

УДК 536.241

## Математическое моделирование выпрямления теплового потока в контактных парах\*

О.Р. Дорняк, В.М. Попов

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова,  
Воронеж, 394087, Россия  
e-mail: ordornyak@mail.ru, vmpopov36@mail.ru

DOI: 10.34759/tpt-2020-12-8-364-373

Поступила в редакцию 21.07.2020

После доработки 07.09.2020

Принята к публикации 08.09.2020

Представлены результаты математического моделирования эффекта выпрямления теплового потока в контактных парах из разнородных материалов. Показано, что интенсивность ректификации теплового потока для пар, в которые включен элемент из пористого материала, существенно выше, чем для пар, выполненных из однородных материалов.

**Ключевые слова:** выпрямление теплового потока, термическое сопротивление контакта, многофазные системы, математическое моделирование.

### Введение

Эффект выпрямления теплового потока (термическая ректификация) – известное явление, наблюдаемое экспериментально для некоторых контактных пар под нагрузкой. Суть явления заключается в том, что эффективность теплового переноса зависит от направления сформировавшегося теплового потока. Интерес к этому явлению вырос в последние десятилетия в связи с разработкой технологий тепловых диодов, предназначенных для преимущественной передачи тепла в одном направлении и применяемых для охлаждения устройств микро- и наноэлектроники [1]. Термическая ректификация изучается как на микро-, так и на макроуровне, и в настоящее время известно о существовании многих механизмов этого эффекта. Следует отметить, что эксперименты по контактному теплообмену показали, что эффект выпрямления теплового потока не слишком значителен, при этом воспроизводимость результатов не всегда достаточно высока [1, 2].

К числу факторов, влияющих на асимметрию теплового потока, относятся контактное давление, разность температур на внешних границах, геометрические и физико-механические свойства поверхностей [1, 2]. Для решения конкретных задач терморегулирования с учетом эффекта выпрямления теплового потока необходимы теоретические модели, позволяющие при данных условиях нагружения, геометрических и физико-механических характеристиках контактных пар прогнозировать термическое сопротивление или проводимость контакта.

Для характеристики эффекта выпрямления теплового потока используется так называемый коэффициент ректификации  $R_q$  [3], который вводится с помощью различных комбинаций, составленных из величин плотности теплового потока в прямом и обратном направлении (рис. 1). В данной работе коэффициент ректификации вычисляется, как в [3]:

$$R_q = q^{(f)}/q^{(r)}.$$

Моделирование тепловых процессов в зоне контакта остается трудной задачей [4]. Ее решение чаще всего проводят на основе моделей реальных шероховатых поверхностей, позволяю-

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-08-00030).

щих прогнозировать изменение фактической площади контакта поверхностей после приложения нагрузки. Наиболее распространены эмпирические модели [4–7]. Также имеются работы, использующие аналитические или численные решения задач термоупругости для односточечного [8] и регулярного многоточечного контакта [9, 10]. Принципиально иной подход к моделированию теплопереноса

в контактных парах, основанный на методологии механики многофазных систем [11], предложен в [12, 13]. В работе [13] математическая модель применяется для изучения явления ректификации теплового потока. Рассматривается одномерное приближение модели в стационарных условиях применительно к двум контактным парам. Первая – сплав Д1Т–сталь 45, вторая – ТИМ-Б–сталь 45. Композит ТИМ-Б – теплоизоляционный материал, созданный на основе короткого базальтового волокна. Таким образом, асимметрия теплового потока анализируется для пар, составленных из однородных и гетерогенных материалов.

Особенность применяемого подхода состоит в представлении зоны соприкосновения шероховатых поверхностей материалов как двухфазной системы, содержащей газ и твердые включения. Для характеристики текстуры шероховатых поверхностей используются две характеристики – объемное содержание и удельная поверхность твердой фазы, которые являются функциями от пространственных координат. В случае, когда не только область контакта, но и сами контактирующие материалы являются многофазными, уравнения модели теплопереноса формулируются одинаково для контактной и внеконтактных зон, при этом учитываются особенности распределения текстурных характеристик в каждой зоне.

### Математическая модель

Для полноты изложения ниже кратко представлена математическая постановка задачи [13], которая апробирована для определения термического сопротивления контакта. Математическая модель сформулирована в предположении малости микродеформаций и микро-

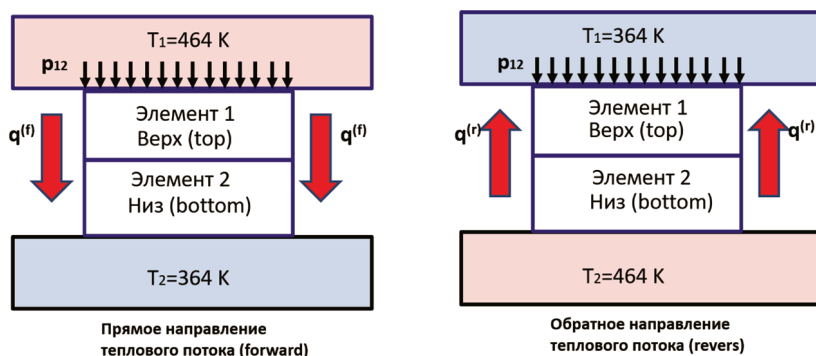


Рис. 1. Ректификация теплового потока – условные обозначения

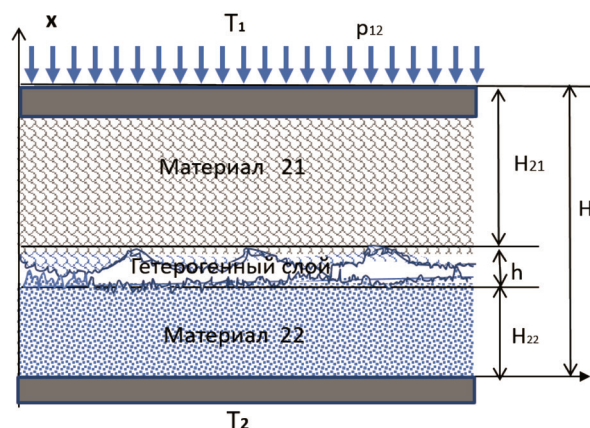


Рис. 2. Расчетная схема

смещений твердой фазы и несжимаемости компонент твердой фазы  $\langle \rho'_i \rangle_i = \rho_i^o = \text{const}$ ;  $i = 21, 22$  [11]. Кроме того, принято, что материал твердой фазы деформируется упруго, а вклад лучистого теплообмена существенно меньше, чем кондуктивного. Наличие жидкой фазы в данной работе не рассматривается.

