На правах рукописи

Игнатов Алексей Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ГРАФОВЫХ СТРУКТУРАХ

Специальность 2.3.1.
Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва, 2025 год

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор **Кибзун Андрей Иванович**

Официальные оппоненты: **Назин Александр Викторович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории №7 «Адаптивных и робастных систем им. Я.З. Цыпкина» ИПУ РАН;

Горяинов Владимир Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ имени Н.Э. Баумана;

Каркищенко Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НИИ робототехники и процессов управления ЮФУ.

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского»

Защита состоится 18.04.2025 в 10 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного Совета 24.2.327.02 на базе Московского авиационного института (национального исследовательского университета) по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по адресу: https://mai.ru/events/defence/doctor/?ELEMENT_ID=183811

Автореферат разослан ______________

Отзывы просим отправлять в 2-х экземплярах, заверенных печатью, по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Отдел подготовки кадров высшей квалификации.

Учёный секретарь
Диссертационного Совета 24.2.327.02
кандидат физико-математических наук ______________ В. А. Рассказова

Общая характеристика работы

Объектом исследования диссертационной работы являются системы управления движением и его безопасностью (надежностью) в транспортных системах, задаваемых графовыми структурами.

Предметом исследования диссертационной работы являются алгоритмы и методы управления движением и его безопасностью в транспортных системах, задаваемых графовыми структурами.

Актуальность работы. (Не)ориентированные (мульти)графы – удобное средство для математического моделирования и принятия решений в различных прикладных областях. Одно из наиболее важных направлений исследования графовых структур – поиск оптимального маршрута и времени движения по графу с учетом различных ограничений на пропускную способность, время транспортировок и их стоимость. Исследования, посвящённые поиску оптимального расписания движения грузов (заказов, заявок) между вершинами графа, можно поделить на две категории по признаку фиксированности времени транспортировок. В классических постановках задачи маршрутизации транспорта (vehicle routing problem) T. Vidal, T.G. Crainic, A. Mor, M.G. Speranza и модификациях М.Ю. Хачая, Ю.Ю. Огородникова с наличием ограничений на грузоподъемность, постановках задачи поиска маршрута по местам продажи товаров (traveling purchaser problem) F.F. Boctor, G. Laporte, J. Renaud движение между вершинами графа может быть осуществлено в любое время. Отметим, что в одной из работ М.Ю. Хачая появляется ограничение на время, но это время не доступности ребра графа для движения, а время обслуживания потребителя, которое необходимо для правильного (с точки зрения доступного времени обслуживания) обхода вершин графа/потребителей.

Пожалуй, наибольшее развитие прикладных исследований в области движения по графам получило формирование расписания движения в железнодорожной отрасли. В англоязычной литературе, посвященной железнодорожной тематике, время движения между вершинами транспортной сети часто не задано. Это время определяется при построении расписания. Примеры таких постановок можно встретить в работах V. Cacchiani, A. Caprara, P. Toth, L. Kroon, M. Forsgren, M. Aronsson, S. Gestrelius, L. Meng, X. Zhou.

По сути, в задачах с нефиксированным временем движения из вершины в вершину предлагается мгновенная готовность некоего транспортного средства перевезти груз/пассажира из одной вершины в другую. Однако в реальной жизни такое не всегда возможно. Так, например, регулярные железнодорожные и авиаперевозки осуществляются по расписанию, а нерегулярные могут быть просто недоступны. А ввиду пробок на автомобильных дорогах, возникающих, например, утром и вечером, длительность поездки между вершинами неодинакова. Иными словами, пропускная способность рёбер/дуг графа транспортной сети зависит от времени. В этой связи в первой главе диссертации рассматривается постановка задачи, в которой движение между вершинами мультиграфа возможно только в заранее определенные промежутки времени.

Следует подчеркнуть, что в постановках Д.И. Архипова, А.И. Кибзуна, А.А. Лазарева, Е.Г. Мусатовой, А.В. Наумова возникает проблема, связанная с конечностью промежутка времени, на которое строится расписание (далее – горизонт планирования). Внутри этого промежутка времени надо успеть развезти все грузы. Однако это не всегда бывает возможно как по причине недостатка в рамках горизонта планирования возможностей для транспортировки, так и по причине того, что потребность перевозки возникает к концу горизонта планирования. Таким образом, решение задачи поиска оптимального расписания может не существовать, так как останутся недоставленные грузы. При этом необходимость в доставке грузов не исчезает. Такая проблема поднималась в работе А.А. Лазарева и Е.Г. Мусатовой, где предлагалось расширить горизонт планирования, либо отказаться от ограничения на прибытие всех грузов в рамках горизонта планирования. Первый подход приводит к росту размерности оптимизационной задачи, а второй подход может привести к тому, что груз будет доставлен на станцию, с которой практически невозможно добраться в станцию назначения. Следовательно, актуальна разработка системы ограничений, задающей движение по графу транспортной сети, которая бы учитывала возможность и после окончания горизонта планирования находиться грузу в движении, если ожидаемое время в пути будет допустимым. Такая система ограничений и формулируется в первой главе диссертации.

В силу того, что некоторые участки пути железнодорожной сети должны подлежать срочному/плановому ремонту, конструируемое расписание должно включать в себя «технологические окна» (ТО) – промежуток времени, в течение которого движение прекращается для проведения ремонтных работ. Исследования задачи о назначении «технологического окна» можно разделить на несколько групп. Одна часть исследований (S.M. Famurewa, T. Xin, A. Andrade, P. Teixeira) посвящена проблеме назначения «технологического окна» на основе прогноза состояния (деградации) железнодорожной инфраструктуры, стоимости ремонта, объема железнодорожных перевозок. Другая часть (M. Forsgren, M. Aronsson, S. Gestrelius, A. Higgins, T. Liden, M. Joborn, А.А. Лазарев, Е.Г. Мусатова) посвящена вопросу назначения «технологического окна» исходя из действующего расписания.

Подходы для назначения «технологического окна», ранее предложенные в литературе, близки к материалу диссертации, однако в полной мере неприменимы: в каких-то публикациях рассматривается менее общая постановка задачи, а, например, у T. Liden и M. Joborn время полагается дискретным, при этом время поиска ТО существенно растет, если временные периоды очень малы, а если периоды времени очень крупны, то можно не осуществить план перевозок.

Во второй главе диссертации рассматривается задача поиска расписания движения по графу транспортной сети, в которой предполагается возможным движение между вершинами графа в произвольные промежутки времени. Типовой иллюстрацией такой сети является движение на железнодорожной станции. Среди публикаций по моделированию и оптимизации движения на железнодорожной станции выделим работы В.А. Рассказовой, Д.Н. Гайнанова, M.E.H. Petering, P. Sels, P. Vansteenwegen. Постановки указанных авторов вносят большой вклад в развитие алгоритмического обеспечения процесса движения по станции, однако обладают рядом недостатков. Самым главным недостатком является то, что станции рассматриваются укрупнённо без учета подробной топологии станции. В диссертации этот недостаток устраняется.

Как и в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами, в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами возникает задача об оптимальном промежутке времени для проведения ремонтно-технологических работ. Для этой задачи в диссертации разрабатывается ряд критериев оптимальности, а сами задачи формулируются в виде задач смешанного целочисленного линейного программирования.

При формировании расписания движения необходимо принимать в расчет риски всевозможных неблагоприятных событий. В диссертации под риском понимается сочетание вероятности нанесения ущерба и тяжести этого ущерба. Риски различных неблагоприятных событий, сопутствующих движению, рассматриваются в главе 3, а в главе 4 разрабатывается концепция интегрального риска – риска на всем пути следования транспортного средства.

В одной из первых работ (S. El-Hage, F.F. Saccomanno), посвященных прогнозированию и оценке последствий железнодорожных происшествий, рассматривалась задача оценки влияния номера первой сошедшей с рельсов подвижной единицы (вагонов и секций локомотива) на число сошедших с рельсов подвижных единиц. Предлагалось проводить оптимизацию расположения вагонов с опасными грузами с целью уменьшения вероятности схода с рельсов именно этих вагонов. В работе X. Liu, M. Rapik Saat в качестве факторов, влияющих на последствия схода, были выделены скорость в момент схода, остаточная длина состава (общее количество вагонов, начиная с первого сошедшего), наличие дополнительных локомотивов в середине/хвосте состава, доля груженых вагонов. Однако информация о радиусе кривой и наличии уклона в месте схода в расчет не принималась. В работе X. Liu, M. Rapik Saat, C.P.L. Barkan оценивался уровень схода (уровень опасности), зависящий от класса пути, пропущенного тоннажа, наличие систем сигнализации (например, о занятости поездом секции). Но получаемая зависимость носит общий характер и не позволяет для конкретного поезда снизить риск от схода вагонов. В публикациях F.F. Saccomanno, C.P.L. Barkan исследовалась схожая задача поиска функциональной зависимости между вероятностью схода и длиной состава, пройденным количеством километров поездом и классом пути. Однако геометрические особенности пути также не были учтены. В этой связи в диссертации приводится модификация и уточнение ранее предложенных зависимостей.

Как было отмечено выше, движение транспорта сопряжено с большим количеством различных неблагоприятных событий. В этой связи возникает вопрос о нахождении общего (суммарного, интегрального) риска. По данной тематике можно выделить работы M. Bagheri, F.F. Saccomanno. В них строится функция интегрального (общего на всем пути следования) риска с целью оптимального расположения вагонов с опасными грузами с точки зрения минимизации суммарного риска. Данная функция зависит от скорости (при итоговом расчете используется не реальная скорость поезда в пути, а максимальная допустимая на участке), а также зависит от номера первой сошедшей с рельсов подвижной единицы и причины схода с рельсов. Следует отметить, что сход с рельсов по конкретной причине – случайное событие, однако учет этого обстоятельства (например, при помощи формулы полной вероятности) опускается. Другие факторы, например, профиль и кривизна пути не используются, а это, в свою очередь, снижает точность полученного результата. Кроме того, у M. Bagheri, F.F. Saccomanno поезд представляется материальной точкой. Также не рассматриваются другие, помимо схода с рельсов, неблагоприятные события, которые могут произойти при транспортировке, а в качестве функции риска постулируется только средний ущерб. В диссертации устраняются эти, а также некоторые другие недостатки.

Для решения задач смешанного целочисленного линейного программирования разработан ряд коммерческих и бесплатных решателей. Сравнение различных решателей можно найти у R. Anand, D. Aggarwal, V. Kumar, T. Koch, T. Berthold, J. Kronqvist. R. Anand, D. Aggarwal, V. Kumar проводили анализ решателей CPLEX, Gurobi, XPRESS с точки зрения возможных задач математического программирования, которые они могут решить, а также особенностей функционирования этих решателей. J. Kronqvist сравнивал решатели задач смешанного целочисленного нелинейного программирования. В качестве характеристики качества использовалось количество решенных задач тем или иным решателем за заданный промежуток времени. Всего таких задач было 335. При этом не обсуждался вопрос, насколько долго решается та или иная задача тем или иным решателем. Также не исследовался вопрос, насколько входные данные влияют на скорость получения решения. Кроме того, не обсуждался вопрос о влиянии программной среды на скорость и оптимальность получаемого решения. T. Koch, T. Berthold исследовали уменьшение времени счета для решателей, доступных на начало 2000-х годов и на конец 2010-х. T. Koch, T. Berthold отмечали то, что в зависимости от порядка заполнения матрицы ограничений время поиска решения, вообще говоря, неодинаково. Влияние начальных данных на время получения решения не исследовалось. Не выясняется, какой именно из решателей лучше. Указанные недостатки исправляются в методологии сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования в пятой главе диссертации.

Цель и задачи работы. Целью диссертации является разработка математического, алгоритмического, программного обеспечения для решения задачи управления движением в транспортных системах, задаваемых графовыми структурами.

Для достижения выбранной цели предполагается декомпозировать задачу управления движением на блоки: блок выбора маршрута и времени движения по графу, блок оценки безопасности (надежности) скоростного режима движения при заданном маршруте и времени движения между вершинами графа.

Необходимо решить следующие задачи.

1. Разработать математическое и алгоритмическое обеспечение для поиска расписания движения в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами: систему ограничений, задающую движение мультиграфу по транспортной сети, критериальную функцию, алгоритм поиска решения в поставленной задаче – учитывающее возможность движения по окончании горизонта планирования. Разработать программную реализацию алгоритма.

2. Разработать математическое и алгоритмическое обеспечение для поиска

расписания движения в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами на основе системы ограничений, учитывающей графовую структуру сети и ряд технологических особенностей движения. Разработать алгоритм поиска промежутка времени, в которое часть ребер графа можно сделать недоступным для движения в таких транспортных сетях.

3. Разработать математическое и алгоритмическое обеспечение для решения задач управления надежностью на железнодорожном транспорте.

4. Найти явный вид функций интегрального риска на всём заранее заданном пути следования транспортного средства: среднего ущерба и вероятности возникновения неблагоприятных событий. Разработать метод оценки компонент интегрального риска при движении грузовых поездов для решения задачи анализа безопасности движения.

5. Разработать статистический метод сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования и вызывающих их программных сред.

Методы исследования. В диссертации используются методы системного анализа, теории вероятностей, математической статистики, математического программирования, математического моделирования.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических постановок и доказательств утверждений, корректным использованием методов системного анализа, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе решается проблема конечности горизонта планирования – промежутка времени, на который строится расписание движения – на основе специальной постановки задачи. Разрабатывается универсальная критериальная функция, включающая в себя одновременно различные временны́е компоненты перевозок, стоимость, количество доставленных в рамках горизонта планирования грузов.

2. Ставится постановка задачи поиска расписания движения в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами, в которой учитывается технологический процесс функционирования транспортных сетей, в частности, рассматривается доступность каждого ребра графа сети во времени. Предлагается ряд постановок задач для назначения «технологического окна» в форме задач смешанного целочисленного линейного программирования.

3. Получен явный вид оценки вероятности бокового столкновения на железнодорожной станции; решается задача об улучшении безопасности движения в транспортных сетях (и, в частности, на железнодорожных переездах) с квантильным критерием с использованием неравенства Чернова; на основе методов математической статистики предлагается типизация причин сходов с рельсов грузовых поездов.

4. Предлагаются функции интегрального риска, учитывающие невозможность движения после возникновения неблагоприятного события, а также скоростной режим движения на всем пути следования. Предлагается метод оценки компонент интегрального риска, учитывающий различные неблагоприятные события, которые могут произойти с грузовыми поездами во время их движения, и

геометрические особенности грузовых поездов.

5. Предлагается новый метод сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования, который учитывает то, что время выполнения операций компьютером можно считать случайным, а также то, что решение задачи смешанного целочисленного линейного программирования существенно зависит от набора исходных данных.

Теоретическая ценность работы заключается в разработке алгоритмов для решения задач смешанного целочисленного линейного программирования специального вида, имеющих высокую размерность, нахождении детерминированных эквивалентов и границ критериальных функций для некоторого класса задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями, явных выражений для функций интегрального риска для произвольного количества и типов неблагоприятных случайных событий.

