УДК 519.6

ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ СЛОЖНЫХ ПРОМЫШЛЕННЫХ ИЗДЕЛИЙ

Владимир Иванович КИРЕЕВ родился в 1938 г. в селе Царёво Ермишинского района Рязанской области. Профессор МГГУ. Доктор физико-математических наук, профессор. Основные научные интересы — в области математических моделей и методов решения задач математической физики и методов теории приближений. Автор более 120 научных работ. E-mail: jathom@list.ru

Vladimir I. KIREYEV, D.Sci., was born in 1938, in the Ryazan Region. He is a Professor at the Moscow State Mining University. His research interests are in mathematical modeling as well as in techniques to solve mathematical physics and approximation problems. He has published over 120 technical papers. E-mail: jathom@list.ru

Юрий Александрович ПАВЛОВ родился в 1940 г. в городе Череповце Вологодской области. Профессор МГГУ. Доктор технических наук, профессор. Основные научные интересы — в области гибких автоматизированных производств и систем проектирования технологических процессов в машиностроении. Автор более 170 научных работ. E-mail:jathom@list.ru

Yury A. PAVLOV, D.Sci., was born in 1940, in the Vologda Region. He is a Professor at the Moscow State Mining University. His research interests are in flexible automated manufacturing systems as well as in design systems for manufacturing processes in engineering industry. He has published more than 170 technical papers. E-mail: jathom@list.ru

Для восстановления форм поверхностей элементов конструкций сложных современных изделий получены одномерные и двумерные интегрально-дифференциальные параболические сплайны.

One-dimensional and two-dimensional integro-differential parabolic splines are derived to approximate shapes of structural elements for complex modern industrial products.

Ключевые слова: изделия промышленные, формообразование, аппроксимация, сплайны, интегрально-дифференциальные, параболические.

Key words: industrial products, shaping, approximation, splines, integro-differential, parabolic.

Введение

В различных областях промышленного производства при изготовлении сложных изделий возникает необходимость аппроксимации поверхностей, соответствующих элементам конструкции таких изделий. С этой целью широко используются численные методы интерполяции и сглаживания пространственных поверхностей, задаваемых сеточными функциями [1, 2, 3].

В горном производстве при изготовлении сложных изделий из природного камня возникает необходимость аппроксимации различных профильных, рельефных и скульптурных поверхностей [4]. Различают два вида поверхностей — базовые (или аналитически точные) и свободно аппроксимируемые, характеризуемые математическим способом их приближенного формообразования. В компьютерных системах геометрического моделирования свободно аппроксимируемые поверхности твердых тел обычно представлены множеством участков — патчей (patch), определенным образом соединяемых между собой для образования сложных пространственных форм деталей изделия [5]. При этом формирование сложных поверхностей промышленных изделий основано на использовании математических методов их приближенного восполнения — аппроксимации. Сглаживание и интерполяция пространственных кривых и образованных ими поверхностей проводятся с применением наиболее удобных базисных полиномов.

Теория сплайнов и основанные на ней вычислительные методы сплайновой аппроксимации представляют собой важный и интенсивно развивающийся раздел теории приближения (интерполяции и сглаживания) функций [6—10].

При решении задач интерполяции сеточных функций в процессе проектирования элементов конструкций летательных аппаратов и при формообразовании сложных изделий в перерабатывающих отраслях промышленности наиболее распространенными являются методы, основанные на кубических сплайнах $S_3 = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_{3,i}(x)$ [1, 3, 4]. Указанные здесь одномерные кубические сплайны строятся на сетке $\{x_i\}$, $i = 0,1,2,\ldots,n$, заданной шагами сетки $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$, и в них используются дифференциальные условия согласования. Символ U здесь и ниже означает сумму звеньев сплайна, формулы которых стоят за этим знаком. Эти сплайны имеют развитое математическое обеспечение, характеризуются сходимостью и устойчивостью. При четвертом порядке сходимости кубических сплайнов соответственно такой же порядок сходимости должны иметь исходные данные для аппроксимируемой функции $f(x_i) = f_i$. Однако если функция определена с меньшей точностью, например с ошибками, соответствующими второму $\Delta(h^2)$ или третьему $\Delta(h^3)$ порядку относительно шага h задания сеточной функции, то использование кубических сплайнов требует неоправданных затрат компьютерного времени. В связи с этим в некоторых случаях целесообразно использовать не кубические, а более простые квадратные (параболические) сплайны, обеспечивающие третий порядок $\Delta(h^3)$. Для обеспечения устойчивости традиционных параболических сплайнов приходится смещать узлы сплайна относительно узлов интерполяции, что усложняет алгоритмы их построения [8]. Кроме того, если требуется обеспечить повышенный, например 5-й порядок аппроксимации, то при традиционном подходе необходимо использовать сплайны соответственно 5-й степени, имеющие 6-й порядок аппроксимации, который также является избыточным.