Введем, следуя [13], обозначения для отличающихся по своим теплофизическим характеристикам зон теплопередачи изучаемой системы (рис. 2):

- верхний слой (21) высотой  $H_{21}$ ;
- нижний слой (22) высотой  $H_{22}$ ;
- промежуточный тонкий слой толщиной  $h$ , который формируется за счет неровностей профиля контактирующих поверхностей.

В данной работе нижний образец – стальная плита, верхний образец – либо однородный материал из алюминиевого сплава, либо пористый теплоизоляционный материал.

При указанных ограничениях уравнения неразрывности, равновесия и теплопроводности, усредненные по объемам отдельных фаз (твердой и газообразной) имеют вид:

$$\partial_t (\alpha_i \langle \rho'_i \rangle_i) + \nabla_k (\alpha_i \langle \rho'_i \rangle_i \langle v_i^{rk} \rangle_i) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

$$\langle p'_1 \rangle_1 = \langle \rho'_1 \rangle_1 \langle T'_1 \rangle_1 B_1;$$

$$\nabla_k (\alpha_i \langle \sigma_i^{rk} \rangle_i) + \sum_{i \neq j} \mathbf{R}_{ji} = 0,$$

$$\mathbf{R}_{ji} = - \frac{\alpha_i \mu_i (\langle \mathbf{v}'_i \rangle_i - \langle \mathbf{v}'_j \rangle_j)}{K_{ji}}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \langle c_{pi} \rangle_i \langle \rho_i \rangle_i \alpha_i \partial_t \langle T_i \rangle_i = \\ & = \nabla_k (\alpha_i \lambda_i \nabla_k \langle T_i \rangle_i) + \sum_{i \neq j} Q_{\Sigma i(j)}; \end{aligned}$$

$$Q_{\Sigma i(j)} = s_{i-j} \alpha_{i-j}^\Sigma (\langle T'_i \rangle_{\Sigma i-j} - \langle T'_i \rangle_i); \quad (3)$$

$$Q_{\Sigma i(j)} = -Q_{\Sigma j(i)}; \quad i, j = 1, 21, 22.$$

Усреднение уравнения теплопроводности проведено дополнительно по объемам твердой фазы каждой компоненты, что позволяет учитывать существенно различную температуру твердой фазы двух материалов в контактной зоне. Соответствующие объемные концентрации связаны соотношениями:

$$\alpha_{21} + \alpha_{22} = \alpha_2; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Система уравнений (1)–(3) замыкается соотношениями Коши и реологическим зависимостями [11], достаточно подробно рассмотренными в [12, 13]:

$$\varepsilon_2^{kl} = \frac{1}{2} (\nabla_k \langle u'_2 \rangle_2 + \nabla_l \langle u'^k_2 \rangle_2); \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_2^{kl} \rangle_2 = & \frac{1}{E_2^s} \left[ (1 + \nu_2^s) \langle \sigma_2^{kl} \rangle_2 - \nu_2^s \langle \sigma_2^{ii} \rangle_2 \delta^{kl} \right] + \\ & + \Lambda_s \langle \Theta'_2 \rangle_2 \delta^{kl}; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{f2}^{kl} = \frac{1}{E_2^f} \left[ (1 + \nu_2^f) \langle \sigma_{f2}^{kl} \rangle_2 - \nu_2^f \langle \sigma_{f2}^{ii} \rangle_2 \delta^{kl} \right];$$

$$\varepsilon_2^{kl} = \langle \varepsilon_2^{kl} \rangle_2 + \varepsilon_{f2}^{kl};$$

$$\sigma_2^{kl} = \alpha_1 \langle \sigma_1^{kl} \rangle_1 + \alpha_2 \langle \sigma_2^{kl} \rangle_2;$$

$$\langle \sigma_1^{kl} \rangle_1 = - \langle p'_1 \rangle_1 \delta^{kl}; \quad \sigma_{f2}^{kl} = \alpha_2 (\langle \sigma_2^{kl} \rangle_2 - \langle \sigma_1^{kl} \rangle_1). \quad (5)$$

Совокупность уравнений (5) определяет связь между макроскопическими тензорами напряжений  $\sigma_2^{kl}$  и деформаций  $\varepsilon_2^{kl}$  в пористой системе с учетом упругого деформирования двух подсистем – структурного каркаса и мате-

риала (вещества), из которого выстроен каркас [11]. Для двухкомпонентной твердой фазы в гетерогенном слое модули Юнга и коэффициенты Пуассона  $E_2^s, E_2^f, \nu_2^s, \nu_2^f, \Lambda_s$  являются эффективными, их определение проводится по правилу смесей [12, 14].

Сформулированные уравнения должны быть дополнены граничными и начальными условиями. Условия на внутренних границах раздела фаз поверхностях и внешних поверхностях имеют вид:

$$\mathbf{R}_{ji} = -\mathbf{R}_{ji}; \quad Q_{\Sigma i(j)} = -Q_{\Sigma j(i)}; \quad i, j = 1, 21, 22; \quad (6)$$

$$\sigma_2^n \Big|_{\Gamma_1} = -p_{21} \mathbf{i}; \quad \sigma_2^\tau \Big|_{\Gamma_1} = 0;$$

$$\langle \mathbf{u}'_2 \rangle_2 \Big|_{\Gamma_2} = 0; \quad \sigma_2^\tau \Big|_{\Gamma_2} = 0; \quad (7)$$

$$\sigma_2^n \Big|_{\Gamma_3} = 0, \quad \sigma_2^\tau \Big|_{\Gamma_3} = 0;$$

$$\langle T'_{22} \rangle_{22} \Big|_{\Gamma_2} = T_2; \quad \langle T'_{21} \rangle_{21} \Big|_{\Gamma_1} = T_1;$$

$$\langle T'_1 \rangle_1 \Big|_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3} = T_c;$$

$$\lambda_i \frac{\partial \langle T'_i \rangle_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = \alpha^\Gamma (T_c - \langle T'_i \rangle_i \Big|_{\Gamma_3}), \quad i = 21, 22. \quad (8)$$

Начальные условия для вектора перемещений и температуры соответствуют состоянию равновесия.

$$\langle \mathbf{u}'_i \rangle_i \Big|_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2; \quad \langle T'_i \rangle_i \Big|_{t=0} = T_0, \quad i = 1, 21, 22. \quad (9)$$

Начальное распределение объемной концентрации твердой фазы в поперечном сечении гетерогенного слоя может быть определено для каждого элемента на основе опорной кривой  $t_p(e_m)$  [12, 13]:

$$\alpha_2(e_m) = t_p(e_m), \quad e_m = z / R_{\max}, \quad (10)$$

где  $z$  – расстояние от выбранной плоскости сечения слоя до плоскости нулевого уровня, которая параллельна срединной плоскости и проходит через вершину выступа максимальной высоты.