Практическая ценность работы состоит в том, что разработанные в работе процедуры и алгоритмы ориентированы на применение в различных транспортных компаниях для формирования расписания движения, а также для выбора скоростного режима беспилотного рельсового транспорта.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации проведено исследование задач оптимизации, разработаны методы и алгоритмы для решения задач оптимизации на графах, которые применены для анализа в том числе прикладных объектов. На основе методов теории вероятностей и математической статистики разработано математическое, алгоритмическое, программное обеспечение для решения задач анализа и управления надежностью на железнодорожном транспорте (области исследования 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 17 специальности 2.3.1.).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования Московского авиационного института (рук. проф. Кибзун А.И.), лаборатории №7 ИПУ РАН (рук. проф. РАН Хлебников М.В.), лаборатории дискретной оптимизации ОФ ИМ СО РАН (рук. доц. Еремеев А.В.).

Материалы диссертации представлялись на следующих конференциях: «Интеллектуальные системы управления железнодорожным транспортом. Компьютерное и математическое моделирование.» (Россия, Москва, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018 гг.), XLIV международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», (Россия, Москва, 2018 г.), 22-я международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций» (Россия, Екатеринбург, 2023 г.), XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (Россия, Москва, 2024 г.), международная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (Россия, Екатеринбург, 2024 г.).

Работа поддержана грантами РНФ (№ 23-21-00293, 16-11-00062), грантом Минобрнауки (2.2461.2017/ПЧ), грантами РФФИ (20-07-00046 А, 17-20-03050 офи_м_РЖД).

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 15 статей, среди которых

– 10 [1–10] опубликованы в журналах из перечня ВАК и проиндексированы в МСЦ WoS и/или Scopus,
– 4 [12–15] опубликованы в журналах из перечня ВАК,
– 1 [11] опубликована в сборнике докладов конференции, проиндексированном в МСЦ Scopus.

Также по теме диссертации опубликовано 11 [16–26] работ в различных сборниках и материалах конференций, в сборниках тезисов докладов конференций; получено 4 [27–30] свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.

Общее число публикаций — 30.

Личный вклад. Все результаты диссертации получены лично автором. Из результатов, опубликованных в соавторстве, в диссертацию включен только материал, вклад соискателя в который был определяющим.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, пять глав, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 214 страниц, включая 12 рисунков, 47 таблиц и список литературы, содержащий 161 наименование.

Содержание диссертации

Во введении дан подробный обзор имеющихся работ по выбранной теме диссертационного исследования и смежным темам, сформулирована цель работы, аргументирована её научная новизна и практическая ценность, а также в сжатом виде изложено содержание глав диссертации.

В первой главе рассматривается транспортная система, представляемая неориентированным мультиграфом $G =< V, E >$, где V – множество вершин (городов, железнодорожных станций, заводов, аэропортов, морских портов) и E – множество ребер (шоссе, железнодорожных путей, воздушных трасс, морских путей), соединяющих эти вершины. Предполагается, $|V| = M \geq 2$. Перенумеровывая вершины мультиграфа G от 1 до M, составляется множество индексов $V' = \{1, 2, \dots, M\}$. Каждый элемент этого множества единственным образом определяет вершину мультиграфа G.

Время отсчитывается в минутах относительно некоторого момента отсчета. Под горизонтом планирования понимается промежуток времени $[0, t_{\text{макс}})$, на который строится план перевозок.

Предполагается, что имеется I грузов (посылок, контейнеров, грузов). Для i-го груза заданы:

– индекс вершины отправления $v_i^{\text{отпр.}} \in V'$;
– индекс вершины прибытия (назначения) $v_i^{\text{приб.}} \in V'$;
– время готовности к отправлению $t_i^{\text{отпр.}} \in [0, t_{\text{макс}})$;
– максимальное время d_i в течение которого i-му грузу позволяется находиться в пункте отправления с момента готовности;
– время груза в пути t_i, т.е. максимальное время, в течение которого i-му грузу позволяется находиться в транспортной системе (исключая время в вершине отправления), вычисляемое в минутах;
– масса груза $w_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, I}$.

Груз предполагается неделимым в том смысле, что его нельзя отправить по частям.

Движение между вершинами может выполняться только в определенные промежутки времени. Предполагается доступным ровно K перемещений/транспортировок (самолетами, морскими судами, поездами, грузовиками) между вершинами. Параметры транспортировки представляются в виде семиэлементного вектора-строки $z_k \stackrel{\text{def}}{=} (v_k^{\text{нач.}}, v_k^{\text{кон.}}, n_k, t_k^{\text{нач.}}, t_k^{\text{кон.}}, w_k^{\text{макс}}, C_k)$, где $v_k^{\text{нач.}} \in V'$ – индекс вершины начала движения, $v_k^{\text{кон.}} \in V'$ – индекс вершины конца движения, причем $v_k^{\text{нач.}}$ и $v_k^{\text{кон.}}$ – индексы смежных вершин в графе G, n_k – номер ребра, соединяющего вершины с индексами $v_k^{\text{нач.}}$ и $v_k^{\text{кон.}}$, $t_k^{\text{нач.}} \in [0, t_{\text{макс}})$ – время начала движения, $t_k^{\text{кон.}}$ – время конца движения, $w_k^{\text{макс}}$ – максимальная перевозимая масса при транспортировке, C_k – стоимость транспортировки единицы массы, $k = \overline{1, K}$. Через $\mathcal{Z}$ обозначается множество всех векторов z_k, $k = \overline{1, K}$. Элементы множества $\mathcal{Z}$ перенумеровываются от 1 до K. Таким образом, число от 1 до K однозначно определяет конкретную транспортировку и ее параметры.

В дальнейшем под *расписанием движения* груза понимается набор номеров транспортировок, которые им используются.

Вводятся минимально и максимально возможная длительность стоянки в вершине с индексом $v_k^{\text{кон.}}$ после выполнения транспортировки с номером k груза с номером i: $t_{i,k}^{\text{ст. мин.}}$ и $t_{i,k}^{\text{ст. макс.}}$, $i = \overline{1, I}$, $k = \overline{1, K}$.

Задается величина τ_{m_1,m_2} – ожидаемое время (начиная с момента готовности к отправлению) перевозки груза из вершины с индексом m_1 в вершину с индексом m_2, $m_1, m_2 = \overline{1, M}$. Также вводится величина η_{m_1,m_2} – ожидаемое время с момента готовности до отправления груза из вершины с индексом m_1 в вершину с индексом m_2, $m_1, m_2 = \overline{1, M}$. Эти величины оцениваются по историческим наблюдениям при помощи реализации выборочного среднего, либо экспертным путем.

Под маршрутом груза с номером i понимается набор вершин, последовательно пересекаемых этим грузом, $i = \overline{1, I}$. Максимальное число транспортировок при движении в рамках горизонта планирования ограничивается некоторым заранее заданным числом J. Под j-м этапом движения груза с номером i понимается движение этого груза, когда используется j-я по порядку использования транспортировка, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J+1}$. Вершина называется промежуточной для i-го груза, если она не является для него ни вершиной отправления, ни вершиной назначения, $i = \overline{1, I}$.

Также вводится величина $\mathcal{D}_i$, характеризующая отказ в транспортировке i-му грузу: 0 – грузу отказано в транспортировке, 1 – иначе, $i = \overline{1, I}$.

На основе множества транспортировок $\mathcal{Z}$ формулируется система ограничений, задающая движение грузов по транспортной сети, задаваемой мультиграфом G. Для этого вводятся вспомогательные переменные $\delta_{i,j,k}$, характеризующие использование грузом с номером i транспортировки с номером k на j-м этапе, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. Переменная $\delta_{i,j,k}$ равна нулю, если транспортировка с номером k не используется i-м грузом на j-м этапе, и 1 – иначе. Строится система ограничений, задающая движение по мультиграфу.

По определению переменных $\delta_{i,j,k}$ имеются ограничения

$$\delta_{i,j,k} \in \{0, 1\}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J+1}, k = \overline{1, K}. \tag{1.1}$$

Так как этапов для движения может быть не более J, вводится ограничение
$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,J+1,k}=0. \tag{1.2}$$
Поскольку груз неделим, то на любом этапе (в том числе первом) можно использовать максимум одну транспортировку
$$\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,1,k}\le 1, i=\overline{1,I}. \tag{1.3}$$
Если перевозка груза начинается, то она должна быть осуществлена из соответствующей вершины отправления
$$\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,1,k}v_k^{\text{нач.}}=v_i^{\text{отпр.}}\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,1,k}, i=\overline{1,I}. \tag{1.4}$$
Движение по мультиграфу G возможно только по смежным вершинам
$$\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j,k}v_k^{\text{кон.}}\le\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j+1,k}v_k^{\text{нач.}}+\left(1-\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j+1,k}\right)M^3, i=\overline{1,I}, j=\overline{1,J-1}, \tag{1.5}$$
$$\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j,k}v_k^{\text{кон.}}\ge\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j+1,k}v_k^{\text{нач.}}-\left(1-\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j+1,k}\right)M, i=\overline{1,I}, j=\overline{1,J-1}. \tag{1.6}$$
Отправление в промежуточных вершинах маршрута не должно происходить раньше прибытия в эти вершины. Поэтому с учетом ограничений на минимальное и максимальное время стоянки, получается[1]
$$\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j,k}(t_k^{\text{кон.}}+t_{i,k}^{\text{ст. мин.}})\le\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j+1,k}t_k^{\text{нач.}}+\left(1-\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j+1,k}\right)\bar{t}, i=\overline{1,I}, j=\overline{1,J-1}, \tag{1.7}$$
где $\bar{t}=\max\limits_{i\in\{1,\ldots,I\},k\in\{1,\ldots,K\}} t_k^{\text{кон.}}+t_{i,k}^{\text{ст. мин.}}$,
$$\sum_{k:1\le k\le K, v_k^{\text{кон.}}\ne v_i^{\text{приб.}}}\delta_{i,j,k}(t_k^{\text{кон.}}+t_{i,k}^{\text{ст. макс.}})\ge\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j+1,k}t_k^{\text{нач.}}, i=\overline{1,I}, j=\overline{1,J-1}. \tag{1.8}$$
Отправление груза должно происходить с учетом максимально допустимого времени в вершине отправления. Поэтому накладываются ограничения
$$\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,1,k}t_k^{\text{нач.}}+\left(1-\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,1,k}\right)t_{\text{макс}}\le t_i^{\text{отпр.}}+d_i, i=\overline{1,I}. \tag{1.9}$$
С целью отправить груз не ранее момента готовности, вводятся ограничения
$$t_i^{\text{отпр.}}\le\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,1,k}t_k^{\text{нач.}}+\left(1-\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,1,k}\right)t_{\text{макс}}, i=\overline{1,I}. \tag{1.10}$$
Грузу запрещается выходить из вершины и входить в вершину более чем один раз
$$\sum_{j=1}^{J+1}\sum_{k:v_k^{\text{нач.}}=m,1\le k\le K}\delta_{i,j,k}\le 1,\quad \sum_{j=1}^{J+1}\sum_{k:v_k^{\text{кон.}}=m,1\le k\le K}\delta_{i,j,k}\le 1,\quad i=\overline{1,I}, m=\overline{1,M}, \tag{1.11}$$
Если предполагается, что груз будет стоять в некоторой промежуточной вершине

[1] В работе полагается, что сумма любых переменных по пустому множеству равна нулю

в момент окончания горизонта планирования, гарантируется допустимость такой стоянки

$$\sum_{k:1\le k\le K, v_k^{\text{кон.}}\neq v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k}\left(t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} - t_{\text{макс}}\right) + \\ + t_{\text{макс}} \sum_{k:1\le k\le K} \delta_{i,j+1,k} \geq 0, i=\overline{1,I}, j=\overline{1,J}. \quad (1.12)$$

Также запрещается дальнейшее движение груза после прибытия в пункт назначения. С этой целью вводятся ограничения

$$\sum_{k:1\le k\le K, v_k^{\text{кон.}}=v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k} \leq 2\left(1-\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j+1,k}\right), i=\overline{1,I}, j=\overline{1,J}. \quad (1.13)$$

Также вводится величина $\hat{T}_{i,j}$ – количество времени, проводимого грузом с номером i в j-й (по порядку следования) промежуточной вершине своего маршрута в рамках горизонта планирования

$$\hat{T}_{i,j} = \sum_{k:1\le k\le K} \delta_{i,j+1,k}(t_k^{\text{нач.}} - t_{\text{макс}}) + \\ + \sum_{k:v_k^{\text{кон.}}\neq v_i^{\text{приб}}, t_k^{\text{кон.}}<t_{\text{макс}}, 1\le k\le K} \delta_{i,j,k}(t_{\text{макс}} - t_k^{\text{кон.}}), i=\overline{1,I}, j=\overline{1,J}. \quad (1.14)$$

Для удобства формулирования системы ограничений полагается $\hat{T}_{i,J+1}=0$.
Вводятся новые переменные F_i, характеризующие ожидаемое количество времени, требуемого до прибытия в пункт назначения грузу с номером i, после окончания горизонта планирования

$$F_i = \tau_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}} + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j,k}(\tau_{v_k^{\text{кон.}}, v_i^{\text{приб.}}} - \tau_{v_k^{\text{нач.}}, v_i^{\text{приб.}}}) + \\ + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k:t_k^{\text{кон.}}\geq t_{\text{макс}}, 1\le k\le K}\delta_{i,j,k}(t_k^{\text{кон.}} - t_{\text{макс}}), i=\overline{1,I}. \quad (1.15)$$

Движение грузов должно осуществляться с учетом ожидаемого времени до прибытия в пункт назначения. В этой связи вводятся ограничения

$$F_i + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k:t_k^{\text{кон.}}<t_{\text{макс}}, v_k^{\text{кон.}}=v_i^{\text{приб.}}, 1\le k\le K}\delta_{i,j,k}(t_k^{\text{кон.}} - t_{\text{макс}}) + \\ + \sum_{k:1\le k\le K}\delta_{i,1,k}(t_{\text{макс}} - t_k^{\text{нач.}}) \leq t_i + \left(1 - \sum_{k:1\le k\le K}\delta_{i,1,k}\right)\eta_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}}, i=\overline{1,I}. \quad (1.16)$$

Отмечается, что в рамках построенной системы ограничений возможно жесткое задание конкретного набора ребер мультиграфа G, последовательно пересекаемых в рамках движения грузом, и приводятся соответствующие ограничения.
Вводятся переменные ω_i, характеризующие, прибыл ли груз с номером i в пункт назначения в рамках горизонта планирования: 0 – прибыл, 1 – нет,

$$\omega_i = 1 - \sum_{j=1}^{J}\sum_{k:t_k^{\text{кон.}}<t_{\text{макс}}, v_k^{\text{кон.}}=v_i^{\text{приб.}}, 1\le k\le K}\delta_{i,j,k}, i=\overline{1,I}. \quad (1.17)$$

Необходимость не превысить максимально допустимый вес при транспортировке с номером k приводит к ограничениям

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J+1}\delta_{i,j,k}w_i \le w_k^{\text{макс}}, k=\overline{1,K}. \tag{1.18}$$

Отмечается, что ограничения (1.1)–(1.18) могут оказаться несовместными, а значит, множество допустимых стратегий, задаваемое этими ограничениями, пусто. Приводятся условия существования хотя бы одного решения системы ограничений (1.1)–(1.18).