Указанная избыточность связана с тем, что традиционные интерполяционные сплайны имеют нечетную степень, обусловленную соответствием количества коэффициентов алгебраических многочленов (звеньев сплайнов) числу условий согласования искомого сплайна и аппроксимируемой функции. Эти условия при таком подходе к сплайновой аппроксимации функций имеют дифференциальный характер. Поэтому традиционные дифференциальные сплайны имеют нечетную степень и не являются консервативными в том смысле, что они не сохраняют площадей под аппроксимируемыми одномерными функциями и объемов под поверхностями двумерных функций. Таким образом, они не сохраняют интегральных свойств исходных функций.

В данной работе описывается один из типов одномерных и двумерных интегродифференциальных параболических сплайнов. Такие сплайны четной степени основаны на использовании совокупности дифференциальных и интегральных условий согласования, использующихся для построения звена сплайна четной степени [3, 9]. Так, для одномерного параболического сплайна интегральное условие согласования на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ имеет вид

$$\delta S_{2,i}^{(-1)}(x_i, x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[S_{2,i}(x) - f(x) \right] dx = 0, \qquad (1)$$

где $S_{2,i}(x)$ — функция, соответствующая звену одномерного параболического сплайна на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$;

$f(x_i)$ — исходная интерполируемая функция, зависящая от одной переменной.

Интегральное условие (1) принимается и для всех сплайнов четной степени. Так, сплайны четвертой степени описаны в статье [10].

1. Построение одномерных параболических интегро-дифференциальных сплайнов

Построение параболических интегродифференциальных сплайнов дефекта $q = 1$ осуществляется с помощью интерполяционного многочлена второй степени, который на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеет вид

$$S_{2,i}(x) = a_{0,i} + a_{1,i}(x - x_i) + a_{2,i}(x - x_i)^2. \quad (2)$$

Дифференциальные условия согласования искомого многочлена $S_{2,i}(x)$ — звена сплайна и заданной сеточной функции $f(x_i)$ при построении традиционных дифференциальных сплайнов записываются в виде

$$\delta S_{2,i}^{(p)}(x_k) = S_{2,i}^{(p)}(x_k) - f^{(p)}(x_k) = 0 \ (k = i, i+1; \ p = 0, \ 1).$$

Используемые для параболических интегро-дифференциальных сплайнов условия согласования $S_{2,i}(x)$ и заданной точками функции $f(x_i)$ имеют другой вид:

$$\begin{aligned} &\delta S_{2,i}^{(-1)}(x_i, x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [S_{2,i}(x) - f(x)]\,dx = 0; \\ &\delta S_{2,i}^{(0)}(x_k) = S_{2,i}(x_k) - f(x_k) = 0 \ (k = i, \ i+1), \end{aligned} \quad (3)$$

где x_i — узлы дискретной сетки Δ_1: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, представленной на отрезке $[a, b]$ (рис. 1).

Решение системы (3) алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_{0,i}$, $a_{1,i}$, $a_{2,i}$ и подстановка их в формулу (2) для $S_{2,i}(x)$ приводит к следующему аналитическому определению i-го звена параболического сплайна:

$$S_{2,i}(x) = f_i + \left(\frac{6\delta \ I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{2\Delta \ f_i}{h_{i+1}} \right)(x - x_i) + \\ + \left(-\frac{6\delta \ I_i^{i+1}}{h_{i+1}^3} + \frac{3\Delta \ f_i}{h_{i+1}^2} \right)(x - x_i)^2, \quad (4)$$

где $I_i^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx;$

$$\delta I_i^{i+1} = I_i^{i+1} - f_i h_{i+1}, \ \Delta f_i = f_{i+1} - f_i, \ h_{i+1} = x_{i+1} - x_i.$$

Очевидно, что параметрами i-го звена сплайна здесь являются значение интеграла I_i^{i+1} и значения функции f_i, f_{i+1} в узлах x_i и x_{i+1} соответственно.

