

На правах рукописи



СКОПИНЦЕВ ПАВЕЛ ДМИТРИЕВИЧ

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

Специальность 1.1.8. «Механика деформируемого твёрдого тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико–математических наук

Москва – 2024

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

**Научный руководитель:** **Сердюк Дмитрий Олегович**, кандидат технических наук, доцент.

**Официальные оппоненты:** **Димитриенко Юрий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» ФГБОУ ВО «МГТУ им. Н.Э. Баумана»;

**Лекомцев Сергей Владимирович**, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией «Механика функциональных материалов» «ИМСС УрО РАН» – филиала ФГБУН Пермского федерального исследовательского центра Уральского отделения РАН.

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт прикладной механики Российской Академии Наук» (ИПРИМ РАН).

Защита диссертации состоится 23 октября 2024 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно–технической библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4 и на сайте: [https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT\\_ID=179084](https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=179084).

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета 24.2.327.07



Сердюк Дмитрий Олегович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Цилиндрические оболочки, как конструктивный элемент, имеют важное значение для развития промышленности и технологий. Они широко применяются в самолётостроительной, ракетно–космической, атомной, судостроительной, нефтегазодобывающей и машиностроительной отраслях. Также применимы оболочки в тоннелестроении, в гражданском и промышленном строительстве. Их криволинейная форма позволяет создавать прочные и одновременно лёгкие конструкции, при проектировании которых важно обладать знаниями о нагружении и режимах работы.

Оболочечные конструкции при эксплуатации подвергаются различного рода воздействиям. Повышенное внимание следует уделить воздействиям нестационарного характера, так как определение напряжённо–деформированного состояния в конструкциях, работающих в нестационарных режимах, осложняется существенной неоднородностью решения как по времени, так и по пространственным координатам.

Современные технологии в производстве дают возможность создания тонкостенных конструкций с использованием композитных металлических материалов, материалов с конструктивной анизотропией, армированных пластиков и других частных случаев общей анизотропии. Разработка математических моделей, методов и алгоритмов расчёта конструкций из анизотропных материалов даёт возможность построения единого универсального решения для различных материалов. В данной работе строится решение в геометрически и физически линейной постановке для тонкой упругой анизотропной цилиндрической оболочки.

Вопросы, касающиеся процессов нестационарного воздействия на цилиндрические оболочки и панели из анизотропных материалов, как показано в литературном обзоре диссертационной работы, в настоящее время являются недостаточно хорошо изученными. Разработка математической модели, которая позволяет исследовать напряжённое деформированное состояние тонких упругих круговых цилиндрических оболочек и панелей, в том числе с

индивидуальным моделированием локальных опор, представляет сложную и актуальную проблему механики.

**Целью диссертационной работы** является разработка и реализация эффективных численно–аналитических методов исследования напряженно–деформированного состояния анизотропных упругих цилиндрических оболочек большой протяжённости, а также оболочек и панелей с локальными опорами по произвольному контуру при воздействии нестационарного нормального нагружения.

**Научная новизна диссертационной работы** заключается в следующем:

— Разработана новая математическая модель для исследования нестационарных нормальных перемещений цилиндрических оболочек и панелей, имеющих произвольно расположенные локальные опоры в виде свободных опираний или скользящих заделок, путём индивидуального моделирования точечных граничных условий;

— Впервые построены фундаментальные решения для тонкой неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява;

— Построены новые фундаментальные решения для свободно опёртой ортотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява;

— Разработан алгоритм для анализа сходимости результатов при численном построении обратного интегрального преобразования Фурье;

— Исследовано влияние отношения радиуса анизотропной оболочки к её толщине, а также механических характеристик материала на характер нестационарных перемещений, напряжений и деформаций при воздействии различных нагрузок.

**Практическая ценность** данной работы заключается в том, что полученные фундаментальные решения могут быть использованы в научных исследованиях других учёных при работе над нестационарными контактными и обратными задачами, в исследованиях нестационарной динамики цилиндрических панелей сложной формы с применением, например, метода граничных элементов. Проектные организации самолётостроительной, ракетно–

космической и судостроительной промышленности могут применять предложенную математическую модель для цилиндрических оболочек и панелей с произвольно расположенными локальными опорами при проведении конкретных практических расчётов.

**Методы исследования.** В основе работы лежит метод фундаментальных решений (функций Грина) для неограниченной анизотропной оболочки. Функции Грина для неограниченной анизотропной оболочки представляют собой решения специальных задач, а именно, задач о воздействии на оболочку мгновенной сосредоточенной нагрузки, математически моделируемой с помощью дельта-функций Дирака. Фундаментальные решения построены с применением разложений в экспоненциальные ряды Фурье по угловой координате, интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Обратное интегральное преобразование Лапласа найдено аналитически с помощью вычетов. Оригинал интегрального преобразования Фурье построен в двух вариантах с использованием численных методов. В первом варианте применён метод интегрирования быстро осциллирующих функций. Во втором – квадратурные формулы метода Симпсона. Для обеспечения сходимости решения разработан алгоритм определения параметров численного интегрирования, основанный на анализе сходимости функций по непрерывной норме с заданной точностью.

Фундаментальные решения для свободно опертой ортотропной цилиндрической оболочки построены при помощи разложения по собственным функциям в двойные тригонометрические ряды Фурье по угловой и продольной координатам, а также интегрального преобразования Лапласа по времени. Обратное интегральное преобразование Лапласа построено аналитически.

Метод исследования нестационарного напряжённо-деформированного состояния неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки базируется на принципе суперпозиции, согласно которому искомое решение связано с воздействующей нестационарной нагрузкой посредством трёхмерного интегрального оператора типа свёртки по времени, осевой и угловой

координатам, ядром которого является нестационарное фундаментальное решение для неограниченной анизотропной оболочки. Для взятия интегралов в интегральных представлениях искомых функций использовались аналитические и численные методы с применением различных квадратурных формул.

Исследование нестационарных перемещений в анизотропной цилиндрической оболочке с локальными опорами проведено при помощи метода компенсирующих нагрузок. Для каждой локальной опоры индивидуально вводились дополнительные сосредоточенные компенсирующие нагрузки, удовлетворяющие интересующим граничным условиям. Функция нормальных перемещений определена как сумма интегральных операторов типа свёртки фундаментального решения для неограниченной анизотропной оболочки с действующей нестационарной нагрузкой и компенсирующими нагрузками, которые обеспечивают удовлетворение локальным граничным условиям. Амплитуды компенсирующих нагрузок вычислялись из решения системы интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода с разностным ядром. Решение системы выполнено при помощи метода обратной матрицы с предварительной дискретизацией амплитуд компенсирующих нагрузок по времени. Расчёт параметров дискретизации основан на анализе сходимости решения по непрерывной норме с заданной точностью. Интегралы у компенсирующих и действующей нагрузок взяты аналитически, а их сходимость проверена.