В данной работе профили поверхностей образцов из стали 45 и сплава ДТ1 получены с использованием фрактальных кривых, построенных с использованием уравнения Вейерштрасса–Мандельброта вида [15]

$$z(s) = c \sum_{n=NL}^N \frac{\cos(2\pi\gamma^n s)}{\gamma^{(2-D)n}}, \quad 1 < D < 2, \quad \gamma > 1, \quad N = \infty. \quad (11)$$

Математическая модель (1)–(11) описывает процессы теплопереноса в контактных парах под действием сжимающей нагрузки. Результаты моделирования явления термической ректификации, приведенные далее, получены для одномерного стационарного приближения модели с использованием конечно-разностного метода. Верификация модели контактного теплообмена проведена в работах [12, 13], где показано удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных значений контактного термосопротивления. Этот вывод подтвержден также результатами численного исследования, представленного ниже.

### Расчетные параметры для элементов контактных пар

Толщина каждого из образцов составляла  $H_{22} = H_{21} = 0.04$  м. Давление на поверхности контактной пары  $p_{12}$  изменялось в диапазоне от 0.2 до 1 МПа. Значения температуры на внешних поверхностях в прямом направлении  $T_1 = 464$  К,  $T_2 = 364$  К, в обратном –  $T_1 = 364$  К,  $T_2 = 464$  К.

Физико-механические параметры материалов приведены в табл. 1. Данные параметры получены либо экспериментальным, либо расчетным путем [16–18].

Образец из стали 45 имеет шероховатую поверхность класса 9в с максимальной высотой микронеровностей (расстояние между линией выступов и линией впадин)  $R_{\max} = 1$  мкм. Обработка поверхности образца из сплава Д1Т соответствует классу чистоты 7в с  $R_{\max} = 4$  мкм. Волокнистый образец имеет максимальную высоту микронеровностей  $R_{\max} = 300$  мкм, что соответствует классу чистоты 1. Образцу из стали 45 соответствует обозначение 22 для обеих контактных пар.

Рис. 3 иллюстрирует сгенерированные фрактальные кривые – искусственные аналоги опытных профилограмм для поверхностей первой контактной пары [18]. Параметры  $D$ ,  $\gamma$ ,  $c$ ,  $NL$ ,  $N$  для кривых (11) приведены в табл. 1. На основе построенных фрактальных кривых с помощью известного алгоритма получены интерполяционные функции для опорных кривых, используемые в расчетах. Опорные кривые для элементов контактной пары показаны на рис. 4. Начальное объемное содержание твердой фазы в гетерогенном слое определялось в соответствии с зависимостью (10). Отметим, что объемная концентрация твердой фазы на границе гетерогенного слоя со стороны гомогенного материала  $\alpha_2 = 1$ , а со стороны гетерогенного материала  $\alpha_2 = (1 - \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  – пористость материала.

Таблица 1. Значения теплофизических, механических и геометрических параметров элементов контактных пар

Параметр	Материал		
	Д1Т	Сталь 45	ТИМ-Б (основа – короткие базальтовые волокна)
Начальная пористость материала, $\alpha_1$	–	–	0.92
Коэффициент теплопроводности вещества волокон $\lambda_{2i}$ , Вт/(м·К)	181	48.2	3.5
Термический коэффициент линейного расширения $\Lambda_s$ , 1/К	$22.9 \cdot 10^{-6}$	$13.1 \cdot 10^{-6}$	$6.5 \cdot 10^{-6}$
Модуль упругости материала волокон $E^s$ , Па	$7.1 \cdot 10^{10}$	$19.8 \cdot 10^{10}$	$1.1 \cdot 10^{10}$
Коэффициент Пуассона $\nu^s = \nu^f$	0.26	0.26	0.26
Модуль упругости структурного каркаса* $E^f$ , Па	$7.1 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	$1.1 \cdot 10^6$
Значение параметров $s_{1\ 21}$ , $m^{-1}$ и $s_{1\ 22}$ , $m^{-1}$ для расчета удельной площади поверхности твердая фаза-воздух в гетерогенном слое	$6.66 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$
Высота образца, м	0.04	0.04	0.04
Класс чистоты поверхности	▽7в	▽9в	▽1
Максимальная высота микронеровностей, мкм	4	1	300
Параметры уравнения Вейерштрасса–Мандельброта $g/D/NL/N/c$	1.4/1.4/- 17/17/0.024707	1.5/1.5/- 17/17/0.012135	–

\* Для стали и сплава – в гетерогенном слое.

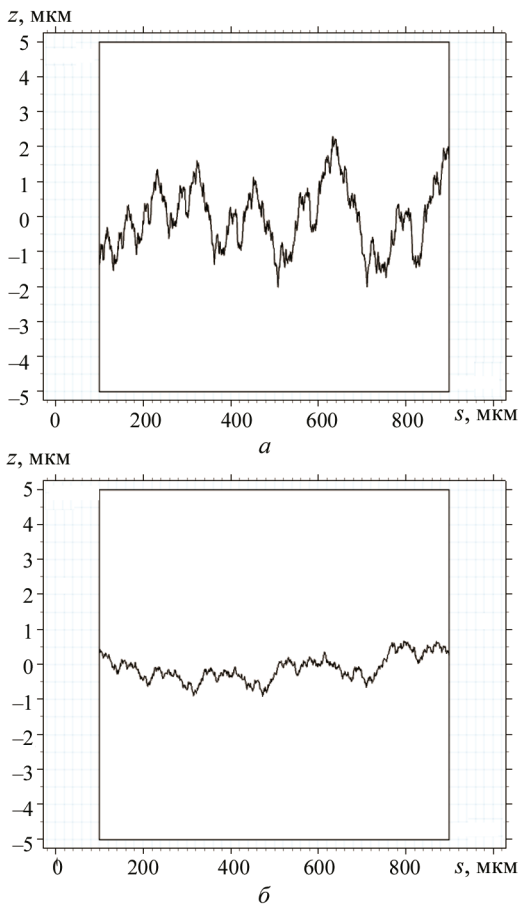


Рис. 3. Профили шероховатости для образцов контактной пары: а – сплав Д1Т при  $D=1.4$ ,  $\gamma=1.4$ ,  $c=0.024707$ ; б – сталь 45 при  $D=1.5$ ,  $\gamma=1.5$ ,  $c=0.012135$