Лемма 1.1. *Для существования хотя бы одного решения системы ограничений (1.1)–(1.18) достаточно выполнения условий*

$$t_i^{\textit{отпр.}} + d_i \ge t_{\textit{макс}}, \quad \tau_{v_i^{\textit{отпр.}}, v_i^{\textit{приб.}}} \le t_i + \eta_{v_i^{\textit{отпр.}}, v_i^{\textit{приб.}}}, i=\overline{1,I}. \tag{1.19}$$

Отмечается, что даже если условия (1.19) нарушаются, это не означает, что ограничения (1.1)–(1.18) обязательно несовместны.

Формулируется критерий для поиска оптимального расписания. Для этого из всех $\delta_{i,j,k}$ составляется вектор δ, $i=\overline{1,I}$, $j=\overline{1,J+1}$, $k=\overline{1,K}$. Также составляется: из всех F_i вектор F, а из ω_i – вектор ω, $i=\overline{1,I}$. Все $\hat{T}_{i,j}$ объединяются в вектор $\hat{T}$, $i=\overline{1,I}$, $j=\overline{1,J+1}$. Критерий представляет свертку суммарного времени в движении, суммарного количества недоставленных грузов в рамках горизонта планирования и других характеристик:

$$\begin{gathered}
\mathcal{C}(\delta,F,\omega,\hat{T}) = \underbrace{c_1\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J+1}\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j,k}(\min\{t_k^{\text{кон.}},t_{\text{макс}}\}-t_k^{\text{нач.}})}_{\substack{\text{суммарное время в движении}\\ \text{в рамках горизонта планирования}}} + \underbrace{c_2\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J+1}\hat{T}_{i,j}}_{\substack{\text{суммарное время}\\ \text{стоянки в}\\ \text{промежуточных}\\ \text{вершинах}}} + \\
+ \underbrace{c_3\sum_{i=1}^{I}\left(\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,1,k}t_k^{\text{нач.}} + \left(1-\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,1,k}\right)t_{\text{макс}} - t_i^{\text{отпр.}}\right)}_{\substack{\text{суммарное время стоянки в вершинах отправления}\\ \text{с момента готовности к отправлению}}} + \\
+ \underbrace{c_4\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J+1}\sum_{k=1}^{K}\delta_{i,j,k}w_iC_k}_{\substack{\text{суммарная стоимость}\\ \text{транспортировок}}} + c_5\underbrace{\sum_{i=1}^{I}F_i}_{\substack{\text{суммарное}\\ \text{ожидаемое}\\ \text{время до}\\ \text{доставки}}} + c_6\underbrace{\sum_{i=1}^{I}\omega_i}_{\substack{\text{суммарное}\\ \text{количество}\\ \text{недоставленных}\\ \text{грузов в рамках}\\ \text{горизонта}\\ \text{планирования}}},
\end{gathered} \tag{1.20}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 – некоторые неотрицательные числа.

При различных значениях чисел c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 критериальная функция (1.20) имеет разный смысл. Например, при $c_1 = \ldots = c_5 = 0$, $c_6 = 1$ критериальная функция характеризует количество недоставленных в рамках горизонта планирования грузов, при $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0$, $c_4 = 1$ – стоимость перевозок.

Для нахождения оптимального расписания ставится задача

$$\mathcal{C}(\delta, F, \omega, \hat{T}) \to \min_{\delta, F, \omega \in \{0,1\}^I, \hat{T}} \quad (1.21)$$

при ограничениях (1.1)–(1.18) и дополнительных ограничениях

$$\hat{T}_{i,j} \geq 0, \hat{T}_{i,J+1} = 0, F_i \geq 0, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J+1}, k = \overline{1, K}. \quad (1.22)$$

Отмечается, что требование (1.22) неотрицательности переменных F_i, $\hat{T}_{i,j}$, вообще говоря, избыточно в виду наличия ограничений (1.1)–(1.10), (1.13). Однако ограничение на их неотрицательность позволяет в некоторых задачах ускорить поиск оптимального решения.

В виду большой вычислительной сложности построенной задачи формируется алгоритм поиска приближенного решения на основе ее декомпозиции. Для этого горизонт планирования делится на P непересекающихся промежутков (полуинтервалов) $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_P$, т.е. $[0, t_{\text{макс}}) \equiv \bigcup\limits_{p=1}^{P} \mathcal{T}_p$, где $\forall p_1, p_2 \in \{1, \ldots, P\} : p_1 \neq p_2$ $\mathcal{T}_{p_1} \bigcap \mathcal{T}_{p_2} \equiv \varnothing$. Вводятся вспомогательные величины $\underline{\mathcal{T}}_p \overset{\text{def}}{=} \inf \mathcal{T}_p$, $\overline{\mathcal{T}}_p \overset{\text{def}}{=} \sup \mathcal{T}_p$, $p = \overline{1, P}$. Множества $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_P$ строятся так, что $\underline{\mathcal{T}}_1 = 0, \overline{\mathcal{T}}_P = t_{\text{макс}}, \underline{\mathcal{T}}_{p+1} = \overline{\mathcal{T}}_p, p = \overline{1, P-1}$.

Множество номеров грузов $\mathcal{I}$ делится на S непересекающихся подмножеств $\mathcal{I}_s$, т.е. $\mathcal{I} \overset{\text{def}}{=} \{1, \ldots, I\} \equiv \bigcup\limits_{s=1}^{S} \mathcal{I}_s$, причем $\forall s_1, s_2 \in \{1, \ldots, S\} : s_1 \neq s_2$ $\mathcal{I}_{s_1} \bigcap \mathcal{I}_{s_2} \equiv \varnothing$.

Формулируется система ограничений, задающих движение по мультиграфу для грузов с номерами из множества $\mathcal{I}_{\tilde{s}}$ в субгоризонт планирования $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$, где $\tilde{p}$ – произвольное число из множества $\{1, 2, \ldots, P\}$, а $\tilde{s} \in \{1, \ldots, S\}$. Под $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ понимается некоторое непустое подмножество транспортировок $\bigcup\limits_{p=1}^{\tilde{p}} \mathcal{K}_p$, выбираемое для грузов из множества $\mathcal{I}_{\tilde{s}}$. Здесь $\mathcal{K}_p \overset{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{N} : k \leq K, t_k^{\text{нач.}} \in \mathcal{T}_p\}$, $p = \overline{1, P}$

Предполагается, что для всех грузов с номерами из множеств $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, ..., $\mathcal{I}_{\tilde{s}-1}$ имеется отказ в транспортировке или расписание движения. Если грузу с номером $\hat{i} \in \bigcup\limits_{s=1}^{\tilde{s}-1} \mathcal{I}_s$ отказано в транспортировке, то полагается $\hat{\delta}_{\hat{i},j,k} = 0$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$, а $\mathcal{D}_{\hat{i}} = 0$.

Далее вводятся вспомогательные переменные $\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}}$, характеризующие использование грузом с номером i транспортировки с номером k на j-м этапе при формировании расписания для субгоризонта планирования $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$. Переменная $\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}}$ равна единице, если транспортировка с номером k используется i-м грузом на j-м этапе, и 0 – иначе.

Формируется система ограничений

$$\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} \in \{0, 1\}, i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, j = \overline{1, J+1}, k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}. \quad (1.23)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} v_k^{\text{кон.}} \leq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\tilde{p}} v_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\tilde{p}}\right) M^3, i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, j = \overline{1, J-1}, \quad (1.24)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} v_k^{\text{кон.}} \geq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\tilde{p}} v_k^{\text{нач.}} - \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\tilde{p}}\right) M, i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, j = \overline{1, J-1}. \quad (1.25)$$

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_{\tilde{s}}}\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,J+1,k}=0. \tag{1.26}$$

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,1,k}v^{\text{нач.}}_k=v^{\text{отпр.}}_i\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,1,k},\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,1,k}\le 1, i\in\mathcal{I}_{\tilde{s}}. \tag{1.27}$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,j,k}=0,\forall i\in\mathcal{I}_{\tilde{s}}:t^{\text{отпр.}}_i\ge\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}. \tag{1.28}$$

$$t^{\text{отпр.}}_i\le\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,1,k}t^{\text{нач.}}_k+\left(1-\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,1,k}\right)\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}\le t^{\text{отпр.}}_i+d_i,\forall i\in\mathcal{I}_{\tilde{s}}:t^{\text{отпр.}}_i<\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}. \tag{1.29}$$

$$\sum_{j=1}^{J+1}\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}:v^{\text{нач.}}_k=m}\delta^{\tilde{p}}_{i,j,k}\le 1,\sum_{j=1}^{J+1}\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}:v^{\text{кон.}}_k=m}\delta^{\tilde{p}}_{i,j,k}\le 1, i\in\mathcal{I}_{\tilde{s}}, m=\overline{1,M}, \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,j,k}(t^{\text{кон.}}_k+t^{\text{ст. мин.}}_{i,k})\le\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,j+1,k}t^{\text{нач.}}_k+\\ +\left(1-\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,j+1,k}\right)\bar{t}, i\in\mathcal{I}_{\tilde{s}}, j=\overline{1,J-1},\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,j,k}(t^{\text{кон.}}_k+t^{\text{ст. макс.}}_{i,k})\ge\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,j+1,k}t^{\text{нач.}}_k, i\in\mathcal{I}_{\tilde{s}}, j=\overline{1,J-1}. \tag{1.32}$$

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}:v^{\text{кон.}}_k\ne v^{\text{приб.}}_i}\delta^{\tilde{p}}_{i,j,k}\left(t^{\text{кон.}}_k+t^{\text{ст. макс.}}_{i,k}-\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}\right)+\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,j+1,k}\ge 0, i\in\mathcal{I}_{\tilde{s}}, j=\overline{1,J}, \tag{1.33}$$

$$\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}:v^{\text{кон.}}_k=v^{\text{приб.}}_i}\delta^{\tilde{p}}_{i,j,k}\le 2\left(1-\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,j+1,k}\right), i\in\mathcal{I}_{\tilde{s}}, j=\overline{1,J}, \tag{1.34}$$

Вводится величина $\hat{T}^{p}_{i,j}$ – количество времени, проводимого грузом с номером i в j-й (по порядку следования) промежуточной вершине своего маршрута в рамках субгоризонта планирования

$$\begin{aligned}\hat{T}^{\tilde{p}}_{i,j}=\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,j+1,k}(t^{\text{нач.}}_k-\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})+\\ +\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}:v^{\text{кон.}}_k\ne v^{\text{приб.}}_i,t^{\text{кон.}}_k<\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}}\delta^{\tilde{p}}_{i,j,k}(\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}-t^{\text{кон.}}_k), i\in\mathcal{I}_{\tilde{s}}, j=\overline{1,J}.\end{aligned} \tag{1.35}$$

Для удобства формулирования системы ограничений полагается $\hat{T}^{\tilde{p}}_{i,J+1}=0$.

Вводятся новые переменные $F^{\tilde{p}}_i$, характеризующие ожидаемое количество времени, требуемого до прибытия в пункт назначения грузу с номером i, после окончания субгоризонта $[0,\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$

$$\begin{aligned}F^{\tilde{p}}_i=\tau_{v^{\text{отпр.}}_i,v^{\text{приб.}}_i}+\sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}}\delta_{i,j,k}(\tau_{v^{\text{кон.}}_k,v^{\text{приб.}}_i}-\tau_{v^{\text{нач.}}_k,v^{\text{приб.}}_i})+\\ +\sum_{j=1}^{J}\sum_{k\in\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}:t^{\text{кон.}}_k\ge\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}}\delta_{i,j,k}(t^{\text{кон.}}_k-\overline{\mathcal{T}}_p), i\in\mathcal{I}_{\tilde{s}}.\end{aligned} \tag{1.36}$$

Задаются переменные $\omega^{\tilde{p}}_i$, характеризующие, прибыл ли груз с номером i в пункт назначения на основе используемых транспортировок в субгоризонт планирования $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde p})$: 0 – прибыл, 1 – не прибыл

$$\omega_i^{\tilde p} = 1 - \sum_{j=1}^{J} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde s, \tilde p} : t_k^{\text{кон.}} < \overline{\mathcal{T}}_p, v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde p}, i \in \mathcal{I}_{\tilde s}. \tag{1.37}$$

Также вводятся ограничения

$$F_i^{\tilde p} + \sum_{j=1}^{J} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde s, \tilde p} : t_k^{\text{кон.}} < \overline{\mathcal{T}}_p, v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde p} (t_k^{\text{кон.}} - \overline{\mathcal{T}}_p) + \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde s, \tilde p}} \delta_{i,1,k}^{\tilde p} (\overline{\mathcal{T}}_p - t_k^{\text{нач.}}) \leq$$

$$\leq t_i + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde s, \tilde p}} \delta_{i,1,k}^{\tilde p}\right) \eta_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}}, \forall i \in \mathcal{I}_{\tilde s} : t_i^{\text{отпр.}} < \overline{\mathcal{T}}_p. \tag{1.38}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde s}} \sum_{j=1}^{J+1} \delta_{i,j,k}^{\tilde p} w_i \leq w_k^{\text{макс}} - \sum_{i \in \bigcup\limits_{s=1}^{\tilde s - 1} \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \hat\delta_{i,j,k} w_i, k \in \mathcal{K}^{\tilde s, \tilde p}. \tag{1.39}$$

Ограничения (1.23)–(1.27), (1.29)–(1.39) идентичны ограничениям (1.1)–(1.18).

Из всех $\delta_{i,j,k}^{\tilde p}$ составляется вектор $\delta^{\tilde s, \tilde p}$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde s}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k \in \mathcal{K}^{\tilde s, \tilde p}$. Также из всех $F_i^{\tilde p}$ составляется вектор $F^{\tilde s, \tilde p}$, а из $\omega_i^{\tilde p}$ – вектор $\omega^{\tilde s, \tilde p}$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde s}$. Все $\hat T_{i,j}^{\tilde p}$ объединяются в вектор $\hat T^{\tilde s, \tilde p}$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde s}$, $j = \overline{1, J+1}$.