#### **Основные результаты, выносимые на защиту:**

— математическая модель и алгоритм исследования нестационарной динамики анизотропной цилиндрической оболочки и цилиндрической панели с локальными опорами, распределёнными по произвольному контуру;

— фундаментальные решения для нормального и тангенциальных перемещений неограниченной тонкой упругой анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява;

— новые фундаментальные решения для свободно опертой ортотропной цилиндрической оболочки;

— алгоритм для анализа сходимости результатов при численном построении обратного интегрального преобразования Фурье;

— результаты анализа процесса воздействия подвижной нагрузки на характер нестационарных возмущений в зависимости от геометрических параметров цилиндрической оболочки.

### **Обоснованность и достоверность результатов исследований.**

Достоверность научных положений и выводов обеспечена корректностью принятых постановок рассматриваемых задач и используемых при решении математических методов. Верификация построенных новых фундаментальных решений подтверждена близостью полученных разными способами результатов. Надёжность функций нестационарного нормального перемещения анизотропных цилиндрических оболочек с локальными опорами обоснована путём сопоставления результатов с результатами решения вспомогательной задачи, а также анализом выполнения граничных условий.

### **Апробация работы.**

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях, симпозиумах и семинарах:

— XXVI–XXIX Международный симпозиум имени А. Г. Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Россия, Крёмёнки, 2020–2023 г.);

— Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Россия, Москва, 2020–2023 г.);

— X–XII Международная научно–практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте» (Беларусь, Гомель, 2020–2022 г.);

— X Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» (Россия, Москва, 2020 г.);

— XXII Конференция «Зимняя школа по механике сплошных сред» (Россия, Пермь, 2021 г.).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 20 работ, в том числе 4 статьи в журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ [1 – 4] и 2 статьи в журналах из перечня Scopus [5, 6].

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, библиографического списка, включающего 147 наименований. Общий объем диссертации – 147 страниц. По тексту диссертации имеется 28 рисунков.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** дано обоснование актуальности выбранной темы, сформулированы цели и задачи исследования, описаны методы исследования, научная новизна и практическая ценность работы, перечислены основные результаты работы, приведены данные о структуре и объёме работы.

**В первой главе** приведён обзор работ, посвящённых нестационарным задачам механики оболочек, из которого видно, что преобладающее большинство исследований посвящено оболочкам, выполненным из изотропных и ортотропных материалов. В свою очередь вопросы нестационарной динамики для упругих анизотропных оболочек остаются недостаточно хорошо изученными.

В главе представлена общая постановка задачи о нестационарной динамике анизотропных упругих цилиндрических оболочек и цилиндрических панелей с локальными опорами на произвольном контуре. Упругая среда в рассматриваемом случае анизотропии имеет одну плоскость симметрии, геометрически совпадающую со срединной поверхностью оболочки.

Выведены безразмерные уравнения движения в перемещениях для тонкой упругой анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява постоянной толщины (штрихи в безразмерных величинах опущены):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \tau^2} = \mathbf{K}(\mathbf{W}) + \mathbf{P}, \quad \mathbf{K} = (K_{ij})_{3 \times 3}, \quad \mathbf{W} = (u_\alpha, u_z, w)^T, \quad \mathbf{P} = (q_\alpha, q_z, p)^T, \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
K_{11}(u_\alpha) &= d^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + 2C_2 d \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial z} + (C_5 + C_5 f^2) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2}, \\
K_{12}(u_z) &= C_2 d^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + (C_1 d + C_5 d - C_5 d f^2) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + C_4 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \\
K_{13}(w) &= d^2 \frac{\partial w}{\partial \alpha} - 2C_5 f^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2} - C_2 d f^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + (C_2 d - C_2 d f^2) \frac{\partial w}{\partial z} - C_4 \frac{f^2}{d} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3}, \\
K_{21}(u_\alpha) &= K_{12}(u_\alpha), \quad K_{22}(u_z) = (C_5 d^2 f^2 + C_5 d^2) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + 2C_4 d \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + C_3 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \\
K_{23}(w) &= C_2 d^2 f^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + 2C_5 d f^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + C_4 f^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2} + C_1 d \frac{\partial w}{\partial z} + (C_2 d^2 + C_2 d^2 f^2) \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\
K_{31}(u_\alpha) &= -K_{13}(u_\alpha), \quad K_{32}(u_z) = -K_{23}(u_z), \\
K_{33}(w) &= -4C_4 \frac{f^2}{d} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha \partial z^3} - 4C_2 d f^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^3 \partial z} - (2C_1 f^2 + 4C_5 f^2) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial z^2} - d^2 f^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} - \\
&\quad - C_3 \frac{f^2}{d^2} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - 2C_1 f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 4C_2 d f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} - 2d^2 f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - (d^2 + d^2 f^2) w.
\end{aligned} \tag{2}$$

Система безразмерных величин, применяемая в работе, следующая:

$$\begin{aligned}
u'_\alpha &= \frac{u_\alpha}{L}, \quad u'_z = \frac{u_z}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad c_*^2 = \frac{c_{11}}{\rho}, \quad \tau = \frac{c_* t}{L}, \quad q'_\alpha = \frac{q_\alpha L}{hc_{11}}, \quad q'_z = \frac{q_z L}{hc_{11}}, \\
p' &= \frac{pL}{hc_{11}}, \quad d = \frac{L}{R}, \quad f = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{h}{R}, \quad C'_1 = \frac{c_{12}}{c_{11}}, \quad C'_2 = \frac{c_{16}}{c_{11}}, \quad C'_3 = \frac{c_{22}}{c_{11}}, \quad C'_4 = \frac{c_{26}}{c_{11}}, \quad C'_5 = \frac{c_{66}}{c_{11}}, \\
\sigma'_\alpha &= \frac{\sigma_\alpha}{c_{11}}, \quad \sigma'_z = \frac{\sigma_z}{c_{11}}, \quad \tau'_{\alpha z} = \frac{\tau_{\alpha z}}{c_{11}}, \\
D'_1 &= \frac{d_{12}}{d_{11}}, \quad D'_2 = \frac{d_{16}}{d_{11}}, \quad D'_3 = \frac{d_{22}}{d_{11}}, \quad D'_4 = \frac{d_{26}}{d_{11}}, \quad D'_5 = \frac{d_{66}}{d_{11}},
\end{aligned}$$

где  $\tau$  – безразмерное время,  $L$  – характерный размер,  $c_*$  – характерная скорость распространения возмущений,  $f$  – коэффициент отношения толщины оболочки к её радиусу,  $z$  – продольная координата,  $\rho$  – плотность материала,  $h$  – толщина оболочки,  $w$  – нормальное перемещение,  $u_\alpha, u_z$  – тангенциальные перемещения,  $p, q_\alpha, q_z$  – нормальная и тангенциальные нагрузки,  $\sigma_\alpha, \sigma_z, \tau_{\alpha z}$  – нормальные и касательные напряжения,  $d_{ij}$  – упругие податливости,  $c_{ij}$  – упругие постоянные материала.

