УДК 536.2

Температурное поле анизотропного полупространства с подвижной границей при локальном тепловом воздействии в условиях теплообмена с внешней средой

А. В. Аттетков, И. К. Волков

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва;
e-mail: fn2@bmstu.ru

Поступила в редакцию 30.05.2017

Предложена математическая модель процесса формирования температурного поля в анизотропном полупространстве, граница которого перемещается параллельно самой себе с постоянной скоростью и подвержена локальному тепловому воздействию в условиях теплообмена с внешней средой. Показано, что в подвижной системе координат температурное поле объекта исследований можно представить в виде суммы двух независимых аддитивных составляющих. Первая из составляющих обусловлена воздействием внешней среды, теплообмен с которой реализуется по закону Ньютона.

С использованием композиции двухмерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье и интегрального преобразования Лапласа в аналитически замкнутом виде найдено решение для второй аддитивной составляющей температурного поля при самых общих допущениях относительно режима функционирования и структуры внешнего теплового потока. Полученные результаты подтверждают обнаруженный ранее эффект «сноса» температурного поля в анизотропном материале с анизотропией свойств общего вида.

Ключевые слова: анизотропная разделительная стенка, локальное тепловое воздействие, температурное поле, интегральные преобразования.

Введение

Изменения приоритетов в различных областях научных исследований могут быть обусловлены различными причинами. В частности, в математической теории теплопроводности твердых тел [1–3], где особое место занял «анизотропный раздел» [3, 4], это связано с широким внедрением в инженерную практику вычислительной техники, математического моделирования и анизотропных материалов как естественного, так и искусственного происхождения. Особое положение «анизотропного раздела» обусловлено как спецификой используемых в нем математических моделей, так и необходимостью разработки принципиально новых высокопроизводительных и абсолютно устойчивых вычислительных методов [4–6], ориентированных на решение реальных инженерных задач.

Решения задачи математической теории теплопроводности твердых тел, представленные в аналитически замкнутом виде, используют для достижения различных целей, одна из которых связана с тестированием новых вычислительных алгоритмов. И если в традиционных разделах математической теории теплопроводности множество тестовых задач весьма обширно [1–3,7], то в «анизотропном разделе» ситуация принципиально иная. Достаточно заметить, что практически все немногочисленные тестовые задачи «анизотропной теплопроводности» представлены в [4–6], все они являются двухмерными и среди них нет ни одной задачи с подвижной границей. Поэтому любое новое решение задачи этого класса, представленное в аналитически замкнутом виде, имеет реальную прикладную значимость.

Основная цель проведенных исследований – решение задачи об определении температурного поля анизотропного полупространства, граница которого перемещается по линейному закону и находится под локальным тепловым воздействием в условиях теплообмена с внешней средой.

Исходные допущения и математическая модель

Для достижения поставленной цели при построении математической модели процесса формирования температурного поля $T(x_1, x_2, x_3, t)$ объекта исследований в фиксированной декартовой системе координат $0x_1x_2x_3$ пространства $\mathbb{R}^3$ предполагалось, что:

1) объект исследований имитируется анизотропным полупространством, граница которого перемещается параллельно самой себе по известному закону $x_2 = vt,\ t \geq 0$, где $v -$ const;

2) подвижная граница объекта исследований находится как под воздействием внешней среды с постоянной температурой T_c, так и внешнего теплового потока $q(x_1, x_2, t)$;

3) теплообмен в системе «объект исследований–внешняя среда» реализуется по закону Ньютона с постоянным коэффициентом теплоотдачи α [1–3];

4) начальная температура объекта исследований T_c- const отлична от температуры внешней среды, т. е. $T_0 \neq T_c$;

5) функционал $q(x_1, x_2, t)$, определяющий внешний тепловой поток, как скалярная функция пространственных переменных x_1, x_3 при любом фиксированном значении $t \geq 0$ интегрируем с квадратом в $\mathbb{R}^2$, т. е. $q(x_1, x_2, t)|_{(t\geq 0)} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ [8], а как скалярная функция временного переменного t – является оригиналом интегрального Лапласа [1–3, 8], т. е. $q(x_1, x_2, t)|_{([x_1,\ x_3])^{\top} \in \mathbb{R}^2)} \in L_t[0, +\infty)$.