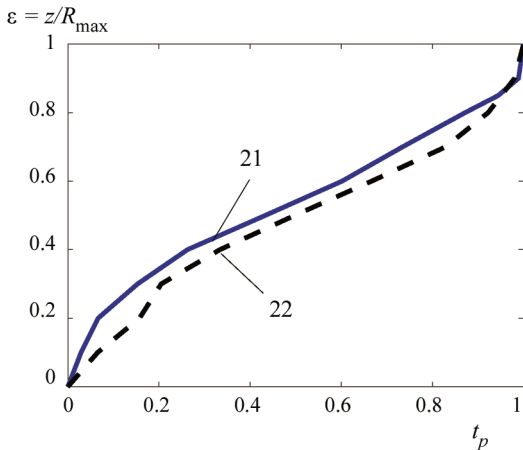


Рис. 4. Опорные кривые для плоскошероховатых поверхностей контактной пары Д1Т (материал 21)–сталь 45 (материал 22)

Коэффициенты теплоотдачи на межфазных поверхностях для всех контактных пар выбирались одинаково:  $\alpha_{1-21}^{\Sigma} = \alpha_{1-22}^{\Sigma} = 2 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ ;  $\alpha_{21-1}^{\Sigma} = \alpha_{22-1}^{\Sigma} = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ ;  $\alpha_{21-22}^{\Sigma} = \alpha_{22-21}^{\Sigma} = 5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ . Коэффициент теплопроводности газа  $\lambda_1 = 0.0248 \text{ Вт}/(\text{мК})$ .

Принято, что в недеформированном состоянии величина удельной площади контакта частиц твердой фазы материалов  $s_{21-22}$  отлична от нуля только вблизи средней линии гетерогенного слоя. Значения удельной поверхности раздела компонент твердой и газообразной фаз в гетерогенном слое определялись приближенно с помощью соотношения

$$s_{1-i} = (1 - \alpha_i(x_1)) \cdot \tilde{s}_{1-i}, \quad i = 21, 22. \quad (12)$$

Параметры  $\tilde{s}_{1-i}, i = 21, 22$ , использованные в расчетах, приведены в табл. 1, а величина  $s_{21-22}$  равна для первой пары  $3.66 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$ , а для второй –  $9.14 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$ . Отметим, что при сжимающих воздействиях на контактную пару значения удельной поверхности раздела фаз  $s_{1-i}, i = 21, 22$  в соответствии с формулой (12) уменьшаются, поскольку  $\alpha_i$  – объемная концентрация твердой фазы обеих компонент в гетерогенном слое увеличивается.

Отметим, что в данной работе в расчетах учтены как упругие, так и температурные деформации материалов.

### Результаты вычислительного эксперимента

Изучаемые контактные пары двух типов находятся в одинаковых условиях внешнего теплового и механического нагружения, но стационарные профили температуры, которые формируются в твердой фазе контактных пар, имеют существенные количественные и качественные различия. Расчеты показали (рис. 5, 6), что температурный скачок  $\Delta T$  в контактной зоне для первой контактной пары (из однородных материалов) примерно в четыре раза меньше этой величины для второй контактной пары, где верхний элемент имеет капиллярно-пористое строение. В установившемся режиме для первой контактной пары имеет место разрывный, но практически линейный профиль температуры твердой фазы, который не слишком отличается от идеального (рис. 5). В то же время, как видно из графиков на рис. 6, в элементе 21 из композиционного материала второй контактной пары, который обладает высокой пористостью, имеет место существенная нелинейность изменения температуры в поперечном сечении в отличие от элемента 22, изготовленного из однородного материала. Указанная нелинейность и связанный с ней существенный

температурный скачок определяются вкладом тепловых источников, интенсивность которых, в свою очередь, зависит от удельной площади межфазной поверхности, а также от коэффициента теплопередачи между фазами.

Эти особенности распределения температуры характерны и при прямом и обратном направлении теплового потока. Очевидно, что в случае идеального контакта коэффициент ректификации  $R_q = 1$ . Расчеты показали, что для анализируемой трехтемпературной математической модели теплопереноса требует уточнения вопрос методики вычисления коэффициента ректификации. Дело в том, что в связи с нелинейным характером температурного профиля плотности теплового потока в твердой фазе, взятые по разные стороны от контактной поверхности, различны:

$$q_t^{(f)} \neq q_b^{(f)}, q_t^{(r)} \neq q_b^{(r)},$$

где  $q_t^{(j)} = q_{21}|_{x=H-H_{21}}$ ,  $q_b^{(j)} = q_{22}|_{x=H_{22}}$ ,  $j = f, r$ .

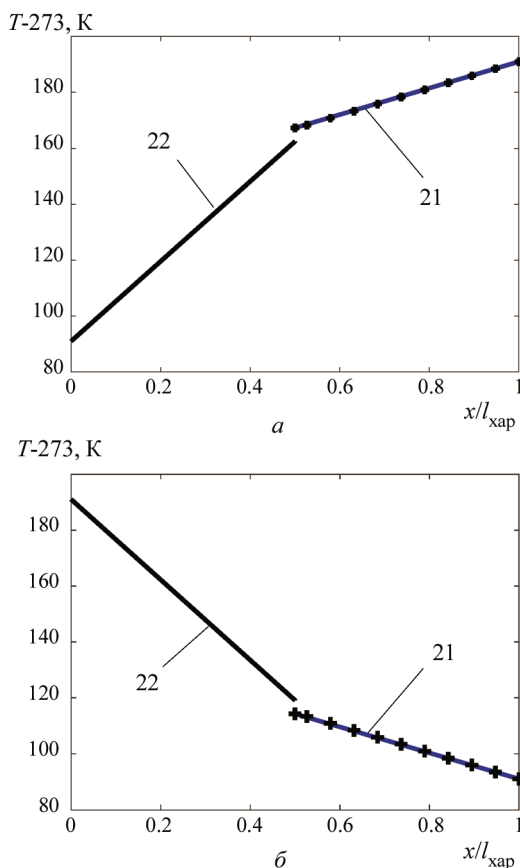


Рис. 5. Распределение температуры по сечению первой контактной пары при прямом (а) и обратном (б) направлениях теплового потока для стали 45 – 22, Д1Т – 21. Маркер «+» относится к газовой фазе. Величина  $l_{хар} = H$

Результаты вычислительного эксперимента показали, что это отличие мало для первой пары – разница составляет ~20%. Для второй пары значения  $q_t^{(j)}$  и  $q_b^{(j)}$ ,  $j = f, r$  отличаются на порядок. Как следствие, характеристики контактной пары, зависящие от плотности теплового потока, такие как коэффициент ректификации  $R_q$ , коэффициент термосопротивления  $R_k$ , также будут иметь разные значения в зависимости от того, отнесены они к нижней (b) или верхней (t) области контактной зоны.