**Во второй главе** выполнена постановка задачи о фундаментальных решениях для нормального  $G(\alpha, z, \tau)$  и тангенциальных  $G_\alpha(\alpha, z, \tau), G_z(\alpha, z, \tau)$  перемещений неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \tau^2} = K(\mathbf{G}) + \mathbf{P}, \quad K = (K_{ij})_{3 \times 3}, \quad \mathbf{G} = (G_\alpha, G_z, G)^T, \quad \mathbf{P} = (0, 0, \delta(\alpha, z) \delta(\tau))^T, \quad (3)$$

$$G_\alpha|_{\tau=0} = \frac{\partial G_\alpha}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad G_z|_{\tau=0} = \frac{\partial G_z}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad G|_{\tau=0} = \frac{\partial G}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0,$$

где дифференциальные операторы  $K(\mathbf{G})$  имеют вид (2), в которых следует заменить  $u_\alpha, u_z, w$  на  $G_\alpha, G_z, G$  соответственно.

Решение задачи (3) построено с применением разложений искомых функций в экспоненциальные ряды Фурье по углу  $\alpha$ , а также интегральных преобразований Лапласа по времени  $\tau$  с учётом начальных условий и Фурье по координате  $z$ . Фундаментальные решения в пространстве преобразований Фурье и Лапласа в коэффициентах рядов следующие:

$$G_n^{LF}(q, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{s^4 + s^2 R_1 + R_2}{s^6 + s^4 R_3 + s^2 R_4 + R_5}, \quad (4)$$

$$G_{\alpha n}^{LF}(q, s) = -\frac{1}{2\pi} \frac{s^2 Q_3 + R_6}{s^6 + s^4 R_3 + s^2 R_4 + R_5}, \quad G_{zn}^{LF}(q, s) = -\frac{1}{2\pi} \frac{s^2 Q_5 + R_7}{s^6 + s^4 R_3 + s^2 R_4 + R_5},$$

$$R_1 = Q_1 + Q_4, \quad R_2 = Q_1 Q_4 - Q_2^2, \quad R_3 = Q_1 + Q_4 + Q_6, \quad R_4 = Q_1 Q_4 + Q_1 Q_6 -$$

$$-Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4 Q_6 + Q_5^2, \quad R_5 = Q_1 Q_4 Q_6 + Q_1 Q_5^2 - Q_6 Q_2^2 - 2Q_2 Q_3 Q_5 + Q_4 Q_3^2,$$

$$R_6 = Q_3 Q_4 - Q_2 Q_5, \quad R_7 = Q_1 Q_5 - Q_2 Q_3,$$

$$Q_1 = (1 + f^2) C_5 q^2 + 2C_2 q d n + d^2 n^2,$$

$$Q_2 = C_4 q^2 + (C_1 + C_5 (1 - f^2)) q d n + C_2 d^2 n^2,$$

$$Q_3 = -\left( C_4 \frac{1}{d} q^3 + 2C_5 q^2 n \right) f^2 i - (1 + f^2 (n^2 - 1)) C_2 i q d - i d^2 n,$$

$$Q_4 = C_3 q^2 + 2C_4 q d n + (f^2 + 1) C_5 d^2 n^2,$$

$$Q_5 = C_4 f^2 i q^2 n - (C_1 - 2C_5 f^2 n^2) i q d - (1 + f^2 (1 - n^2)) C_2 i d^2 n,$$

$$Q_6 = C_3 \frac{f^2}{d^2} q^4 + 4C_4 n \frac{f^2}{d} q^3 + (2C_1 f^2 (n^2 - 1) + 4C_5 f^2 n^2) q^2 +$$

$$+ 4n C_2 d f^2 (n^2 - 1) q - (d^2 f^2 (2n^2 - n^4 - 1) - d^2),$$

где  $n$  – коэффициент ряда,  $i$  – мнимая единица,  $s$  – параметр интегрального преобразования Лапласа,  $q$  – параметр интегрального преобразования Фурье.

Оригиналы фундаментальных решений (4) по Лапласу построены аналитически с помощью вычетов:

$$\begin{aligned}
G_n^F(q, n, \tau) &= 2 \left[ A_1 \operatorname{sh}(s_1 \tau) + A_3 \operatorname{sh}(s_3 \tau) + A_5 \operatorname{sh}(s_5 \tau) \right], \\
G_{\alpha n}^F(q, n, \tau) &= 2 \left[ B_1 \operatorname{sh}(s_1 \tau) + B_3 \operatorname{sh}(s_3 \tau) + B_5 \operatorname{sh}(s_5 \tau) \right], \\
G_{zn}^F(q, n, \tau) &= 2 \left[ C_1 \operatorname{sh}(s_1 \tau) + C_3 \operatorname{sh}(s_3 \tau) + C_5 \operatorname{sh}(s_5 \tau) \right], \\
A_k &= \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) G_n^{LF}(q, n, s_k), \quad B_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) G_{\alpha n}^{LF}(q, n, s_k), \\
C_k &= \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) G_{zn}^{LF}(q, n, s_k),
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $s_k$  – корни знаменателей (4).

Оригиналы по Фурье фундаментальных решений (5) для нормальных и тангенциальных перемещений построены численно в двух вариантах с применением формул обращения:

$$\begin{aligned}
G_n(z, n, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_n^F(q, n, \tau) e^{iqz} dq, \\
G_{\alpha n}(z, n, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha n}^F(q, n, \tau) e^{iqz} dq, \quad G_{zn}(z, n, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{zn}^F(q, n, \tau) e^{iqz} dq.
\end{aligned}$$

Вариант 1. Взятие интегралов методом интегрирования быстро осциллирующих функций:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) e^{iwx} dx &= \frac{b-a}{2} e^{\frac{iw}{2}(a+b)} \left( D_1(p) f(a) + D_2(p) f(b) \right), \\
p &= w \frac{b-a}{2}, \quad D_{1,2}(p) = \frac{\sin p}{p} \pm \frac{p \cos p - \sin p}{p^2} i.
\end{aligned}$$