Формула (4) звена параболического сплайна используется для формирования составного глобального сплайна на всем отрезке $[a, b]$:

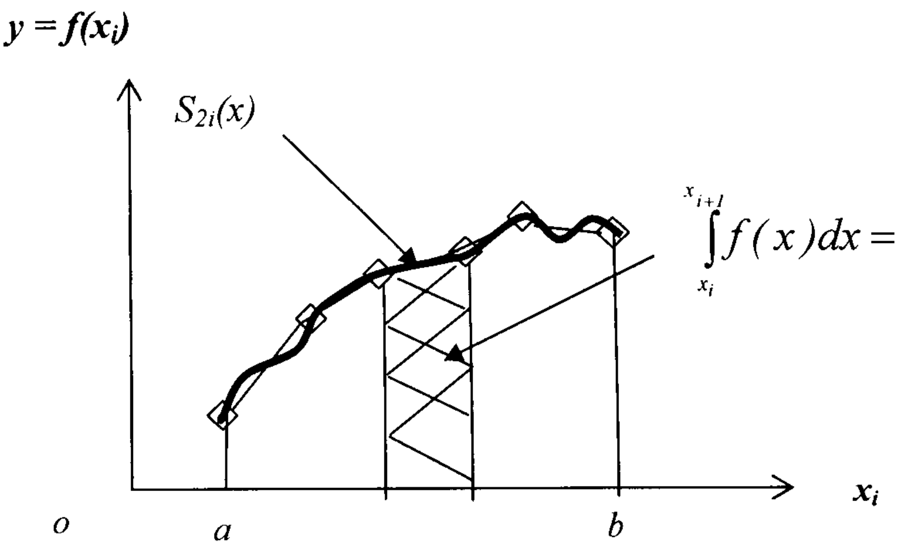
$$S_2(x) = \bigcup_{i=0}^{k-1} S_{2,i}(x).$$

Для обеспечения устойчивости процесса аппроксимации здесь применяется специальный прием так называемого «слабого сглаживания» [3]. Он состоит в том, что сначала по заданным значениям аппроксимируемой функции $f(x_i)$ рассчитываются интегралы I_i^{i+1} по всем отрезкам $[x_i, \ x_{i+1}]$, а затем осуществляется пересчет значений f_i и замена их на сглаженные (осредненные) значения функции $\hat{f}_i$. Для пересчета используется алгебраическая система уравнений трехдиагонального вида

$$\hat{f}_0 = f_0; \ \hat{f}_n = f_n;$$

$$\frac{1}{h_i}\hat{f}_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right)\hat{f}_i + \frac{1}{h_{i+1}}\hat{f}_{i+1} = 3\left(\frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} + \frac{I_{i-1}^i}{h_i^2} \right), \quad (5)$$

где $i = 1, 2, \ldots, k - 1$.



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = I_i^{i+1}$$

Рис. 1. Аппроксимация дискретной функции $f(x_i)$ с помощью интегродифференциального сплайна $S_{2,i}(x)$

Система (5) решается методом прогонки, достаточное условие устойчивости которого для данной системы выполняется.

Внутренние уравнения этой системы получаются из условий непрерывности производных $S_2'(x)$ во всех внутренних узлах x_i ($i = 1, 2,..., k-1$):

$$S_2'(x)\Big|_{x=x_i}^{[x_{i-1},x_i]} = S_2'(x)\Big|_{x=x_i}^{[x_i,x_{i+1}]}.$$

Подстановка $\hat{f}_i$, $\delta I_i^{i+1} = I_i^{i+1} - \hat{f}_i h_{i+1}$, $\Delta\hat{f}_i = \hat{f}_{i+1} - \hat{f}_i$ в формулу (4) для звеньев с $i = 0, 1,..., n-1$ определяет интегродифференциальную сплайн-функцию $S_2(x)$ слабосглаживающего типа.