Из графиков на рис. 7 видно, что коэффициент ректификации теплового потока для первой пары из металлических сплавов, вычисленный по дан-

ными для нижнего элемента  $R_{q_b} = \frac{q_b^{(f)}}{q_b^{(r)}} > 1$ , а по данным верхнего элемента –  $R_{q_t} = \frac{q_t^{(f)}}{q_t^{(r)}} < 1$ . Для второй пары, наоборот,  $R_{q_b} < 1$ ,  $R_{q_t} > 1$ . Таким образом, если коэффициент ректификации  $R_q$

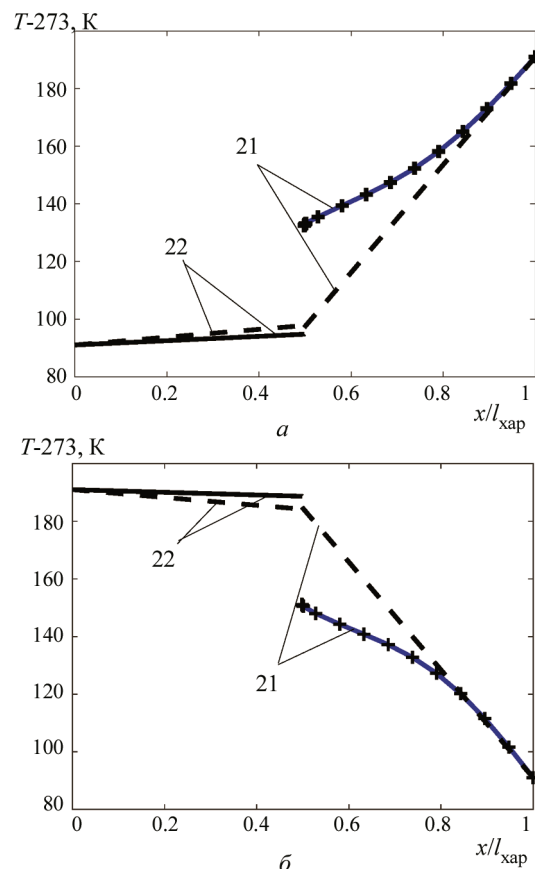


Рис. 6. Распределение температуры по сечению второй контактной пары при прямом (а) и обратном (б) направлениях теплового потока для стали 45 – 22, ТИМ – 21. Маркер «+» относится к газовой фазе. Пунктир соответствует идеальному контакту. Величина  $l_{хар} = H$



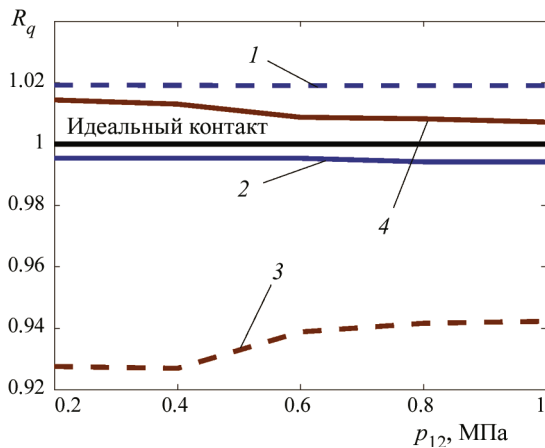


Рис. 7. Зависимость коэффициента ректификации теплового потока от давления для контактных пар Д1Т–сталь 45 (1, 2) и ТИМ–сталь 45 (3, 4). Пунктирные линии относятся к расчетам  $R_{qt}$ , непрерывные – к расчетам  $R_{qb}$

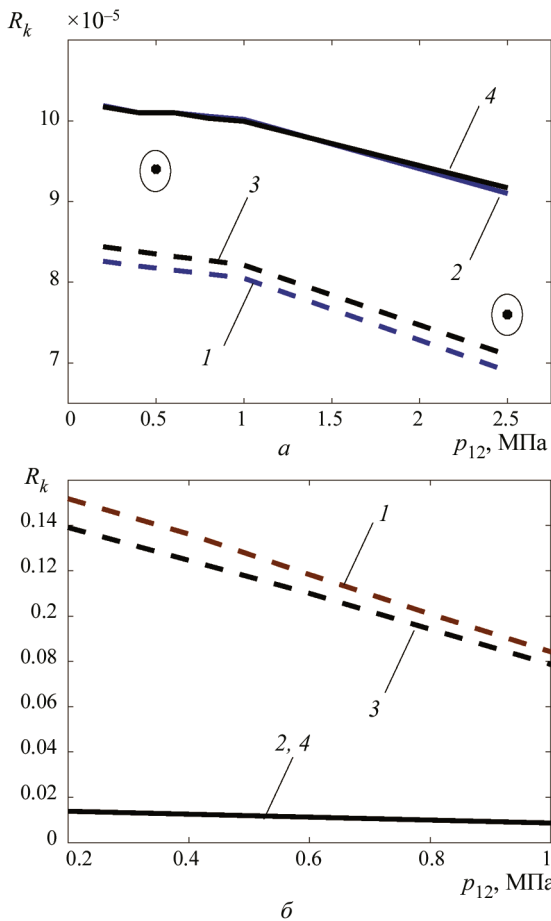


Рис. 8. Зависимость от давления термического сопротивления контактных пар Д1Т–сталь 45 (а) и ТИМ–сталь 45 (б) при прямом (1, 2) и обратном (3, 4) направлениях теплового потока. Непрерывные линии относятся к расчетам  $R_{kb}$ , пунктирные –  $R_{kt}$ . Точки, обведенные овалом, соответствуют эксперименту [17]

отнесен к элементу пары, способному по своим теплофизическим возможностям к более высокой проводимости тепла, то  $R_q > 1$ , иначе –  $R_q < 1$ .