Оригиналы фундаментальных решений для нормального и тангенциальных перемещений анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява следующие:

$$\begin{aligned}
G(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left( e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^1 + q_k^1)} \left( D_1^1 G_n^F(q_k^1, \tau) + D_2^1 G_n^F(q_{k+1}^1, \tau) \right) \right), \\
G_\alpha(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_2}{4\pi} \sum_{k=0}^{N_2-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left( e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^2 + q_k^2)} \left( D_1^2 G_{\alpha n}^F(q_k^2, \tau) + D_2^2 G_{\alpha n}^F(q_{k+1}^2, \tau) \right) \right), \\
G_z(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_3}{4\pi} \sum_{k=0}^{N_3-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left( e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^3 + q_k^3)} \left( D_1^3 G_{zn}^F(q_k^3, \tau) + D_2^3 G_{zn}^F(q_{k+1}^3, \tau) \right) \right), \\
\Delta_l &= \frac{2J_l}{N_l}, \quad m_l = \frac{\Delta_l}{2}, \quad D_{1,2}^l = \frac{\sin m_l}{m_l} \pm \frac{m_l \cos m_l - \sin m_l}{m_l^2} i,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$q_k^l = -J_l + k_l \Delta_l, \quad q_{k+1}^l = -J_l + (k_l + 1) \Delta_l, \quad k_l = 0..N_l - 1, \quad l = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Вариант 2. Взятие интегралов с использованием квадратурной формулы Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Оригиналы фундаментальных решений анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява следующие:

$$\begin{aligned} G^s(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_1}{12\pi} \sum_{-N_1}^{N_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left( G_n^F(q_k^1, \tau) e^{iq_k^1 z} + 4G_n^F\left(\frac{q_k^1 + q_{k+1}^1}{2}, \tau\right) e^{\frac{iz}{2}(q_k^1 + q_{k+1}^1)} + \right. \\ &\quad \left. + G_n^F(q_{k+1}^1, \tau) e^{iq_{k+1}^1 z} \right), \\ G_\alpha^s(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_2}{12\pi} \sum_{-N_2}^{N_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left( G_{an}^F(q_k^2, \tau) e^{iq_k^2 z} + 4G_{an}^F\left(\frac{q_k^2 + q_{k+1}^2}{2}, \tau\right) e^{\frac{iz}{2}(q_k^2 + q_{k+1}^2)} + \right. \\ &\quad \left. + G_{an}^F(q_{k+1}^2, \tau) e^{iq_{k+1}^2 z} \right), \\ G_z^s(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_3}{12\pi} \sum_{-N_3}^{N_3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left( G_{zn}^F(q_k^3, \tau) e^{iq_k^3 z} + 4G_{zn}^F\left(\frac{q_k^3 + q_{k+1}^3}{2}, \tau\right) e^{\frac{iz}{2}(q_k^3 + q_{k+1}^3)} + \right. \\ &\quad \left. + G_{zn}^F(q_{k+1}^3, \tau) e^{iq_{k+1}^3 z} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Delta_l = \frac{2J_l}{N_l}, \quad q_k^l = -J_l + k_l \Delta_l, \quad q_{k+1}^l = -J_l + (k_l + 1) \Delta_l, \quad k = -N_l..N_l, \quad l = 1, 2, 3. \quad (9)$$

В (7), (9):  $J_l$  – границы интегрирования,  $N_l$  – число шагов интегрирования,  $\Delta_l$  – шаг интегрирования.

Фундаментальные решения (6) и (8) являются универсальными по отношению к типу симметрии упругой среды. На рисунке 1 представлены пространственные распределения фундаментальных решений нормальных перемещений в момент времени  $\tau=3$  для изотропной, ортотропной и анизотропной цилиндрической оболочки.

На рисунке 1 видно, что в случае изотропного материала нормальные возмущения носят концентрический характер, в случае ортотропного – видны две плоскости симметрии распространения возмущений, а в случае анизотропной среды просматривается существенное смещение возмущений относительно основных осей.

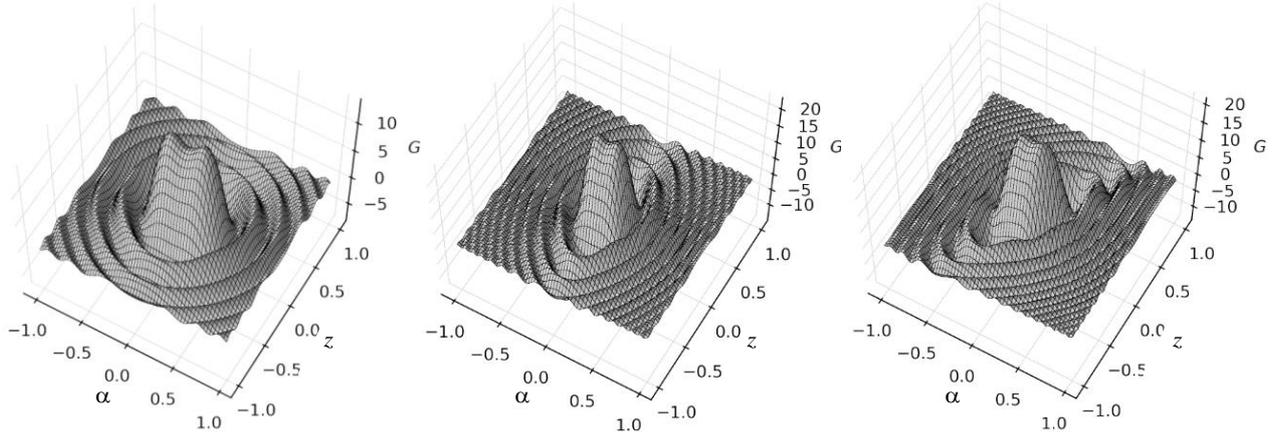


Рисунок 1 – Характеристики фундаментальных решений для изотропной, ортотропной и анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки в момент времени  $\tau = 3$

Также в главе выполнена постановка задачи о фундаментальных решениях для нормального  $G_l(\alpha, z, \tau)$  и тангенциальных  $G_{l\alpha}(\alpha, z, \tau)$ ,  $G_{lz}(\alpha, z, \tau)$  перемещений свободно опертой ортотропной цилиндрической оболочки:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}_l}{\partial \tau^2} = K(\mathbf{G}_l) + \mathbf{P}, K = (K_{ij})_{3 \times 3}, \mathbf{G}_l = (G_{l\alpha}, G_{lz}, G_l)^T, \mathbf{P} = (0, 0, \delta(z - \xi)\delta(\alpha)\delta(\tau))^T, \quad (10)$$

$$G_{lu_i} \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial G_{lu_i}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, G_l \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial G_l}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, G_l \Big|_{z=0,l} = \frac{\partial^2 G_l}{\partial z^2} \Big|_{z=0,l} = 0,$$

где дифференциальные операторы  $K(\mathbf{G})$  имеют вид (2), в которых следует заменить  $u_\alpha, u_z, w$  на  $G_{l\alpha}, G_{lz}, G_l$  соответственно и учесть  $C_2 = C_4 = 0$ ,  $\xi$  – координата расположения дельта-функции Дирака по оси  $z$ ,  $\delta(*)$  – дельта-функция Дирака.