Из вида формулы (4) следует, что параболический сплайн является достаточно простым для вычисления. При этом он обеспечивает третий порядок аппроксимации для значений функции и второй порядок аппроксимации для производной. Это позволяет достичь высокой точности моделирования криволинейного участка любой формы. Другим достоинством применения интегродифференциальных сплайнов при аппроксимации образующих участков поверхностей изделий сложной формы является их логическая взаимосвязь с технологией обработки деталей этих изделий, так как основные виды формообразования поверхностей связаны с воздействием на определенную площадь или объем материала деталей. Использование в качестве параметров не только значений функций, но и их интегралов позволяет достичь требуемых технологических условий обработки аппроксимируемых участков поверхностей изделий.

2. Определение двумерного алгебраического интегродифференциального сплайна

Пусть в прямоугольной области $\Omega = [a,b] \cap [c,d]$ на сетке узлов $\Delta_2 = \Delta_x \cap \Delta_y$, где

$$\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n_x} = b;$$
$$\Delta_y : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n_y} = d,$$

задана функция двух переменных

$$\left\{f_{i,j} = f(x_i, y_j)\right\}_{i=0,j=0}^{n_x,n_y}.$$

Данная сетка делит область Ω на прямоугольники (частичные области) $\Omega_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \cap [y_j, y_{j+1}]$.

Функция

$$S_{r_x,r_y}^{[q_x,q_y]}(x,y) = \bigcup_{i=0}^{n_x-1} \bigcup_{j=0}^{n_y-1} S_{r_x,r_y,(i,j)}(x,y),$$

$$S_{r_x,r_y}^{[q_x,q_y]}(x,y) \in C_\Omega^{m_x,m_y}$$

называется двумерным (по x и y) алгебраическим интегродифференциальным сплайном (ИД-сплайном) степеней r_x, r_y, дефекта $[q_x, q_y]$ с узлами на сетке Δ_2, где $0 \le m_x \le r_x$, $0 \le m_y \le r_y$, $q_x = r_x - m_x$, $q_y = r_y - m_y$, если каждое звено сплайна при $(x,y) \in \Omega_{i,j}$ ($i = 0,..., n_{x-1}; j = 0,...,n_{y-1}$) представляется в виде многочлена степеней r_x, r_y (по x и y):

$$S_{r_x,r_y,(i,j)}(x,y) = \sum_{k=0}^{r_x} \sum_{l=0}^{r_y} a_{k,l,(i,j)} (x - x_i)^k (y - y_j). \quad (6)$$

В соотношении (6) коэффициенты $a_{k,l}(i,j)$ определяются из следующей совокупности условий:

• двумерных интегральных условий согласования

$$\delta S_{r_x,r_y,(i,j)}^{(-1,-1)}(x_i, x_{i+1}, y_j, y_{j+1}) =$$
$$\iint\limits_{\Omega_{i,j}} [S_{r_x,r_y,(i,j)}(x,y) - f(x,y)]\, dxdy = 0; \quad (7)$$

• одномерных интегральных и дифференциальных условий согласования на границах частичных областей Ω_{ij} по направлениям x и y (в плоскостях $y = y_j$, $y = y_{j+1}$ и $x = x_i$, $x = x_{i+1}$):

$$\delta S_{r_x,r_y,(i,j)}^{(-1,0)}(x_i, x_{i+1}) =$$
$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} [S_{r_x,r_y,(i,j)}(x, y_l) - f(x, y_l)]dx = 0, \; l = j, j+1; \quad (8)$$

$$\delta S_{r_x,r_y,(i,j)}^{(0,-1)}(y_j, y_{j+1}) =$$
$$= \int_{y_j}^{y_{j+1}} [S_{r_x,r_y,(i,j)}(x_k, y) - f(x_k, y)]dy = 0, \; k = i, i+1; \quad (9)$$

$$\delta S_{r_x,r_y,(i,j)}^{(p_{1x},p_{1y})}(x_k, y_l) = S_{r,i}^{(p_{1x},p_{1y})}(x_k, y_l) -$$
$$- f^{(p_{1x},p_{1y})}(x_k, y_l) = 0, \; k = i, \; i+1; \; l = j, j+1, \quad (10)$$

