

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ ПРИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОМ НАГРУЖЕНИИ

КУЗНЕЦОВА Екатерина Львовна, доцент Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н.
Тел. (495) 413-37-72 (дом.), 8-903-719-48-72 (моб), e-mail: lareyna@mail.ru

KUSNETSOVA Ekaterina L., associate professor Moscow aviation institute (State Technical University), candidate of physical and mathematical sciences.
Phone number: 8-495-413-37-72 (home), 8-903-719-48-72 (mobile), e-mail: lareyna@mail.ru

На основе закона нелинейной фильтрации пиролизных газов в пористом остатке композиционных материалов и закона разложения связующих композиционных материалов предложены математическая модель и метод численного решения задач о тепловом состоянии теплозащитных композиционных материалов в условиях высокотемпературного нагружения при аэрогазодинамическом нагреве гиперзвуковых летательных аппаратов (ЛА). Найденный закон нелинейной фильтрации позволил определить нижнюю границу давлений торможения пиролизных газов, начиная с которой необходимо учитывать нелинейность фильтрации. Анализ численных результатов подтверждает эффективность предложенного подхода к моделированию теплового состояния композиционных материалов.

Based on both nonlinear filtration of pyrolysis gases in porous residues of destructing composite materials and binding agents' destruction models a new complex mathematical model of heat-resistant composite protections for flying vehicles subjected to high-temperature loadings by hypersonic gas flows is presented. A numerical method to solve the formulated problem is also described. The proposed nonlinear filtration's model is useful to compute the below boundary of pyrolyse gases flow stagnation's pressure needed for linear model's applicability domain defining. The numerical results' analysis proofs that the proposed modeling approach is able to describe composite materials' heat state theoretically.

Ключевые слова: теплопроводность; аналитические решения; нелинейный закон фильтрации; композиционные материалы; подвижные границы

Key words: heat transfer; analytical solutions; nonlinear filtration's model; composite materials; moving boundaries.

Введение

Композиционные материалы широко применяются в качестве тепловой защиты *гиперзвуковых летательных аппаратов* в условиях интенсивного аэродинамического нагрева, в атомной энергетике, в транспортном и энергетическом машиностроении. В этой связи математическое моделирование теплового состояния композиционных материалов было и остается актуальной проблемой.

В условиях высокоинтенсивного теплового нагружения в композиционных материалах (таких, как стеклопластики, углепластики, асбобластики и др.) возникает область разложения связующего (пиролиза), нестационарно продвигающаяся вглубь материала с образованием газовой фазы и пористого остатка, сквозь который пиролизные газы фильтруются к наружной границе под действием перепада давления. При этом давление пиролизных газов в области разложения связующего называют давлением торможения, поскольку в этой области

скорость газов практически равна нулю. При достижении наружной границы, соприкасающейся с высокоинтенсивным газодинамическим потоком (например, пограничным слоем), температуры фазовых превращений пористого остатка, возникает подвижная граница уноса массы с некоторым тепловым эффектом. До настоящего времени при моделировании сложных процессов теплообмена в композиционных материалах, как правило, рассматривается отдельный материал, для которого в области пиролиза рассматривается ограниченное число компонентов, вступающих в химические реакции (в силу ограниченности знаний о химическом составе связующего композиционного материала). Кроме этого, процесс фильтрации пиролизных газов (как правило, сжимаемых газов) через пористый остаток основан на линейном законе фильтрации Дарси, не учитывающем инерционные члены в уравнении сохранения импульса.

Без учета физико-химических превращений задачи теории теплопроводности хорошо изучены (например, в [1])

В данной работе, на основе анализа течения вязкого газа в капилляре, введения фильтрационного числа Рейнольдса, нелинейной функции этого числа и дальнейшего ее определения, идентифицирован нелинейный закон фильтрации, предложенная обобщенная математическая модель тепломассопереноса в композиционных материалах, с использованием выведенного ранее закона разложения связующих композиционных материалов. Ранее аналогичная проблема рассматривалась в работах [2–4] без учета нелинейной фильтрации.