Решение задачи (10) построено с применением разложений искомых функций в двойные тригонометрические ряды Фурье, а также интегральных преобразований Лапласа по времени  $\tau$  с учётом начальных условий. Фундаментальные решения в пространстве преобразований Лапласа в коэффициентах рядов следующие:

$$G_{lmm}^L = \delta_{nm}(\xi) \frac{s^4 + s^2 T_1 + T_2}{s^6 + s^4 T_3 + s^2 T_4 + T_5}, \quad (11)$$

$$G_{l\alpha nm}^L = -\delta_{nm}(\xi) \frac{s^2 \Lambda_3 + T_6}{s^6 + s^4 T_3 + s^2 T_4 + T_5}, G_{lzn m}^L = -\delta_{nm}(\xi) \frac{s^2 \Lambda_5 + T_7}{s^6 + s^4 T_3 + s^2 T_4 + T_5},$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \Lambda_1 + \Lambda_4, \quad T_2 = \Lambda_1 \Lambda_4 - \Lambda_2^2, \quad T_3 = \Lambda_1 + \Lambda_4 + \Lambda_6, \quad T_4 = \Lambda_1 \Lambda_4 + \Lambda_1 \Lambda_6 - \\
&- \Lambda_2^2 - \Lambda_3^2 + \Lambda_4 \Lambda_6 - \Lambda_5^2, \quad T_5 = \Lambda_1 \Lambda_4 \Lambda_6 - \Lambda_1 \Lambda_5^2 - \Lambda_2^2 \Lambda_6 + 2\Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_5 - \Lambda_3^2 \Lambda_4, \\
T_6 &= \Lambda_3 \Lambda_4 - \Lambda_2 \Lambda_5, \quad T_7 = \Lambda_1 \Lambda_5 - \Lambda_2 \Lambda_3, \\
\Lambda_1 &= a_1 \mu_m^2 + a_2 \lambda_n^2, \quad \Lambda_2 = -a_3 \lambda_n \mu_m, \quad \Lambda_3 = a_1 \mu_m + a_4 \lambda_n^2 \mu_m, \\
\Lambda_4 &= a_5 \mu_m^2 + a_6 \lambda_n^2, \quad \Lambda_5 = a_7 \lambda_n \mu_m^2 - a_8 \lambda_n, \\
\Lambda_6 &= a_9 \mu_m^4 + a_{10} \lambda_n^2 \mu_m^2 + a_{11} \lambda_n^4 - a_{12} \mu_m^2 - a_{13} \lambda_n^2 + a_{14}, \\
a_1 &= d^2, \quad a_2 = C_5 (1 + f^2), \quad a_3 = d (C_1 + C_5 (1 - f^2)), \quad a_4 = 2C_5 f^2, \\
a_5 &= C_5 d^2 (1 + f^2), \quad a_6 = C_3, \quad a_7 = 2C_5 d f^2, \quad a_8 = C_1 d, \quad a_9 = d^2 f^2, \\
a_{10} &= 2f^2 (C_1 + 2C_5), \quad a_{11} = C_3 f^2 / d^2, \quad a_{12} = 2d^2 f^2, \quad a_{13} = 2C_1 f^2, \quad a_{14} = d^2 (1 + f^2), \\
\delta_{nm}(\xi) &= \frac{2}{\pi l} \sin(\lambda_n \xi), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad \mu_m = m, \quad m \neq 0, \\
\delta_{n0}(\xi) &= \frac{1}{\pi l} \sin(\lambda_n \xi), \quad z \in [0, l], \quad \alpha \in [-\pi, \pi],
\end{aligned}$$

где  $l$  – длина оболочки,  $n, m$  – коэффициенты рядов,  $\xi$  – координата приложения дельта-функции Дирака,  $s$  – параметр интегрального преобразования Лапласа.

Оригиналы фундаментальных решений (11) по Лапласу построены аналитически с помощью вычетов:

$$\begin{aligned}
G_{lmn}(\tau) &= 2[U_1 \text{sh}(s_1 \tau) + U_3 \text{sh}(s_3 \tau) + U_5 \text{sh}(s_5 \tau)], \\
G_{l\alpha nm}(\tau) &= 2[Y_1 \text{sh}(s_1 \tau) + Y_3 \text{sh}(s_3 \tau) + Y_5 \text{sh}(s_5 \tau)], \\
G_{lznm}(\tau) &= 2[V_1 \text{sh}(s_1 \tau) + V_3 \text{sh}(s_3 \tau) + V_5 \text{sh}(s_5 \tau)], \\
U_k &= \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) G_{lmn}^L(n, m, s_k), \quad Y_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) G_{l\alpha nm}^L(n, m, s_k), \\
V_k &= \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) G_{lznm}^L(n, m, s_k).
\end{aligned} \tag{12}$$

Фундаментальные решения свободно опертой ортотропной круговой цилиндрической оболочки с учётом разложения в тригонометрические ряды Фурье имеют вид:

$$\begin{aligned}
G_l(\alpha, z, \tau; \xi) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [U_1 \text{sh}(s_1 \tau) + U_3 \text{sh}(s_3 \tau) + U_5 \text{sh}(s_5 \tau)] \times \sin(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha), \\
G_{l\alpha}(\alpha, z, \tau; \xi) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [Y_1 \text{sh}(s_1 \tau) + Y_3 \text{sh}(s_3 \tau) + Y_5 \text{sh}(s_5 \tau)] \times \sin(\lambda_n z) \sin(\mu_m \alpha), \\
G_{lz}(\alpha, z, \tau; \xi) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [V_1 \text{sh}(s_1 \tau) + V_3 \text{sh}(s_3 \tau) + V_5 \text{sh}(s_5 \tau)] \times \cos(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha).
\end{aligned} \tag{13}$$

В качестве проверки достоверности построенных новых фундаментальных решений для тонкой упругой неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява были выполнены численные расчёты и сопоставлены полученные результаты с результатами расчётов по соотношениям вспомогательных фундаментальных решений. Было выявлено совпадение характеров распространения возмущений нестационарных фундаментальных решений и их близость по численным результатам. Для примера, на рисунке 2 представлены графики распределения фундаментальных решений для нормальных перемещений вдоль образующей цилиндрической оболочки при  $\alpha = 0$  и по углу  $\alpha$  в сечении по  $z = 0$  в безразмерный момент времени  $\tau = 1$  соответственно. Сплошные линии соответствуют решению согласно формуле (6), точками обозначено решение по (8) для неограниченной оболочки, а штриховыми согласно формуле (13) для свободно опёртой оболочки.