Формируется вспомогательная критериальная функция следующего вида

$$\begin{gathered}
\mathcal{C}_{\tilde s}^{\tilde p}(\delta^{\tilde s, \tilde p}, F^{\tilde s, \tilde p}, \omega^{\tilde s, \tilde p}, \hat T^{\tilde s, \tilde p}) = c_1 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde s}} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde s, \tilde p}} \delta_{i,j,k}^{\tilde p} (\min\{t_k^{\text{кон.}}, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde p}\} - t_k^{\text{нач.}})}_{\substack{\text{суммарное время в движении} \\ \text{в рамках субгоризонта планирования } [0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde p})}} + \\
+ c_2 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde s}} \sum_{j=1}^{J+1} \hat T_{i,j}^{\tilde p}}_{\substack{\text{суммарное время} \\ \text{стоянки в} \\ \text{промежуточных} \\ \text{вершинах}}} + c_3 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde s}} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde s, \tilde p}} \delta_{i,1,k}^{\tilde p} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^{K} \delta_{i,1,k}^{\tilde p}\right) \overline{\mathcal{T}}_{\tilde p} - t_i^{\text{отпр.}} \right)}_{\substack{\text{суммарное время стоянки в вершинах отправления} \\ \text{с момента готовности к отправлению} \\ \text{до конца субгоризонта планирования } [0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde p})}} + \\
+ c_4 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde s}} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde s, \tilde p}} \delta_{i,j,k}^{\tilde p} w_i C_k}_{\substack{\text{суммарная стоимость} \\ \text{транспортировок}}} + c_5 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde s}} F_i^{\tilde p}}_{\substack{\text{суммарное} \\ \text{ожидаемое} \\ \text{время до} \\ \text{доставки}}} + c_6 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde s}} \omega_i^{\tilde p}}_{\substack{\text{суммарное} \\ \text{количество} \\ \text{недоставленных} \\ \text{грузов в рамках} \\ \text{субгоризонта} \\ \text{планирования}}} ,
\end{gathered} \tag{1.40}$$

где c_1, c_2, …, c_6 – неотрицательные константы.

Формулируется и доказывается лемма о связи критериальных функций и систем ограничений.

Лемма 1.2. *При $\tilde s \equiv S = 1$, $\tilde p = P$, $\mathcal{K}^{\tilde s, P} = \bigcup\limits_{p=1}^{P} \mathcal{K}_p$ критеральная функция (1.40) и система ограничений (1.23)–(1.39) будут повторять критериальную функцию (1.20) и систему ограничений (1.1)–(1.18) с точностью до замены переменных $\delta_{i,j,k}^{\tilde p}$, $\hat T_{i,j}^{\tilde p}$, $F_i^{\tilde p}$, $\omega_i^{\tilde p}$ на $\delta_{i,j,k}$, $\hat T_{i,j}$, F_i, ω_i соответственно.*

Перед формированием алгоритма приближенного решения задачи (1.20) при ограничениях (1.1)–(1.18) вводится специальный параметр ускорения счета $A \in \mathbb{R}_+$, с уменьшением значения которого при формировании расписания доступно большее число транспортировок. Поясняется, что при решении задач оптимизации наиболее рациональным представляется полагать A равным единице. С учетом этого параметра предлагается следующий **алгоритм** приближенного решения задачи (1.20) при ограничениях (1.1)–(1.18).

1. Задаются числа c_1, c_2, …, $c_6 \in \mathbb{R}_+$. Фиксируются числа P, $J \in \mathbb{N}$. Задается число $A \in \mathbb{R}_+$.

2. Множество номеров грузов расщепляется на $S \in \mathbb{N}$ непересекающихся подмножеств $\mathcal{I}_s$, т.е. $\{1,\ldots,I\} \equiv \bigcup\limits_{s=1}^{S} \mathcal{I}_s$, причем $\forall s_1, s_2 \in \{1,\ldots,S\} : s_1 \neq s_2$ $\mathcal{I}_{s_1} \bigcap \mathcal{I}_{s_2} \equiv \varnothing$.

3. Формируется множество промежутков $\mathcal{T}_1$, …, $\mathcal{T}_P$ так, что $[0, t_{\text{макс}}) \equiv \bigcup\limits_{p=1}^{P} \mathcal{T}_p$, где $\forall p_1, p_2 \in \{1,\ldots,P\} : p_1 \neq p_2$ $\mathcal{T}_{p_1} \bigcap \mathcal{T}_{p_2} \equiv \varnothing$, причем $\underline{\mathcal{T}}_1 = 0$, $\overline{\mathcal{T}}_P = t_{\text{макс}}$, $\underline{\mathcal{T}}_{p+1} = \overline{\mathcal{T}}_p$, $p = \overline{1, P-1}$.

4. Формируются множества $\mathcal{K}_p = \{k \in \mathbb{N} : k \leq K, t_k^{\text{нач.}} \in \mathcal{T}_p\}$, $p = \overline{1, P}$.

5. Инициализируется параметр $\tilde{s} = 1$.

6. Инициализируется параметр $\tilde{p} = 1$.

7. Если $\tilde{p}$ равно единице, то формируется множество $\mathscr{V}^{\tilde{s},\tilde{p}} = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} v_i^{\text{отпр.}}$. Если $\tilde{p}$ больше единицы, то

$$\mathscr{V}^{\tilde{s},\tilde{p}} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} \begin{cases} v_i^{\text{отпр.}}, & \sum\limits_{j=1}^{J+1} \sum\limits_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}-1}} \overline{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1} = 0, \\ \sum\limits_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}-1}} \overline{\delta}_{i,j_i,k}^{\tilde{p}-1} v_k^{\text{кон.}}, & \sum\limits_{j=1}^{J+1} \sum\limits_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}-1}} \overline{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1} > 0, \end{cases}$$

где $j_i = \sum\limits_{j=1}^{J+1} \sum\limits_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}-1}} \overline{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1}$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$.

8. Если $A = 0$, то $\mathscr{K}^{\tilde{s},\tilde{p}} = \mathcal{K}_{\tilde{p}}$. Если $A > 0$, то формируется множество

$$\mathscr{K}^{\tilde{s},\tilde{p}} = \left\{ k \in \mathcal{K}_{\tilde{p}} : \min_{m \in \mathscr{V}^{\tilde{s},\tilde{p}}} \tau_{m, v_k^{\text{нач.}}} \leq (\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}} - \underline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})/A, \min_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} t_i^{\text{отпр.}} \leq t_k^{\text{нач.}} \right\}.$$

9. Если $\tilde{p} > 1$ формируется множество $\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}} = \bigcup\limits_{p=1}^{\tilde{p}-1} \mathcal{K}^{\tilde{s},p} \bigcup \mathscr{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}$. Если $\tilde{p} = 1$, то $\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}} = \mathscr{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}$.

10. Если множество $\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}$ пусто и $\tilde{p} < P$, то величина $\tilde{p}$ увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 7.

Если множество $\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}$ пусто и $\tilde{p} = P$, то $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0$, $\mathcal{D}_i = 0$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. Если $\tilde{s} = S$, то алгоритм завершен. Если $\tilde{s} < S$, то величина $\tilde{s}$ увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 6.

Если множество $\mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}$ непусто, то происходит переход к шагу 11.

11. Решается задача

$$\mathcal{C}_{\tilde{s}}^{\tilde{p}}(\delta^{\tilde{s},\tilde{p}}, F^{\tilde{s},\tilde{p}}, \omega^{\tilde{s},\tilde{p}}, \hat{T}^{\tilde{s},\tilde{p}}) \to \min_{\delta^{\tilde{s},\tilde{p}}, F^{\tilde{s},\tilde{p}}, \omega^{\tilde{s},\tilde{p}} \in \{0,1\}^{|\mathcal{I}_{\tilde{s}}|}, \hat{T}^{\tilde{s},\tilde{p}}}$$

при ограничениях (1.23)–(1.39),

$$\hat{T}^{\tilde{p}}_{i,j} \geq 0, \hat{T}^{\tilde{p}}_{i,J+1} = 0, F^{\tilde{p}}_{i} \geq 0, i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, j = \overline{1, J+1}, k \in \mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}.$$

а также при $\tilde{p} > 1$ ограничениях

$$\delta^{\tilde{p}}_{i,j,k} = \overline{\delta}^{\tilde{p}-1}_{i,j,k}, i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, j = \overline{1, J+1}, k \in \mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}-1}. \quad (1.41)$$

Если решение этой задачи не существует, то $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0$, $\mathcal{D}_i = 0$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. Если $\tilde{s} = S$, то алгоритм завершен. Если $\tilde{s} < S$, то величина $\tilde{s}$ увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 6.

Если решение задачи найдено и $\tilde{p} < P$, то задаются величины $\overline{\delta}^{\tilde{p}}_{i,j,k}$, равные единице, если на промежуток времени $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$ для груза с номером i на этапе с номером j зарезервирована транспортировка с номером k, и равные нулю в противном случае, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k \in \mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}}$. Величина $\tilde{p}$ увеличивается на единицу. Происходит переход к шагу 7.

Если решение задачи найдено и $\tilde{p} = P$, то $\mathcal{D}_i = 1$, задаются величины $\hat{\delta}_{i,j,k}$, равные единице, если для груза с номером i на этапе с номером j используется транспортировка с номером k, и равные 0 в противном случае, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. Если $\tilde{s} = S$, то алгоритм завершен. Если $\tilde{s} < S$, то величина $\tilde{s}$ увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 6.

Отмечается, что ограничение (1.41) позволяет зафиксировать расписание на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}}_1)$ при поиске расписания на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}}_2)$, расписание на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}}_2)$ при поиске расписания на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}}_3)$ и так далее.

Связь между решением задачи (1.21) при ограничениях (1.1)–(1.18), (1.22) и решением, порождаемым представленным выше алгоритмом, устанавливает следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если $\sum\limits_{i=1}^{I} \mathcal{D}_i \equiv I$, то существует хотя бы одно решение системы ограничений (1.1)–(1.18), (1.22), причем одно из решений этой системы можно получить, положив $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{J+1}$, $k = \overline{1, K}$. Если $0 < \sum\limits_{i=1}^{I} \mathcal{D}_i < I$, то существует хотя бы одно решение системы ограничений (1.1)–(1.18), (1.22) для модифицированного набора грузов $\{i \in \mathbb{N} : i \leq I, \mathcal{D}_i \equiv 1\}$.*

Также в первой главе рассматривается задача совместного поиска расписания и назначения «технологического окна» (далее – ТО) длительности не меньше заданного параметра Δ, которое должно осуществляться не ранее t^{o}_1 и не позднее t^{o}_2, когда для ремонта должны быть закрыты некоторые ребра мультиграфа G. Для этой задачи из множества $\mathcal{Z}$ выделяются номера тех транспортировок, у которых ребро, образовываемое первыми тремя компонентами вектора свойств транспортировки, подлежит ремонту. На основе этих номеров составляется множество $Z' \subset \{1, 2, \ldots, K\}$. Предполагается, что для ТО отводится интервал (T_1, T_2), где T_1 и T_2 – переменные, подлежащие определению.

Для исключения транспортировок, попадающие по месту и времени в ТО вводятся вспомогательные бинарные переменные γ_k и $æ_k$, $k \in Z'$. Используя их, накладываются дополнительные ограничения

$$\gamma_k t^{\text{кон.}}_k \leq T_1, T_2 \leq æ_k t^{\text{нач.}}_k + (1 - æ_k) t_{\text{макс}}, k \in Z', \quad (1.42)$$

$$\delta_{i,j,k} \le æ_k + \gamma_k, i = \overline{1,I}, j = \overline{1,J}, k \in Z', \tag{1.43}$$

Если хотя бы одна из переменных $æ_k$ и γ_k будет равна единице, т.е. либо ТО начнется позже окончания транспортировки, либо закончится раньше начала транспортировки, то ограничения (1.43) выродятся в ограничения (1.1) и транспортировка с номером k будет осуществима, $k \in Z'$. В остальных случаях окажется, что $\delta_{i,j,k} \le 0$, а значит, $\delta_{i,j,k} = 0$, что приведет к невозможности осуществления транспортировки с номером k, $k \in Z'$.

Для того, чтобы ТО было длиной не меньше заданного параметра Δ, а также проводилось в заданный временной промежуток времени, накладываются ограничения,

$$T_2 - T_1 \ge \Delta, \quad t_1^{\text{o}} \le T_1, \quad T_2 \le t_2^{\text{o}}. \tag{1.44}$$

С учетом введенных ограничений ставится задача

$$\mathcal{C}(\delta, F, \omega, \hat{T}) \to \min_{\delta, F, \omega \in \{0,1\}^I, \hat{T}, T_1, T_2, æ_k \in \{0,1\}, \gamma_k \in \{0,1\}, k \in Z'} \tag{1.45}$$

при ограничениях (1.1)–(1.18), (1.22), (1.42)–(1.44).

В виду трудоемкости задачи (1.21) при ограничениях (1.1)–(1.18), (1.22), не говоря об учете дополнительных ограничений (1.42)–(1.44), предлагается последовательность действий по поиску субоптимального решения в задаче (1.45) при ограничениях (1.1)–(1.18), (1.22), (1.42)–(1.44). Вначале определяется расписание движения как если бы необходимость назначения ТО отсутствовала. Далее ТО подбирается так, чтобы в него попадало минимальное количество грузов. Далее нужно исключить транспортировки, попадающие в ТО, и заново построить расписание движения для всех грузов.

Пусть найдено оптимальное/субоптимальное решение задачи построения расписания движения грузов по всей транспортной сети: задано множество $Z_i \subset \{1, \dots, K\}$ – множество номеров транспортировок, используемых при движении грузом с номером i, $i = \overline{1,I}$. Далее формируется множество номеров грузов $\overline{\mathcal{I}} \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} : i \le I, Z_i \cap Z' \ne \varnothing\}$. Если множество $\overline{\mathcal{I}}$ пусто, то можно назначить ТО любой длительности в пределах горизонта планирования. Если же множество $\overline{\mathcal{I}}$ непусто, то нужно решить задачу по минимизации количества грузов, попадающих в ТО.