Идентификация нелинейного закона фильтрации

Известно, что закон линейной фильтрации имеет форму закона Дарси:

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (1)$$

где p — давление; μ — динамическая вязкость; k — коэффициент проницаемости, который определяется экспериментально. При значительных перепадах давления фильтрации возникает необходимость учета инерционных членов при течении в капилляре фильтрационного газа. Действительно, в приближении теории пограничного слоя такие течения можно описать уравнениями

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T) \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0 \text{ при } y = 0; \quad (4)$$

$$u = 0, v = 0 \text{ при } y = R. \quad (5)$$

В тонких каналах, какими являются капилляры с радиусом поперечного сечения, равным R , поперечный компонент v вектора скорости фильтрации мал по сравнению с продольным компонентом u , а температура охладителя в поперечном направлении почти постоянна и равна температуре каркаса. Следовательно, имеем равенство

$$\frac{\partial \mu(T)}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

В соответствии с этими допущениями задача (2)–(5) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{\rho u^2}{2} \right); \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0; \quad (7)$$

$$u = 0 \text{ при } y = R. \quad (8)$$

Полагая в первом приближении, что правая часть в (6) зависит только от переменной x , получим решение задачи (6)–(8):

$$u(x, y) = \frac{R^2 - y^2}{4} \frac{1}{\mu(T)} \frac{d}{dx} \left(p + \frac{\rho u^2}{2} \right), \quad (9)$$

отличающееся от известного закона Пуазейля наличием производной динамического давления $\frac{\rho u^2}{2}$ по продольной переменной x .

Таким образом, линейный закон фильтрации Дарси (1) характеризуется полным отсутствием инерционных членов в уравнении сохранения импульса (6). Сравнивая (9) с (1), можно записать нелинейный закон фильтрации в следующем виде:

$$u = -\frac{k}{\mu(T)} \frac{d}{dx} \left(p + \frac{\rho u^2}{2} \right) \quad (10)$$

или

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{k} u \left(1 + \frac{k}{\mu} \rho \left| \frac{du}{dx} \right| \right), \quad (11)$$

поскольку с падением давления ($dp/dx < 0$) наблюдается рост продольного компонента скорости фильтрации ($du/dx > 0$).

Результат, аналогичный (11), можно получить и путем введения фильтрационного числа Рейнольдса $Re_L = \rho u L / \mu$. М.Д. Миллионщиков предложил в качестве характерного размера в Re_L принять величину $L = \sqrt{k/\Pi}$ (Π — пористость), а в качестве характерной скорости — среднюю скорость $u = u_m / \Pi$, $u_m = G/\rho$ (G — секундный расход охладителя в капилляре). Тогда $Re_L = \rho u_m \sqrt{k} / (\Pi^{3/2} \mu)$.

Рассмотрим закон нелинейной фильтрации в виде, в котором антиградиент давления пропорционален некоторой функции фильтрационного числа Рейнольдса Re_L и в соответствии с (11) — величинам μ и u :

$$-\frac{dp}{dx} \sim \mu u f(Re_L). \quad (12)$$

На основе анализа размерностей коэффициент пропорциональности в (12) равен $1/L^2 = \Pi/k$ и, следовательно,

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu u}{L^2} f(\text{Re}_L). \quad (13)$$

Разлагая функцию $f(\text{Re}_L)$ в ряд Тейлора по степеням Re_L в окрестности $\text{Re}_L = 0$ и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$f(\text{Re}_L) = f(0) + \text{Re}_L f'(0). \quad (14)$$

Таким образом, в соответствии с (13) и (14) имеем

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu \Pi u_m}{k \Pi} \left(f(0) + \frac{\rho u_m \sqrt{k}}{\Pi^{3/2} \mu} f'(0) \right), \quad (15)$$

где Π — пористость; u_m — средняя по сечению капилляра скорость.