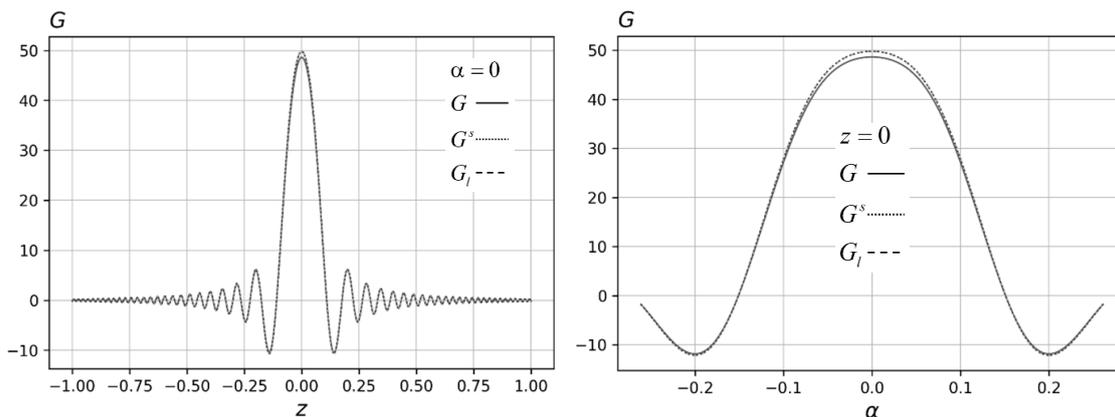


Рисунок 2 – Сопоставление фундаментальных решений для нормальных перемещений вдоль образующей и по углу цилиндрической оболочки в момент времени  $\tau = 1$

Представленные результаты и вычисленные относительные погрешности продемонстрировали достоверность результатов на этапе построения оригиналов функций по Фурье и, в целом, успешную верификацию новых фундаментальных решений. Также было установлено, что оба рассмотренных варианта построения фундаментальных решений для неограниченной оболочки дают хорошую согласованность результатов. Выбор использования того или

иного варианта в прикладных задачах обусловлен удобством применения в конкретном случае.

В третьей главе рассмотрена нестационарная динамика анизотропных неограниченных оболочек. Нестационарные функции нормальных и тангенциальных перемещений неограниченной цилиндрической оболочки определены с помощью тройных свёрток функций фундаментальных решений с действующей нестационарной нормальной нагрузкой:

$$w(\alpha, z, \tau) = G(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau),$$

$$u_\alpha(\alpha, z, \tau) = G_\alpha(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau), \quad u_z(\alpha, z, \tau) = G_z(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau),$$

где через (\*) обозначены интегральные операторы типа свёрток по пространственным координатам  $\alpha$ ,  $z$  и времени  $\tau$ .

В работе рассматривается несколько видов нестационарного нагружения  $p(\alpha, z, \tau)$ : неподвижная и движущаяся сосредоточенная нагрузка, совокупности неподвижных и движущихся сосредоточенных нагрузок, неподвижная и движущаяся распределённая по прямоугольной области нагрузка. При решении задач, интегралы берутся с помощью квадратур, например, методом правых прямоугольников, где количество разбиений определяется по непрерывной норме функций с заданной точностью.

В качестве примера рассмотрена задача о воздействии на внешнюю поверхность анизотропной неограниченной оболочки движущейся, распределённой по прямоугольной области, нагрузки. На рисунке 3 представлены пространственные зависимости безразмерного нестационарного нормального перемещения анизотропной цилиндрической оболочки в безразмерные моменты времени  $\tau = 0.5$ ,  $\tau = 1$  и  $\tau = 1.5$ .

На рисунке 3 видно смещение максимального прогиба оболочки вдоль оси  $z$  и по углу  $\alpha$  с течением времени, при этом виден несимметричный характер прогиба оболочки, что соответствует особенностям анизотропной упругой среды. Стоит отметить, что с увеличением отношения радиуса оболочки к её толщине, фронт возмущений становится острее.

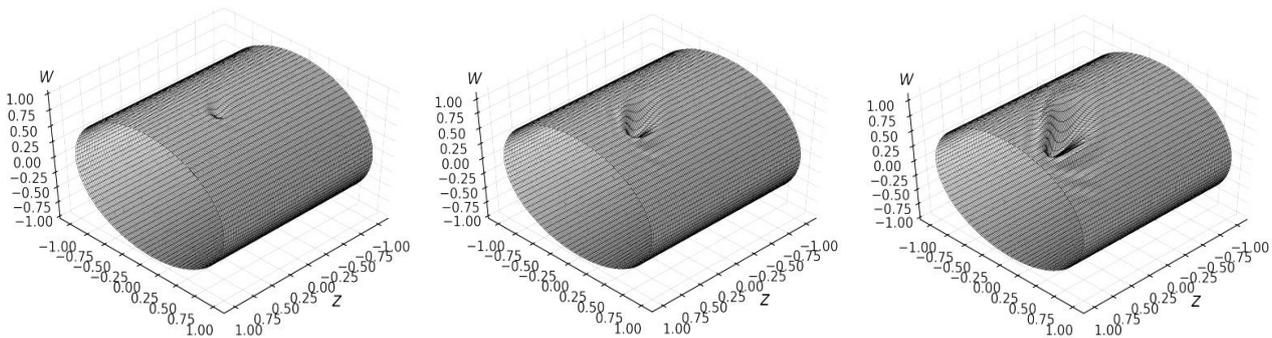


Рисунок 3 – Пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной оболочки при воздействии подвижной распределённой нагрузки

В главе также выполнена постановка задачи о нормальных перемещениях тонкой цилиндрической оболочки с произвольно расположенными локальными опорами, рассматриваемыми как точечные граничные условия скользящей заделки либо свободного опирания. В зависимости от координаты воздействия нагрузки рассматривалась внутренняя или внешняя область «замкнутого» контура опор оболочки [6, 17].

Постановка задачи включает в себя уравнения движения анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява (1), начальные условия и граничные условия в зависимости от вида опор (свободного опирания и скользящей заделки соответственно):

$$w|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0, \quad w|_{T_i} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}|_{T_i} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}|_{T_i} = 0, \quad w|_{T_i} = \frac{\partial w}{\partial z}|_{T_i} = \frac{\partial w}{\partial \alpha}|_{T_i} = 0. \quad (14)$$

В (14)  $T_i$  – точки с координатами  $(a_i, b_i)$  локальных опор по оси  $z$  и углу  $\alpha$  соответственно,  $i = 1, 2, \dots, n$  – порядковый номер локальной опоры,  $n$  – количество опор.