Для этого вводятся дополнительные бинарные переменные $\tilde{\delta}_p$, равенство нулю которых означает, что ни одна из транспортировок для груза с номером p не попадает по времени в ТО, $p \in \overline{\mathcal{I}}$. В этой связи вводятся новые бинарные переменные $\tilde{\delta}_p^{k_p}$, равенство нулю которых означает, что используемая грузом с номером p транспортировка с номером k_p будет доступна вследствие ТО, $p \in \overline{\mathcal{I}}$, $k_p \in Z_p \cap Z'$. Для того, чтобы переменная $\tilde{\delta}_p^{k_p}$ была равна нулю, нужно выполнение либо $T_1 \ge t_{k_p}^{\text{кон.}}$, либо $T_2 \le t_{k_p}^{\text{нач.}}$. В этой связи вводятся дополнительные бинарные переменные $\alpha_p^{k_p}$, $\beta_p^{k_p}$. Переменная $\alpha_p^{k_p}$ равна нулю, только если $T_1 \ge t_{k_p}^{\text{кон.}}$. Переменная $\beta_p^{k_p}$ равна нулю, только если $T_2 \le t_{k_p}^{\text{нач.}}$. С использованием введенных переменных получается следующая задача

$$\sum_{p \in \overline{\mathcal{I}}} \tilde{\delta}_p \to \min_{T_1, T_2, \tilde{\delta}_p \in \{0,1\}, \tilde{\delta}_p^{k_p} \in \{0,1\}, \alpha_p^{k_p} \in \{0,1\}, \beta_p^{k_p} \in \{0,1\}, p \in \overline{\mathcal{I}}, k_p \in Z_p \cap Z'} \tag{1.46}$$

при ограничениях (1.44) и

$$T_1 \geq (1-\alpha_p^{k_p})t_{k_p}^{\text{кон.}}, T_2 \leq (1-\beta_p^{k_p})t_{k_p}^{\text{нач.}} + \beta_p^{k_p} t_{\text{макс.}}, p \in \overline{\mathcal{I}}, k_p \in Z_p \cap Z', \tag{1.47}$$

$$\tilde{\delta}_p^{k_p} \geq \alpha_p^{k_p} + \beta_p^{k_p} - 1, p \in \overline{\mathcal{I}}, k_p \in Z_p \cap Z', \tag{1.48}$$

$$\tilde{\delta}_p \geq \sum_{k_p \in Z_p \cap Z'} \tilde{\delta}_p^{k_p}/K, p \in \overline{\mathcal{I}}. \tag{1.49}$$

Равенство $\tilde{\delta}_p$ единице на оптимальном решении означает, что груз с номером p попадает по времени в ТО, $p \in \overline{\mathcal{I}}$.

Получается следующий **алгоритм** совместного поиска расписания и ТО.

1. При помощи алгоритма поиска расписания ищется расписание движения.

Если по итогу работы алгоритма оказывается $\sum\limits_{i=1}^{I} \mathcal{D}_i \equiv 0$, то не удается построить расписание ни одному из грузов, при этом «технологическое окно» можно установить любой длительности (например, в качестве T_1 можно взять t_1^{o}, а в качестве T_2 – t_2^{o}), алгоритм завершен.

Если по итогу работы алгоритма оказывается $0 < \sum\limits_{i=1}^{I} \mathcal{D}_i \leq I$, то происходит переход к шагу 2.

2. Формируется множество $\overline{\mathcal{I}} = \{i \in \mathbb{N} : i \leq I, \mathcal{D}_i \equiv 1, Z_i \cap Z' \neq \varnothing\}$, где Z_i – множество номеров транспортировок, используемых при движении грузом с номером i, $i = \overline{1, I}$, согласно построенному на 1-м шаге настоящего алгоритма расписанию.

Если множество $\overline{\mathcal{I}}$ пусто, то можно назначить ТО любой длительности в пределах горизонта планирования (например, в качестве T_1 можно взять t_1^{o}, а в качестве T_2 – t_2^{o}), расписание движения построено на шаге 1, алгоритм завершен.

Если множество $\overline{\mathcal{I}}$ непусто, то происходит переход к шагу 3.

3. Решается задача (1.46) при ограничениях (1.44) и (1.47)–(1.49). Полагается T_1^* и T_2^* – оптимальное значение переменных T_1 и T_2 соответственно в этой задаче. Если оптимальное значение критерия в (1.46) при ограничениях (1.44) и (1.47)–(1.49) равно нулю, то T_1^* и T_2^* задают время для проведения ТО, расписание грузов перестраивать не нужно, алгоритм завершен. Если оптимальное значение критерия в задаче (1.46) при ограничениях (1.44) и (1.47)–(1.49) отлично от нуля, то формируется множество $\mathcal{K}' = Z' \bigcap \{k \in Z' : t_k^{\text{кон.}} \leq T_1^*\}^c \bigcap \{k \in Z' : t_k^{\text{нач.}} \geq T_2^*\}^c$, происходит переход к шагу 4.

4. При помощи алгоритма поиска расписания ищется расписание движения с учетом того, что на шаге 11 соответствующего алгоритма добавляются ограничения

$$\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} = 0, i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, j = \overline{1, J+1}, k \in \mathcal{K}^{\tilde{s},\tilde{p}} \bigcap \mathcal{K}', \tag{1.50}$$

гарантирующие, что транспортировки, попадающие в ТО, не будут использованы.

Теорема 1.2. *Если $\sum\limits_{i=1}^{I} \mathcal{D}_i \equiv I$, то существует хотя бы одно решение системы ограничений (1.1)–(1.18), (1.22), (1.42)–(1.44), причем на одном из решений выполняется $\delta_{i,j,k} = \hat{\delta}_{i,j,k}$, переменные T_1 и T_2 для этого решения задаются на шагах 2-4 алгоритма совместного поиска расписания и ТО, $i = \overline{1, I}$,*

$j = \overline{J+1}$, $k = \overline{1,K}$. Если $0 < \sum\limits_{i=1}^{I} \mathcal{D}_i < I$, то существует хотя бы одно решение системы ограничений (1.1)–(1.18), (1.22), (1.42)–(1.44) для модифицированного набора грузов $\{i \in \mathbb{N} : i \leq I, \mathcal{D}_i \equiv 1\}$.

Во второй главе рассматривается неориентированный граф транспортной сети $G =< V, E >$, где V – множество вершин (для железнодорожной станции – это стрелочные переводы, стыки между рельсами и точки входа и выхода со станции (границы станции)), а E – множество ребер (для станции – железнодорожных путей), соединяющих данные вершины. Также задана функция $D : E \to \mathbb{R}_+$, характеризующая длину ребра. Предполагается, что количество ребер в графе G равно m. Ребра графа G перенумеровываются от единицы до m, составляется новый граф $G' =< V', E' >$, множеством вершин V' которого являются номера ребер графа G, т.е. $V' = \{1, 2, \dots, m\}$. Множество ребер E' включает в себя ребра между вершинами из V', если эти вершины являются смежными ребрами в графе G. На элементах множества V' вводится функция $D' : V' \to \mathbb{R}_+$, характеризующая «вес» вершин в графе G', т.е. длину соответствующих ребер в графе G.

Время отсчитывается от некоторого момента отсчета. Предполагается, что в транспортной сети имеется некоторое базовое расписание движения грузов и перевозящих их транспортных средств на промежуток времени $[0, \bar{t}]$, где $\bar{t}$ – некоторое число. Такое расписание представляется в виде функции $F_{\text{общ}} : V' \times [0,\bar{t}] \to \{0,1\}$:

$$F_{\text{общ}}(e,t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \begin{matrix}\text{ребро (графа } G\text{) с номером } e \\ \text{свободно для движения в момент времени } t,\end{matrix} \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases}$$

характеризующей занятость ребра графа для движения в момент времени t. При этом транспортное средство может двигаться отдельно от груза.

Для формирования системы ограничений с целью управления движением формируется множество $\mathcal{T}_e$, состоящее из левой и правой границ интервалов времени, когда ребро с номером e свободно для движения в рамках действующего расписания. С помощью множества $\mathcal{T}_e$ выделяются моменты времени, в которые ребро с номером e свободно. Элементы множества $\mathcal{T}_e$ упорядочиваются по возрастанию, из них составляется вектор τ_e. Предполагается, что $\mathbf{dim}\ \tau_e = 2I_e$, где I_e – количество промежутков времени, когда ребро с номером e свободно для движения.

Предполагается, что требуется встроить в действующее расписание груз/транспортное средство со следующими характеристиками:

– номер ребра e_0 графа G, на котором начинается движение;
– номер ребра e_T графа G, на котором заканчивается движение/происходит выход из транспортной сети;
– максимальная скорость груза/транспортного средства по транспортной сети $v_{\text{макс}}$;
– время (начиная от некоторого момента отсчета) $t_{\text{приб}}$ прибытия на ребро e_0;
– время $t_{\text{мин}}$, не ранее которого нужно закончить движение по ребру e_T;
– время $t_{\text{макс}} \in [0, \bar{t}]$, не позднее которого нужно закончить движение по ребру e_T.

Рассматривается некоторое количество путей (называемых в дальнейшем маршрутами) в графе G' из вершины e_0 в вершину e_T, т.е. последовательностей вершин графа G', упорядоченных по порядку следования груза через транспортную сеть. Предполагается, что общее количество таких последовательностей равно L. Из этих последовательностей составляется множество $\mathcal{E}$. Произвольный элемент E_l множества $\mathcal{E}$ имеет вид $E_l = \{e_{0,l}, e_{1,l}, \ldots, e_{k,l}, \ldots, e_{K_l,l}\}$, где $e_{k,l} \in V'$, причем $e_{0,l} = e_0$ и $e_{K_l,l} = e_T$, $k = \overline{1, K_l}$, $l = \overline{1, L}$.

Полагается, что $t_{k,l}$ – момент перехода с вершины с номером $e_{k-1,l}$ на вершину с номером $e_{k,l}$ графа G', $k = \overline{1, K_l}$; $t_{0,l}$ – время прибытия на вершину с номером $e_{0,l}$ графа G'; $t_{K_l+1,l}$ – время убытия из вершины с номером $e_{K_l,l}$ графа G'. Далее строится система ограничений, задающих движение по маршруту E_l по графу G, т.е. при некотором фиксированном $l \in \{1, \ldots, L\}$. Условие физической реализуемости (невозможности проехать любое ребро графа G за бесконечно малое время) записывается в виде

$$t_{k+1,l} - t_{k,l} \geq \frac{D'(e_{k,l})}{v_{\text{макс}}}, k = \overline{0, K_l}, \tag{2.1}$$

Условие на движение только по свободным ребрам графа G записывается в виде

$$\forall t \in [t_{k,l}, t_{k+1,l}]\ F(e_{k,l}, t) = 0, k = \overline{0, K_l},$$

которое эквивалентно ограничениям

$$\int\limits_{t_{k,l}}^{t_{k+1,l}} F_{\text{общ}}(e_{k,l}, t)dt = 0, k = \overline{0, K_l}. \tag{2.2}$$

Также вводятся ограничения на момент окончания движения

$$t_{\text{мин}} \leq t_{K_l+1,l} \leq t_{\text{макс}}. \tag{2.3}$$

Так как движение начинается в момент времени $t_{\text{приб}}$, вводится ограничение

$$t_{0,l} = t_{\text{приб}}. \tag{2.4}$$

Ставится задача оптимизации времени прохождения груза через транспортную сеть по маршруту E_l, которая имеет вид

$$t_{K_l+1,l} \to \min_{t_{0,l}, t_{1,l}, \ldots, t_{K_l+1,l}} \tag{2.5}$$

при ограничениях (2.1)–(2.4).

Отмечается, что непосредственное решение задачи (2.5) при ограничениях (2.1)–(2.4) затруднительно, так как ограничения (2.2) являются нелинейными. В этой связи путем введения целочисленных переменных исходная задача нелинейного программирования сводится к задаче смешанного целочисленного линейного программирования. Для этого вводятся новые переменные $\delta^i_{k,l}$, равные единице, если движение по ребру с номером $e_{k,l}$ в рамках маршрута E_l осуществляется в промежуток времени между $\tau^{2i-1}_{e_{k,l}}$ и $\tau^{2i}_{e_{k,l}}$, и равные нулю, если движение по ребру с номером $e_{k,l}$ в промежуток времени между $\tau^{2i-1}_{e_{k,l}}$ и $\tau^{2i}_{e_{k,l}}$ не осуществляется, $k = \overline{0, K_l}$, $i = \overline{1, I_{e_{k,l}}}$. Для того, чтобы начать движение по ребру с номером $e_{k,l}$ не раньше $\tau^{2i-1}_{e_{k,l}}$, вводятся ограничения

$$t_{k,l} \geq \delta^i_{k,l} \tau^{2i-1}_{e_{k,l}}, k = \overline{0, K_l}, i = \overline{1, I_{e_{k,l}}}. \tag{2.6}$$

Чтобы закончить движение по ребру с номером $e_{k,l}$ не позднее $\tau^{2i}_{e_{k,l}}$, накладываются

ограничения
$$t_{k+1,l} \le \delta^i_{k,l}\tau^{2i}_{e_{k,l}} + (1-\delta^i_{k,l})t_{\text{макс}}, k=\overline{0,K_l}, i=\overline{1,I_{e_{k,l}}}. \qquad (2.7)$$
При этом движение по каждому ребру может осуществляться только в один из промежутков свободности этого ребра
$$\sum_{i=1}^{I_{e_{k,l}}} \delta^i_{k,l} = 1, k=\overline{0,K_l}. \qquad (2.8)$$

Таким образом, для решения задачи поиска времени движения по маршруту E_l решается задача
$$t_{K_l+1,l} \to \min_{t_{k,l},t_{K_l+1,l},\delta^i_{k,l}\in\{0,1\},k=\overline{0,K_l},i=\overline{1,I_{e_{k,l}}}} \qquad (2.9)$$
при ограничениях (2.1), (2.3), (2.4), (2.6)–(2.8).

Поскольку задача (2.9) с ограничениями (2.1), (2.3), (2.4), (2.6)–(2.8) может не иметь решения, то вводится новая величина
$$T_l \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} T^*_l, & \begin{array}{c}\text{решение задачи (2.9)}\\ \text{с ограничениями (2.1), (2.3), (2.4), (2.6)–(2.8) существует,}\end{array} \\ +\infty, & \text{иначе,} \end{cases}$$
где T^*_l – оптимальное значение критерия в задаче (2.9) с ограничениями (2.1), (2.3), (2.4), (2.6)–(2.8), $l=\overline{1,L}$.

Для решения общей задачи поиска маршрута и времени движения груза и транспортных средств по транспортной сети надо определить
$$\overline{T}^* = \min_{l=1,\ldots,L} \overline{T}_l.$$
С использованием величины $\overline{T}^*$ формируется **алгоритм** поиска расписания движения груза (транспортного средства) через транспортную сеть. Если $\overline{T}^*$ конечно, то надо найти l, при котором $\overline{T}_l$ будет равно $\overline{T}^*$, и использовать полученные времена и маршрут движения груза (транспортного средства). В противном случае, когда $\overline{T}^*$ бесконечно, груз (транспортное средство) пропустить через рассматриваемую транспортную сеть невозможно.

Для решения задачи о назначении «технологического окна» в транспортной сети делаются дополнительные предположения. Предполагается, что для движения с целью проведения технологических работ закрывается некоторый набор ребер $\mathcal{J} = \{j_1,\ldots,j_k,\ldots,j_K\}$, где $j_k \in V'$. Предполагается, что граф сети в течение рассматриваемых суток пересекают P грузов. Эти грузы сортируются по порядку их прибытия в транспортную сеть. Для каждого из этих грузов можно априорно указать функцию $F_p : V' \times [0,\bar{t}] \to \{0,1\}$, характеризующую занятость ребра графа G p-м грузом в момент времени t
$$F_p(e,t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \begin{array}{c}\text{ребро (графа } G\text{) с номером } e \text{ не занято}\\ p\text{-м грузом в момент времени } t,\end{array} \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вначале рассматривается случай поиска промежутка времени (t^*_1, t^*_2) максимальной длительности $\Delta_{\text{макс}} \stackrel{\text{def}}{=} t^*_2 - t^*_1$, в который все ребра, входящие в набор $\mathcal{J}$, свободны от движения.