Таблица 2. Расчетные значения коэффициента ректификации  $R_{qt}$  для пары ТИМ–сталь 45

$s_{1\_21}, \text{M}^{-1}$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$	$10^7$	$5 \cdot 10^7$	$10^8$
$R_{qt}$	1.00	0.99	0.97	0.93	0.93	0.87	0.80

Эффект выпрямления теплового потока можно считать малозначительным для первой контактной пары из гомогенных материалов (рис. 7, кривые 1 и 2). Данный вывод согласуется с результатами экспериментов, проведенных для металлических пар [2]. В то же время для второй пары, в которую включен пористый элемент, эффект выпрямления теплового потока выражен в большей мере (рис. 7, кривые 3 и 4).

При увеличении давления сжатия  $p_{12}$  коэффициент ректификации, каким бы образом он не вводился, имеет одинаковую тенденцию для всех пар, которая, как видно из рис. 7, проявляется в стремлении к значению  $R_q = 1$ , соответствующему случаю идеального контакта. Чем больше интенсивность распределенной нагрузки, тем больше деформация сжатия гетерогенного слоя, которая приводит к росту проводимости контакта и снижению вклада теплового взаимодействия фаз в формирование температурного профиля контактной пары. Элемент из ТИМ, входящий в состав второй пары, обладает наибольшей деформативностью по сравнению с другими, поэтому даже в рассматриваемом случае низких значений сжимающих усилий наблюдается увеличение коэффициента  $R_{qt}$  и уменьшение  $R_{qb}$  с ростом давления сжатия (кривые 3 и 4 соответственно).

Данные табл. 2 представляют результаты расчетов коэффициентов ректификации для контактных пар второго типа при варьировании исходных значений удельной площади межфазной поверхности  $s_{1\_21}$  (все остальные параметры были фиксированы). Давление  $p_{12} = 0.2$  МПа. С ростом величины  $s_{1\_21}$  в рассмотренном интервале значений коэффициент ректификации  $R_{qt}$  имеет тенденцию к снижению. В материале со слабо развитой поверхностью пористой структуры (при малых значениях  $s_{1\_21}$ ), коэффициент ректификации близок к 1, т.е. контакт не демонстрирует эффект выпрямления теплового потока. В случае достаточно больших значений  $s_{1\_21}$  имеет место асимметрия распределения тепловых потоков в контактной паре, если судить по значениям коэффициента  $R_{qt}$ .

Графики на рис. 8 показывают, как влияет изменение направления теплового потока на

термическое сопротивление контакта  $R_k$ , которое вычисляется как отношение температурного скачка в зоне контакта к величине плотности теплового потока в этой зоне. Учитывая различие  $q_t$  и  $q_b$ , можно рассматривать два значения термосопротивления контакта, которые отнесены к нижнему и верхнему элементу контактной пары:

$$R_{k_b} = \frac{\Delta T}{q_b}, R_{k_t} = \frac{\Delta T}{q_t}, \Delta T = T|_{x=H-H_{21}} - T|_{x=H_{22}}.$$

Из рис. 8 видно, что выполняется известная закономерность снижения термосопротивления с ростом интенсивности механической нагрузки, которая связана с увеличением фактической удельной площади контакта элементов твердой фазы двух материалов в гетерогенном слое за счет его объемной деформации.

Сравнивая величины контактного сопротивления для первой контактной пары можно сделать вывод, что значения  $R_{k_b}$  и  $R_{k_t}$  отличаются на ~20% (рис. 8, а, кривые 1 и 2 или 3 и 4). Если изменить направление теплопереноса, поменяв местами холодный и горячий резервуары (см. рис. 1), коэффициент термосопротивления изменяется несущественно, при этом  $R_{k_b}^{(f)} = R_{k_b}^{(r)}$  (рис. 8, а, кривые 2, 4). Изменение  $R_{k_t}$  при этом составляет ~2% (рис. 8, а, кривые 1, 3).

Для второй пары с пористым элементом сверху контактные термические сопротивления, рассчитанные по плотности теплового потока для нижнего и верхнего элемента, уже отличаются на ~100% (рис. 8, б, кривые 1 и 2 или 3 и 4). Эффект от изменения направления теплопереноса для величины термосопротивления  $R_{k_b}$  отсутствует (рис. 8, б, кривые 2, 4), а для  $R_{k_t}$  составляет ~10% (рис. 8, б, кривые 1, 3).

## Заключение

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

1. Математическая модель контактного теплообмена в разъемных соединениях, основанная на методах механики многофазных систем, может быть использована для прогнозирования макроскопического эффекта выпрямления теплового потока.

2. В контактных парах, в которые включен элемент с капиллярно-пористой структурой, формируется нелинейный температурный профиль, создающий условия для существенного

проявления термической ректификации и более высоких значений температурного скачка в контактной зоне по сравнению с парами, выполненными из однородных материалов.

3. Интенсивность ректификации теплового потока в контактных парах, в которых имеется двухфазный элемент, увеличивается с ростом удельной площади межфазной поверхности материала, что связано с увеличением мощности тепловых источников, которые определяют специфику распределений температурного профиля и плотности теплового потока твердой фазы вблизи границы контакта.