где p_{1x}, p_{1y} — порядки производных по x и y, принимающие целые значения из интервалов $0 \le p_{1x} \le m_x$, $0 \le p_{1y} \le m_y$ соответственно;

• условий непрерывности сплайна $S^{[q_x,q_y]}_{r_x,r_y}(x,y)$

и его производных $\dfrac{\partial^{p_{2x}+p_{2y}}[S_{r_x,r_y}(x,y)]}{\partial x^{p_{2x}} \partial y^{p_{2y}}}$ на границах частичных областей Ω_{ij}, где p_{2x}, p_{2y} принимают целые значения из интервалов $0 \le p_{2x} \le m_x$, $0 \le p_{2y} \le m_y$ соответственно.

3. Двумерные параболические интегродифференциальные многочлены и локальные интерполяционные ИД-сплайны

Пусть функция $f(x,y)$ задана своими значениями $\left\{f_{i,j} = f(x_i, y_j)\right\}_{i=0,\, j=0}^{n_x,n_y}$ в узлах сетки Δ_2 (см. разд. 2). Требуется построить двумерный параболический сплайн $S_{2,2ИД}(x,y)$, удовлетворяющий интегральным условиям (7), (8), (9) и условиям интерполяции (10) при $p_{1x} = p_{1y} = 0$.

Построение двумерного интерполяционного параболического ИД-сплайна производится на основе одномерных интерполяционных интегродифференциальных сплайнов, рассмотренных в разд. 2.

Одномерный ИД-многочлен, представленный в форме Лагранжа, имеет вид

$$S_{2ИД1,i}(x) = \frac{\varphi_1(u)}{h_{i+1}} I_i^{i+1} + \varphi_2(u) f_i + \varphi_3(u) f_{i+1}, \qquad (11)$$

где $u = \dfrac{x - x_i}{h_{i+1}}$ $(0 \le u \le 1)$; $\varphi_1(u) = 6u(1-u)$;

$$\varphi_2(u) = (1-u)(1-3u); \quad \varphi_3(u) = u(3u-2).$$

При этом $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$ обладают следующими свойствами:

$$\varphi_1(0) = 0,\ \varphi_1(1) = 0,\ \int_0^1 \varphi_1(u)\, du = 1;$$

$$\varphi_2(0) = 1,\ \varphi_2(1) = 0,\ \int_0^1 \varphi_2(u)\, du = 0; \qquad (12)$$

$$\varphi_3(0) = 0,\ \varphi_3(1) = 1,\ \int_0^1 \varphi_3(u)\, du = 0.$$

Аналогично формуле (11) записываются следующие одномерные ИД-многочлены:

• в плоскостях $y = y_l$ $(l = j, j+1)$:

$$S_{2ИД1,i}(I_{x\ i(j)}^{i+1}, f_{i,l}, f_{i+1,l}; x) =$$

$$= \frac{\varphi_1(u)}{h_{x\ i+1}} \cdot I_{x\ i(l)}^{i+1} + \varphi_2(u) f_{i,l} + \varphi_3(u) f_{i+1,l};$$

• в плоскостях $x = x_k$ $(k = i, i+1)$:

$$S_{2ИД1,j}(I_{y\ j(i)}^{j+1}, f_{k,j}, f_{k,j+1}; y) =$$

$$= \frac{\varphi_1(v)}{h_{y\ j+1}} \cdot I_{y\ j(k)}^{j+1} + \varphi_2(v) f_{k,j} + \varphi_3(v) f_{k,j+1},$$

где $u = \dfrac{x - x_i}{h_{x i+1}}$; $v = \dfrac{y - y_j}{h_{y\ j+1}}$ $(0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1)$;

$h_{x\ i+1} = x_{i+1} - x_i$, $h_{y\ j+1} = y_{j+1} - y_j$;