Согласно принятым допущениям, при использовании следующих обозначений:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_c - T_0}\ ;\ x = \frac{x_1}{l}\ ;\ y = \frac{x_2}{l}\ ;\ z = \frac{x_3}{l}\ ;$$

$$\mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{22}}\ ; \mathrm{Fo} = \frac{\lambda_{22} t}{c\rho l^2}\ ;$$

$$Q = \frac{ql}{(T_c - T_0)\lambda_{22}}\ , \mathrm{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda_{22}}\ ; V = v\frac{c\rho l}{\lambda_{22}},$$

где l – используемая единица масштаба пространственных переменных; $\lambda_{ij} \equiv \lambda_{ji}$ – компонента тензора теплопроводности анизотропного материала объекта исследований; функционал $\theta(x, y, z, \mathrm{Fo})$, определяющий искомое температурное поле, должен удовлетворять однородному линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка параболического типа [3, 4]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{Fo}} = \mu_{11}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + 2\mu_{12}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} + 2\mu_{13}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} + \\ + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + 2\mu_{23}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} + \mu_{33}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\ , \\ \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\ ,\ \ y > V\mathrm{Fo}\ ,\ \ \mathrm{Fo} > 0\ , \tag{1}$$

однородному начальному условию:

$$\theta(x, y, z, \mathrm{Fo})|_{\mathrm{Fo}=0} = 0 \tag{2}$$

и специфическому краевому условию [4, 9] на подвижной границе:

$$\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\Big|_{y=V\mathrm{Fo}} = \\ = -\mathrm{Bi}(1-\theta)|_{y=V\mathrm{Fo}} - Q(x, y, \mathrm{Fo})\ , \tag{3}$$

с наличием которого связана проблематичность корректного задания краевого условия при $x^2 + y + z^2 \to +\infty$ при замыкании исходной математической модели (1)–(3).

Для преодоления возникших трудностей реализуем переход в подвижную систему координат

$$(Y = y - V\mathrm{Fo})\ \wedge\ (\tau = \mathrm{Fo})\ , \tag{4}$$

предполагаем наличие у искомого температурного поля следующей структуры:

$$\theta(x, Y, z, \tau) = \theta_1(Y, \tau) + \theta_2(x, Y, z, \tau) \tag{5}$$

и требуем, чтобы функционал $\theta_1(Y, \tau)$ являлся решением смешанной задачи

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial Y^2} + V\frac{\partial\theta_1}{\partial Y}\ ,\quad Y > 0\ , \tau > 0\ ; \\ \theta_1(Y, 0) = 0\ ; \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial Y}\Big|_{Y=0} = -\mathrm{Bi}(1-\theta_1)|_{Y=0}\ ; \\ \theta_1(Y,\tau)|_{(\tau\geq 0)} \in L^2[0, +\infty)\ ; \\ \theta_1(Y,\tau)|_{(Y\geq 0)} \in L_\tau[0, +\infty). \tag{6}$$

В этом случае, согласно (1)–(6), функционал $\theta_2(x, Y, z, \tau)$ должен удовлетворять модифицированному уравнению (1), однородному начальному условию (2), модифицированному краевому условию (3) и требованиям его принадлежности к классу функций $L^2(\mathbb{R}^2)$ по совокупности пространственных переменных $[x,z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$, классу функций $L^2[0,+\infty)$ по пространственному переменному Y и классу функций–оригиналов интегрального преобразования Лапласа $L_\tau[0,+\infty)$ по временному переменному τ, т. е.