## Условные обозначения

$\langle \dots \rangle_i$  – усреднение по объему фазы  $i$ ;  
 $B$  – индивидуальная газовая постоянная, Дж/(кг·К);  
 $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении, Дж/(кг·К);  
 $e_m$  – безразмерный аргумент опорной кривой;  
 $E$  – модуль Юнга, Па;  
 $H$  – высота образца контактной пары, м;  
 $h$  – высота гетерогенного слоя, м;  
 $K_{ij}$  – коэффициент проницаемости  $i$ -ой фазы в фазе  $j$ , м<sup>2</sup>;  
 $p$  – давление, Па;  
 $p_{12}$  – интенсивность распределенной нагрузки, Па;  
 $R_k$  – термическое сопротивление теплопередачи, м<sup>2</sup>·К/Вт;  
 $R_{\max}$  – высота неровностей профиля, м;  
 $R_q$  – коэффициент термической ректификации;  
 $\mathbf{R}_{ij}$  – вектор силы взаимодействия фаз  $i$  и  $j$ , Н;  
 $s_{ij}$  – удельная поверхность раздела фаз  $i$  и  $j$ , м<sup>-1</sup>;  
 $\bar{s}_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 21, 22$  – константы, м<sup>-1</sup>;  
 $T$  – температура, К;  
 $t$  – время, с;  
 $t_p(e_m)$  – уравнение опорной кривой;  
 $q$  – плотность теплового потока, Вт/м<sup>2</sup>;  
 $Q_{\Sigma(i)}$  – интенсивность межфазного теплообмена между фазами или компонентами  $i$  и  $j$ , Вт/м<sup>3</sup>;  
 $u$  – перемещение, м;  
 $\mathbf{v}$  – вектор скорости, м/с;  
 $V$  – объем, м<sup>3</sup>;  
 $x^k$  – декартовы координаты ( $k = 1, 2, 3$ ), м;  
 $z$  – размерный аргумент опорной кривой, м;  
 $\alpha$  – объемное содержание фазы;  
 $\alpha_{ij}^{\Sigma}$  – коэффициент теплоотдачи между фазами  $i$  и  $j$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К);  
 $\Delta T$  – температурный скачок в контактной зоне, К;  
 $\delta^{kl}$  – единичный тензор;  
 $\varepsilon^{kl}$  – тензор деформаций;  
 $\Theta$  – разность между текущей температурой и некоторым ее начальным значением, К;  
 $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);  
 $\Lambda$  – коэффициент температурного расширения, К<sup>-1</sup>;  
 $\mu$  – вязкость, Па·с;  
 $\nu$  – коэффициент Пуассона;  
 $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  
 $\sigma^{kl}$  – тензор напряжений, Па;  
 $\sigma^k$  – вектор напряжений, Па.  
*Нижние индексы* относятся: 1, 2 – к газообразной и твердой фазам; 21 и 22 – к компонентам твердой фазы, верхнего и нижнего элемента контактной пары соответственно; 0 – к



начальным значениям;  $c$  – к окружающей среде;  $f$  – к эффективным (фиктивным) значениям;  $k$  – к поверхности контакта;  $s$  – к гомогенному материалу;  $\Sigma_{ij}$  – к границам раздела фаз  $i$  и  $j$ ;  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  – к внешним границам контактной пары (1 – верхняя, 2 – нижняя, 3 – боковые).

*Верхние индексы:* '(штрих) относится к параметрам, являющимся средними в пределах микрообъема  $d^3V \ll h^3$ ;  $f$  – эффективное (фиктивное) значение;  $(f)$  и  $(r)$  – прямое и обратное направление теплового потока;  $s$  – гомогенный материал,  $n$  – нормаль;  $\tau$  – касательная.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Roberts N.A., Walker D.G.** A review of thermal rectification observations and models in solid materials // *International Journal of Thermal Sciences*. 2011. V. 50. Iss. 5. P. 648–662. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2010.12.004
2. **Меснянкин С.Ю., Викулов А.Г., Викулов Д.Г.** Современный взгляд на проблемы теплового контактирования твердых тел // *Успехи физических наук*. 2009. Т. 179. № 9. С. 945–970. DOI: 10.3367/UFN.0179.200909c.0945
3. **Machrafi H., Lebon G., Jou D.** Thermal rectifier efficiency of various bulk–nanoporous silicon devices // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2016. V. 97. P. 603–610. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.02.048>
4. **Liu D., Zhang J.** Numerical simulation of high-temperature thermal contact resistance and its reduction mechanism // *PLOS ONE*. 2018. 13(3): e0194483. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0194483>
5. **Bahrami M., Yovanovich M.M., Culham J.R.** Thermal contact resistance at low contact pressure: Effect of elastic deformation // *Int. J. Heat Mass Tran.* 2005. V. 48. P. 3284–3293. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.02.033
6. **Шлык Ю.П., Ганин Е.А., Царевский С.Н.** Контактное термическое сопротивление. М.: Энергия, 1977. 328 с.
7. **Попов В.М., Краснобородько А.И.** К определению термического контактного сопротивления в газовой среде // *Инженерно-физический журнал*. 1975. Т. 28. № 5. С. 875–883.
8. **Харитонов В.В., Якутин Н.В.** Контактный теплообмен между разнородными материалами // *Журнал технической физики*. 1997. Т. 67. № 2. С. 1–6.
9. **Chumak K.A., Martynyak R.M.** Effective thermal contact resistance of regularly textured bodies in the presence of intercontact heat-conducting media and the phenomenon of thermal rectification // *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. 236(2). P. 160–171. DOI:10.1007/s10958-018-4103-7
10. **Chumak K.A., Martynyak R.M.** The combined thermal and mechanical effect of an interstitial gas on thermal rectification between periodically grooved surfaces // *Frontiers in Mechanical Engineering*. 2019. V. 5. DOI:10.3389/fmech.2019.00042
11. **Нигматулин Р.И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
12. **Дорняк О.Р., Попов В.М., Анашкина Н.А.** Математическое моделирование контактного термического сопротивления для упругодеформируемых твердых тел методами механики многофазных систем // *Инженерно-физический журнал*. 2019. Т. 92. № 5. С. 2155–2167.
13. **Дорняк О.Р., Попов В.М., Анашкина Н.А.** Математическое моделирование термического сопротивления в контактных парах из гомогенных и гетерогенных материалов // *Тепловые процессы в технике*. 2019. Т. 11. № 1. С. 24–33.
14. **Фудзии Т., Зако М.** Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.
15. **Ma C., Zhao L., Shi H., Mei X., Yang J.** A geometrical–mechanical–thermal predictive model for thermal contact conductance in vacuum environment // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*. 2016. Т. 230. № 8. P. 1451–1464. DOI:10.1177/0954405415611358
16. **Демкин Н.Б.** Контактное сопротивление шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
17. **Баданина Ю.В., Комков М.А., Тарасов В.А., Тимофеев М.П., Моисеев А.В.** Моделирование и экспериментальное определение технологических параметров жидкостного формования базальтовой теплоизоляции насосно-компрессорных труб // *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2015. № 4. С. 13–28. DOI: 10.7463/0315.0761820
18. **Попов В.М.** Теплообмен в зоне контакта разъемных и неразъемных соединений. М.: Энергия, 1971. 216 с.