При малых числах Re_L вторым слагаемым в (15) пренебрегаем, в результате чего получаем линейный закон фильтрации (1), для которого $f(0) = 1$. Кроме этого, из сравнения вторых слагаемых в (11) и (15) получаем $\left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{u_m \sqrt{\Pi}}{\Pi \sqrt{k}}$, поскольку

ку $u_m = 0$ при $x = 0$)

$$\frac{k}{\mu} \rho \left| \frac{du}{dx} \right| = \frac{\rho u_m \sqrt{k} \Pi}{\sqrt{\Pi} \mu \Pi} = \Pi \text{Re}_L;$$

$$\frac{\rho u_m \sqrt{k}}{\Pi^{3/2} \mu} f'(0) = \text{Re}_L f'(0),$$

т.е. $f'(0) = \Pi$.

Следовательно, нелинейная относительно числа Re_L функция $f(\text{Re}_L)$, обладающая свойствами $f(0) = 1$ и $f'(0) = \Pi$, имеет вид

$$f(\text{Re}_L) = \exp(\Pi \text{Re}_L) \quad (16)$$

и нелинейный закон фильтрации выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= -\frac{\mu u_m}{k} \exp(\Pi \text{Re}_L); \\ \text{Re}_L &= \frac{\rho u_m \sqrt{k}}{\Pi^{3/2} \mu} \end{aligned} \quad (17)$$

или с погрешностью $(\Pi \text{Re}_L)^2$

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu u_m}{k} (1 + \Pi \text{Re}_L). \quad (18)$$

В более привычной форме закон (18) записывается относительно средней скорости таким образом:

$$\begin{aligned} u_m &= -\frac{k}{\mu(T)(1 + \Pi \text{Re}_L)} \frac{dp}{dx}; \\ \text{Re}_L &= \frac{\rho u_m \sqrt{k}}{\Pi^{3/2} \mu}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) видно, что увеличение числа Re_L , в частности скорости u_m , входящей в Re_L , сопровождается уменьшением той же скорости u_m , стоящей в левой части (19), т.е. наблюдается нелинейность относительно скорости u_m .

Таким образом, нелинейность закона фильтрации, связанная с учетом инерционных членов, увеличивает коэффициент динамической вязкости и, следовательно, уменьшает скорость фильтрации. С другой стороны, увеличение градиента давления ведет к возрастанию скорости фильтрации и числа Re_L , что уменьшает скорость фильтрации.

На рис. 1 представлены зависимости линейной и нелинейной скоростей фильтрации в пористом остатке композиционного материала от градиента давления фильтрации и динамической вязкости пиролизных газов. Из рис. 1 видно, что нелинейность закона фильтрации начинает оказывать влияние на скорость фильтрации при значениях динамической вязкости охладителя от $\mu = 8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) и ниже при градиенте давления равном $\sim 1,7 \cdot 10^8$ Па/м. При уменьшении вязкости до значения $1 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) градиент давления, при котором необходимо учитывать нелинейную фильтрацию, составляет $\sim 0,3 \cdot 10^8$ Па/м.

Математическая модель тепломассопереноса

Для многослойной области, в которой наружный материал задается композиционным, рассматривается следующая задача тепломассопереноса при сложном теплообмене на свободных границах w_1, w_2 .

Баланс конвективно-кондуктивных и лучистых тепловых потоков на наружной границе w_1 , соприкасающейся с высокотемпературным газодинамическим пограничным слоем, с учетом уноса массы

$$\alpha_{w1} (T_{e1} - T_{w1}) - \lambda_r \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{w1} - \epsilon_{w1} \sigma T_{w1}^4 = \quad (20)$$