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau} = \mu_{11}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} + 2\mu_{12}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial Y} + 2\mu_{13}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial z} + \\
+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial Y^2} + V\frac{\partial\theta_2}{\partial Y} + 2\mu_{23}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial Y\partial z} + \mu_{33}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2}, \\
\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad Y>0, \quad \tau>0; \\
\theta_2(x,Y,z,0)=0; \\
\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial Y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta_2}{\partial z} - \mathrm{Bi}\theta_2\right]\Big|_{Y=0} = -Q(x,z,\tau); \\
\theta_2(x,Y,z,\tau)|_{(Y\ge 0)\wedge(\tau\ge 0)} \in L^2(\mathbb{R}^2); \\
\theta_2(x,Y,z,\tau)|_{([x,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2)\wedge(\tau\ge 0)} \in L^2[0,+\infty); \\
\theta_2(x,Y,z,\tau)|_{([x,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2)\wedge(Y\ge 0)} \in L_\tau[0,+\infty); \\
Q(x,z,\tau)|_{(\tau\ge 0)} \in L^2(\mathbb{R}^2); \\
Q(x,z,\tau)|_{([x,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2)} \in L_\tau[0,+\infty).
\end{gathered} \tag{7}$$

Температурное поле

Согласно условиям, представленным в математической модели (7), аддитивная составляющая $\theta_2(x,Y,z,\tau)$ искомого температурного поля объекта исследований как скалярная функция пространственных переменных $[x,z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ является оригиналом двухмерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье, задаваемого парой линейных интегральных операторов [10]:

$$\begin{gathered}
\Phi[\cdot] \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdot \exp(-ipx - irz)\,dxdz; \\
\Phi^{-1}[\cdot] \equiv \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdot \exp(ipx + irz)\,dpdr,
\end{gathered} \tag{8}$$

где i – «мнимая» единица [10], а как скалярная функция временного переменного τ – оригиналом интегрального преобразования Лапласа [2, 10]:

$$L[\cdot] \equiv \int_0^\infty \cdot \exp(-s\tau)\,d\tau; \;\; L^{-1}[\cdot] \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \cdot \exp(s\tau)\,ds. \tag{9}$$

С учетом сказанного выше, к математической модели (7) последовательно применяем операторы $\Phi[\cdot]$ и $L[\cdot]$ интегральных преобразований (8) и (9) соответственно с использованием их стандартных свойств [2, 10]. Полагая при этом

$$\begin{gathered}
B(p,Y,r,\tau) \triangleq \Phi[\theta_2(x,Y,z,\tau)]; \\
A_2(p,Y,r,s) \triangleq L[B(p,Y,r,\tau)]; \\
b(p,r,\tau) \triangleq \Phi[Q(x,z,\tau)]; \\
a(p,r,s) \triangleq L[b(p,r,\tau)],
\end{gathered} \tag{10}$$

приходим к краевой задаче для определения функционала $\theta_2(x,Y,z,\tau)$ в пространстве изображений композиции двухмерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (8) и интегрального преобразования Лапласа (9):

$$\begin{gathered}
\frac{d^2A_2}{dY^2} + [2i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) + V]\frac{dA_2}{dY} - \\
-[(\mu_{11}p^2 + 2\mu_{13}pr + \mu_{33}r^2 + s)]A_2 = 0, \quad Y>0; \\
\left[\frac{dA_2}{dY} + i(\mu_{12}p + \mu_{23}r)A_2 - \mathrm{Bi}A_2\right]\Big|_{Y=0} = \\
= -a(p,r,s); \\
A_2(p,Y,r,s)|_{[p,r]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2\wedge(s\in\mathbb{C})} \in L^2[0,+\infty).
\end{gathered} \tag{11}$$

При этом, обратив внимание на специфику краевой задачи (11), обусловленную наличием комплекса $i(\mu_{12}p + \mu_{23}r)$ как в обыкновенном линейном дифференциальном уравнении второго порядка, так и в краевом условии при $Y=0$, ее решение будем искать в следующем виде:

$$\begin{gathered}
A_2(p,Y,r,s) = D(p,Y,r,s)\times \\
\times\exp\{-[i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) + V/2]Y\},
\end{gathered} \tag{12}$$

где, согласно (12) и (11), функционал $D(p,Y,r,s)$ должен удовлетворять упрощенному аналогу краевой задачи (11):

$$\begin{gathered}
\frac{d^2D}{dY^2} - \rho(p,r,s)D = 0, Y>0; \\
\left[\frac{dD}{dY} - (\mathrm{Bi} + V/2)\,D\right]\Big|_{Y=0} = -a(p,r,s); \\
D(p,Y,r,s)|_{([p,r]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2)\wedge(s\in\mathbb{C})} \in L^2[0,+\infty),
\end{gathered} \tag{13}$$