• многочлены с интегральными параметрами

$$S_{2ИД1,i}(I2_{i,j}^{i+1,j+1}, I_{y\ j(i)}^{j+1}, I_{y\ j(i+1)}^{j+1}; x) =$$

$$= \frac{\varphi_1(u)}{h_{x\ i+1}} I2_{i,j}^{i+1,j+1} + \varphi_2(u) I_{y\ j(i)}^{j+1} + \varphi_3(u) I_{y\ j(i+1)}^{j+1};$$

$$S_{2ИД1,j}(I2_{i,j}^{i+1,j+1}, I_{x\ i(j)}^{i+1}, I_{x\ i(j+1)}^{i+1}; y) =$$

$$= \frac{\varphi_1(v)}{h_{y_{j+1}}} I2_{i,j}^{i+1,j+1} + \varphi_2(v) I_{x\ i(j)}^{i+1} + \varphi_3(v) I_{x i(j+1)}^{i+1},$$

где $I2_{i,j}^{i+1,j+1}$ — двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по частичной области $\Omega_{i,j}$:

$$I2_{i,j}^{i+1,j+1} =$$

$$= \iint_{\Omega_{i,j}} f(x,y)\, dx dy \ \ (i = 0, \ldots, n_x - 1,\ j = 0, \ldots, n_y - 1);$$

$I_{x i(j)}^{i+1}$ — интеграл от функции $f(x,y)$ вдоль оси x на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ при фиксированном значении $y = y_j$:

$$I_{x\ i(j)}^{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y_j)\, dx \ \ (i = 0, \ldots, n_x - 1,\ j = 0, 1, \ldots, n_y);$$

$I_{y\, j(i)}^{j+1}$ — интеграл от функции $f(x,y)$ вдоль оси y на отрезке $[y_j, y_{j+1}]$ при фиксированном значении $x = x_i$:

$$I_{y\ j(i)}^{j+1} = \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y)dy \ \ (i = 0,...,n_x,\ j = 0,1,...,n_y - 1);$$

$f_{i,j}$ $(i = 0,..., n_x - 1,\ j = 0,..., n_y - 1)$ — значения $f(x, y)$ в узлах сетки Δ_2.

Тогда формулу для звена двумерного параболического ИД-сплайна в частичной области $\Omega_{i,j}$ можно записать следующим образом:

$$S_{2,2ИД\ ,(i,j)}(x,y) =$$

$$= \frac{\varphi_1(u)}{h_{x\,i+1}} S_{2ИД\,1,j}(I2_{i,j}^{i+1,j+1}, I_{x\ i(j)}^{i+1}, I_{x\ i(j+1)}^{i+1} y) +$$

$$+\varphi_2(u) S_{2ИД\,,j}(I_{y\ j(i)}^{j+1}, f_{i,j} \cdot f_{i,j+1}; y) +$$

$$+\varphi_3(u) S_{2ИД\,,j}(I_{y\ j(i+1)}^{j+1}, f_{i+1,j}, f_{i+1,j+1}; y) =$$

$$= \frac{\varphi_1(u)}{h_{x\ i+1}} \left[\frac{\varphi_1(v)}{h_{y\ j+1}} I2_{i,j}^{i+1,j+1} + \varphi_2(v) I_{x\ i(j)}^{i+1} + \varphi_3(v) I_{x\ i(j+1)}^{i+1} \right] +$$

$$+\varphi_2(u) \left[\frac{\varphi_1(v)}{h_{y\ j+1}} I_{y_{j(i)}}^{j+1} + \varphi_2(v) f_{i,j} + \varphi_3(v) f_{i,j+1} \right] +$$

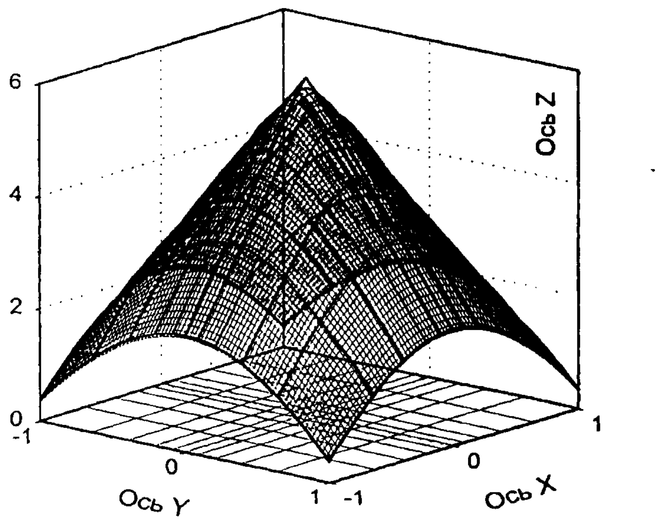
$$+\varphi_3(u) \left[\frac{\varphi_1(v)}{h_{y\ j+1}} I_{y\ j(i+1)}^{j+1} + \varphi_2(v) f_{i+1,j} + \varphi_3(v) f_{i+1,j+1} \right]. \quad (13)$$