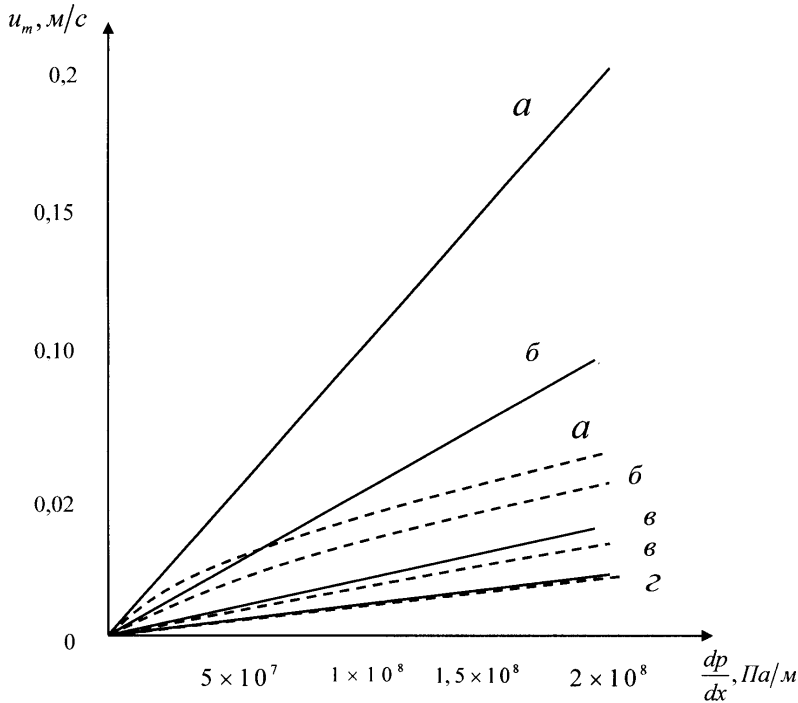


Рис. 1. Сравнение линейной (сплошная линия) и нелинейной (пунктирная линия) скоростей фильтрации в зависимости от градиента давления динамической вязкости:

a — $\mu = 1 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с); *б* — $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с); *в* — $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с); *г* — $\mu = 8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с)

$$= \begin{cases} 0, & x = x_{w1}, \quad x_{w1} = x_0 + \sum_{s=1}^r \delta_{r-s+1}, \\ & \lambda = \lambda_r, \quad 0 < t < t_H^*; \\ \dot{m} \cdot Q^*(T_{e1}), \quad T_{w1} = T_{w1}^*(T_{e1}), \quad \lambda = (\lambda_r)_{eff}, \\ & t_H^* < t < t_K^*, \quad x = x_{w1}^*(t); \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{w2}(T_{e2} - T_{w2}) + \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{w2} - \varepsilon_{w2} \sigma T_{w2}^4 = 0, \\ x = x_0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (24)$$

Уравнение теплопроводности с учетом фильтрации в пористом остатке

$$x_{w1}^*(t) = x_0 + \sum_{s=1}^r \delta_{r-s+1} - \int_{t_H^*}^t \dot{x}^*(\theta) d\theta. \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & (c_r)_{eff}(T) \cdot (\rho_r)_{eff}(x) \frac{\partial T}{\partial t} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left((\lambda_r)_{eff}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \Pi(c_p \rho u)_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial x}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$x_K^{**}(t) < x < x_{w1}^*(t), \quad t > t_H^{**}.$$

Уравнение теплопроводности в конструкционных материалах

$$c_s(T) \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_s(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (22)$$

$$x_{s-1} < x \leq x_s, \quad s = \overline{1, r-1}, \quad t > 0.$$

Температура на границе окончания разложения связующего

$$T = T_K^{**}, \quad x = x_K^{**}(t), \quad t > t_K^{**}. \quad (26)$$

Непрерывность тепловых потоков и температур на границах разрыва теплофизических характеристик (ТФХ) конструкционных материалов

Уравнение энергии в зоне разложения связующего с учетом физико-химических превращений с тепловым эффектом Q^{**} и фильтрацией с переменной пористостью

$$\begin{aligned} & \lambda_{s+1}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_s+0} - \lambda_s(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_s-0} = 0, \\ & x = x_s, \quad s = \overline{1, r-1}, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & (c_r)_{eff}(x, T) \cdot (\rho_r)_{eff}(x, T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((\lambda_r)_{eff}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \\ & - \dot{\rho}_r(x, t) Q^{**} - \Pi^{**}(x) (c_p \rho u)_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$x_H^{**}(t) < x < x_K^{**}(t), \quad t > t_H^{**}. \quad (27)$$

Баланс конвективно-кондуктивных и лучистых тепловых потоков на внутренней границе w_2