при записи которого использована комплексная функция

$$\rho(p,r,s) = \delta(p,r) + V^2/4 + i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) + s, \tag{14}$$

содержащая квадратичную форму

$$\begin{gathered}
\delta(p,r) = (\mu_{11} - \mu_{12}^2)p^2 + 2(\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{23})pr + \\
+ (\mu_{33} - \mu_{23}^2)r^2,
\end{gathered} \tag{15}$$

в положительной определенности которой можно убедиться непосредственно, воспользовавшись свойствами тензора теплопроводности второго ранга [4] и критерием Сильвестра [11], предварительно вернувшись к размерным обозначениям. Решение краевой задачи (13)–(15) находим с использованием стандартных методов [12] и представляем в следующем виде:

$$D(p,Y,r,s)=\frac{a(p,r,s)}{\mathrm{Bi}+V/2+\sqrt{\rho(p,r,s)}}\times$$
$$\times\exp\{-Y\sqrt{\rho(p,r,s)}\},\quad Y\geq 0. \tag{16}$$

Для возвращения в пространство оригиналов, воспользовавшись равенствами (12), (14)–(16), оператором $L^{-1}[\cdot]$ интегрального преобразования Лапласа (9), теоремой смещения, теоремой о свертке и известным соотношением «изображение–оригинал» [2], реализуем переход из пространства изображений композиции использованных интегральных преобразований (8), (9) в пространство изображений двухмерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (8), т. е. с учетом обозначений (10) определяем

$$B(p,Y,r,\tau)=\int_0^\tau b(p,r,\tau-\tau')g(Y,\tau')\times$$
$$\times\exp\{-\delta(p,r)\tau'-i(\mu_{12}\,p+\mu_{23}\,r)\,(Y+\tau')\}d\tau';$$

$$g(Y,\tau')=\frac{\mathrm{Bi}+V/2}{\sqrt{\pi\tau'}}\exp\left(-\frac{Y^2}{4\tau'}\right)- \tag{17}$$
$$-(\mathrm{Bi}+V/2)^{3/2}\exp(Y+\sqrt{\mathrm{Bi}+V/2}\,\tau')\times$$
$$\times\sqrt{\mathrm{Bi}+V/2}\}\,\mathrm{erfc}\left\{\frac{Y}{2\sqrt{\tau'}}+\sqrt{(\mathrm{Bi}+V/2)\tau'}\right\},$$

где $\mathrm{erfc}[\cdot]$ – дополнительная функция ошибок Гаусса [2].

Таким образом, согласно равенствам (15) и (17), для завершения процедуры определения аддитивной составляющей $\theta_2(x,Y,z,\tau)$ искомого температурного поля $\theta(x,Y,z,\tau)$ достаточно воспользоваться оператором $\Phi^{-1}[\cdot]$ обращения использованного интегрального преобразования (8) и теоремой о свертке для него [10]. Но предварительно необходимо идентифицировать оригинал

$$G(x,Y,p,\tau')\triangleq\Phi^{-1}[\exp\{-\delta(p,r)\tau'-$$
$$-\,i(\mu_{12}\,p+\mu_{23}\,r)(Y+\tau')\}]\equiv$$
$$\equiv\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\delta(p,r)\tau'-i[x-\mu_{12}(Y+\tau')]p- \tag{18}$$
$$-i[z-\mu_{23}\,(Y+\tau')]r\}dpdr\,,$$

где положительно определенная квадратичная форма $\delta(p,r)$, заданная равенством (15), посредством ортогонального преобразования с матрицей $[\prod_{ij}]\in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ может быть приведена к каноническому виду [11] с положительными коэффициентами μ_1 и μ_2 при квадратах новых переменных. Воспользовавшись этим, в двойном интеграле в правой части тождества (18) реализуем замену переменных с ортогональной матрицей $[\prod_{ij}]$. В этом случае, с учетом связи экспоненциального интегрального преобразования Фурье с интегральным косинус-преобразованием Фурье [10] и с использованием соответствующих таблиц «изображение–оригинал» [13], приходим к следующему равенству:

$$G(x,Y,z,\tau')=\frac{1}{\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{4\mu_1}\{[x-\mu_{12}\,(Y+\tau')]\Pi_{11}+\right.$$
$$+[z-\mu_{23}(Y+\tau')]\Pi_{21}\}^2-\frac{1}{4\mu_2}\times \tag{19}$$
$$\times\{[x-\mu_{12}\,(Y+\tau')]\Pi_{12}+[z-\mu_{23}(Y+\tau')]\Pi_{22}\}^2\}\,.$$