Уравнение (13) в матричном виде можно записать так:

$$S_{2,2ИД,(i,j)}(x,y) = \varphi^T(u) F \varphi(v),$$

где $\varphi^T(u) = \left[\frac{\varphi_1(u)}{h_{x\ i+1}} \ \ \varphi_2(u) \ \ \varphi_3(u) \right];$

а)



б)

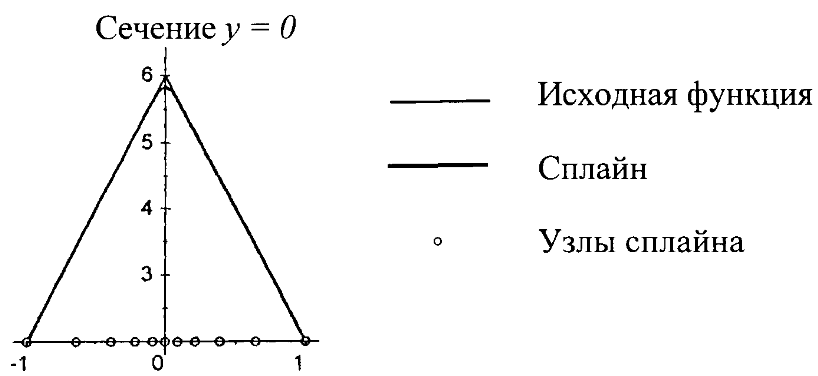


Рис. 2. График двумерного ИД-сплайна, аппроксимирующего функцию $f(x,y) = 6 - 4\sqrt{x^2 + y^2}$ в прямоугольной области [−1, 1]·[−1, 1] (*а*); сечение сплайна и функции плоскостью $y = 0$ (*б*)