Температура на границе начала разложения связующего

$$T = T_H^{**}, \quad x = x_H^{**}(t), \quad t > t_H^{**}. \quad (28)$$

Переменная пористость в зоне разложения связующего

$$\Pi^{**}(x) = \Pi \frac{x - x_H^{**}}{x_K^{**} - x_H^{**}}, \quad x_H^{**}(t) < x < x_K^{**}(t), \quad t > t_H^{**}. \quad (29)$$

Идентифицированный закон разложения связующего

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial p_r}{\partial t} + \frac{\partial p_r}{\partial x} \frac{dx}{dt} = -\rho_r A \cdot \exp\left(\frac{-B}{T}\right), \quad (30)$$

$$x_H^{**}(t) < x < x_K^{**}(t), \quad t > t_H^{**}.$$

Условие Стефана на нестационарно подвижной границе начала разложения связующего

$$(\lambda_r)_{eff}(T_H^{**}) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_H^{**}(t)+0} - (\lambda_r)(T_H^{**}) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_H^{**}(t)-0} =$$

$$= \rho_r \dot{x}_H^{**}(t) Q^{**}, \quad x = x_H^{**}(t), \quad t > t_H^{**}. \quad (31)$$

Условие Стефана на нестационарно подвижной границе окончания разложения связующего

$$(\lambda_r)_{eff}(T_K^{**}) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_K^{**}(t)+0} - (\lambda_r)(T_K^{**}) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_K^{**}(t)-0} =$$

$$= (\rho_r)_{eff}(x_K^{**}(t)-0) \dot{x}_K^{**}(t) Q^{**}, \quad x = x_K^{**}(t), \quad t > t_K^{**}. \quad (32)$$

Уравнение неразрывности для пиролизных газов

$$\frac{\partial(\rho_\Gamma u_\Gamma)}{\partial x} = 0, \quad x_K^{**}(t) < x < x_{w1}^*(t), \quad t > t_K^{**}. \quad (33)$$

Уравнение состояния пиролизных газов

$$\rho_\Gamma(x) = \frac{p_\Gamma(x) \bar{M}_\Gamma}{R_\Gamma \cdot T(x)}, \quad x_K^{**}(t) < x < x_{w1}^*(t), \quad t > t_K^{**}. \quad (34)$$

Идентифицированный закон фильтрации

$$u_m = \frac{k}{\mu(T)(1 + \Pi \text{Re}_L)} \frac{dp}{dx}, \quad \text{Re}_L = \frac{\rho u_m \sqrt{k}}{\Pi^{1/2} \mu}, \quad (35)$$

$$x_K^{**}(t) < x < x_{w1}^*(t), \quad t > t_K^{**}.$$

Давление на наружной свободной границе w_1 , давление и плотность торможения пиролизных газов в области разложения связующего

$$p(x_{w1}) = p_{w1}; \quad p(x_k^{**}) = \frac{\rho_{0\Gamma} R_\Gamma T_k^{**}}{M_\Gamma}; \quad \rho_{0\Gamma} = \int_{x_H^{**}}^{x_k^{**}} \dot{\rho}_r(t) dt. \quad (36)$$

Начальные условия для температуры и подвижных границ

$$T(x, 0) = T_H(x), \quad x_0 < x < x_{w1}, \quad (37)$$

$$t = 0; \quad x_H^{**}(0) = x_K^{**}(0) = x_{w1}^*(0) = x_{w1}.$$

Условие необратимости термодинамических процессов

$$T_H^{**} < T_K^{**} < T_{w1}^*(T_{e1}); \quad \rho_K(T) < \rho_H(T). \quad (38)$$

Эффективные значения теплофизических характеристик в пористом остатке определяются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ c \\ \lambda \end{pmatrix}_{eff} = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ \lambda \end{pmatrix}_{kc} \cdot (1 - \Pi) + \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ \lambda \end{pmatrix}_{\Gamma} \cdot \Pi.$$