Таким образом, согласно (10), (17)–(19) и сказанному выше, имеем:

$$\theta_2(x,Y,z,\tau)=\int_0^\tau g(Y,\tau')\times$$
$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Q(x-x',Y,z-z',\tau-\tau')\times\right. \tag{20}$$
$$\times G(x',Y,z',\tau')dx'dz'\}d\tau',$$
$$\begin{bmatrix}x\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2\,,Y\geq 0\,,\tau\geq 0\,.$$

Для определения аддитивной составляющей $\theta_1(Y,\tau)$ искомого температурного поля объекта исследований в подвижной системе координат (4) к смешанной задаче (6) для уравнения в частных производных параболического типа применяем оператор $L[\cdot]$ интегрального преобразования Лапласа (9) по временному переменному τ. С учетом известных свойств [2] используемого интегрального преобразования приходим к краевой задаче для определения изображения

$$A_1(Y,s) \triangleq L[\theta_1(Y,\tau)] \ , \qquad (21)$$

которую целесообразно представить в следующем виде:

$$\frac{d^2A_1}{dY^2} + V\frac{dA_1}{dY} - sA_1 = 0 \ , \ \ Y > 0 \ ;$$
$$\left[\frac{dA_1}{dY} - \mathrm{Bi}A_1\right]\Big|_{Y=0} = -\frac{\mathrm{Bi}}{s} \ ; \qquad (22)$$
$$A_1(Y,s)|_{(s\in\mathbb{C})} \in L^2(0,+\infty).$$

С использованием стандартных методов [12] находим решение краевой задачи (22) и определяем изображение

$$A_1(Y,\tau) = \mathrm{Bi}\frac{\exp\left\{-Y\left(V/2 + \sqrt{s+V^2/4}\right)\right\}}{s\left(\mathrm{Bi} + V/2 + \sqrt{s+V^2/4}\right)} \ . \qquad (23)$$

Процедура идентификации функционала $\theta_1(Y,\tau)$ завершается с использованием равенств (21), (23), оператора $L^{-1}[\cdot]$ обращения интегрального преобразования Лапласа (9), теоремы смещения [2] и известного соотношения «изображение–оригинал» [14]:

$$\theta_1(Y,\tau) = \frac{\mathrm{Bi}}{2(\mathrm{Bi}+V)}\exp(-VY)\operatorname{erfc}\left(\frac{Y-V\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{Y+V\tau}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{\mathrm{Bi}+V/2}{\mathrm{Bi}+V}\exp\{\mathrm{Bi}[Y+(\mathrm{Bi}+V)\tau]\}\times$$
$$\times \operatorname{erfc}\left[\frac{Y}{2\sqrt{\tau}} + (\mathrm{Bi}+V/2)\sqrt{\tau}\right], \quad Y \geq 0, \tau \geq 0 \ .$$

Заключение

1.Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого находится под воздействием как внешней среды, так и внешнего теплового потока (при самых общих допущениях относительно его структуры и реализуемого режима функционирования), полностью определено равенствами (5), (20), (17), (19) и (24).

2. Представление искомого температурного поля в виде суммы его аддитивных составляющих с последующим нахождением каждой из них в аналитически замкнутом виде позволяет проводить его параметрический анализ и исследовать процесс формирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
2. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 552 с.
4. **Формалёв В.Ф.** Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 312 с.
5. **Формалёв В.Ф.** Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015. 280 с.
6. **Формалёв В.Ф., Колесник С.А.** Математическое моделирование аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел. М.: Изд-во МАИ, 2016. 160 с.
7. **Карташов Э.М.** Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами (Обзор) // Инженерно-физический журнал. 2001. Т. 74. № 2. С. 171–195.
8. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
9. **Пехович А.И., Жидких В.М.** Расчет теплового режима твердых тел. Л.: Энергия, 1968. 304 с.
10. **Снеддон И.** Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
11. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
12. **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
13. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М: Наука, 1969. 334 с.
14. **Диткин В.А., Прудников А.П.** Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 468 с.