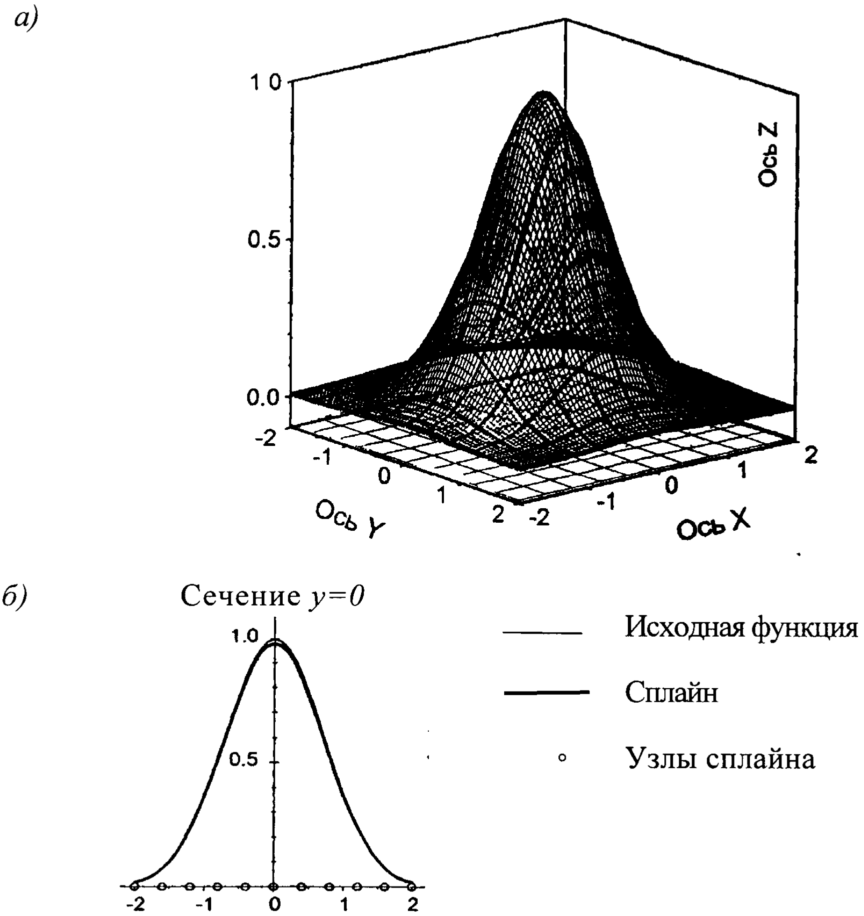


Рис. 3. График двумерного ИД-сплайна, аппроксимирующего функцию $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ в прямоугольной области $[-2,\ 2]\cdot[-2,\ 2]$ (*а*); сечение сплайна и функции плоскостью $y=0$ (*б*)

$$\varphi(v)=\begin{bmatrix}\varphi_1(v)\big/h_{y\ j+1}\\ \varphi_2(v)\\ \varphi_3(v)\end{bmatrix};\quad F=\begin{pmatrix} I2_{i,j}^{i+1,j+1} & I_{x\ i(j)}^{i+1} & I_{x\ i(j+1)}^{i+1}\\ I_{y\ j(i)}^{j+1} & f_{i,j} & f_{i,j+1}\\ I_{y\ j(i+1)}^{j+1} & f_{i+1,j} & f_{i+1,j+1}\end{pmatrix}.$$

Двумерный интегродифференциальный сплайн

$$S_{2,2ИД}(x,y)=\bigcup_{i=0}^{n_x-1}\ \bigcup_{j=0}^{n_y-1} S_{2,2ИД,(i,j)}(x,y),$$

составленный из ИД-многочленов $S_{2,2ИД,(i,j)}(x,y)$ как из звеньев, по построению является интерполяционным. Он удовлетворяет условиям (10) при $p_{1x}=p_{1y}=0$ и удовлетворяет двумерному интегральному условию согласования (7), а также одномерным интегральным условиям согласования (8), (9). Это следует из свойств (12) для функций $\varphi_1(u),\ \varphi_2(u),\ \varphi_3(u)$. Далее полученные двумерные параболические сплайны преобразуются в двумерные слабосглаживающие сплайны по аналогии с одномерными интегродифференциальными сплайнами, рассмотренными в разд. 1.

Примеры расчета двумерных слабосглаживающих ИД-сплайнов $S_{2,2ИД}(x,y)$ для аппроксимации аналитически заданных функций $f(x,y)$ показаны на рис. 2 и 3.

Итак, интегродифференциальные параболические сплайны чётной степени удовлетворяют всем основным требованиям, предъявляемым к проектированию сложных кривых и поверхностей промышленных изделий, выполненных из различных материалов. Поэтому метод ИД-сплайнов может быть рекомендован для применения в графических пакетах САПР.

Выводы

Для аппроксимации обводов элементов конструкции сложных промышленных изделий разработан экономичный интегрально-дифференциальный метод построения параболических одномерных и двумерных сплайнов, учитывающих величины площадей и объёмов фигур в областях определения восстанавливаемых функций.

Библиографический список

1. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.

2. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978.

3. *Киреев В.И., Пантелеев А.Н.* Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. — М.: Высшая школа, 2006.

4. *Павлов Ю.А., Ткач В.Р.* Организация камнеобрабатывающего производства с использованием информационных технологий. — М.: ИКФ «Каталог», 2006.

5. *Голованов Н.Н.* Геометрическое моделирование. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2002.

6. *Дж. Альберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш.* Теория сплайнов и ее приложения. — М.: Мир, 1972.

7. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. — Новосибирск: Наука, 1980.

8. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. — Новосибирск: Наука, 1976.

9. *Киреев В.И.* Интегро-дифференциальный метод приближения функций алгебраическими многочленами // Вычислительные технологии. 1998. Т.2. № 63. С.14

10. *Киреев В.И.* Интегральный метод приближения функций алгебраическими многочленами и биквадратными сплайнами // Вестник МАИ. 1994. №1. С. 48-57

Московский государственный горный университет
Статья поступила в редакцию 15.12.2008