Результаты численного решения

На рис. 2 и 3 представлены результаты численного решения задачи (20)–(38) без учета уноса массы температурных полей в трех областях для случая $Q^{**} = 1000$ кДж/кг при различных температурах T_H^{**} и T_K^{**} в различные моменты времени. На рисунках четко прослеживаются положения границ $x_H^{**}(t)$ и $x_K^{**}(t)$ по разрыву касательных к графикам функций, причем если разница $\Delta T^{**} = T_K^{**} - T_H^{**}$ мала ($\Delta T^{**} = 300$ К, рис. 2), то профили температур находятся на более близком расстоянии друг от друга по сравнению со случаем $\Delta T^{**} = 700$ К (рис. 3). При этом скорость движения границ в существенной степени зависит от уровня температур T_H^{**} и T_K^{**} и теплоты фазовых превращений Q^{**} .

Выводы

На основе идентифицированного закона нелинейной фильтрации пиролизных газов при разложении связующих композиционных материалов предложена физико-математическая модель определения

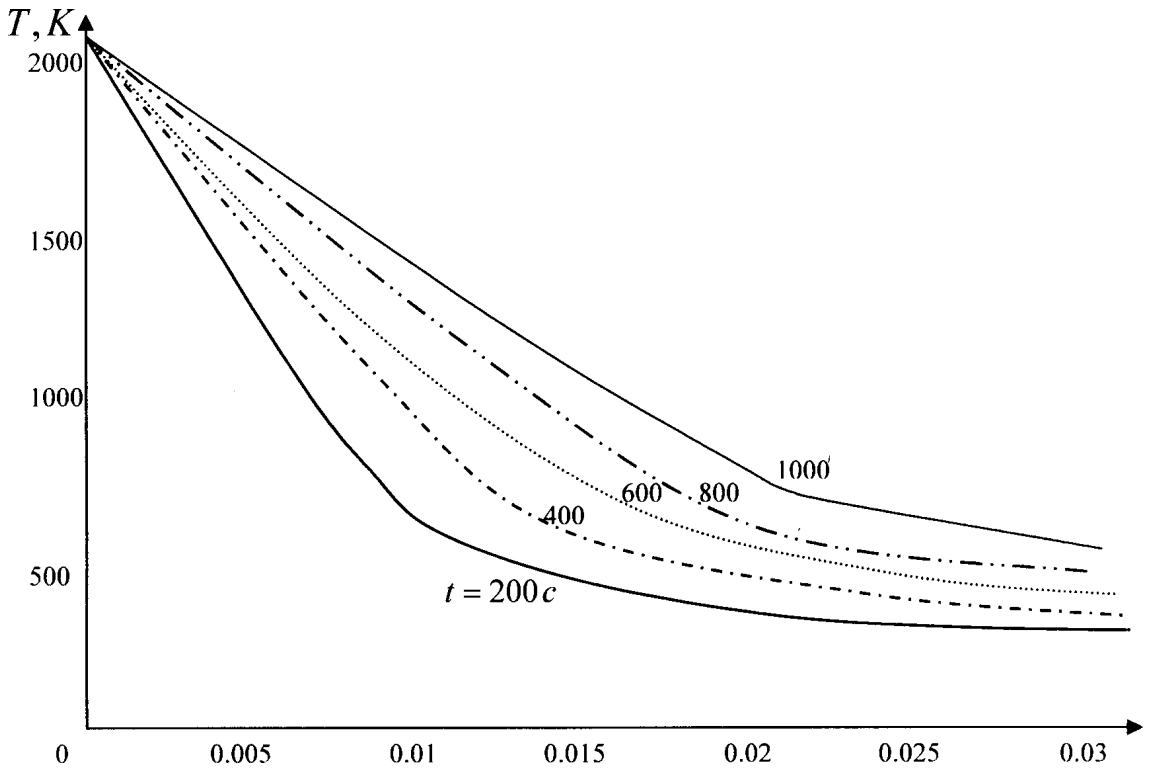


Рис. 2. Распределение температур в трех областях, ограниченных подвижными границами:

$$Q^{**} = 1000 \text{ кДж/кг}, T_{\text{H}}^{**} = 600 \text{ К}, T_{\text{K}}^{**} = 900 \text{ К}$$