Начально–краевая задача решена с использованием метода фундаментального решения для неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки и метода компенсирующих нагрузок. Под компенсирующей нагрузкой понимается результат воздействия такой специально вычисленной нагрузки, что сумма основного и компенсирующего решения при её воздействии удовлетворяет граничным условиям в некоторых областях неограниченной

цилиндрической оболочки. Функция нормального прогиба для оболочки с локальными опорами имеет вид:

$$w_*(z, \alpha, \tau) = G(z, \alpha, \tau) * * * P(z, \alpha, \tau) + \sum_{i=1}^N G(z, \alpha, \tau) * * * Q_i(z, \alpha, \tau).$$

Компенсирующие нагрузки, удовлетворяющие граничным условиям, определены из решения системы интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода с разностным ядром. Ядром является функция фундаментальных решений. Система решена с предварительным применением метода дискретизации компенсирующих нагрузок по времени. Применение этого метода, с учётом того, что функции амплитуд компенсирующих нагрузок остаются постоянными на каждом интервале времени, позволило вынести функции амплитуд компенсирующих нагрузок за знак интеграла как константы для каждого промежутка времени. В системе также учтена хронология изменения значений компенсирующих нагрузок в каждой опоре во времени.

Нестационарная функция нормальных перемещений для тонкой упругой анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява с локальными опорами имеет следующий вид:

$$w_*(z, \alpha, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T G(z - \xi, \alpha - \zeta, T - t) p(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta dt + \\ + \sum_{\kappa=0}^{c-1} \sum_{i=1}^N \left[ d_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} G(z - a_i, \alpha - b_i, T - t) dt + m_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} G(z - a_i + \gamma, \alpha - b_i, T - t) dt + \right. \\ \left. + n_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} G(z - a_i, \alpha - b_i + \gamma, T - t) dt \right]. \quad (15)$$

В (15)  $d_{i\kappa}$ ,  $m_{i\kappa}$ ,  $n_{i\kappa}$  – значения компенсирующих нагрузок в предшествующий отрезок времени,  $T$  – конечный момент времени.

В качестве примера рассмотрено нестационарное воздействие на внешнюю поверхность анизотропной цилиндрической оболочки с локальными опорами типа скользящих заделок. Построена нестационарная функция нормального перемещения для области цилиндрической оболочки, расположенной между равномерно распределёнными с двух сторон 20 локальными опорами. На рисунке 4 представлены пространственные зависимости безразмерного

нестационарного нормального перемещения анизотропной цилиндрической оболочки с локальными опорами в безразмерный момент времени  $\tau = 5$ . С целью демонстрации выполнения граничных условий построен график функций в сечении с локальными опорами, для сравнения также представлена функция для неограниченной оболочки (соответствует пунктирной линии).

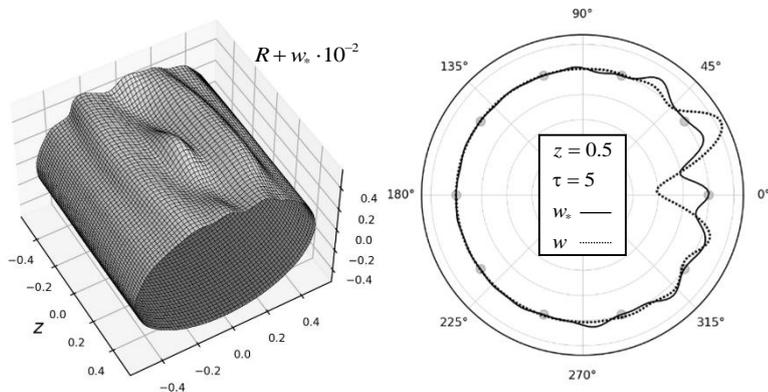


Рисунок 4 – Пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной оболочки с локальными опорами

На рисунках видно выполнение граничных условий по нормальному перемещению точечных скользящих заделок и виден несимметричный характер прогиба оболочки, что соответствует особенностям анизотропной упругой среды.

Также рассмотрено нестационарное воздействие на внешнюю поверхность анизотропной цилиндрической панели с сорока локальными опорами в виде скользящих заделок, расположенных по периметру панели в «шахматном» порядке. На рисунке 5 представлены пространственные зависимости безразмерного нестационарного нормального перемещения анизотропной цилиндрической панели с локальными опорами в безразмерные моменты времени  $\tau = 3$ ,  $\tau = 5$ .

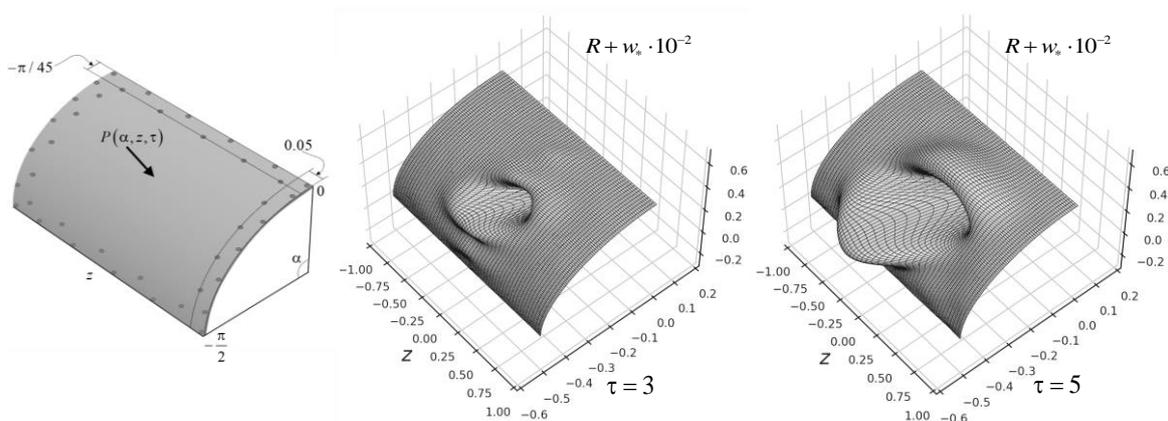


Рисунок 5 – Пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной цилиндрической панели с локальными опорами

На рисунке 5 прослеживается несимметричный характер прогиба анизотропной цилиндрической панели и изменение картины распределения функции прогиба с течением времени. Видно выполнение граничного условия для нормального перемещения.

В качестве проверки достоверности построенных функций нормальных перемещений для анизотропной цилиндрической оболочки с локальными опорами было проведено сравнение с решением для свободно опёртой цилиндрической оболочки. На рисунке 6 представлены графики распределения безразмерных нестационарных нормальных перемещений вдоль образующей цилиндрической оболочки при  $\alpha = 0$  и по углу  $\alpha$  в сечении по  $z = 0$  в безразмерный момент времени  $\tau = 3$  соответственно.