Для этого вводятся новые переменные $\delta^i_{j_k}$, равные единице, если промежуток времени $[t_1, t_2]$ для ребра с номером j_k будет находиться целиком внутри $[\tau_{j_k}^{2i-1}, \tau_{j_k}^{2i}]$, и равные нулю в ином случае, $k = \overline{1, K}$, $i = \overline{1, I_{j_k}}$. С учетом новых переменных $\delta_{j_k}^i$ задача поиска промежутка времени (t_1^*, t_2^*) имеет вид

$$t_2 - t_1 \to \max_{t_1, t_2, t_1 \le t_2, \delta_{j_1}^1 \in \{0,1\}, \ldots, \delta_{j_1}^{I_{j_1}} \in \{0,1\}, \ldots, \delta_{j_K}^1 \in \{0,1\}, \ldots, \delta_{j_K}^{I_{j_K}} \in \{0,1\}} \tag{2.10}$$

при дополнительных ограничениях

$$\delta_{j_k}^1 + \delta_{j_k}^2 + \ldots + \delta_{j_k}^{I_{j_k}} = 1, k = \overline{1, K}, \tag{2.11}$$

$$t_1 \ge \delta_{j_k}^i \tau_{j_k}^{2i-1}, t_2 \le \delta_{j_k}^i \tau_{j_k}^{2i} + (1 - \delta_{j_k}^i)\bar{t}, k = \overline{1, K}, i = \overline{1, I_{j_k}}. \tag{2.12}$$

Ограничения (2.11)–(2.12) гарантируют, что для каждого ребра промежуток времени (t_1, t_2) целиком находится в одном из интервалов времени, когда это ребро свободно от движения.

В некоторых случаях длительности $\Delta_{\text{макс}}$ может быть недостаточно. А, кроме того, решение задачи (2.10) при ограничениях (2.11)–(2.12) может не существовать. В этой связи алгоритмически следующим шагом по назначению ТО является поиск промежутка времени $(\hat{t}_1^*, \hat{t}_2^*)$ длительностью не меньше заданного параметра Δ, в который движение наименее интенсивно, чтобы закрытие ребер транспортной сети наименьшим образом повлияло на действующее расписание. Под интенсивностью здесь понимается суммарное по всем ребрам количество интервалов времени, когда эти ребра заняты внутри предполагаемого «технологического окна».

Если некоторое подмножество ребер из набора $\mathcal{J}$ свободно от движения в течение рассматриваемых суток, то это подмножество из набора $\mathcal{J}$ исключается, формируется новый набор ребер $\hat{\mathcal{J}}$. Пусть в этом наборе стало $\hat{K}$ ребер и $\hat{\mathcal{J}} = \{j_{(1)}, \ldots, j_{(k)}, \ldots, j_{(\hat{K})}\}$.

Используя функцию $F_{\text{общ}}(e, t)$, формируется множество $\hat{\mathcal{T}}_k$, состоящее из левой и правой границ отрезков времени, когда ребро с номером $j_{(k)}$ будет занято грузами и транспортными средствами, $k = \overline{1, \hat{K}}$. С помощью множества $\hat{\mathcal{T}}_k$ можно определить интервалы времени, в которые ребро с номером $j_{(k)}$ занято. Упорядочив элементы множества $\hat{\mathcal{T}}_k$ по возрастанию, из них составляется вектор $\hat{\tau}_k$. Предполагается, что $\mathbf{dim}\ \hat{\tau}_k = 2\hat{I}_k$, где $\hat{I}_k$ – количество таких отрезков времени, когда $j_{(k)}$ занято.

Вводятся новые бинарные переменные $\hat{\delta}_k^i$, равенство нулю которых означает, что пересечение промежутка времени $[t_1, t_2]$ с отрезком $[\hat{\tau}_k^{2i-1}, \hat{\tau}_k^{2i}]$ состоит из максимум одной точки, $k = \overline{1, \hat{K}}$, $i = \overline{1, I_k}$. Переменная $\hat{\delta}_k^i$ может быть равна нулю либо когда $t_1 \ge \hat{\tau}_k^{2i}$, либо когда $t_2 \le \hat{\tau}_k^{2i-1}$. В этой связи вводятся вспомогательные бинарные переменные γ_k^i, æ$_k^i$. Переменная γ_k^i равна нулю, только если $t_1 \ge \hat{\tau}_k^{2i}$. Переменная æ$_k^i$ равна нулю, только если $t_2 \le \hat{\tau}_k^{2i-1}$. Задача по нахождению промежутка времени длительностью, не менее заданной, при котором ребра из набора $\hat{\mathcal{J}}$ занимаются наименьшее количество раз, принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\hat{K}} \sum_{i=1}^{\hat{I}_K} \hat{\delta}_k^i \to \min_{t_1, t_2, \hat{\delta}_k^i \in \{0,1\}, \gamma_k^i \in \{0,1\}, æ_k^i \in \{0,1\}, k = \overline{1, \hat{K}}, i = \overline{1, \hat{I}_k}} \tag{2.13}$$

$$t_2 - t_1 \ge \Delta, \tag{2.14}$$

$$t_1 \geq (1-\gamma_k^i)\hat{\tau}_k^{2i}, t_2 \leq (1-æ_k^i)\hat{\tau}_k^{2i-1} + \bar{t}æ_k^i, k=\overline{1,\hat{K}}, i=\overline{1,\hat{I}_k}, \qquad (2.15)$$

$$\hat{\delta}_k^i \geq \gamma_k^i + æ_k^i - 1, k=\overline{1,\hat{K}}, i=\overline{1,\hat{I}_k}, \qquad (2.16)$$

Ограничение (2.14) гарантирует, что длительность получаемого промежутка $(\hat{t}_1^*, \hat{t}_2^*)$ будет не менее наперед заданной величины Δ. Ограничения (2.15) нужны для проверки выполнения условий $t_1 \geq \hat{\tau}_k^{2i}$ и $t_2 \leq \hat{\tau}_k^{2i-1}$. Ограничение (2.16) гарантирует, что если либо $æ_k^i$, либо γ_k^i равно нулю, то и $\hat{\delta}_k^i$ на оптимальном решении будет равно нулю в виду бинарности переменных $\hat{\delta}_k^i$ и вида оптимизируемой функции. Если же обе эти переменные будут равны единице, то и $\hat{\delta}_k^i$ будет равно единице.

Имеет смысл и другое толкование интенсивности движения. Под интенсивностью можно понимать количество грузов, которые придется перенести либо на соседние свободные ребра или просто принять позже вследствие назначения «технологического окна». В этой связи рассматривается задача поиска промежутка времени $(\tilde{t}_1^*, \tilde{t}_2^*)$, не меньше заданной длительности Δ, в который заданный набор ребер $\mathcal{J} = \{j_1, \ldots, j_k, \ldots, j_K\}$, где $j_k \in V'$, был бы занят наименьшим количеством грузов. Для этого если какие-то грузы не занимают ни одно из ребер набора J, то они исключаются из рассмотрения. Оставшиеся перенумеровываются согласно порядку прибытия в рассматриваемую транспортную сеть. Предполагается, что после такого исключения осталось $\tilde{P} \geq 1$ грузов. Для p-го груза рассматриваются только те ребра из маршрута его следования по графу сети, которые входят в набор $\mathcal{J}$, а остальные исключаются из рассмотрения. Предполагая, что после исключения таких ребер осталось $\tilde{K}_p$ штук, из оставшихся ребер составляется новый набор $\tilde{\mathcal{J}}_p = \{j_{(1)}^p, \ldots, j_{(k)}^p, \ldots, j_{(\tilde{K}_p)}^p\}$. Для каждого из ребер, входящих в набор $\tilde{\mathcal{J}}_p$, используя функцию $F_p(j,t)$, формируется множество $\tilde{\mathcal{T}}_{p,k}$, состоящее из левой и правой границ интервалов времени, когда ребро с номером $j_{(k)}^p$ будет занято грузом с номером p, $k=\overline{1,\tilde{K}_p}$. С помощью множества $\tilde{\mathcal{T}}_{p,k}$ можно определить интервалы времени, в которые ребро с номером j_k занято грузом с номером p. Упорядочив элементы множества $\tilde{\mathcal{T}}_{p,k}$ по возрастанию, из них составляется вектор $\tilde{\tau}_{p,k}$. Предполагается, что $\mathbf{dim}\ \tilde{\tau}_{p,k} = 2\tilde{I}_{p,k}$, где $\tilde{I}_{p,k}$ – количество таких интервалов.

Вводятся бинарные переменные $\tilde{\delta}_p$, равенство которых нулю означает, что грузу с номером p не нужно менять маршрут движения, $p=\overline{1,\tilde{P}}$. Также вводятся новые бинарные переменные $\tilde{\delta}_{p,k}^i$, равенство нулю которых означает, что пересечение промежутка времени $[t_1, t_2]$ с отрезком $[\tilde{\tau}_{p,k}^{2i-1}, \tilde{\tau}_{p,k}^{2i}]$ состоит из максимум одной точки, $p=\overline{1,\tilde{P}}$, $k=\overline{1,\tilde{K}_p}$, $i=\overline{1,\tilde{I}_{p,k}}$. Для того, чтобы переменная $\tilde{\delta}_{p,k}^i$ была равна нулю, нужно выполнение либо $t_1 \geq \tilde{\tau}_{p,k}^{2i}$, либо $t_2 \leq \tilde{\tau}_{p,k}^{2i-1}$. В этой связи вводятся дополнительные бинарные переменные $\gamma_{p,k}^i$, $æ_{p,k}^i$. Переменная $\gamma_{p,k}^i$ равна нулю, только если $t_1 \geq \tilde{\tau}_{p,k}^{2i}$. Переменная $æ_{p,k}^i$ равна нулю, только если $t_2 \leq \tilde{\tau}_{p,k}^{2i-1}$. С использованием введенных переменных задача по поиску промежутка времени $(\tilde{t}_1^*, \tilde{t}_2^*)$, не меньше заданной длительности Δ, в который заданный набор ребер $J = \{j_1, \ldots, j_k, \ldots, j_K\}$, где $j_k \in V'$, был бы занят наименьшим количеством грузов, принимает вид

$$\sum_{p=1}^{\tilde{P}} \tilde{\delta}_p \to \min_{t_1,t_2,\tilde{\delta}_p\in\{0,1\},\tilde{\delta}^i_{p,k}\in\{0,1\},\gamma^i_{p,k}\in\{0,1\},æ^i_{p,k}\in\{0,1\},p=\overline{1,\tilde{P}},k=\overline{1,\tilde{K}_p},i=\overline{1,\tilde{I}_{p,k}}}$$

$$t_1 \geq (1-\gamma^i_{p,k})\tilde{\tau}^{2i}_{p,k}, t_2 \leq (1-æ^i_{p,k})\tilde{\tau}^{2i-1}_{p,k} + \bar{t}æ^i_{p,k}, p=\overline{1,\tilde{P}}, k=\overline{1,\tilde{K}_p}, i=\overline{1,\tilde{I}_{p,k}},$$

$$t_2 - t_1 \geq \Delta, \tilde{\delta}^i_{p,k} \geq \gamma^i_{p,k} + æ^i_{p,k} - 1, p=\overline{1,\tilde{P}}, k=\overline{1,\tilde{K}_p}, i=\overline{1,\tilde{I}_{p,k}},$$

$$\tilde{\delta}_p \geq \left(\sum_{k=1}^{\tilde{K}_p}\sum_{i=1}^{\tilde{I}_{p,k}} \tilde{\delta}^i_{p,k}\right) \Big/ \sum_{k=1}^{\tilde{K}_p} \tilde{I}_{p,k}, p=\overline{1,\tilde{P}},$$

В третьей главе методами теории вероятностей, математической статистики решается ряд прикладных задач на железнодорожном транспорте.

На основании статистического анализа вводится типизация сходов с рельсов и крушений грузовых поездов:

1. сход вследствие неисправности вагона или секций локомотива вне стрелочного перевода;
2. сход вследствие неисправности рельсов вне стрелочного перевода;
3. сход на стрелочном переводе, не вызванный ранее сошедшим составом, по причине неисправности пути или вагонов/секций локомотива.

Для каждого из типов происшествий строится регрессионная зависимость на основе метода максимального правдоподобия и предположения об отрицательном биномиальном распределении количества подвижных единиц (секций локомотива и вагонов) в сходе с рельсов. Для этого полагается, что для j-й группы происшествий имеется n_j наблюдений, причем для i-го наблюдения (схода) имеются следующие сведения: x_{ij} – общее количество сошедших единиц подвижного состава (секций локомотива и вагонов); χ_{ij} – коэффициент, характеризующий количество путей в месте схода, равный нулю, если сход произошел на однопутном участке, и равный единице в обратном случае; y_{ij} – коэффициент, характеризующий нарушение хотя бы одной единицей подвижного состава габарита соседнего пути, равный единице, если хотя бы одна сошедшая единица подвижного состава нарушила габарит соседнего пути, и равный нулю в обратном случае; v_{ij} – скорость поезда в момент схода, [км/ч]; z_{ij} – номер первой по порядку сошедшей с рельсов подвижной единицы (с головы поезда); $L^{\text{лок.}}_{ij}$ – суммарное количество секций локомотивов в поезде; $L^{\text{в}}_{ij}$ – количество вагонов в поезде; L_{ij} – суммарное количество вагонов и секций локомотива в поезде; w_{ij} – вес поезда, [т]; $æ_{ij}$ – кривизна кривой в месте схода (величина, обратно пропорциональная радиусу кривизны кривой) в месте схода (для прямой кривизна полагается равной нулю), [1/м]; γ_{ij} – профиль пути в месте схода, имеющий знак минус, если уклон представляет спуск, знак плюс, если уклон представляет подъем.

Также вводится вспомогательная переменная $x^{\max} = L^{\text{лок.}} + L^{\text{в}} - z + 1$, которая является реализацией некоторой случайной величины $X^{\max} = L^{\text{лок.}} + L^{\text{в}} - Z + 1$, где Z – случайная величина, соответствующая номеру (от головы поезда) первой из сошедших единиц подвижного состава. В дальнейшем случайная величина $X^{\max}$ называется *остаточной длиной состава.* Также вводится случайная величина $X^{\max}_j$, характеризующая остаточную длину в случае схода по j-й причине. Таким образом, $x_{ij} = L^{\text{лок.}}_{ij} + L^{\text{в}}_{ij} - z_{ij} + 1$, $i = \overline{1, n_j}$, $j = \overline{1, 3}$. Вводится вспомогательная функция $\tilde{\mu}(w, L^{\text{в}}) = w/(69L^{\text{в}}) - 1/3$, характеризующая степень загруженности поезда. Обозначив $\tilde{\mu}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mu}(w_{ij}, L^{\text{в}}_{ij})$, получается степень загруженности поезда полезной нагрузкой при i-м сходе в j-й группе происшествий.