Temperature field of an anisotropic half-space with a moving boundary and local thermal action under conditions of heat exchange with the external environment

A.V. Attetkov, I.K. Volkov

Bauman Moscow State Technical University(National Research University), Moscow;
e-mail: fn2@bmstu.ru

Proposed is a mathematical model of the process of formation of a temperature field in an anisotropic half-space, which boundary moves parallel to itself at a constant rate and it is subjected to local thermal action under conditions of heat exchange with the external environment. It is shown that in the moving coordinate system the temperature field of the research object can be represented as the sum of two independent additive components. The first of the components is due to influence of the external environment, heat exchange with it is realized according to Newton law. Using the composition of Fourier's two-dimensional exponential integral transformation and Laplace's integral transformation in analytically closed form second additive component of the temperature field is found under the most general assumptions about the operation mode and structure of the external heat flow. The obtained results confirm the previously observed "drift" effect of the temperature field in an anisotropic material with anisotropy of the properties of the general form.

Keywords: anisotropic separation wall, local thermal action, temperature field, integral transformations.

REFERENCES

1. **Carslaw H., Jaeger J.** *Conduction of Heat in Solids,* 2 ed. Oxford University Press, USA, 1959. 510 p. [Russ. ed. Carslaw H. S. and Iaeger I. C. Teploprovodnost' tvyordyh tel. Moscow, Nauka, 1964. 488 p.]
2. **Lykov A. V.** *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p.
3. **Kartashov E. M.** *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tvyordyh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. Moscow, Vysshaya shkola, 2001. 552 p.
4. **Formalyov V. F.** *Teploprovodnost' anizotropnyh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach* [Thermal conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods for solving problems]. Moscow, Fizmatlit, 2014. 312 p.
5. **Formalyov V. F.** *Teploperenos v anizotropnyh tvyordyh telah. Chislennye metody, teplovye volny, obratnye zadachi* [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, heat waves, inverse problems]. Moscow, Fizmatlit, 2015. 280 p.
6. **Formalyov V. F., Kolesnik S. A.** *Matematicheskoe modelirovanie aehrogazodinamicheskogo nagreva zatuplyonnyh anizotropnyh tel* [Mathematical modeling of aerogasdynamic heating of blunted anisotropic bodies]. Moscow, Izd-vo MAI, 2016. 160 p.
7. **Kartashov E. M.** Analytical methods of solution of boundary-value problems of nonstationary heat conduction in regions with moving boundaries. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2001, vol. 74, pp. 498–536.
8. **Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M.** *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh matematicheskoj fiziki* [Equations in partial derivatives of mathematical physics]. Moscow, Vysshaya shkola, 1970. 712 p.
9. **Pekhovich A. I., Zhidkih V. M.** *Raschyot teplovogo rezhima tvyordyh tel* [Calculation of the thermal regime of solids]. Leningrad, Energiya, 1968. 304 p.
10. **Sneddon I.** *Preobrazovaniya Fur'e.* [Fourier transforms]. Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1955. 668 p.
11. **Bellman R.** *Vvedenie v teoriyu matric* [Introduction to matrix analysis]. Moscow, Nauka, 1969. 368 p.
12. **El'sgol'c L. E.** *Differencial'nye uravneniya i variacionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow, Nauka, 1969. 424 p.
13. ***Tables** of integral transforms. Vol. 1.* Mcgraw-hill Book Company, Inc., 1954 **[**Batmen H., Erdelyi A. Tablicy integral'nyh preobrazovanij. Preobrazovaniya Fur'e, Laplasa, Mellina]. Moscow, Nauka, 1969. 334 p.
14. **Ditkin V. A., Prudnikov A. P**. *Spravochnik po operacionnomu ischisleniyu* [Operational Calculation Handbook]. Moscow. Vysshaya shkola, 1965. 468 p.