекания плоской пластины можно представить, как частный случай плоской задачи Пуазейля, в которой стенки канала разнесены на бесконечно большое расстояние, и, следовательно, решение этой задачи должно быть аналогично полученному в данной работе решению с корректировкой на значения числа Рейнольдса. Поэтому для задачи Хагена-Пуазейля, плоской задачи Пуазейля и задачи обтекания плоской пластины можно говорить о нахождении единого универсального профиля обобщенной скорости.

Приведено сравнение найденного решения для разных значений числа Рейнольдса с экспериментальными данными пристеночного универсального профиля скорости. Показано, что в широком диапазоне значений ξ^+ имеется совпадение найденных аналитических зависимостей с экспериментальными данными.

Одной из причин отличия характера поведения аналитических и экспериментальных значений в диапазоне $10 < \xi^+ < 100$ может быть явление перемежаемости, обусловленное возможностью смены турбулентных и ламинарных режимов течения. Этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Список источников

1. Хатунцева О.Н. О природе детерминированного хаоса в математике // Естественные и технические науки. 2017. № 11. С. 255-257.
2. Хатунцева О.Н. О стохастических свойствах динамического хаоса в системах автономных дифференциальных уравнений, типа системы Лоренца // Труды МАИ. 2020. № 112. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=116313>. DOI: [10.34759/trd-2020-112-1](https://doi.org/10.34759/trd-2020-112-1)
3. Хатунцева О.Н. Определение критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в плоской задаче Пуазейля на основе метода «разрывных функций» // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109382>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-3](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-3)
4. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения задачи Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=158211>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-02)
5. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102091>.
6. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=164194>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-07)

7. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=75565>
8. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 70. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=44440>
9. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58536>
10. Ву М.Х., Попов С.А., Рыжов Ю.А. Проблемы моделирования течения в осевых вентиляторах аэродинамических труб // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29361>
11. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Верификация численной модели взаимодействия прямоугольной пластины с поверхностью воды // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49676>
12. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34840>
13. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow // Physics of Fluids, 1995, no. 7, pp. 335-343.
14. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow // Journal of Fluid Mechanics, 1980, no. 96, pp. 59-205.

15. Menter F.R. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows, AIAA Paper, 1993, N93-2906, pp. 21.
16. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Development and Validation // *Computers Fluids*, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227-238.
17. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure // *Journal of Fluid Mechanics*, April 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537-566.
18. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation // *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252-263.
19. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // *Physics of Fluids*, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 510 – 520.
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 731 с.
21. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 712 с.
22. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. - М.: Физмалит, 2005. - 288 с.
23. Монин А.С., Яглом А.М. Статическая гидромеханика. - М.: Наука, 1965. Ч. 1. - 640 с.; 1967. Ч. 2. – 720 с.

References

1. Khatuntseva O.N. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2017, no. 11, pp. 255-257.

2. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2020, no. 112. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=116313>. DOI: [10.34759/trd-2020-112-1](https://doi.org/10.34759/trd-2020-112-1)
3. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109382>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-3](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-3)
4. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2021, no. 118. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158211>. DOI: [10.34759/trd-2021-118-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-118-02)
5. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 104. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=102091>.
6. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=164194>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-07)
7. Larina E.V., Kryukov I.A., Ivanov I.E. *Trudy MAI*, 2016, no. 91. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=75565>
8. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. *Trudy MAI*, 2013, no. 70. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=44440>
9. Kravchuk M.O., Kudimov N.F., Safronov A.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58536>
10. Vu M.Kh., Popov S.A., Ryzhov Yu.A. *Trudy MAI*. 2012, no. 53. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29361>
11. Krupenin A.M., Martirosov M.I. *Trudy MAI*, 2014, no. 75. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49676>
12. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 59. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34840>

13. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow, *Physics of Fluids*, 1995, no. 7, pp. 335-343.
14. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, no. 96, pp. 59-205.
15. Menter F.R. *Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows*, AIAA Paper, 1993, N93-2906, pp. 21.
16. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Development and Validation, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227-238.
17. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure, *Journal of Fluid Mechanics*, April 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537-566.
18. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252-263.
19. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, *Physics of Fluids*, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 510 – 520.
20. Landau L.D., Lifshits E.M. *Fluid Mechanics*, 1987, vol. 6, Butterworth-Heinemann, 558 p.
21. Schlichting H. *Boundary layer theory*, London, 1955, 535 p.
22. Drazin P.G. *Introduction to hydrodynamic stability*, 2002, DOI:[10.1017/CBO9780511809064](https://doi.org/10.1017/CBO9780511809064)

23. Monin A.S., Yaglom A.M. *Statistical Fluid Mechanics: The Mechanics of Turbulence. Part I, 1971, Part II, 1976.*

Статья поступила в редакцию 20.01.2022; одобрена после рецензирования 10.02.2022; принята к публикации 20.04.2022.

The article was submitted on 20.01.2022; approved after reviewing on 10.02.2022; accepted for publication on 20.04.2022.