Поскольку в сходе обязательно будет не менее одной подвижной единицы, то имеет место равенство $X_j = 1 + \tilde{X}_j$, где X_j – количество подвижных единиц в сходе с рельсов при сходе j-го типа, $\tilde{X}_j$ – вспомогательная неотрицательная случайная величина, закон распределения которой в дальнейшем оценивается. $j = 1, 2, 3$. Отмечается, что законы распределения случайных величин X_j и $\tilde{X}_j$ зависят от набора параметров $x^{\max}$, v, w, L, $L^{\text{в}}$, $\tilde{\mu}$, æ, γ (реализации остаточной длины, скорости, веса, общего количества подвижных единиц, количества вагонов. загрузки, кривизны, профиля пути в гипотетическом месте сходе).

В работе на основе соотношений отрицательной биномиальной регрессии предполагается, что

$$\mathcal{P}\{\tilde{X}_j = \tilde{x} | X^{\max}_j = x^{\max}, v, w, L, L^{\text{в}}, \tilde{\mu}, æ, \gamma, a_j, \theta_j\} =$$
$$= \frac{\Gamma(\tilde{x} + 1/\theta_j)}{\Gamma(\tilde{x}+1)\Gamma(1/\theta_j)} (1 + \theta_j g_j(a_j, x^{\max}, v, w, L, L^{\text{в}}, \tilde{\mu}, æ, \gamma))^{-(\tilde{x}+1/\theta_j)} \times$$
$$\times (\theta_j g_j(a_j, x^{\max}, v, w, L, L^{\text{в}}, \tilde{\mu}, æ, \gamma))^{\tilde{x}}, \tilde{x} = 0, 1, 2, \ldots .$$

где $a_j \stackrel{\text{def}}{=} (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{m_j j})^{\mathrm{T}}$, m_j – некоторое натуральное число, $g_j(\cdot)$ – некоторая функция, как правило, выбирающаяся экспоненциальным преобразованием от линейной по подлежащим определению параметрам $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{m_j j}$ функции, параметр $\theta_j > 0$ также подлежит определению. Приводимая выше нотация, в которой после вертикальной черты (условия) следует ряд детерминированных величин (скорость, вес) и вектор оцениваемых параметров $\mathrm{col}(a_j^{\mathrm{T}}, \theta_j)$ означает, что вероятность вычисляются при фиксированных значениях этих детерминированных величин. Иными словами, под $\mathcal{P}\{\tilde{X}_j = \tilde{x} | X^{\max}_j = x^{\max}, v, \ldots, \gamma, a_j, \theta_j\}$ понимается $\mathcal{P}\{\tilde{X}_j = \tilde{x} | X^{\max}_j = x^{\max}\}(v, \ldots, \gamma, a_j, \theta_j)$.

Из $\tilde{x}_{1j}$, $\tilde{x}_{2j}$, …, $\tilde{x}_{n_j j}$ составляется вектор $\tilde{x}_j$, а из других введенных характеристик по аналогии составляются вектора $x^{\max}_j$, v_j, w_j, L_j, $L^{\text{в}}_j$, $\tilde{\mu}_j$, æ$_j$, γ_j. Построив логарифмическую функцию правдоподобия

$$\overline{\mathcal{L}}_j(a_j, \theta_j, \tilde{x}_j, x^{\max}_j, v_j, w_j, L_j, L^{\text{в}}_j, \tilde{\mu}_j, æ_j, \gamma_j) =$$
$$= \ln \left(\prod_{i=1}^{n_j} \mathcal{P}\{\tilde{X}_j = \tilde{x}_{ij} | X^{\max}_j = x^{\max}_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, L_{ij}, L^{\text{в}}_{ij}, \tilde{\mu}_{ij}, æ_{ij}, \gamma_{ij}, a_j, \theta_j\} \right) =$$
$$= -n_j \ln(\Gamma(1/\theta_j)) + \sum_{i=1}^{n_j} (\ln(\Gamma(\tilde{x}_{ij} + 1/\theta_j)) +$$
$$+ \tilde{x}_{ij} \ln(\theta_j g_j(a_j, x^{\max}_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, L_{ij}, L^{\text{в}}_{ij}, \tilde{\mu}_{ij}, æ_{ij}, \gamma_{ij})) -$$
$$- (\tilde{x}_{ij} + 1/\theta_j) \ln(1 + \theta_j g_j(a_j, x^{\max}_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, L_{ij}, L^{\text{в}}_{ij}, \tilde{\mu}_{ij}, æ_{ij}, \gamma_{ij})) - \ln(\Gamma(\tilde{x}_{ij} + 1))),$$

ставится задача по отысканию неизвестного вектора a_j и параметра θ_j

$$(\theta^*_j, a^*_j)^{\mathrm{T}} = \arg \max_{a_j \in \mathbb{R}^{m_j}, \theta_j > 0} \overline{\mathcal{L}}_j(a_j, \theta_j, \tilde{x}_j, x^{\max}_j, v_j, w_j, L_j, L^{\text{в}}_j, \tilde{\mu}_j, æ_j, \gamma_j).$$

С использованием величин χ_{ij}, y_{ij} на основе логистической, пробит-регрессий, регрессии Коши ставится и решается задача по оценке вероятности нарушения габарита соседнего пути хотя бы одной сошедшей с рельсов подвижной единицей грузового поезда.

Также рассматривается задача по оценке вероятности бокового столкновения между маневровыми составами, осуществляющими сцепку/прицепку/отцепку вагонов и прочие операции, и пассажирскими/грузовыми поездами, при проезде последними стрелочных переводов. Вначале постулируются необходимые для расчета данные: $\lambda_\text{м}$ — интенсивность следования маневровых составов, [1/ч]; $\lambda_\text{с}$ — интенсивность останавливающихся на стрелочном переводе маневровых составов, [1/ч]; $d_\text{п}$ — средняя длина поезда, [км]; $d_\text{м}$ — средняя длина маневрового состава, [км]; $d_\text{т}$ — средняя длина локомотива (вагона) маневрового состава, [км]; $v_\text{п}$ — средняя скорость поезда, [км/ч]; $v_\text{м}$ — средняя скорость маневрового состава, [км/ч]; $\tau_\text{с}$ — среднее время нахождения маневрового состава на стрелочном переводе при условии остановки на нем, [ч]; $\tau_\text{пс}$ — среднее время стоянки поезда на стрелочном переводе, [ч]; $P_\text{пс}$ — вероятность остановки поезда на стрелочном переводе; $P_\text{п}$ — вероятность проезда на запрещающий сигнал поездом; $P_\text{м}$ — вероятность проезда на запрещающий сигнал маневровым составом.

Вероятность $P(A)$ бокового столкновения поезда и маневрового состава на стрелочном переводе на основе предположения о пуассоновости потоков оценивается величиной

$$P(A) = \left(\lambda_\text{м}\left(\frac{d_\text{п}}{v_\text{п}} + \frac{d_\text{м}}{v_\text{м}}\right)(P_\text{м}(1+P_\text{п}) + P_\text{п}) + \lambda_\text{с}P_\text{п}\tau_\text{с} + \lambda_\text{м}P_\text{м}P_\text{пс}\tau_\text{пс}\right)k_\text{с}, \qquad (3.1)$$

где $k_\text{с}$ принимает значение 1, если стрелочный перевод неизолированный, и 0, если изолированный. Изолированным стрелочным переводом называется тот, на котором столкновение, вызванное проездом на светофор с запрещающим сигналом, невозможно; неизолированным стрелочным переводом называется тот, на котором столкновение возможно.

Далее рассматривается задача об определении вероятности столкновения при проезде поезда через станцию.

Для оценки количества происшествий в транспортной сети предполагается, что имеется I поездов, которые за промежуток времени $\mathcal{T}_+$ должны проследовать по транспортной сети, содержащей M железнодорожных переездов, на которых может произойти столкновение с автотранспортом, вызванное нарушением последним правил движения. Предполагается, что с одним поездом может произойти только одно столкновение. Некоторый промежуток времени $\mathcal{T}_+$ разбивается на T частей. Предполагается, что для i-го поезда заданы:

- N_i – количество переездов, которые пересечет поезд;
- $j_{i,n}$ – номер n-го по порядку следования железнодорожного переезда ($j_{i,n} \in \{1, \ldots, M\}$);
- $t_{i,n}$ – номер промежутка пересечения n-го по порядку следования железнодорожного переезда внутри временного горизонта $\mathcal{T}_+$ ($t_{i,n} \in \{1, \ldots, T\}$),

$i = \overline{1, I}$, $n = \overline{1, N_i}$.

Каждый железнодорожный переезд может быть оборудован теми или иными техническими средствами, позволяющими снизить вероятность столкновения. Далее такие технические средства для краткости называются системами защиты.

Предполагается, что железнодорожный переезд может быть оборудован только одной системы защиты. Также предполагается, что для m-го железнодорожного переезда заданы:

– K_m – количество систем защиты, доступных для установки;
– u_m^0 – номер (пред)установленной системы защиты ($u_m^0 \in \{1, \ldots, K_m\}$);
– $P_{m,k,t}$ – вероятность столкновения автотранспорта с поездом при пересечении последним переезда в t-й промежуток времени при установке на переезде системы защиты с номером k;
– $c_{m,k}$ – стоимость замены текущей системы защиты на систему защиты с номером k (очевидно, $c_{m,u_m^0} = 0$),

$m = \overline{1, M}$, $k = \overline{1, K_m}$, $t = \overline{1, T}$.

Вводятся вспомогательные бинарные переменные $u_{m,k}$, характеризующие установку на переезде с номером m системы защиты с номером k: 0 – на переезде с номером m система защиты с номером k не установлена, и 1 – иначе, $m = \overline{1, M}$, $k = \overline{1, K_m}$. Символьно можно записать

$$u_{m,k} \in \{0, 1\}, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, K_m}. \tag{3.2}$$

На каждом переезде может быть установлена только одна из имеющихся систем защиты

$$u_{m,1} + u_{m,2} + \ldots + {}_{m,K_m} = 1, m = \overline{1, M}. \tag{3.3}$$

Общий объем затрат, связанный с установкой (новых) систем защиты, не должен превышать объема фонда инвестиций C

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K_m} u_{m,k} c_{m,k} \leq C. \tag{3.4}$$

Все переменные $u_{1,1}, \ldots, u_{1,K_1}, \ldots, u_{M,1}, \ldots, u_{M,K_M}$ объединяются в вектор u. Множество допустимых стратегий U формируется из векторов u, удовлетворяющих ограничениям (3.2)–(3.4).

С учетом (3.2), (3.3) и ранее введенных обозначений получается, что вероятность $P_{m,\cdot,t}(u)$ столкновения поезда с автотранспортом в t-й промежуток времени на переезде с номером m определяется по формуле

$$P_{m,\cdot,t}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{K_m} u_{m,k} P_{m,k,t}, \quad m = \overline{1, M}, t = \overline{1, T}.$$

Вводится в рассмотрение случайная величина $X_i(u)$, которая равна единице, если при выбранной стратегии установки систем защиты u с поездом с номером i произойдет столкновение на каком-то из переездов, и равна нулю в противоположном случае, $i = \overline{1, N}$. Очевидно, что $X_i(u) \sim \mathrm{Bi}(1, p_i(u))$, где $p_i(u)$ – вероятность того, что с поездом произойдет столкновение. Делается допущение, что случайные величины $X_1(u)$, $X_2(u)$, …, $X_N(u)$ независимы. Вводится случайная величина $X(u)$, характеризующее суммарное количество столкновений:

$$X(u) \stackrel{\text{def}}{=} X_1(u) + X_2(u) + \ldots + X_I(u).$$

Вводится в рассмотрение функция вероятности $P_\varphi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(X(u) \leq \varphi)$, $\varphi \in \mathbb{Z}_+$. Функция $P_\varphi(u)$ характеризует вероятность того, что за промежуток времени $\mathcal{T}_+$ произойдет не более φ столкновений. На практике цель состоит в максимизации функции $P_\varphi(u)$ при $\varphi = 0$. В этом случае будет найдена стратегия, при которой вероятность того, что не произойдет ни одного столкновения, максимальна. Также рассматривается функция квантили $\varphi_\alpha(u) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (0, 1)$. Функция квантили характеризует наименьшее количество столкновений, которые произойдут в течение промежутка времени $\mathcal{T}_+$, на заданном уровне надежности α. Ставятся задачи

$$P_0(u) \to \max_{u \in U}, \tag{3.5}$$

$$\varphi_\alpha(u) \to \min_{u \in U}. \tag{3.6}$$

Доказывается лемма

Лемма 3.1. *Для функции*

$$P_0^L(u) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{n=1}^{N_i} \sum_{k=1}^{K_{j_{i,n}}} u_{j_{i,n},k} \ln\left(1 - P_{j_{i,n},k,t_{i,n}}\right)$$

справедливо тождество

$$\operatorname{Arg}\max_{u \in U} P_0^L(u) \equiv \operatorname{Arg}\max_{u \in U} P_0(u),$$

которая открывает путь к решению задачи (3.5).

Для поиска приближенного решения задачи (3.6) вводятся функции

$$\tilde{q}_i(u) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sum_{n=1}^{N_i} P_{j_{i,n},\cdot,t_{i,n}}(u), \tilde{p}_i(u) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \tilde{q}_i(u)\ , i = \overline{1, N}.$$

Доказывается лемма.

Лемма 3.2. $\forall \varepsilon \geq 0\ \forall \varphi \in \mathbb{Z}_+\ \forall u \in U$ *справедливо неравенство*

$$P_\varphi(u) \geq \tilde{P}_\varphi(u, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{\prod_{i=1}^{I} [\tilde{q}_i(u) + \tilde{p}_i(u) \exp(\varepsilon)]}{\exp(\varepsilon(\varphi + 1))}.$$

Для приближенного решения задачи (3.6) для каждого $\varphi \in \mathbb{Z}_+$ решается задача

$$\tilde{P}_\varphi(u, \varepsilon) \to \max_{u \in U, \varepsilon \geq 0}.$$

Пусть $(\tilde{u}^*_\varphi, \varepsilon^*_\varphi)$ – точка, доставляющая оптимум в последней задаче. Если для некоторого φ^* справедливо $\tilde{P}_{\varphi^*}(\tilde{u}^*_{\varphi^*}, \varepsilon^*_{\varphi^*}) \geq \alpha$, то в качестве приближенной к оптимальной стратегии в задаче (3.6) выбирается $\tilde{u}^*_{\varphi^*}$, а оценкой величины $\varphi_\alpha(u^*_\alpha)$ является φ^*, где u^*_α – точка, доставляющая оптимум в задаче (3.6).