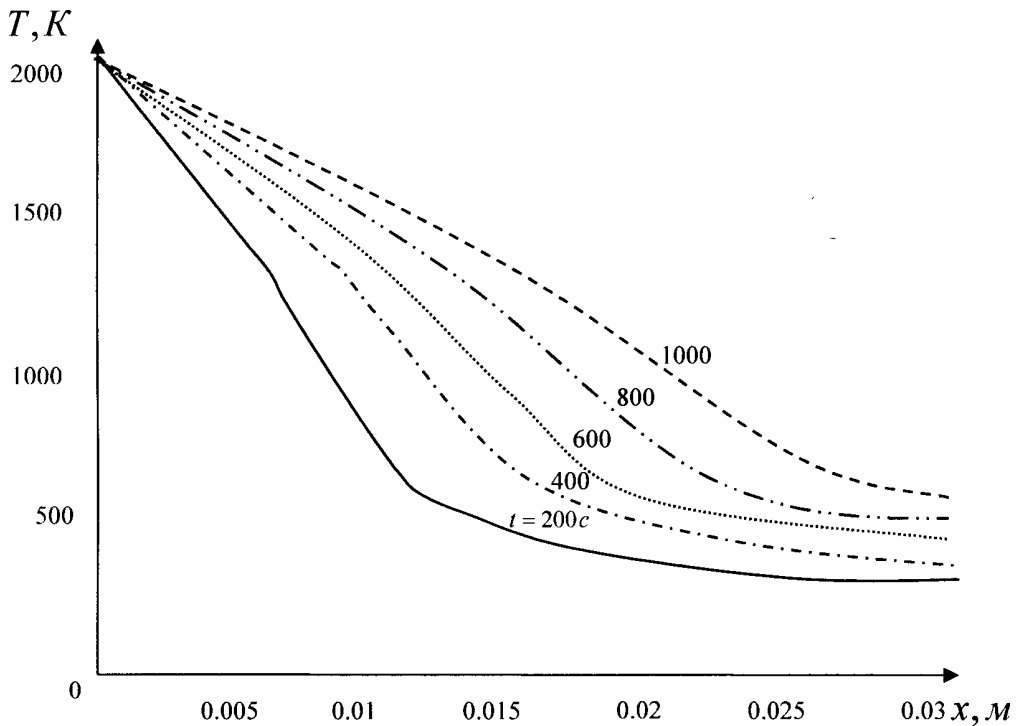


Рис. 3. Распределение температур в трех областях, ограниченных подвижными границами $x_{\text{H}}^{**}(t)$, $x_{\text{K}}^{**}(t)$:

$$Q^{**} = 1000 \text{ кДж/кг}, T_{\text{H}}^{**} = 600 \text{ К}, T_{\text{K}}^{**} = 1300 \text{ К}$$

теплого состояния теплозащитных покрытий, изготовленных из различных композиционных материалов, в условиях аэрогазодинамического нагрева

гиперзвуковых летательных аппаратов. Получены и проанализированы результаты, подтверждающие эффективность предложенного подхода.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 08-08-00880-а, гранта Президента Российской Федерации МК-1184.2009.8, при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы в рамках мероприятия 1.1 «Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров» госконтракт № 2.740.11.0227 от 17 июля 2009 г. и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы в рамках мероприятия 1.2.1 «Проведение научных исследований научными группами под руководством докторов наук» госконтракт № П881 от 18 августа 2009 г.

Библиографический список

1. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М.: Высшая школа, 2001.
2. *Кузнецова Е.Л.* Математическое моделирование тепломассопереноса в композиционных материалах при высокоинтенсивном нагреве: Автореф. канд. дисс. — М.: МАИ, 2006.
3. *Формалев В.Ф., Колесник С.А., Миканев С.В.* Моделирование теплового состояния композиционных материалов // ТВТ. 2003. Т. 41. № 6. С. 935—341.
4. *Кузнецова Е.Л., Формалев В.Ф., Селин И.А.* Аналитическое исследование задач типа Стефана в композиционных материалах с произвольным числом подвижных границ фазовых превращений // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. Т. 15. №2. С. 256—264.