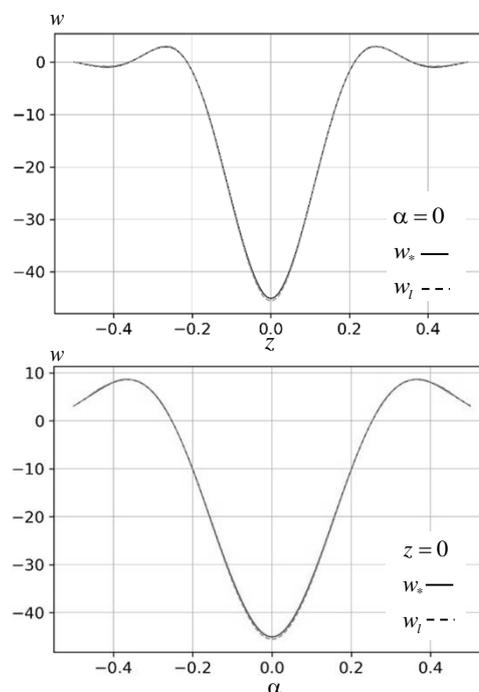


Рисунок 6 – Сопоставление нормальных перемещений

Было выявлено, что характеры нормальных нестационарных прогибов свободно опёртой оболочки и оболочки с локальными опорами совпадают, амплитуды имеют отличия, непрерывные нормы функций нормальных перемещений не превысили четырёх процентов, что обуславливается близкими, но не идентичными граничными условиями рассматриваемых конструкций.

**В заключении** приведены основные результаты диссертационной работы, к которым относятся следующие:

1. Разработана математическая модель для исследования нестационарных нормальных перемещений в анизотропных цилиндрических оболочках и панелях, имеющих произвольно расположенные локальные опоры в виде свободных опираний или скользящих заделок, путём индивидуального моделирования точечных граничных условий. Выполнена верификация построенных решений.

2. Построены и исследованы новые нестационарные фундаментальные решения для неограниченных анизотропных упругих цилиндрических оболочек Кирхгофа–Лява. Продемонстрирована их обобщённость в вопросе частных случаев анизотропии материала. Проведён параметрический анализ найденных фундаментальных решений. Выполнена верификация построенных фундаментальных решений.

3. Разработаны методики для анализа и оценки сходимости решений при проведении численных расчётов. Разработан алгоритм для определения параметров численного интегрирования и суммирования для получения решений с заранее установленной точностью.

4. С помощью построенных фундаментальных решений исследованы нормальные перемещения и напряжённо–деформированное состояние анизотропных цилиндрических оболочек для различных вариантов нестационарного нагружения.

5. Исследовано влияние геометрических параметров и свойств материала анизотропной оболочки на характер нестационарного НДС и перемещений при воздействии различных нагрузок.

Описанные в работе методы и полученные результаты позволяют исследовать напряжённо–деформированное состояние анизотропных цилиндрических оболочек и панелей, находящихся под воздействием нестационарных, произвольно распределённых нормальных нагрузок.

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### *Статьи в журналах из перечня ВАК:*

1. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная динамика анизотропной оболочки Кирхгофа–Лява // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2020. — № 4(46). — С. 101 – 106.
2. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д., Федотенков Г. В. Нестационарное напряжённно–деформированное состояние композитной цилиндрической оболочки // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2020. — Том 26 № 4. — С. 544 – 559.
3. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д., Федотенков Г. В. Нестационарное деформирование анизотропной круговой цилиндрической оболочки // Труды МАИ. — 2021. — № 120. — С. 1 – 33.
4. Петров И. И., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Фундаментальные решения для ортотропной цилиндрической оболочки // Труды МАИ. — 2022. — № 124. — С. 1 – 30.

### *Статьи в журналах, индексируемых Scopus:*

5. Lokteva N. A., Serdyuk D. O., Skopintsev P. D. Non-stationary influence function for an unbounded anisotropic Kirchhoff – Love shell // Journal of Applied Engineering Science. — 2020. — Vol. 18 № 4. — P. 737 – 744.
6. Lokteva N. A., Serdyuk D. O., Skopintsev P. D. The transient deformation of an anisotropic cylindrical shell with structural features // Journal of The Institution of Engineers (India): Series C. — 2023. — № 104. — P. 455 – 466.

### *Прочие публикации по теме диссертации:*

7. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Исследование нестационарного деформированного состояния анизотропной цилиндрической оболочки // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы X международной научно–практической конференции Ч. 1. — Гомель : БелГУТ, 2020. — С. 99 – 101.
8. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная динамика тонких анизотропных упругих цилиндрических оболочек // Динамические и

технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. — Москва : ООО "ТРП", 2020. — С. 89 – 91.

9. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарные внутренние силовые факторы в анизотропной цилиндрической оболочке // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов X Всероссийской научной конференции с международным участием. — Москва : ИПРИМРАН, 2020. — С. 176 – 182.

10. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная функция влияния для анизотропной цилиндрической оболочки типа Кирхгофа–Лява // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Апрель 2020. — Москва : Издательство Московского университета, 2020. — С. 145 – 145.

11. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Напряжённо–деформированное состояние анизотропной цилиндрической оболочки при ударных нагрузках // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVII Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. — Москва : ООО "ТРП", 2021. — С. 87 – 88.

12. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная динамика жёстко закреплённой анизотропной цилиндрической оболочки // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. — Москва : Издательство Московского университета, 2021. — С. 48 – 49.

13. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная динамика шарнирно опертой анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы XI международной научно–практической конференции Ч. 2. — Гомель : БелГУТ, 2021. — С. 152 – 153.

14. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная функция прогиба для полубесконечной анизотропной цилиндрической оболочки // XXII Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. — Пермь : ПФИЦ УрО РАН, 2021. — С. 200 – 201.

15. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Метод компенсирующих нагрузок для исследования нестационарных возмущений в анизотропных цилиндрических оболочках с локальными шарнирными опорами // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы XI международной научно-практической конференции Ч. 2. — Гомель : БелГУТ, 2022. — С. 207 – 207.
16. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная динамика анизотропной цилиндрической оболочки в случае смешанных граничных условий // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики — Москва : Издательство Московского университета, 2022. — С. 48 – 49.
17. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарные возмущения в анизотропной цилиндрической оболочке с конструктивными особенностями // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVIII Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. — Москва : ООО "ТРП", 2022. — С. 73 – 74.
18. Петров И. И., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Фундаментальные решения для ортотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVIII Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. — Москва : ООО "ТРП", 2022. — С. 105 – 107.
19. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарные изгибные волны в анизотропной цилиндрической оболочке с локальными опорами // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXIX Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. Том 2. — Москва : ООО "ТРП", 2023. — С. 26 – 27.
20. Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д., Федотенков Г. В. Применение метода компенсирующих нагрузок в задачах нестационарного деформирования цилиндрических оболочек из моноклинного материала // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики — Москва : Издательство Московского университета, 2023. — С. 148 – 149.