В четвертой главе строятся функции интегрального (на всем маршруте следования) риска. Для этого полагается, что задан некоторый путь следования некоего транспортного средства. Этот путь делится на $S \in \mathbb{N}$ непересекающихся участков. При движении происходит управление скоростью: v_s – скорость на s-м участке, $s = \overline{1, S}$. Для упрощения допускается мгновенное изменение скорости на участке, скорость считается заданной детерминированной величиной. Предполагается, что на каждом участке при движении могут произойти n неблагоприятных событий (транспортных происшествий). Через $A_{s,i}$ обозначается событие, заключающееся в том, что на s-м участке произойдет i-е событие, $s = \overline{1, S}$, $i = \overline{1, n}$. Предполагается, что на одном участке может произойти максимум одно неблагоприятное событие, причем если это событие наступает, то далее движение не осуществляется. Вводятся обозначения: $P_{1i}(v_1) = \mathcal{P}(A_{1,i})$, $P_{si}(v_s) = \mathcal{P}\left(A_{s,i} \middle| \prod_{t=1}^{s-1} \prod_{j=1}^{n} \overline{A}_{t,j}\right)$, $s = \overline{2, S}$, т.е. для $s \geq 2$ $P_{si}(v_s)$ – это вероятность того, что на s-м участке произойдет i-е неблагоприятное событие, при условии, что на предыдущих $s-1$ участках неблагоприятных событий не произошло. Если $P_{si}(v_s)$ не точные значения вероятностей, то равенства выше понимаются в смысле оценок вероятностей. Ущерб $C_{si}(v_s)$ от возникновения i-го неблагоприятного события на s-м участке полагается случайной величиной с известным распределением, параметры которого определяются только скоростью. Дополнительно предполагается, что математическое ожидание $\mathbf{M}[C_{si}(v_s)]$ конечно для любого значения скорости v_s.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. *Случайная величина $\Phi(v_1, \ldots, v_S)$ – ущерб на всем заранее заданном пути следования – имеет вид*

$$\Phi(v_1, \ldots, v_S) = \sum_{s=1}^{S} \sum_{i=1}^{n} C_{si}(v_s) I(A_{s,i}),$$

где $I(A_{s,i})$ – индикатор события $A_{s,i}$, вероятность которого

$$\mathcal{P}(A_{s,i}) = P_{si}(v_s) \prod_{t=1}^{s-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{n} P_{tj}(v_t)\right), s = \overline{2, S}, i = \overline{1, n}.$$

В качестве функций интегрального риска предлагаются следующие:

$$R_1(v_1, \ldots, v_S) = 1 - \mathcal{P}\left(\prod_{s=1}^{S} \prod_{j=1}^{n} \overline{A}_{s,j}\right) = 1 - \prod_{s=1}^{S} \left[1 - \sum_{j=1}^{n} P_{sj}(v_s)\right],$$

$$R_2(v_1, \ldots, v_S) = \mathbf{M}\left[\Phi(v_1, \ldots, v_S)\right] = \sum_{s=1}^{S} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}[C_{si}(v_s)] P_{si}(v_s) \prod_{t=1}^{s-1} \left[1 - \sum_{j=1}^{n} P_{tj}(v_t)\right].$$

Функция $R_1(v_1, \ldots, v_S)$ при выборе режима движения, то есть набора скоростей v_1, …, v_S, характеризует вероятность того, что на всем пути следования произойдет неблагоприятное событие. Функция $R_2(v_1, \ldots, v_S)$ позволяет вычислить средний ущерб при транспортировке.

Также в четвертой главе в качестве примера практической реализуемости полученных соотношений рассматривается задача по оцениванию компонент функций интегрального риска при движении грузовых поездов. Эти компоненты строятся на основе результатов, полученных в третьей главе.

В пятой главе описывается разработанный в рамках работы над диссертацией комплекс программ. Обсуждается назначение программ, их входные и выходные характеристики.

Также предлагается процедура сравнения решателей задач смешанного целочисленного программирования и вызывающих их программных сред. Данная процедура нужна, в частности, для понимания, возможно ли уменьшение времени, требуемого для работы разработанных в первой и второй главах алгоритмов. Процедура разрабатывается в предположении, что вектор оптимизируемых переменных имеет вид $u = \mathrm{col}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, причем переменные с индексами из множества $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \ldots, i_L\}$ являются целочисленными, а остальные – непрерывными. Учитывая это, задача смешанного целочисленного линейного программирования записывается в виде

$$c^{\mathrm{T}} u \to \min_{u_{j_1} \in \mathbb{Z}, u_{j_2} \in \mathbb{R}, j_1 \in \mathcal{I}, j_2 \in \{1,\ldots,n\}/\mathcal{I}} \quad (5.1)$$

при ограничениях

$$A_1 u \le b_1, A_2 u = b_2, l \le u \le r, \quad (5.2)$$

где $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ – некоторые заданные матрицы (векторы) соответствующей размерности, где, в свою очередь, m_1 – число ограничений типа неравенств, m_2 – число ограничений типа равенств. Компонентами столбцов l и r являются числа из расширенной действительной оси.

Для сравнения работы решателей и программных сред, которыми они вызываются, выбирается ряд практических задач математического программирования. В каждой такой задаче варьируется набор входных данных. Как отмечено в недавней работе А.В. Борисова скорость выполнения одной и той же операции одним и тем же компьютером может быть неодинаково. В этой связи одни и те же эксперименты повторяются несколько раз: на одном и том же наборе входных данных, т.е. матрицах A_1, A_2, векторах b_1, b_2 и других, задача математического программирования (5.1) при ограничениях (5.2) каждым решателем должна решаться R раз. Далее для каждого решателя и для каждой задачи с одинаковыми входными данными выбирается медианное время получения решения (с учетом загрузки данных из файлов). Таким образом для каждого решателя формируется вектор из значений медианного времени, по которому вычисляется среднее, минимальное, максимальное значение, а также среднеквадратичное отклонение. Размерность этого вектора равна количеству наборов входных данных.

Помимо временны́х характеристик для каждого решателя предлагается подсчитывать количество раз с наилучшим значением критериальной функции. Для этого на тех же начальных данных задача математического программирования решается Q (количество используемых решателей) $\times R$ (повторений) раз. Для каждого набора исходных входных вычисляется наилучшее по всем решателям и по всем повторениям наименьшее полученное значение критериальной функции. Далее для каждого решателя вычисляется количество случаев, когда на исследуемом наборе исходных данных, решатель породил упомянутое выше наилучшее значение критерия. После чего такое количество случаев суммируется по всем наборам исходных данных для каждого решателя, что и составляет количество раз с наилучшим значением критериальной функции. При этом каждый решатель запускается $N \times R$ раз, где N – количество наборов исходных данных. Так как задачи математического программирования решаются численно, то считается, что решатель нашел наилучшее решение, если значение критерия на спродуцированном им решении отличается от наилучшего значения критерия на величину, не большую чем ε.

Также в пятой главе рассматривается вопрос о компонентах суммарного времени, затрачиваемого на получение решения в задаче смешанного целочисленного линейного программирования. Показывается, что в некоторых случаях время загрузки данных (и вообще структура их хранения) может быть сравнимо или даже больше собственно времени счета. Это говорит о том, что важным является не только выбор решателя и среды, вызывающей решателей, но также и сама структура хранения исходных данных и способ их чтения.

В заключении подведены основные итоги данной работы, сформулированы результаты, представляемые диссертантом к защите.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Системный подход к решению задачи управления движением на графовых структурах: формализация задач поиска времени и маршрута движения в транспортных сетях, представляемых графами, задачи оценки риска движения на выбранном маршруте следования [2, 7, 8].

2. Математическое и алгоритмическое обеспечение для поиска расписания движения в транспортных сетях с фиксированным временем движения между вершинами: система ограничений, задающая движение по мультиграфу транспортной сети, критериальная функция, алгоритм поиска решения в поставленной задаче – учитывающее возможность движения по окончании горизонта планирования [4–6, 8, 9].

3. Математическое и алгоритмическое обеспечение для поиска расписания движения в транспортных сетях с нефиксированным временем движения между вершинами на основе системы ограничений, учитывающей графовую структуру сети и ряд технологических особенностей движения. Алгоритм поиска промежутка времени, в которое часть ребер графа можно сделать недоступным для движения в таких транспортных сетях [2, 3].

4. Математические методы для решения задач управления надежностью на железнодорожном транспорте: метод оценивания закона распределения количества подвижных единиц грузового поезда в сходе с рельсов; метод оценивания вероятности бокового столкновения на железнодорожной станции; метод уменьшения количества происшествий на железнодорожных переездах [1, 11, 13–15].

5. Математические утверждения о свойствах интегрального (на всем пути следования транспортного средства) риска: теорема о виде закона распределения ущерба при движении; явный вид функций интегрального риска: среднего ущерба и вероятности возникновения неблагоприятных событий [7].

6. Статистический метод сравнения решателей задач смешанного целочисленного линейного программирования [10].

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК, проиндексированные в международных системах цитирования

1. *Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Платонов Е.Н.* Оценка вероятности столкновения железнодорожных составов на железнодорожных станциях на основе пуассоновской модели // Автоматика и телемеханика. 2016. № 11. С. 43–59.
2. *Босов А.В., Игнатов А.Н., Наумов А.В.* Модель передвижения грузов и маневровых локомотивов на железнодорожной станции в приложении к оценке и анализу вероятности бокового столкновения // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12. No. 3. С. 107–114.
3. *Ignatov A.N., Naumov A.V.* On time selection for track possession assignment at the railway station // Bulletin of the South Ural State University. Series

«Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». 2019. Vo. 12. No. 3. P. 5–16.

4. *Гайнанов Д.Н., Игнатов А.Н., Наумов А.В., Рассказова В.А.* О задаче назначения “технологического окна” на участках железнодорожной сети // Автоматика и телемеханика. 2020. № 6. С. 3–16.
5. *Ignatov A.N.* On the scheduling problem of cargo transportation on a railway network segment and algorithms for its solution // Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». 2021. Vo. 14. No. 3. P. 61–76.
6. *Босов А.В., Игнатов А.Н., Наумов А.В.* Алгоритмы приближенного решения задачи назначения «технологического окна» на участках железнодорожной сети // Информатика и ее применения. 2021. Т. 15. № 4. С. 3–11.
7. *Босов А.В., Игнатов А.Н.* О задаче оценки и анализа риска транспортных происшествий на рельсовом транспорте // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. № 1. С. 73–82.
8. *Игнатов А.Н.* Об общей постановке задачи формирования расписания грузоперевозок и способах ее решения // Автоматика и телемеханика. 2023. № 4. С. 145–165.
9. *Игнатов А.Н.* Об алгоритме формирования расписания грузоперевозок в транспортной сети // Автоматика и телемеханика. 2023. № 9. С. 135–152.
10. *Ignatov A.N., Ivanov S.V.* Comparing the solvers for the mixed integer linear programming problems and the software environments that call them // Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software». 2024. Vo. 17. No. 3. P. 57–72.

Публикации в изданиях, не входящих в перечень ВАК, проиндексированные в международных системах цитирования

11. *Ignatov A.N.* On the resource allocation problem to increase reliability of transport systems // Lecture Notes in Computer Science. 2023. Vo. 13930. P. 169–180.

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК, не проиндексированные в международных системах цитирования

12. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Организация мониторинга и оптимальной профилактики по предупреждению транспортного происшествия на заданном уровне надежности // Надежность. 2013. № 4(47). С. 137–149.
13. *Замышляев А.М., Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Новожилов Е.О.* Функциональная зависимость между количеством вагонов в сходе из-за неисправностей вагонов или пути и факторами движения // Надежность. 2018. № 1. С. 53–60.
14. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* О задаче распределения инвестиций в установку средств, предотвращающих несанкционированный проезд автотранспортом железнодорожных переездов, для различных статистических критериев // Надежность. 2018. № 2. С. 31–37.

15. *Замышляев А.М., Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Новожилов Е.О.* О нарушении безопасности движения, связанном с выходом в габарит соседнего пути подвижных единиц грузового поезда, сошедших с рельсов // Надежность. 2018. № 3. С. 39–45.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

16. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Методика организации профилактики транспортного происшествия // Труды второй научно-технической конференции «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте ИСУЖТ-2013». 2013. С. 177–179.

17. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н., Платонов Е.Н.* Методология оценки и минимизации рисков на железнодорожном транспорте // Труды третьей научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2014». 2014. С. 177–179.

18. *Замышляев А.М., Шубинский И.Б., Игнатов А.Н., Кан Ю.С., Кибзун А.И., Платонов Е.Н.* Методика вычисления вероятности столкновения пассажирского поезда с маневровым составом на железнодорожной станции // Труды четвертой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2015». 2015. С. 124–127.

19. *Замышляев А.М., Шубинский И.Б., Игнатов А.Н., Кан Ю.С., Кибзун А.И., Платонов Е.Н.* Применение системы МАЛС для снижения вероятности бокового столкновения на железнодорожных станциях // Труды пятой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2016». 2016. С. 148–151.

20. *Замышляев А.М., Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Новожилов Е.О., Платонов Е.Н., Шубинский И.Б.* Об оценке количества вагонов в сходе при поездной работе на основе факторных моделей // Труды шестой научно- технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2017». 2017. С. 132–135.

21. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* О стратегиях по повышению безопасности движения на железнодорожных переездах, получаемым по различным статистическим критериям // Труды шестой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2017». 2017. С. 129–131.

22. *Азанов В.М., Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Тарасов А.Н.* Логистическая оптимизационная модель управления маневровыми локомотивами на железнодорожной станции // Труды седьмой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на же-

лезнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2018». 2018. С. 99–103.

23. *Замышляев А.М., Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Новожилов Е.О., Платонов Е.Н.* О вероятности выхода в габарит соседнего пути подвижных единиц грузового поезда // Труды седьмой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование. ИСУЖТ-2018». 2018. С. 149–152.

24. *Игнатов А.Н., Селютин С.Е.* Оптимальные стратегии улучшения безопасности на железнодорожных переездах // XLIV Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» 17-20 апреля 2018 г. Москва. Сборник тезисов докладов. Том 2. С. 347.

25. *Игнатов А.Н.* Об одной задаче формирования расписания грузоперевозок // Сборник научных трудов XIV Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). 2024. С. 1991–1995.

26. *Игнатов А.Н.* О влиянии скоростного режима грузового поезда на интегральный риск движения на примере одного набора данных // Материалы Международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024). 2024. С. 145–148.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

27. *Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Платонов Е.Н.* Программно-алгоритмический комплекс расчета вероятности бокового столкновения пассажирского поезда с маневровым составом на станции. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2017617690 от 11.07.2017.

28. *Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Платонов Е.Н.* Программно-алгоритмический комплекс обеспечения безопасности движения на станции с учетом заданного суточного расписания движения грузов. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2018617668 от 28.06.2018.

29. *Азанов В.М., Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Наумов А.В., Торишный Р.О.* Программно-алгоритмический комплекс обработки статистической информации для назначения «технологического окна» на железнодорожной станции. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2019616791 от 29.05.2019.

30. *Игнатов А.Н.* Программно-алгоритмический комплекс автоматического формирования расписания движения в задачах логистики. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2022664267 от 15.07.2022.