## Mathematical modeling of heat flow rectification in contact pairs

**O.R. Dornyak, V.M. Popov**

*Voronezh State University of Forestry and Technologies Named after G.F. Morozov,*

*Voronezh, 394087, Russia*

*e-mail: ordornyak@mail.ru, vmpopov36@mail.ru*

The results of mathematical modeling of the effect of heat flow rectification in contact pairs made of homogeneous and heterogeneous materials are presented. The contact zone of elements is considered as a heterogeneous medium containing gas and inclusions of the solid phase of contacting materials. Based on the mechanics of multiphase systems, the equations of conservation of mass, equilibrium, and thermal conductivity are formulated, averaged over the volumes occupied by each phase. The influence of temperature deformations on the stress-strain state of the pair under the action of compressive forces is taken into account. In a heterogeneous layer, a three-temperature process is studied for the gas phase and two solid phase components belonging to contact vapor samples from different materials. Two types of pairs are studied: steel 45-alloy DT1 and steel 45-highly porous thermal insulation material based on basalt fibers.

Surface profiles of samples made of 45 steel and DT1 alloy were obtained using fractal curves constructed using the Weierstrass-Mandelbrot equation. The mathematical model does not use micromorphological characteristics of contact surfaces, so reference curves are determined based on them using well-known algorithms. The proposed mathematical model can be used both to study the process of heat flow rectification and to determine the thermal resistance of the contact. A numerical implementation of the one-dimensional stationary approximation of the model based on the finite-difference method is carried out. The model was verified by comparing the data of a computational and field experiment. The results showed good agreement. Calculations have shown that the intensity of heat flow rectification for pairs with a porous element is significantly higher than for pairs made of homogeneous materials. This is due to the fact that the specific area of the interfacial surface of a porous material in a heterogeneous layer is higher than that of a non-porous one. Therefore, the power of heat sources that determine the specific distributions of the temperature profile and the density of the solid phase heat flow near the contact boundary are significantly different. As the compression pressure increases, the rectification coefficient tends to the value corresponding to the ideal contact.

**Keywords:** heat flow rectification, thermal contact resistance, multiphase systems, mathematical modeling.

## REFERENCES

1. **Roberts N.A., Walker D.G.** A review of thermal rectification observations and models in solid materials. *International Journal of Thermal Science*, 2011, vol. 50, no. 5, pp. 648–662. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2010.12.004
2. **Mesnyankin S.Y., Vikulov A.G., Vikulov D.G.** Solid-solid thermal contact problems: current understanding. *Physics-Uspeski*, 2009, vol. 52, no. 9, pp. 891–914. DOI: 10.3367/UFNe.0179.200909c.0945
3. **Machrafi H., Lebon G., Jou D.** Thermal rectifier efficiency of various bulk–nanoporous silicon devices. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 97, pp. 603–610. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.02.048>
4. **Liu D., Zhang J.** Numerical simulation of high-temperature thermal contact resistance and its reduction mechanism. *PLOS ONE*, 2018, vol. 13, no. 3, p. e0194483. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0194483>
5. **Bahrami M., Yovanovich M.M., Culham J.R.** Thermal contact resistance at low contact pressure: Effect of elastic deformation. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2005, vol. 48, pp. 3284–3293. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.02.033
6. **Shlykov Yu.P., Ganin E.A., Tsarevsky S.N.** *Kontaktное термическое сопротивление* [Contact thermal resistance]. Moscow: Energia, 1977. 328 p. In Russ.
7. **Popov V.M., Krasnoborod'ko A.I.** Thermal contact resistance in a gaseous medium. *Journal of Engineering Physics*, 1975, vol. 28, no. 5, pp. 633–638.
8. **Kharitonov V.V., Yakutin N.V.** Contact heat transfer between dissimilar materials. *Technical Physics*, 1997, vol. 42, no. 2, pp. 125–129. doi:10.1134/1.1258613
9. **Chumak K.A., Martynyak R.M.** Effective thermal contact resistance of regularly textured bodies in the presence of intercontact heat-conducting media and the phenomenon of thermal rectification. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 236, no. 2, pp. 160–171. DOI:10.1007/s10958-018-4103-7
10. **Chumak K.A., Martynyak R.M.** The combined thermal and mechanical effect of an interstitial gas on thermal rectification between periodically grooved surfaces. *Frontiers in Mechanical Engineering*, 2019, vol. 5. DOI:10.3389/fmech.2019.00042
11. **Nigmatulin R.I.** *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of mechanics of heterogeneous media]. Moscow: Nauka, 1978. 336 p. In Russ.
12. **Dornyak O.R., Popov V.M., Anashkina N.A.** Mathematical modeling of contact thermal resistance for elastostrained solid bodies by the methods of multiphase systems mechanics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2019, vol. 92, no. 5, pp. 1117–1129.
13. **Dornyak O.R., Popov V.M., Anashkina N.A.** Matematicheskoe modelirovanie termicheskogo soprotivleniya v kontaktnykh parakh iz gomogennykh i geterogennykh materialov [Mathematical modeling of thermal resistance in contact pairs of homogeneous and heterogeneous materials]. *Teplovye processy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 24–33. In Russ.
14. **Fujii T., Zako M.** *Fracture and Mechanics of Composite Materials*. Jikkyo Shuppan, Tokyo, 1978 (Russ. ed. Fujii T., Zako M. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov*. Moscow: Mir, 1982. 232 p.)
15. **Ma C., Zhao L., Shi H., Mei X., Yang J.** A geometrical–mechanical–thermal predictive model for thermal contact conductance in vacuum environment. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*. 2016, vol. 230, no. 8, pp. 1451–1464. DOI:10.1177/0954405415611358
16. **Demkin N.B.** *Kontaktirovanie sherohovatykh poverkhnostej* [Contact of rough surfaces]. Moscow: Nauka, 1970. 227 p. In Russ.
17. **Badanina Yu.V., Komkov M.A., Tarasov V.A., Timofeev M.P., Moiseev A.V.** Modelirovanie i eksperimental'noe opredelenie tekhnologicheskikh parametrov zhidkostnogo formovaniya bazal'tovoy teploizolyacii nasosno-kompressornykh trub [Simulation and experimental determination of technological liquid molding parameters of tubing basalt insulation]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Bauman – Science and education: a scientific publication of Bauman Moscow State Technical University*, 2015, no. 4, pp. 13–28. In Russ. DOI: 10.7463/0315.0761820
18. **Popov V.M.** *Teploobmen v zone kontakta raz"emnyh i neraz"emnyh soedinenij* [Heat transfer in the contact zone of detachable and undetachable connections]. Moscow: Energiya, 1971. 216 p. In Russ.